Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

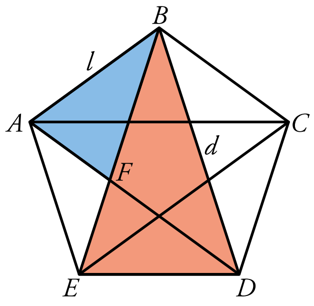
1 LOS NÚMEROS REALES

C.E.: CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) CE 1.5. (EA 1.5.1-EA 1.5.2.) CE 1.13 (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.)

Página 33

Resuelve

El pentágono estrellado



Observa el pentágono estrellado que se muestra a continuación:

1 **Demuestra que los triángulos *ABF* y *EBD* son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).**

2 **Si llamamos *l* al lado del pentágono y *d* a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación *d/l* y comprueba que es el número áureo:**

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36°$ en el triángulo *ABF*, y $\hat{B} = 36°$ en el triángulo *EBD*. Por otra parte los triángulos *DAB* y *EBD* son iguales, luego el ángulo $\hat{A}$ en el triángulo *ABF*, y $\hat{D}$ en el triángulo *EBD* son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos *ABF* y *EBD*; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

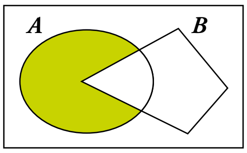
Como d no puede ser negativa, $d = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

1 LENGUAJE MATEMÁTICO. CONJUNTOS Y SÍMBOLOS

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.)

Página 35

1 **[La justificación de las afirmaciones requiere que el alumnado trabaje la expresión oral]. ¿Verdadero o falso?**



a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

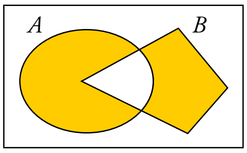
Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B.

b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B, ya que B' es el complementario de B.

c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$(A - B) \cup (B - A)$



Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$(A \cup B) - (A \cap B)$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B, pero no puede estar en los dos a la vez $(A \cap B)$.

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\dot{3})$ y $x \in (\dot{2})] \Leftrightarrow x \in (\dot{6})$

$(\dot{n})$ es el conjunto de los múltiplos de n.

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\dot{3}) \cap (\dot{2}) = (\dot{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B, luego están en A y en B'.

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ es lo mismo que decir $A \subset B$.

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B.

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$, pero si B contiene a A, es porque todos los elementos de A están en B, luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A.

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ y $0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo (0, 1) está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **pero**

$\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0{,}5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.**

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} \ / -2 < x \le 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que –2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) **El conjunto de los números enteros mayores que –5 y menores que 7 es** $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$**.**

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que –5 y menores que 7, están en el intervalo (–5, 7) y además son enteros.

r) **(**x **es un número real pero no es racional)** $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 ▶ NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 37

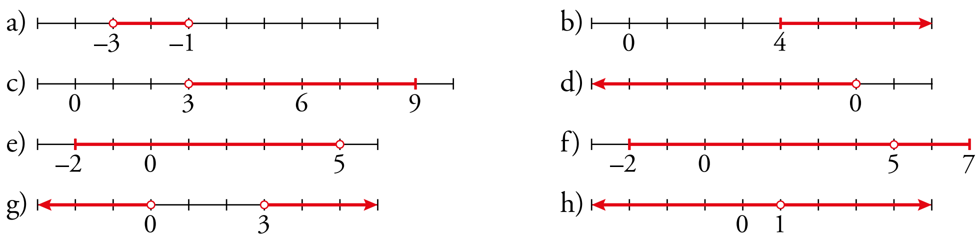
1 Representa sobre la recta real estos conjuntos:

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$

c) $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

e) $\{x / -2 \le x < 5\}$ **f)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$

g) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **h)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



2 Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones y representa cada conjunto.

a) $|x| = 5$ **b)** $|x - 4| \le 2$ **c)** $|x| \le 5$

d) $|x - 4| > 2$ **e)** $|x - 4| = 2$ **f)** $|x + 4| > 5$

a) 5 y –5

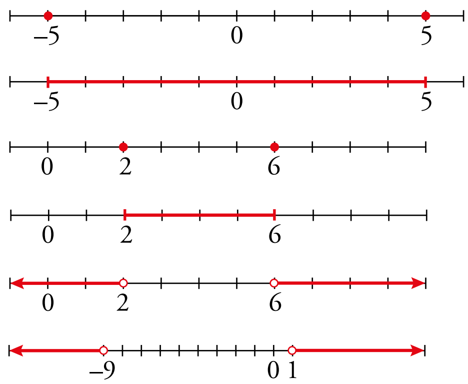
b) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$

c) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$

d) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

e) 6 y 2

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 RAÍCES Y RADICALES

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 38

1 Simplifica.

a) $\sqrt[9]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4}$ Se dividen índice y exponente entre 3.

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2 Simplifica y expresa el resultado en forma de raíz.

a) $\sqrt[9]{512x^3}$ **b)** $\sqrt[4]{121x^{10}}$

c) $\sqrt[8]{\dfrac{225}{x^4}}$ **d)** $\sqrt[6]{125x^3}$

a) $\sqrt[9]{512x^3} = \sqrt[9]{2^9 \cdot x^3} = \sqrt[9]{2^9} \cdot \sqrt[9]{x^3} = 2\sqrt[3]{x}$

b) $\sqrt[4]{121x^{10}} = \sqrt{11 \cdot x^5} = x^2\sqrt{11 \cdot x}$

c) $\sqrt[8]{\dfrac{225}{x^4}} = \sqrt[8]{\dfrac{5^2 \cdot 3^2}{x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{5 \cdot 3}}{\sqrt[2]{x}} = \dfrac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[2]{x}}$

d) $\sqrt[6]{125x^3} = \sqrt[6]{5^3 \cdot x^3} = \sqrt{5x}$

Página 39

3 Compara reduciendo a índice común en cada caso.

a) $\sqrt[12]{2^5}$ y $\sqrt[18]{2^7}$ **b)** $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[9]{132650}$

c) $\sqrt[4]{31}$ y $\sqrt[3]{13}$ **d)** $\sqrt[5]{245}$ y $\sqrt[7]{2185}$

a) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[12]{2^5} = \sqrt[36]{2^{15}} \\ \sqrt[18]{2^7} = \sqrt[36]{2^{14}}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[12]{2^5} > \sqrt[18]{2^7}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132651} \Rightarrow \sqrt[3]{51} > \sqrt[9]{132650}$

c) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791} \\ \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[4]{31} > \sqrt[3]{13}$

d) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[5]{245} = \sqrt[35]{52986177566328125} \\ \sqrt[7]{2185} = \sqrt[35]{49803195206115625}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[5]{245} > \sqrt[7]{2185}$

4 Extrae fuera del radical cuando sea posible.

a) $\sqrt[12]{32}$ **b)** $\sqrt{27}$ **c)** $\sqrt{20}$ **d)** $\sqrt[3]{54}$

e) $\sqrt[4]{a^7}$ **f)** $\sqrt{x^5}$ **g)** $\sqrt{a \cdot b^2 \cdot c^3}$ **h)** $\sqrt[3]{x^4 \cdot x^2}$

a) $\sqrt[12]{32} = \sqrt[12]{2^5}$. No se puede extraer.

b) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

c) $\sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 2^2} = 2\sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt[4]{a^7} = a\sqrt[4]{a^3}$

f) $\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$

g) $\sqrt{a \cdot b^2 \cdot c^3} = b \cdot c\sqrt{a \cdot c}$

h) $\sqrt[3]{x^4 \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^6} = x^2$

5 **Expresa bajo un único radical en cada caso.**

a) $2\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt[3]{5}$ **d)** $3^2 \cdot \sqrt[5]{2}$

e) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3}$ **f)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ **g)** $10\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5}$ **h)** $3\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4}$

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 2^2} = \sqrt{12}$

b) $3\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{18}$

c) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{40}$

d) $32\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \cdot 2^{25}} = \sqrt[5]{2^{26}} = \sqrt[5]{67\,108\,864}$

e) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 2^3} = \sqrt{24}$

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{200}$

g) $10\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt{3 \cdot 10^2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 100^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{675\,000\,000}$

h) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[10]{3^5 \cdot 2^5 \cdot 4^2} = \sqrt[10]{124\,416}$

6 **Reduce.**

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$ **e)** $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5}$ **f)** $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

e) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$

f) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{(3^4)^2}\,\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^{11}} = 3\sqrt[6]{3^5}$

Página 40

7 **Simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}} = \sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt[15]{x^{-2}}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3\,b^3}{a^2\,b^2}} = \sqrt[6]{a\,b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3\,b^5\,c}{a^2\,b^6\,c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$

8 **Simplifica.**

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8 = k$ b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

9 Suma y simplifica.

a) $5\sqrt{x}+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ **d)** $\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{12}+\sqrt{8}$

e) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ **f)** $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{2}-\sqrt{2^3}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3}-\sqrt{2\cdot 5^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{2^3}=3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=5\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2\cdot 5^2\cdot a}-\sqrt{2\cdot 3^2\cdot a}=5\sqrt{2a}-3\sqrt{2a}=2\sqrt{2a}$

f) Se factorizan los radicandos y se sacan factores de la raíz:

$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{2^4}+\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}=0$

Página 41

10 Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$ **f)** $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}$ **j)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}=\dfrac{1}{a\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}=\dfrac{3}{\sqrt{2\cdot 5^2}}=\dfrac{3}{5\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$ f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}}=\dfrac{4}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\dfrac{4}{3\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{5}}{5}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3\cdot 5}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{10}=\dfrac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2\cdot 3^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2\cdot 3}}{2\cdot 3}=\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{6}=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$ j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2\cdot 5^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2\cdot 5}}{2\cdot 5}=\dfrac{2\sqrt[3]{10}}{10}=\dfrac{\sqrt[3]{10}}{5}$

11 Racionaliza denominadores y simplifica estas expresiones cuanto puedas.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

c) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **f)** $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)} = \sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5} = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12} = \dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6} = \dfrac{30+12\sqrt{6}}{6} = 5+2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{(2-1)+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

4 LOGARITMOS

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 42

1 Halla.

a) $\boldsymbol{log_2 16}$ **b)** $\boldsymbol{log_2 0{,}25}$
c) $\boldsymbol{log_9 1}$ **d)** $\boldsymbol{log_{10} 0{,}1}$
e) $\boldsymbol{log_4 64}$ **f)** $\boldsymbol{log_7 49}$
g) $\boldsymbol{log_7 7}$ **h)** $\boldsymbol{log_\pi \left(\frac{1}{\pi}\right)}$
i) $\boldsymbol{log_5 0{,}04}$ **j)** $\boldsymbol{log_6 \left(\frac{1}{216}\right)}$

a) $log_2 16 = log_2 2^4 = 4$ b) $log_2 0{,}25 = log_2 2^{-2} = -2$
c) $log_9 1 = 0$ d) $log_{10} 0{,}1 = log_{10} 10^{-1} = -1$
e) $log_4 64 = log_4 4^3 = 3$ f) $log_7 49 = log_7 7^2 = 2$
g) $log_7 7 = 1$ h) $log_\pi \frac{1}{\pi} = log_\pi \pi^{-1} = -1$
i) $log_5 0{,}04 = log_5 5^{-2} = -2$ j) $log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de…

a) $\boldsymbol{log_2 60}$ **b)** $\boldsymbol{log_5 700}$
c) $\boldsymbol{log_{10} 43\,000}$ **d)** $\boldsymbol{log_{10} 0{,}084}$
e) $\boldsymbol{log_9 60}$ **f)** $\boldsymbol{log_7 14}$
g) $\boldsymbol{log_{20} 450\,000}$ **h)** $\boldsymbol{log_{5,4} 900}$
i) $\boldsymbol{log_2 3}$ **j)** $\boldsymbol{log_5 0{,}1}$

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$
$5 < log_2 60 < 6 \Rightarrow log_2 60 = 5,\ldots$
b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$; $625 < 700 < 3\,125$
$4 < log_5 700 < 5 \Rightarrow log_5 700 = 4,\ldots$
c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$
$4 < log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow log_{10} 43\,000 = 4,\ldots$
d) $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-1} = 0{,}1$; $0{,}01 < 0{,}084 < 0{,}1$
$-2 < log_{10} 0{,}084 < -1 \Rightarrow log_{10} 0{,}084 = -1,\ldots$
e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$
$1 < log_9 60 < 2 \Rightarrow log_9 60 = 1,\ldots$
f) $log_7 14$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $7^1 = 7$ y $7^2 = 49$.
Con la calculadora: $log_7 14 = 1{,}3562$
g) $log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$
Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < log_{20} 450\,000 < 5$.
La parte entera de $log_{20} 450\,000$ es 4.
h) $log_{5,4} 900 = 4{,}0337$
$5{,}4^4 = 850{,}31$; $5{,}4^5 = 4\,591{,}7$
Como $5{,}4^4 = 850{,}31 < 900 < 4\,591{,}7 = 5{,}4^5 \Rightarrow 4 < log_{5,4} 900 < 5$.
La parte entera de $log_{5,4} 900$ es 4.

i) $log_2\ 3$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $2^1 = 2$ y $2^2 = 4$.

Con la calculadora: $log_2\ 3 = 1{,}58496$

j) $log_5\ 0{,}1$ es un número decimal entre –1 y –2 ya que $5^{-1} = 0{,}2$ y $5^{-2} = 0{,}04$.

Con la calculadora: $log_5\ 0{,}1 = -1{,}4307$

Página 43

3 **Si $log_5 A = 1{,}8$ y $log_5 B = 2{,}4$, calcula.**

a) $log_5\ 125AB^2$ **b)** $log_5 \dfrac{A}{25}$ **c)** $log_5 \dfrac{25A}{B}$

d) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}$ **e)** $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$ **f)** $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}}$

a) $log_5\ 125AB^2 = log_5\ 125 + log_5\ A + log_5\ B^2 = 3 + 1{,}8 + 2 \cdot 2{,}4 = 9{,}6$

b) $log_5 \dfrac{A}{25} = log_5\ A - log_5\ 25 = 1{,}8 - 2 = -0{,}2$

c) $log_5 \dfrac{25A}{B} = log_5\ 25A - log_5\ B = log_5\ 25 + log_5\ A - 2{,}4 = 2 + 1{,}8 - 2{,}4 = -0{,}2$

d) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\ [2\ log_5\ A - log_5\ 25 - log_5\ B] = \dfrac{1}{3}\ [2 \cdot 1{,}8 - 2 - 2{,}4] = \dfrac{-0{,}8}{3} \approx -0{,}27$

e) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5\ 5 + \dfrac{3}{2}\ log_5\ A - 2\ log_5\ B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = 1 + 2{,}7 - 4{,}8 = -1{,}1$

f) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}} = \dfrac{1}{3}\ log_5 \dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2} = \dfrac{1}{3}\left(log_5 \sqrt[3]{A^4} - log_5 (5B)^2\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{3} log_5\ A - 2\ log_5\ 5B\right) =$

$= \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{4}{3} \cdot 1{,}8 - 2\,(log_5 5 + log_5 B)\right] = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{7{,}2}{3} - 2\,(1 + 2{,}4)\right] = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{7{,}2 - 3 \cdot 6{,}8}{3}\right) = \dfrac{-13{,}2}{9}$

Página 44

4 **¿Qué te hace decir eso? [La presentación de las evidencias para justificar la respuesta permite trabajar esta estrategia].**

Averigua la relación que hay entre x e y, sabiendo que se verifica:

$ln\ y = 2x - ln\ 5$

$ln\ y = 2x - ln\ 5 \ \rightarrow\ ln\ y = ln\ e^{2x} - ln\ 5$

$ln\ y = ln \dfrac{e^{2x}}{5} \ \rightarrow\ y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

5 **Determina si es cierta la siguiente igualdad e indica qué propiedad o propiedades has utilizado:**

$log\ e \cdot ln\ 10 = 1$

Como $ln\ 10 = log_e\ 10$ y usando un cambio de base tenemos que:

$log_e\ 10 = \dfrac{log\,10}{log\,e} = \dfrac{1}{log\,e}$

Así: $log\ e \cdot ln\ 10 = log\,e \cdot \dfrac{1}{log\,e} = \dfrac{log\,e}{log\,e} = 1$

Página 45

1 **Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con ayuda de la tecla ln de la calculadora:**

a) $log_2 1\,500$

b) $log_5 200$

c) $log_{100} 200$

d) $log_{100} 40$

Para los ejercicios con calculadora, las explicaciones del libro han tomado como referencia el modelo fx-991spx II Iberia de Casio.

a) $\dfrac{log\,1500}{log\,2} = 10,55;\ \ 2^{10,55} \approx 1\,500$

b) $\dfrac{log\,200}{log\,5} = 3,29;\ \ 5^{3,29} \approx 200$

c) $\dfrac{log\,200}{log\,100} = 1,15;\ \ 100^{1,15} \approx 200$

d) $\dfrac{log\,40}{log\,100} = 0,80;\ \ 100^{0,80} \approx 40$

2 **¿Verdadero o falso? Utiliza tu calculadora.**

a) $log_2 2 = log_2 (2 \cdot 1) = log_2 2 \cdot log_2 1 = 1 \cdot 0 = 0$

b) $\dfrac{1}{2}\, log\, 5 = log\, 25$

c) **La parte entera de** $log\,500$ **es 2.**

d) **La parte entera de** $log\,0,05$ **es –1.**

e) $log_2 (log\,10\,000) = 2$

f) $log\ 3 = \dfrac{1}{log_3 10}$

g) $ln\,0,25 = -2\,ln\,2$

h) **Si** $log_2 A^2 + log_2 A^3 + log_2 A^4 = 36$, **entonces** $A = 4$.

i) **Si** $log_A 3 + log_A 27 + log_A 9 = 12$, **entonces** $A = \sqrt{3}$.

a) No es cierto ya que $log_2 (2 \cdot 1) = log_2 2 + log_2 1$ y con la calculadora $log_2 2 = 1$.

b) $\dfrac{1}{2} log\, 5 = 0,3494 \neq 1,3979 = log\, 25$

No es cierto. Además, usando las propiedades de los logaritmos sabemos que:

$\dfrac{1}{2} log\, 5 = log\, 5^{\frac{1}{2}} = log\, \sqrt{5}$

$log\, 25 = log\, 5^2$ y vemos también que no son iguales.

c) Cierto ya que $10^2 = 100$ y $10^3 = 1\,000$. Con calculadora, $log\,500 = 2,6989$.

d) Cierto ya que:

$log\,0,05 = log\,(5 \cdot 10^{-2}) = log\,5 + log\,10^{-2} = log\,5 - 2$

Además $log\,5$ está entre 0 y 1 ya que $10^0 = 1$ y $10^1 = 10$. Y con calculadora: $log\,0,05 = -1,3010$.

e) Cierto ya que $log_2 (log\,10\,000) = log_2 4 = 2$.

f) Con calculadora; 0,4771 = 0,4771. Vemos que es cierto. Además haciendo un cambio de base vemos que $log_3 10 = \dfrac{log\,10}{log\,3} = \dfrac{1}{log\,3}$.

g) Con la calculadora: –1,3863 = –1,3863

h) Falso. Usando las propiedades de los logaritmos sabemos que:

$log_2 A^2 + log_2 A^3 + log_2 A^4 = log_2 (A^2 \cdot A^3 \cdot A^4) = log_2 A^9 = 36$ por lo que $2^{36} = (2^4)^9 \neq 4^9$.

i) Falso. Usando las propiedades de los logaritmos sabemos que

$log_A 3 + log_A 27 + log_A 9 = log_A (3 \cdot 27 \cdot 9) = log_A 3^6 = 12$ por lo que $A^{12} = (A^2)^6 = 3^6$ si $A = 3$.

3 **Si $\log A = 1{,}45$; $\log B = 2{,}3$ y $\log C = 0{,}52$; calcula cada una de las siguientes expresiones:**

a) $\log \dfrac{AB^2}{\sqrt[3]{C}}$

b) $\log \dfrac{100A}{B^2\sqrt[3]{10C^4}}$

c) $\log\left(\dfrac{A}{10}\sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right)$

d) $\log \dfrac{A\cdot\sqrt[3]{0{,}1C^4}}{(1\,000B)^2}$

e) $\log\left(10\cdot\sqrt[3]{\dfrac{0{,}1A^2}{10B}}\right)$

f) $\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{\sqrt[3]{C^4}}{(100A)^2}\right)^2$

a) $\log\dfrac{AB^2}{\sqrt[3]{C}} = \log AB^2 - \log\sqrt[3]{C} = \log A + \log B^2 - \dfrac{1}{3}\log C = 1{,}45 + 2\cdot 2{,}3 + \dfrac{1}{3}\cdot 0{,}52 = 5{,}87\widehat{6}$

b) $\log\dfrac{100A}{B^2\sqrt[3]{10C^4}}\log 100A - \left(\log B^2 + \dfrac{1}{3}\log 10C^4\right) = \log 100 + \log A - 2\log B - \dfrac{1}{3}(\log 10 + \log C^4) =$

$= 2 + 1{,}45 - 2\cdot 2{,}3 - \dfrac{1}{3}(1 + 4\cdot\log C) = -1{,}15 - \dfrac{1}{3}(1 + 2{,}8) = -2{,}41\widehat{6}$

c) $\log\left(\dfrac{A}{10}\sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right) = \log\dfrac{A}{10} + \log\left(\sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right) = \log A - \log 10 + \dfrac{1}{5}(2\log B - \log 0{,}001C) =$

$= 1{,}45 - 1 + \dfrac{1}{5}\left[2\cdot 2{,}3 - (\log 0{,}001 + \log C)\right] = 0{,}45 + \dfrac{1}{5}\left[4{,}6 - (\log 10^{-3} + 0{,}52)\right] =$

$= 0{,}45 + \dfrac{1}{5}(4{,}6 + 3 - 0{,}52) = 1{,}866$

d) $\log\dfrac{A\sqrt[3]{0{,}1C^4}}{(1\,000B)^2} = \log A + \log\sqrt[3]{0{,}1C^4} - \log\left[(1\,000B)^2\right] = 1{,}45 + \dfrac{1}{3}\log 0{,}1C^4 - 2\left(\log 1\,000 + \log B\right) =$

$= 1{,}45 + \dfrac{1}{3}(\log 0{,}1 + 4\log C) - 2(3 + 2{,}3) = 1{,}45 + \dfrac{1}{3}(-1 + 4\cdot 0{,}52) - 2(3 + 2{,}3) = -9{,}39$

e) $\log 10\sqrt[3]{\dfrac{0{,}1A^2}{10B}} = \log 10 + \dfrac{1}{3}(\log 0{,}1A^2 - \log 10B) = 1 + \dfrac{1}{3}(\log 0{,}1 + 2\log A - \log 10 - \log B) =$

$= 1 + \dfrac{1}{3}(-1 + 2\cdot 1{,}45 - 1 - 2{,}3) = 0{,}5\widehat{3}$

f) $\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{\sqrt[3]{C^4}}{100A^2}\right)^2 = \log\sqrt[3]{C^4} - \log[(100A)^2] = \dfrac{4}{3}\log C - 2\left(\log 100 + \log A\right) = \dfrac{4}{3}\cdot 0{,}52 - 2(2 + 1{,}45) =$

$= -6{,}20\widehat{6}$

4 **Halla en cada caso el valor de A:**

a) $\ln A + \ln A^2 + \ln A^3 = 6$

b) $\log A^2 + \log A^3 + \log A^7 = 6$

c) $\ln A^7 + \ln A^9 + \ln A^{14} = 330$

d) $\log_A 27^3 + \log_A 27^2 + \log_A 27^4 + \log_A 27^7 = 48$

e) $\log_A 6^2 + \log_A 6^3 + \log_A 6^5 = 30$

f) $\log_A 2^2 + \log_A 0{,}5^3 + \log_A 4^4 + \log_A 0{,}25 = 10$

a) $\ln A + \ln A^2 + \ln A^3 = 6 \to \ln A^6 = 6 \to e^6 = A^6 \to e = A$

b) $\log A^2 + \log A^3 + \log A^7 = 6 \to \log A^{12} = 6 \to 10^6 = A^{12} \to A = \sqrt{10}$

c) $\ln A^7 + \ln A^9 + \ln A^{14} = 330 \to \ln A^{30} = 330 \to e^{330} = A^{30} \to e^{33} = A^3 \to\ e^{11^3} = A^3 \to A = e^{11}$

d) $\log_A 27^3 + \log_A 27^2 + \log_A 27^4 + \log_A 27^7 = 48 \to \log_A 27^{16} = 48 \to A^{48} = 27^{16} \to A^{3^{16}} = 27^{16} \to A = \sqrt[3]{27}$

e) $\log_A 6^2 + \log_A 6^3 + \log_A 6^5 = 30 \to \log_A 6^{10} = 30 \to A^{30} = 6^{10} \to A^3 = 6 \to A = \sqrt[3]{6}$

f) $\log_A 2^2 + \log_A 0{,}5^3 + \log_A 4^4 + \log_A 0{,}25 = 10 \to \log_A 4 + 3\log_A 0{,}5 + 4\log_A 4 + 2\log_A 0{,}5 = 10 \to$

$\to 5\log_A 4 + 5\log_A 0{,}5 = 10 \to 5\log_A(4\cdot 0{,}5) = 10 \to \log_A 2 = 2 \to A = \sqrt{2}$

5 EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS REALES. NÚMEROS APROXIMADOS

C.E.: CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.) CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.) CE 1.9. (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.)
CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 47

1 **[El enunciado requiere un análisis que permite que el alumnado trabaje la expresión escrita].**

¿Verdadero o falso?

I. El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.

II. El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En I el error absoluto es mucho mayor que en II, pero el error relativo es menor.

I. E.R. $< \frac{10000}{390000} = 2{,}5641 \cdot 10^{-2} = 0{,}025641 \to$ E.R. $< 2{,}6\,\%$

II. E.R. $< \frac{1}{12} = 8{,}3333 \cdot 10^{-2} = 0{,}08333 \to$ E.R. $< 8{,}3\,\%$

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en I que en II. Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 **Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:**

a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m^2.

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana unos 25 000 € al año.

a) E.A. $< 0{,}05$ m^2; E.R. $< \frac{0{,}05}{96{,}4} = 5{,}1867 \cdot 10^{-4} = 0{,}00051867 \to$ E.R. $< 0{,}05\,\%$

b) E.A. < 0,5 millones de horas = 500 000 horas

E.R. $< \frac{0{,}5}{37} < 0{,}014 \to 1{,}4\,\%$

c) Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 25 000, redondeando a los «miles de euros»), entonces:

E.A. < 0,5 miles de € = 500 €; E.R. $< \frac{0{,}5}{25} < 0{,}02 \to 2\,\%$

Si suponemos que es 25 000 € exactamente:

E.A. < 0,5 €; E.R. $< \frac{0{,}5}{25\,000} < 0{,}00002 \to 0{,}002\,\%$

Página 48

3 **Calcula en notación científica sin usar la calculadora.**

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12} = \left((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})\right) \cdot 5 \cdot 10^{11} =$
$= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-}9 - 6 \cdot 10^{-7} = 48{,}6 \cdot 10^{-7} + 0{,}93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} =$
$= 43{,}53 \cdot 10^{-7} = 4{,}353 \cdot 10^{-6}$

4 **Opera con la calculadora:**

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6})$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9}$

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6}) \approx 5{,}85 \cdot 10^{12}$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9} = 2{,}37 \cdot 10^{-10}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 49

1. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú

- **Indica, en cada caso, qué números cumplen estas condiciones:**

a) $|x+2| \geq 5$ **b)** $|4-x| < 3$

a) $|x+2| \geq 5 \rightarrow \begin{cases} x+2 \geq 5 \\ x+2 \leq -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -7 \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, -7] \cup [3, +\infty)$

b) $|4-x| < 3 \rightarrow -3 < 4-x < 3 \rightarrow -7 < -x < -1$

Cambiamos de signo:

$1 < x < 7 \rightarrow x \in (1, 7)$

2. Operaciones con intervalos

Hazlo tú

- **Expresa como un único intervalo:**

a) $(-5, 4) \cup [0, 6]$ **b)** $(-5, 4) \cap [0, 6]$

a) $(-5, 4) \cup [0, 6] = (-5, 6]$ b) $(-5, 4) \cap [0, 6] = [0, 4)$

Página 50

4. Forma exponencial de los radicales

Hazlo tú

- **Expresa como potencia:**

a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$ **b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{81}$

a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2-\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{81} = 9^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (3^4)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} = 3^2$

5. Simplificación de radicales

Hazlo tú

- **Simplifica.**

a) $\sqrt[7]{x^{21}}$ **b)** $\sqrt[3]{27} : \sqrt[6]{81}$ **c)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}$

a) $\sqrt[7]{x^{21}} = \sqrt[7]{x^{7 \cdot 3}} = x^3$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[6]{81}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[6]{3^4}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^{3 \cdot 2}}}{\sqrt[6]{3^4}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^6}}{\sqrt[6]{3^4}} = \sqrt[6]{3^{6-4}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[12]{x^2} = \sqrt[6]{x}$

6. Racionalización de denominadores

Hazlo tú

- **Racionaliza:**

a) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5^3}}$ **b)** $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$

a) Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[4]{5}$:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{2\sqrt[4]{5}}{5}$$

b) Multiplicamos numerador y denominador por $2\sqrt{5}-3$:

$$\frac{11}{2\sqrt{5}+3}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)\,(2\sqrt{5}-3)}=\frac{11\,(2\sqrt{5}-3)}{4\cdot 5-9}=2\sqrt{5}-3$$

Página 51

7. Operaciones con radicales

Hazlo tú

- **Opera y simplifica:**

$$\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{50}-\frac{5}{6}\sqrt{2}$$

Factorizamos y sacamos factores de las raíces:

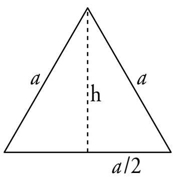
$$\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{50}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=\sqrt{2^5}+\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 5^2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=2^2\sqrt{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}=\frac{17}{3}\sqrt{2}$$

8. Problemas con radicales

Hazlo tú

- **El volumen de un tetraedro regular es $18\sqrt{2}$ cm³. Halla la longitud de su arista.**

• Área de la base: la expresamos en función de la arista.

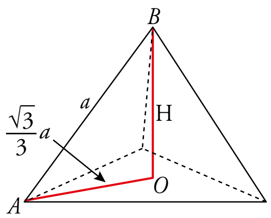


Hallamos la altura del triángulo equilátero:

$$\text{h}^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 \;\rightarrow\; \text{h}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$A_{\text{BASE}}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

• Altura del tetraedro, H:



El triángulo AOB es rectángulo. El cateto AO mide $\frac{2}{3}$ de la altura de una cara.

$$\overline{AO}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\text{H}^2=a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 \;\rightarrow\; \text{H}=\sqrt{\frac{2a^2}{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

• Volumen del tetraedro: $V_{\text{TETRAEDRO}}=\dfrac{1}{3}A_{\text{BASE}}\cdot\text{H}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot a\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

Por tanto: $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3=18\sqrt{2} \;\rightarrow\; a^3=216 \;\rightarrow\; a=\sqrt[3]{216}=6$

9. Definición de logaritmo

Hazlo tú

- **Calcula x:**

a) $\boldsymbol{log_x 5 = 1/2}$ **b)** $\boldsymbol{log\, x^2 = -4}$

a) $log_x 5 = \frac{1}{2} \to x^{1/2} = 5 \to x = 5^2 \to x = 25$

b) $log\, x^2 = -4 \to 10^{-4} = x^2 \to \frac{1}{10^4} = x^2 \to x = \sqrt{\frac{1}{10^4}} \to x = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

Página 52

10. Logaritmos sin calculadora

Hazlo tú

- **Halla el valor de $\boldsymbol{log_3 0,\widehat{3}}$ y de $\boldsymbol{log_2 \sqrt{\frac{1}{8}}}$ sin utilizar la calculadora.**

$0,\widehat{3} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \to log_3 3^{-1} = -1$

$log_2 \sqrt{\frac{1}{8}} = log_2 \sqrt{\frac{1}{2^3}} = log_2 2^{-3/2} = -\frac{3}{2}$

11. Propiedades de los logaritmos

Hazlo tú

- **Calcula x en estos casos:**

a) $\boldsymbol{ln\, 3^{x-1} = 5}$ **b)** $\boldsymbol{2\, log\, x - log\, 4 = 2\, log\, 3}$

a) $ln\, 3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $log_a m^n = n log_a m$.

$(x-1)\, ln\, 3 = 5 \to x - 1 = \frac{5}{ln\, 3} \to x = \frac{5}{ln\, 3} + 1 \to x = 5,5512$

b) $2log\, x - log\, 4 = 2log\, 3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$log\, x^2 - log\, 4 = log\, 3^2$

$log\, \frac{x^2}{4} = log\, 9;\ \frac{x^2}{4} = 9$

Soluciones: $x = -6,\ x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

12. Errores y notación científica

Hazlo tú

- **Expresa el resultado de estas operaciones en notación científica y acota el error absoluto y el error relativo cometidos:**

a) $(15\,000\,000 : 0{,}0003)^2 \cdot (0{,}008)^3$

b) $1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - (1{,}2 \cdot 10^{-4})^2$

a) $(15\,000\,000 : 0{,}0003)^2 \cdot (0{,}008)^3 = \left(\dfrac{15 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-4}}\right)^2 \cdot (8 \cdot 10^{-3})^3 =$

$= \dfrac{(15)^2 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{-8}} \cdot 8^3 \cdot 10^{-9} = \dfrac{(15)^2 \cdot 8^3}{9} 10^{12+8-9} = 12\,800 \cdot 10^{11} = 1{,}28 \cdot 10^{15}$

E.A. $< 0{,}005 \cdot 10^{15} = 5 \cdot 10^{12}$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{12}}{1{,}28 \cdot 10^{15}} = 0{,}0039 = 0{,}39\ \%$

b) $1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - (1{,}2 \cdot 10^{-4})^2 = 1{,}5 \cdot 10^{-8} + 2{,}4 \cdot 10^{-7} - 1{,}44 \cdot 10^{-8} =$

$= 1{,}5 \cdot 10^{-8} + 24 \cdot 10^{-8} - 1{,}44 \cdot 10^{-8} = (1{,}5 + 24 - 1{,}44) \cdot 10^{-8} = 24{,}06 \cdot 10^{-8} = 2{,}406 \cdot 10^{-7}$

E.A. $< 0{,}0005 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-11}$

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{-11}}{2{,}406 \cdot 10^{-7}} = 2{,}078 \cdot 10^{-4} = 0{,}0002078 = 0{,}02\,\%$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.9. (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 53

1. Simplificación de radicales

- **Simplificar las siguientes expresiones:**

a) $\sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{108}}}}$ **b)** $\sqrt{4a^2cd+8abcd+4b^2cd}$

a) $\sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2^2 3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 3^3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\dfrac{1}{6}}} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{3^2}{6}}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2}{6}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2}{3\cdot 2}} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}$

b) $\sqrt{4a^2cd+8abcd+4b^2cd} = \sqrt{4cd(a^2+2ab+b^2)} = 2(a+b)\sqrt{cd}$

2. Aplicaciones de los logaritmos

- **Calcular, en cada caso, el valor de x para que se cumplan las siguientes igualdades:**

a) $3x^{-1} = 173$ **b)** $3 - ln\dfrac{1}{x} = 5$

c) $ln\,x = \dfrac{1}{4}(2\,ln\,5 - 3\,ln\,10 + 5\,ln\,2)$ **d)** $log\,5^x = 12$

a) $log(3^{x-1}) = log(173) \rightarrow (x-1)log(3) = log(173) \rightarrow x - 1 = \dfrac{log(173)}{log(3)} \rightarrow x = 1 + \dfrac{log(173)}{log(3)} = 5{,}69$

b) $3 - 5 = ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \rightarrow -2 = ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \rightarrow \dfrac{1}{x} = e^{-2} \rightarrow x = e^2$

c) Aplicamos primero la propiedad: $m\,ln\,A = ln\,A^m$

$ln\,x = \dfrac{1}{4}(ln\,5^2 - ln\,10^3 + ln\,2^5) = \dfrac{1}{4}(ln\,25 - ln\,1\,000 + ln\,32)$ (*)

Aplicamos ahora la propiedad: $ln\,A - ln\,B = ln\left(\dfrac{A}{B}\right)$

(*) $= \dfrac{1}{4}\left(ln\dfrac{25}{1\,000} + ln\,32\right) = \dfrac{1}{4}\left(ln\left(\dfrac{1}{40}\right) + ln\,32\right)$ (**)

Y aplicamos ahora la propiedad: $ln\,A + ln\,B = ln(A \cdot B)$

(**) $= \dfrac{1}{4}ln\left(\dfrac{32}{40}\right) = \dfrac{1}{4}ln\left(\dfrac{4}{5}\right)$ (***)

Y volvemos a aplicar la primera propiedad:

(***) $= ln\left(\dfrac{4}{5}\right)^{1/4} \rightarrow ln\,x = ln\left(\dfrac{4}{5}\right)^{1/4} \rightarrow x = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\dfrac{4}{5}}$

d) $x\,log\,5 = 12 \rightarrow x = \dfrac{12}{log\,5} = 17{,}17$

3. Repartos proporcionales

- **En una carrera de montaña hay que repartir 2 000 € entre los tres ganadores, de forma inversamente proporcional a los tiempos empleados que son 40, 50 y 60 minutos.**

El corredor que empleó menos tiempo es el que debe tener un premio mayor. Por ello tenemos que repartir los 2 000 € en partes inversamente proporcionales a 40, 50 y 60. Esto equivale a repartir de forma directamente proporcional a $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{50}$ y $\frac{1}{60}$.

Calculamos lo que corresponde a cada uno utilizando la proporcionalidad.

Sumamos $\frac{1}{40} + \frac{1}{50} + \frac{1}{60} = \frac{37}{600}$

Primer premio: $\frac{x}{2\,000} = \frac{1/40}{37/600} \rightarrow x = \frac{2\,000 \cdot 1/40}{37/600} = 810{,}81$ €

Segundo premio: $y = \frac{2\,000 \cdot 1/50}{37/600} = 648{,}65$ €

Tercer premio: $z = \frac{2\,000 \cdot 1/60}{37/600} = 540{,}54$ €

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 54

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertenecen:**

$$5;\ -7;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ 4,\widehat{7};\ \frac{\pi}{2}$$

$5, \sqrt{\frac{18}{2}} \in \mathbb{N}$ $\quad 5, \sqrt{\frac{18}{2}}, -7 \in \mathbb{Z}$ $\quad 5;\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -7;\ \frac{5}{4};\ 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q}$ $\quad 5;\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -7;\ \frac{5}{4};\ 4,\widehat{7};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

2 **¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible:**

a) $3,181818\ldots$ **b)** $\sqrt{1,\widehat{7}}$ **c)** $\sqrt{8}$ **d)** $1,020020002\ldots$

e) $-4,0333\ldots$ **f)** $\sqrt[3]{81}$ **g)** $1,3999\ldots$ **h)** 2π

a) $3,181818\ldots = \frac{318-3}{99} = \frac{315}{99} = \frac{35}{11}$

b) $\sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

c) $\sqrt{8}$ Irracional.

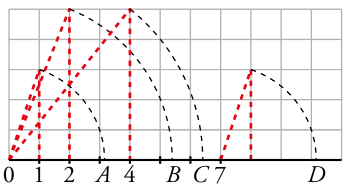
d) $1,020020002\ldots$ Irracional.

e) $-4,0333\ldots = -\frac{403-40}{90} = -\frac{121}{30}$

f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

g) $1,3999\ldots = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5}$

h) 2π Irracional.

3 

¿Qué números irracionales representan los puntos A, B, C y D? Justifica la respuesta.

$A = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\quad B = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ $\quad C = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ $\quad D = 7 + \sqrt{1^2+3^2} = 7 + \sqrt{10}$

4 Indica cuál, de cada par de números, es mayor:

a) $\frac{140}{99}$ **y** $\sqrt{2}$ **b)** $0{,}52\widehat{6}$ **y** $0{,}\widehat{526}$

c) $4{,}\widehat{89}$ **y** $2\sqrt{6}$ **d)** $-2{,}098$ **y** $-2{,}1$

Escribe, en cada caso, un número comprendido entre los dos dados.

a) $\sqrt{2} = 1{,}4142$

$\frac{140}{99} = 1{,}4141$

Un número comprendido entre los dos anteriores es 1,41415.

b) $0{,}52\widehat{6}$

Un número comprendido entre los dos anteriores es 0,5266.

c) $4{,}\widehat{89}$

$2\sqrt{6} = 4{,}898979$

Un número comprendido entre los dos anteriores es 4,89898.

d) 2,098

Un número comprendido entre los dos anteriores es –2,099.

Intervalos, semirrectas y valor absoluto

5 Representa y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.

a) x **es menor que –5.**

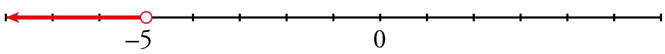
b) 3 es menor o igual que x**.**

c) x **está comprendido entre –5 y 1.**

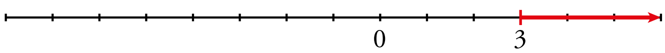
d) x **está entre –2 y 0, ambos incluidos.**

e) x **es mayor o igual que –3 y menor que 2.**

a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$



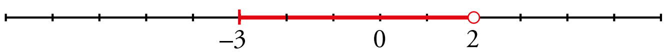
b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$



c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$

d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$

e) $[-3, 2)$; $-3 \le x < 2$



6 Escribe la desigualdad que verifica todo número x **que pertenece a estos intervalos o semirrectas:**

a) $[-2, 7]$ **b)** $[13, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$ **e)** $[3/2, 6)$ **f)** $(0, +\infty)$

a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

d) $-3 < x \le 0$ e) $\frac{3}{2} \le x < 6$ f) $0 < x < +\infty$

7 **Escribe y representa el tramo de recta que corresponde a cada desigualdad.**

a) $2 \le x \le 7$

b) $-5 \le x$

c) $x < -1$

d) $5 > x > -3$

8 **Expresa como un único intervalo.**

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$

b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7)$

d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$

e) $[-3, 2] \cap [0, 5]$

f) $[2, +\infty) \cap (0, 10)$

a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$

b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$

d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$

e) $[-3, 2] \cap [0, 5] = [0, 2]$

f) $[2, +\infty) \cap (0, 10) = [2, 10)$

9 **Expresa en forma de intervalo los números que cumplen cada una de estas expresiones:**

a) $|x| < 7$

b) $|x| \ge 5$

c) $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \le 6$

e) $|x + 2| > 9$

f) $|x - 5| \ge 1$

a) $(-7, 7)$

b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$

c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$

e) $(-11, 7)$

f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

10 **Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.**

a) $\sqrt{x-4}$

b) $\sqrt{2x+1}$

c) $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$

e) $\sqrt{-x-1}$

f) $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \ge 0 \;\Rightarrow\; x \ge 4;\;\; [4, +\infty)$

b) $2x + 1 \ge 0 \;\Rightarrow\; 2x \ge -1 \;\Rightarrow\; x \ge -\frac{1}{2};\;\; \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$

c) $-x \ge 0 \;\Rightarrow\; x \le 0;\;\; (-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \ge 0 \;\Rightarrow\; 3 \ge 2x \;\Rightarrow\; x \le\,;\;\; \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \ge 0 \;\Rightarrow\; -1 \ge x;\;\; (-\infty, -1]$

f) $1 + \frac{x}{2} \ge 0 \;\Rightarrow\; 2 + x \ge 0 \;\Rightarrow\; x \ge -2;\;\; [-2, +\infty)$

11 **Se denomina entorno de centro a y radio r al intervalo abierto $(a - r, a + r)$.**

a) **Describe como entorno el intervalo $I = (-3, 5)$. Ten en cuenta que el centro es el punto medio entre –3 y 5 y el radio la distancia del centro a uno de sus extremos.**

b) **Expresa como intervalo el entorno de centro –5,2 y radio 0,8.**

a) Es el entorno de centro $a = 1$ y radio $r = 4$.

b) $I = (-6;\, 4{,}4)$

Radicales y potencias

12 **Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:**

a) $\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt{a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5}\cdot a^{1/2}=a^{9/10}=\sqrt[10]{a^9}$

b) $\dfrac{x^{2/3}}{x^{1/2}}=x^{1/6}=\sqrt[6]{x}$

c) $a^{-3/4}=\sqrt[4]{a^{-3}}$

13 **Resuelve, sin utilizar calculadora:**

a) $\sqrt[5]{32}$ **b)** $\sqrt[3]{343}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0,25}$ **e)** $\sqrt[3]{8^4}$ **f)** $\sqrt[3]{0,001}$

a) $\sqrt[5]{2^5}=2$ b) $\sqrt[3]{7^3}=7$ c) $\sqrt[4]{5^4}=5$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}=0,5$ e) $\sqrt[3]{2^{12}}=2^4=16$ f) $\sqrt[3]{0,1^3}=0,1$

14 **Expresa como una potencia de base 2:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $(-32)^{1/5}$ **c)** $(\sqrt[8]{2})^4$

a) $2^{-1/2}$ b) $(-2^5)^{1/5}=-2$ c) $2^{4/8}=2^{1/2}$

15 **Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:**

a) $4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$ **b)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1}\cdot\dfrac{1}{8}$

c) $\dfrac{(-5)^3\cdot(-8)^3\cdot(-9)^2}{15^2\cdot 20^4}$ **d)** $\dfrac{(-30)^{-1}\cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(-3)^3}{2^3}=\dfrac{-3^2}{2}=\dfrac{-9}{2}$

b) $\dfrac{1}{2^4}\cdot\dfrac{3^2}{2}\cdot\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{3^2}{2^8}=\dfrac{9}{256}$

c) $\dfrac{(-5)^3\cdot(-2^3)^3\cdot(-3^2)^2}{3^2\cdot 5^2\cdot(2^2\cdot 5)^4}=\dfrac{5^3\cdot 2^9\cdot 3^4}{3^2\cdot 5^2\cdot 2^8\cdot 5^4}=\dfrac{2\cdot 3^2}{5^3}=\dfrac{18}{125}$

d) $\dfrac{3^2\cdot 5^2}{-2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^3\cdot 5^3}=-\dfrac{3}{5^2\cdot 2^4}=\dfrac{-3}{400}$

16 **Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:**

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$ **b)** $16^{1/4}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\dfrac{a^{3/4}\cdot a^{-1}}{a\cdot a^{1/2}}=a^{-7/4}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^7}}$

b) $(2^4)^{1/4}\cdot(2^2)^{-1/3}\cdot(2^2)^{-1/6}=2\cdot 2^{-2/3}\cdot 2^{-1/3}=2^0=1$

17 **Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:**

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$ **b)** $\dfrac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$

c) $\dfrac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$ **d)** $\dfrac{a^{-3} \cdot b^{-4} \cdot c^7}{a^{-5} \cdot b^2 \cdot c^{-1}}$

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \dfrac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \dfrac{80}{27}$

c) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \dfrac{1}{2^8 \cdot 3} = \dfrac{1}{768}$ d) $\dfrac{c^7\, a^5\, c}{a^3\, b^4\, b^2} = \dfrac{a^2\, c^8}{b^6}$

Página 55

18 **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.**

a) $\sqrt[4]{5},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{6},\ \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[5]{10}$ **d)** $\sqrt[4]{20},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{5^3},\ \sqrt[12]{3^4},\ \sqrt[12]{2^6};\ \sqrt[12]{125},\ \sqrt[12]{81},\ \sqrt[12]{64} \to \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{216},\ \sqrt[6]{16} \to \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776},\ \sqrt[20]{10000} \to \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{20^3},\ \sqrt[12]{9^4},\ \sqrt[12]{100^2}$; tenemos $\sqrt[12]{10000};\ \sqrt[12]{6561};\ \sqrt[12]{8000} \to \sqrt[3]{9} < \sqrt[4]{20} < \sqrt[6]{100}$

19 **Introduce los factores dentro de cada raíz.**

a) $2\sqrt[3]{3}$ **b)** $4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ **c)** $\dfrac{2}{x}\sqrt{\dfrac{3x}{8}}$

d) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{25}{9}}$ **e)** $2\sqrt[4]{4}$ **f)** $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\dfrac{3}{2x}}$ d) $\sqrt[3]{\dfrac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{25}}$

20 **Saca de la raíz el factor que puedas.**

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $4\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{125a^2}{16b}}$ **f)** $\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\dfrac{16}{a^3}}$ **h)** $\sqrt{4a^2+4}$ **i)** $\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$ b) $4\sqrt{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$ e) $\sqrt{\dfrac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \dfrac{5a}{4}\sqrt{\dfrac{5}{b}}$ f) $\sqrt{\dfrac{13}{36}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\dfrac{4}{a}\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ h) $\sqrt{4(a^2+1)} = 2\sqrt{a^2+1}$ i) $\sqrt{\dfrac{25a}{16 \cdot 9}} = \dfrac{5\sqrt{a}}{12}$

21 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[6]{49}$ **b)** $\sqrt[15]{a^{12}}$ **c)** $\sqrt[6]{25}$

d) $\sqrt[4]{48}$ **e)** $\sqrt[7]{a^{10}}$ **f)** $\sqrt[4]{128}$

a) $\sqrt[6]{49} = 7^{2/6} = 7^{1/3} = \sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[15]{a^{12}} = a^{12/15} = a^{4/5} = \sqrt[5]{a^4}$

c) $\sqrt[6]{25} = 5^{2/6} = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{48} = (3 \cdot 2^4)^{1/4} = 2\sqrt[4]{3}$

e) $\sqrt[7]{a^{10}} = \sqrt[7]{a^{7+3}} = \sqrt[7]{a^7 a^3} = a\sqrt[7]{a^3}$

f) $\sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3}$

22 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{24}$ **b)** $\sqrt[6]{27}$ **c)** $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$ **e)** $\sqrt[4]{\dfrac{81}{64}}$ **f)** $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

g) $\sqrt[6]{0,027}$ **h)** $\sqrt[8]{0,0016}$ **i)** $\sqrt[4]{1+\dfrac{9}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{2^6}} = \dfrac{3}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

g) $\sqrt[6]{0,027} = \sqrt[6]{10^{-3}3^3} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3}{10^3}} = \sqrt{\dfrac{3}{10}}$

h) $\sqrt[8]{0,0016} = \sqrt[8]{10^{-4}2^4} = \sqrt[8]{\dfrac{2^4}{10^4}} = \sqrt{\dfrac{2}{10}}$

i) $\sqrt[4]{1+\dfrac{9}{16}} = \sqrt[4]{\dfrac{25}{16}} = \sqrt[4]{\dfrac{5^2}{2^4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

23 **Reduce a índice común y simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$ **c)** $\sqrt[7]{81} \cdot \sqrt{3}$

a) $\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{4^2}} = \dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{16}} = 1$

b) $\sqrt[3]{4}\sqrt[5]{8} = \sqrt[15]{4^5}\sqrt[15]{8^3} = \sqrt[15]{2^{10} \cdot 2^9} = \sqrt[15]{2^{19}} = 2\sqrt[15]{2^4} = 2\sqrt[15]{2^4} = 2\sqrt[15]{16}$

c) $\sqrt[7]{81}\sqrt[2]{3} = \sqrt[14]{3^8 \cdot 3^7} = \sqrt[14]{3^{15}} = 3\sqrt[14]{3}$

24 **Realiza la operación y simplifica, si es posible.**

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$ **b)** $2\sqrt{\dfrac{4}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{27}{8}}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$ **e)** $(\sqrt[6]{32})^2$ **f)** $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 3} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\dfrac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\dfrac{9}{2}} = 6\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{8}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\left(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}\right)^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $\left(\sqrt[6]{2^5}\right)^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

25 **Efectúa y simplifica, si es posible.**

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}\cdot\sqrt{a}$

c) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ **d)** $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}:\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

a) $\sqrt[6]{2^2\cdot 3^3}=\sqrt[6]{108}$ b) $\sqrt[3]{a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt{a}=\sqrt[6]{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2^9}}\right)^3=\left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^4}}\right)^3=\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^{12}}}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 3}}:\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}=\sqrt[6]{2^2\cdot 3}:\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{3}$

26 **Expresa con una única raíz.**

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ **c)** $\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right):\sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4}=\sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4\cdot 2^3}=\sqrt[12]{2^7}=\sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\dfrac{a^{15}\cdot a^{16}}{a^{10}}}=\sqrt[20]{a^{21}}=a\sqrt[20]{a}$

27 **Racionaliza los denominadores y simplifica.**

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ **f)** $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3\cdot 2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\dfrac{2\sqrt[3]{2^2}}{2}=\sqrt[3]{4}$

c) $\dfrac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ d) $\dfrac{3(3-\sqrt{3})}{9-3}=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{3(3-\sqrt{3})}{2\cdot 3}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{72}-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{72}-\sqrt{8})\sqrt{6}}{6}=\frac{(\sqrt{2^3 3^2}-\sqrt{2^3})\sqrt{6}}{6}=\frac{4\sqrt{12}}{6}=\frac{8\sqrt{3}}{6}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

f) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ Multiplicamos numerador y denominador por $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$$

28 **Calcula y simplifica.**

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\dfrac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\dfrac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54}+3\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5}=35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\dfrac{21}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\dfrac{21}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}=-15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2\cdot 3^3}+3\sqrt{2^3\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 3\cdot 5^2}+\sqrt{2\cdot 3\cdot 7^2}=-3\sqrt{2\cdot 3}+2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}-5\sqrt{2\cdot 3}+7\sqrt{2\cdot 3}=5\sqrt{6}$

29 **Simplifica las siguientes expresiones:**

a) $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{72}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{2\cdot 3^2}{5^3}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2^3}{3^2\cdot 5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}-4\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=$

$=\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=\left(1-\frac{12}{5}+\frac{7}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{14}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{3^4a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\frac{7}{5}3\sqrt[3]{3a}-2a\sqrt[3]{3a}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\left(\frac{21}{5}-2a-\frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a}=(4-2a)\sqrt[3]{3a}$

30 **Efectúa y simplifica.**

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-1)$

b) $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$

c) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$

d) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}$

a) $\sqrt{12}-\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $5-6=-1$

c) $20+18-12\sqrt{10}=38-12\sqrt{10}$

d) $(2-1)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

31 **Racionaliza y simplifica.**

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

f) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2}=\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6+\sqrt{6}}{6}=1+\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4}=3(\sqrt{5}+2)=3\sqrt{5}+6$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}=\frac{13\sqrt{10}(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{5-9\cdot 2}=\frac{65\sqrt{2}+78\sqrt{5}}{-13}=-5\sqrt{2}-6\sqrt{5}$

f) $\frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)}=\frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4}=\frac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{23\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$

32 Efectúa y simplifica.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

b) $\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=\dfrac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2}=-2\sqrt{35}$

Logaritmos

33 Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.

a) $log_2 1\,024$ **b)** $log\ 0{,}001$ **c)** $log_2 \dfrac{1}{64}$

d) $log_{\sqrt{3}} 3$ **e)** $log_3 \sqrt{3}$ **f)** $log_2 \sqrt{8}$

g) $log_4 2$ **h)** $log_\pi 1$ **i)** $ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $log_2 2^{10} = 10$ b) $log\ 10^{-3} = -3$ c) $log_2 2^{-6} = -6$

d) $log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2 = 2$ e) $log_3 3^{1/2} = \dfrac{1}{2}$ f) $log_2 2^{3/2} = \dfrac{3}{2}$

g) $log_4 2 = log_4 2^{2/2} = log_4 (2^2)^{1/2} = log_4 4^{1/2} = \dfrac{1}{2}$

h) 0 i) $ln\ e^{-1/3} = -\dfrac{1}{3}$

34 Calcula la base de estos logaritmos:

a) $log_x 125 = 3$ **b)** $log_x \dfrac{1}{9} = -2$ **c)** $log_x \dfrac{1}{4} = 2$

d) $log_x 2 = 1/2$ **e)** $log_x 0{,}04 = -2$ **f)** $log_x 4 = -1/2$

a) $x^3 = 125 \to x = 5$ b) $x^{-2} = \dfrac{1}{9} \to x = 3$ c) $x^2 = \dfrac{1}{4} \to x = \dfrac{1}{2}$

d) $x^{1/2} = 2 \to x = 4$ e) $x^{-2} = 0{,}04 \to x = 5$ f) $x^{-1/2} = 4 \to x = \dfrac{1}{16}$

35 Calcula el valor de x en estas igualdades:

a) $log\ 3^x = 2$ **b)** $log\ x^2 = -2$ **c)** $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$ **e)** $log_7 3x = 0{,}5$ **f)** $3^{2+x} = 172$

a) $x = \dfrac{2}{log\ 3} = 4{,}19$ b) $2 log\ x = -2 \to x = \dfrac{1}{10}$ c) $x = \dfrac{log\ 115}{log\ 7} = 2{,}438$

d) $x = -\dfrac{log\ 3}{log\ 5} = -0{,}683$ e) $7^{0{,}5} = 3x \to x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ f) $2 + x = log_3 172 \to x = log_3 172 - 2$

Página 56

36 Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.

a) $\boldsymbol{log\ \sqrt{148}}$ **b)** $\boldsymbol{ln\ (2{,}3 \cdot 10^{11})}$ **c)** $\boldsymbol{ln\ (7{,}2 \cdot 10^{-5})}$

d) $\boldsymbol{log_3\ 42{,}9}$ **e)** $\boldsymbol{log_5\ 1{,}95}$ **f)** $\boldsymbol{log_2\ 0{,}034}$

a) 1,085 b) $ln\ (2{,}3 \cdot 10^{11}) \approx 26{,}16 \to e^{26{,}161} \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $ln\ (7{,}2 \cdot 10^{-5}) \approx -9{,}54 \to e^{-9{,}54} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-5}$ d) $3{,}42 \to 3^{3{,}42} \approx 42{,}9$

e) $0{,}41 \to 5^{0{,}41} \approx 1{,}95$ f) $-4{,}88 \to 2^{-4{,}88} \approx 0{,}034$

37 Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $\boldsymbol{log\ \dfrac{a^2\sqrt[5]{b^3}}{100c^4}}$ **b)** $\boldsymbol{ln\ \dfrac{\sqrt[4]{x^3} \cdot e^5}{\sqrt{y}}}$

a) $log\ a^2\sqrt[5]{b^3} - log\ 100c^4 = log\ a^2 + log\sqrt[5]{b^3} - log\ 10^2 - log\ c^4 = 2log\ a + \dfrac{3}{5}log\ b - 2 - 4log\ c$

b) $ln\dfrac{\sqrt[4]{x^3}\,e^5}{\sqrt{y}} = ln\sqrt[4]{x^3}\,e^5 - ln\sqrt{y} = ln\sqrt[4]{x^3} + ln\ e^5 - ln\sqrt{y} = \dfrac{3}{4}ln\ x + 5 - \dfrac{1}{2}ln\ y$

38 Sabiendo que $\boldsymbol{log\ x = 0{,}28}$ **calcula el valor de:**

a) $\boldsymbol{log\ \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{100}}$ **b)** $\boldsymbol{log\ 1\,000x^3}$

c) $\boldsymbol{log\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$ **d)** $\boldsymbol{log\ 10x + log\ \dfrac{1}{x^2}}$

a) $log\ \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{100} = log\ \dfrac{x^{2/3}}{100} = log\ x^{2/3} - log\ 100 = \dfrac{2}{3}log\ x - 2 = \dfrac{2}{3} \cdot 0{,}28 - 2 = -1{,}8133$

b) $log\ 1\,000x^3 = log\ 1\,000 + log\ x^3 = log\ 1\,000 + 3\ log\ x = 3 + 3 \cdot 0{,}28 = 3{,}84$

c) $log\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} = log\ 1 - log\ x^{1/2} = 0 - \dfrac{1}{2}log\ x = -\dfrac{1}{2} \cdot 0{,}28 = -0{,}14$

d) $log\ 10x + log\ \dfrac{1}{x^2} = log\ 10 + log\ x + log\ 1 - 2\ log\ x = 1 + 0{,}28 + 0 - 2 \cdot 0{,}28 = 0{,}72$

39 Calcula $\boldsymbol{x}$ **utilizando los logaritmos y sus propiedades.**

a) $\boldsymbol{35 = 21 \cdot 1{,}04x}$ **b)** $\boldsymbol{1{,}5 \cdot 10^{12} = 2^{-10}x}$

c) $\boldsymbol{log_x\ 0{,}3 = 2 - log_x\ 2}$ **d)** $\boldsymbol{ln\ 5x + ln\ \dfrac{x}{2} = 1}$

a) Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 21 y simplificamos:

$\dfrac{35}{21} = 1{,}04^x \to \dfrac{5}{3} = 1{,}04^x$

Aplicamos logaritmo a cada miembro de la ecuación para poder despejar la x, y luego sus propiedades:

$log\dfrac{5}{3} = log(1{,}04^x) = x\ log 1{,}04 \to \dfrac{log\ \dfrac{5}{3}}{log 1{,}04} = x$

Con la calculadora aproximamos x con 4 cifras significativas $x = 13{,}02$.

b) $log 1{,}5 + log 10^{12} = -10x\,log 2 \to x = \dfrac{log 1{,}5 + log 10^{12}}{-10\ log 2}$

c) $log_x 0{,}3 + log_x 2 = 2 \to log_x(0{,}3 \cdot 2) = 2 \to log_x 0{,}6 = 2 \to x^2 = 0{,}6 \to x = \sqrt{0{,}6}$

d) $ln\dfrac{5x^2}{2} = 1 \to e^1 = \dfrac{5x^2}{2} \to x = \sqrt{(2e)/5}$

40 **Halla el valor de x en estas expresiones:**

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$

b) $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5 - 2 \ln 10$

d) $\log x = 3 \log 2 - \frac{1}{2} \log 25$

a) $\ln x = \ln (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \frac{36}{9} \Rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 - \ln 10^2;\ \ln x = \ln \frac{5^3}{10^2};\ x = \frac{5^3}{5^2 \cdot 2^2};\ x = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}$

d) $\log x = \log 2^3 - \log 25^{1/2};\ \log x = \log 2^3 - \log 5;\ \log x = \log \frac{8}{5};\ x = \frac{8}{5}$

41 **Si $\log k = x$, escribe en función de x.**

a) $\log 100k$

b) $\log \frac{k}{1000}$

c) $\log k^3$

d) $\log \sqrt[3]{10k}$

e) $\log \frac{1}{k}$

f) $(\log k)^{1/2}$

a) $\log 100 + \log k = 2 + x$

b) $\log k - \log 1\,000 = x - 3$

c) $3\log k = 3x$

d) $\frac{1}{3}(\log 10 + \log k) = \frac{1}{3}(1 + x)$

e) $\log 1 - \log k = 0 - x = -x$

f) $\sqrt{x}$

42 **¿Cuál es la relación, sin logaritmos, que hay entre x, y, z?**

a) $\log z = 2 \log x - \log y$

b) $\log z = 2 - \log x - \frac{1}{2} \log y$

c) $\log z = 1 - \frac{1}{2} (\log x - \log y)$

d) $\ln z = 1 - 2 \ln x + 2 \ln y$

a) $\log z = \log x^2 - \log y;\ \log z = \log \frac{x^2}{y};\ z = \frac{x^2}{y}$

b) $\log z = \log 10^2 - \log x - \log \sqrt{y};\ \log z = \log \frac{100}{x\sqrt{y}};\ z = \frac{100}{x\sqrt{y}}$

c) $\log z = \log 10 - \frac{1}{2} \log \frac{x}{y};\ \log z = \log 10 - \log \sqrt{\frac{x}{y}};\ \log z = \log \frac{10}{\sqrt{\frac{x}{y}}};\ z = \frac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

d) $\ln z = \ln e - \ln x^2 + \ln y^2;\ \ln z = \ln \frac{e \cdot y^2}{x^2};\ z = \frac{e \cdot y^2}{x^2}$

Errores y notación científica

43 **Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

a) $\dfrac{(3{,}12 \cdot 10^{-5} + 7{,}03 \cdot 10^{-4})\, 8{,}3 \cdot 10^{8}}{4{,}32 \cdot 10^{3}}$

b) $\dfrac{(12{,}5 \cdot 10^{7} - 8 \cdot 10^{9})\,(3{,}5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9{,}2 \cdot 10^{6}}$

c) $\dfrac{5{,}431 \cdot 10^{3} - 6{,}51 \cdot 10^{4} + 385 \cdot 10^{2}}{8{,}2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

a) $1{,}41 \cdot 10^2$; E.A. $< 0{,}005 \cdot 10^2 = 0{,}5$

E.R. $< \frac{0{,}5}{141} < 0{,}00355$

b) $-1{,}58 \cdot 10^5$; E.A. $< 0{,}005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^2}{1{,}58 \cdot 10^5} < 3{,}16 \cdot 10^{-3}$

c) $-2{,}65 \cdot 10^6$; E.A. $< 0{,}005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^3}{2{,}65 \cdot 10^6} < 1{,}89 \cdot 10^{-3}$

44 Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén.

a) $3{,}27 \cdot 10^{13}$; $85{,}7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$

b) $1{,}19 \cdot 10^{-9}$; $0{,}05 \cdot 10^{-7}$; $2\,000 \cdot 10^{-12}$

a) $8{,}57 \cdot 10^{13} > 4{,}53 \cdot 10^{13} > 3{,}27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1{,}19 \cdot 10^{-9}$

Para resolver

45 El precio de una caja de 40 pastillas para lavavajillas es 4,75 €. Para aumentar las ventas, el fabricante se plantea hacer tres tipos de oferta:

a) La caja con 50 pastillas al mismo precio 4,75 €.

b) Lleve 3 cajas de 40 pastillas y solo pague 2.

c) La segunda unidad al 50 %.

Compara estas ofertas. ¿Qué porcentaje de descuento nos hacen en cada caso?

Para comparar los precios veremos cuánto cuesta cada pastilla en cada caso:

El precio inicial de cada pastilla es:

$\frac{4{,}75}{40} = 0{,}1188$ €

a) Oferta de 50 pastillas por 4,75 €. El precio de cada pastilla es: $\frac{4{,}75}{50} = 0{,}095$ €

Por lo tanto, por cada pastilla el descuento será:

$0{,}1188 - 0{,}095 = 0{,}0238$ €

El porcentaje de descuento será: $\frac{0{,}1188 - 0{,}095}{0{,}1188} \cdot 100 = 20\,\%$

b) Oferta de 3 cajas pagando solamente 2. El precio de cada pastilla es:

$\frac{4{,}75 \cdot 2}{120} = 0{,}0792$ €

Por lo tanto, por cada pastilla el descuento será:

$0{,}1188 - 0{,}0792 = 0{,}0396$ €

El porcentaje de descuento será: $\frac{0{,}1188 - 0{,}0792}{0{,}1188} \cdot 100 = 33{,}4\,\%$

c) Segunda unidad al 50 %. El precio de cada pastilla es:

$\frac{4{,}75 + \frac{4{,}75}{2}}{80} = 0{,}089$ €

Por lo tanto, por cada pastilla el descuento será:

0,1188 – 0,089 = 0,0298 €

El porcentaje de descuento será: $\frac{0,1188-0,0298}{0,1188} \cdot 100 = 25,1\,\%$

La mejor oferta es la del apartado b).

46 **Varios amigos se reúnen en un bar, toman 15 refrescos y pagan 18,75 € en total. Uno de ellos tomó solo un refresco, otro tomó dos y el resto tomaron 3 refrescos cada uno. ¿Cuántos amigos fueron y cuánto tuvo que pagar cada uno?**

18,75 : 15 = 1,25 € por refresco.

1,25 paga el primero; 2,5 paga el segundo $\to$ 3,75 € entre los dos.

Los restantes toman 15 – 3 = 12 refrescos.

12 : 3 = 4 amigos, y cada uno paga 3,75 €.

Son 6 en total. Pagan 1,25 €, 2,5 € y los otros cuatro, 3,75 € cada uno.

47 ¿Qué te hace decir eso? **[El alumnado podría compartir con sus compañeros el proceso que ha seguido para solucionar el problema y trabajar, de estar forma esta estrategia].**

En una granja hay 75 gallinas que consumen 450 kg de maíz en 30 días. Para aumentar la producción de huevos, se aumenta el número de gallinas a 200 y se compran 800 kg de maíz. ¿Cuántos días se podrá dar de comer a las gallinas?

450 : 30 = 15; 15 : 75 = 0,2 kg de maíz es lo que come una gallina en un día.

200 · 0,2 = 40 kg por día para alimentar 200 gallinas.

800 : 40 = 20 días podrán comer las gallinas.

48 **La construcción de un centro hospitalario tuvo un sobrecoste del 35 % con respecto al presupuesto inicial y su coste final fue 918 millones de €. La diferencia entre ambos precios deben pagarla tres municipios A, B y C, de forma inversamente proporcional a su distancia al hospital que son 40 km, 50 km y 60 km. Calcula lo que debe pagar cada uno.**

Si llamamos x al pago inicial previsto, podemos decir que el pago final fue:

$$918 = \frac{135x}{100} \to x = \frac{91\,800}{135} = 680$$

El pago inicial era de 680 millones de euros, por lo que deben pagar una diferencia de:

918 – 680 = 238 millones de euros

Esta cantidad la pagan de forma inversamente proporcional a su distancia al hospital. Para ello buscamos un valor y al que aplicarle la proporcionalidad inversa:

$$\frac{y}{40} + \frac{y}{50} + \frac{y}{60} = 238$$

Buscamos su denominador común y operamos:

$$\frac{15y + 12y + 10y}{600} = \frac{37y}{600} = 238 \to y = 3\,859,5$$

El pueblo A pagará $\frac{3\,859,5}{40}$ = 96,49 millones de euros.

El pueblo B pagará $\frac{3\,859,5}{50}$ = 77,19 millones de euros.

El pueblo C pagará $\frac{3\,859,5}{60}$ = 64,32 millones de euros.

49 **Un depósito de agua tiene dos grifos. Si los abrimos a la vez, el depósito se llena en dos horas. Si abrimos solo el primero, se llena en seis horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si abrimos solamente el segundo grifo?**

Llamamos x = n.º de horas que tarda en llenar el depósito el segundo grifo.

El primer grifo llena $\frac{1}{6}$ del depósito en una hora.

El segundo grifo llena $\frac{1}{x}$ del depósito en una hora.

Los dos juntos llenan $\frac{1}{2}$ del depósito en una hora.

Por otra parte, los dos juntos, en una hora, llenan $\frac{1}{6}+\frac{1}{x}$. Por tanto:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{x} \rightarrow \frac{3x}{6x}=\frac{x}{6x}+\frac{6}{6x} \rightarrow 3x=x+6 \rightarrow x=3$$

El segundo grifo tarda 3 horas en llenar el depósito.

50 Pienso, me interesa, investigo… **[Esta estrategia facilita al alumnado reconocer los conocimientos necesarios para resolver el problema].**

Dos poblaciones A y B distan 350 km. A la misma hora sale un autobús de A hacia B a una velocidad de 80 km/h y un turismo de B hacia A a 120 km/h. ¿Cuándo se cruzarán?

Si se aproximan a 80 + 120 = 200 km/h, en recorrer 350 km tardarán:

$t=\frac{350}{200}=1,75$ horas = 1 hora y 45 minutos.

51 **Un automóvil tarda 3 horas en ir de A a B y otro tarda 5 horas en ir de B a A. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse si salen simultáneamente cada uno de su ciudad.**

El primero recorre 1/3 del camino en 1 hora.

El segundo recorre 1/5 del camino en 1 hora.

Entre los dos recorren: $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ del camino en 1 hora.

Tardarán $\frac{15}{8}$ h = 1 h 52' 30'' en encontrarse.

52 **La estrella R136a1, descubierta recientemente, está a 165 000 años-luz y tiene una masa actual equivalente a 265 veces la masa del Sol. Expresa la distancia en kilómetros y la masa en kilogramos. Da, en cada caso, cotas del error absoluto y del error relativo.**

Un año luz es aproximadamente $9,46 \cdot 10^{12}$ km.

La distancia de la estrella R136a1 a la Tierra es: $d = 165\,000 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 1,5\,609 \cdot 10^{18}$ km

E.A. $< 5 \cdot 10^{13}$ km

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^{13}}{1,5609 \cdot 10^{18}} = 3,2033 \cdot 10^{-5} = 0,000032$, que equivale al 0,0032 %.

La masa del Sol es, aproximadamente, $1,9891 \cdot 10^{30}$ kg.

La masa de la estrella R136a1 es: $m = 265 \cdot 1,9891 \cdot 10^{30} = 5,2711 \cdot 10^{32}$ kg

E.A. $< 5 \cdot 10^{27}$ kg

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^{27}}{5,2711 \cdot 10^{32}} = 9,4857 \cdot 10^{-6} = 0,0000094857$, que equivale al 0,00095 %.

Página 57

53 ODS Meta 3.8. **[Tras visionar el vídeo correspondiente a esta meta, el docente puede proponer un debate sobre las causas que provocan las dificultades que tienen muchas personas para acceder a servicios de salud].**

La cantidad de un fármaco que hay en la sangre de un paciente en mg/L al cabo de t horas, después de haberle inyectado puede estimarse mediante la función $f(t) = 5e^{-t/10}$. ¿Cuántas horas tardará en reducirse a la mitad?

Cuando le inyectan el fármaco, $t = 0$, por lo que la cantidad que tiene en sangre es $f(0) = 5e^0 = 5$.

Queremos saber cuánto tiempo tiene que pasar para que el resultado sea $\frac{5}{2}$:

$$f(t) = 5e^{\frac{-t}{10}} = \frac{5}{2} \rightarrow e^{\frac{-t}{10}} = \frac{1}{2}$$

Aplicando el logaritmo neperiano a ambos miembros de la desigualdad:

$$\frac{-t}{10} = ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow t = -10\,ln\left(\frac{1}{2}\right) = 6{,}93$$

54 El volumen de un cubo es $6\sqrt{6}$ cm^3. Halla:

a) Su arista.

b) La diagonal de una cara.

c) La diagonal de un cubo.

Da, en cada caso, el valor exacto con radicales.

a) $V_{\text{CUBO}} = a^3 = 6\sqrt{6} = \sqrt{6^3} \rightarrow a = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{6}$

b) Diagonal de una cara $\rightarrow \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{6+6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

c) Diagonal del cubo $\rightarrow \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{6+6+6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

55 Halla el área y el volumen de un tetraedro regular cuya arista mide $\sqrt{6}$ cm. Expresa el resultado con radicales.

Un tetraedro tiene cuatro caras iguales y cada cara es un triángulo equilátero del que conocemos que su lado mide $\sqrt{6}$ cm, ya que es su arista a. Calculemos el área de uno de estos triángulos:

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

La base la conocemos, a, buscaremos la altura mediante el teorema de Pitágoras aplicado a medio triángulo, que será rectángulo:

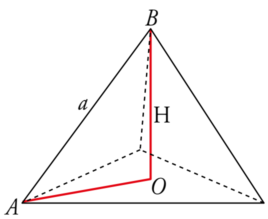
$$a^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow \sqrt{6}^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \rightarrow 6 = \text{h}^2 + \frac{6}{4} \rightarrow \text{h} = \sqrt{6 - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Y ya podemos calcular el área del tetraedro ya que sus 4 caras son iguales:

$$A = 4A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Para encontrar el volumen del tetraedro: $V = \frac{1}{3}$ Área de la base · altura $= \frac{1}{3}\ A_{\text{TRIÁNGULO}} \cdot H$



En este caso, para encontrar la altura del tetraedro H usaremos el triángulo AOB para volver a aplicar el teorema de Pitágoras, del que conocemos:

- $\overline{AB} = \sqrt{6}$
- $\overline{AO} = \frac{2}{3}\text{h} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$$a^2 = H^2 + \overline{AO}^2 \rightarrow 6 = H^2 + 2 \rightarrow H^2 = 4 \rightarrow H = 2 \rightarrow V = \frac{1}{3} A_T \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3} \text{ cm}^3$$

56 **El área total de una pirámide cuadrangular regular es $25(1+\sqrt{3})$ cm^2. Calcula su arista.**

Una pirámide cuadrangular regular tiene base cuadrada. Sus caras laterales son triángulos equiláteros, necesitamos hallar la altura del triángulo para encontrar su área. Lo haremos aplicando el teorema de Pitágoras a una de sus mitades, y llamando a a la arista que queremos encontrar:

$$a^2 = \text{h}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow \text{h} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{a \cdot \text{h}}{2} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área de la base} = a^2$$

$$\text{Área total} = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(1+\sqrt{3}) = 25(1+\sqrt{3}) \rightarrow 25 = a^2 \rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

57 **En un trapecio rectángulo, la base menor mide $4-\sqrt{5}$ cm, la base mayor, $7+2\sqrt{5}$ cm y la altura $4(1+\sqrt{5})$ cm. Halla el perímetro del trapecio, utilizando radicales.**

Calculamos primero x:

$$7 + 2\sqrt{5} - (4-\sqrt{5}) = x \rightarrow x = 3(1+\sqrt{5})$$

Calculamos ahora l usando el teorema de Pitágoras:

$$l^2 = x^2 + \text{h}^2 = \left[3(1+\sqrt{5})\right]^2 + \left[4(1+\sqrt{5})\right]^2 = 9(1+\sqrt{5})^2 + 16(1+\sqrt{5})^2 = 25(1+\sqrt{5})^2$$

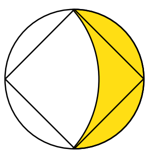
Por lo tanto, $l = 5(1+\sqrt{5})$.

Solamente nos queda calcular el perímetro sumando los lados del trapecio:

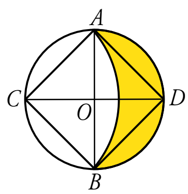
$$P = 7 + 2\sqrt{5} + (4-\sqrt{5}) + 4(1+\sqrt{5}) + 5(1+\sqrt{5}) = 10(2+\sqrt{5}) \text{ cm}$$

58 **[El uso de los datos que proporciona el enunciado permite que el alumnado trabaje la creación y creatividad (dimensión personal)].**

Si el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia mide 1 m, ¿cuál es el área de la parte coloreada?



Llamaremos r al radio de la circunferencia dibujada, D a su diámetro, O al centro de la circunferencia.



- Calculemos el diámetro, *D*, y el radio, *r*.

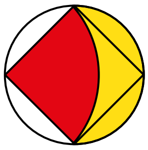
  Como el área del cuadrado *ABCD* es 1 ya que su lado mide 1, podemos deducir que el área del triángulo *ABC* es la mitad del área del cuadrado *ABCD*. Así $A_1 = \frac{1}{2}$ y aplicamos la fórmula de su área, sabiendo que el radio es la mitad del diámetro:

  $$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OC}}{2} = \frac{D \cdot r}{2} = \frac{D \cdot \left(\frac{D}{2}\right)}{2} = \frac{D^2}{4}$$

  Entonces $\frac{D^2}{2} = 1$ y de aquí deducimos que $D = \sqrt{2}$ y $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Busquemos el área de la circunferencia del dibujo, cuyo radio es $r: A_2 = \pi r^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$.

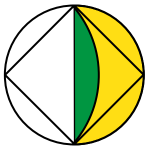
- Busquemos el área de la circunferencia cuyo radio es el lado del cuadrado. Así podremos saber el área roja del dibujo.



  $A_3 = \pi r^2 = \pi$ (área de la circunferencia completa)

  $A_4 = \frac{\pi}{4}$

- Busquemos ahora el área verde: $A_5 = A_4 - A_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$



- Ya solamente nos queda restar para encontrar el área amarilla:

  $$A_6 = \frac{A_2}{2} - A_5 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Cuestiones teóricas

59 Explica si estas frases son verdaderas o falsas:

a) Hay números irracionales que son enteros.

b) Todo número irracional es real.

c) Todos los números decimales son racionales.

d) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

a) Falso. Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

b) Verdadero.

c) Falso. El número π es decimal pero no es racional, puesto que no puede expresarse como cociente de dos números enteros.

d) Verdadero.

60 Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga a $\pi/2$.

Aproximamos su valor: $\frac{\pi}{2} = 1,5708 \rightarrow \frac{\pi}{2} \in (1, 2)$

61 **Si $x \neq 0$, explica si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:**

a) x^{-2} **es negativo si lo es x.**

b) $\sqrt[3]{x}$ **tiene el mismo signo que x.**

c) Si $x > 0$ entonces $\sqrt{x} < x$.

a) Falsa, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ siempre es positivo por ser el exponente par, independientemente del signo de x.

b) Verdadera, porque el índice de la raíz es impar.

c) Falsa, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

62 **¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:**

a) $\log m + \log n = \log (m + n)$ **b)** $\log m - \log n = \frac{\log m}{\log n}$

c) $\log m - \log n = \log \frac{m}{n}$ **d)** $\log x^2 = \log x + \log x$

e) $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$

a) Falso. $\log m + \log n = \log (m \cdot n) \neq \log (m + n)$

b) Falso. $\log m - \log n = \log \left(\frac{m}{n}\right) \neq \frac{\log m}{\log n}$

c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

d) Verdadero. $\log x^2 = \log (x \cdot x) = \log x + \log x$

e) Verdadero. $\log (a^2 - b^2) = \log [(a + b) \cdot (a - b)] = \log (a + b) + \log (a - b)$

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.9. (EA 1.9.1.-EA 1.9.2.-EA 1.9.3.) **CE 2.1.** (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.)

Página 57

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:**

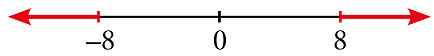
$$-\frac{58}{45};\ \frac{51}{17};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[4]{-3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[5]{2^3};\ 1{,}0\widehat{7}$$

$\mathbb{N}$: $\frac{51}{17}$ $\mathbb{Z}$: $\frac{51}{17};\ \sqrt[3]{-8}$ $\mathbb{Q}$: $\frac{51}{17};\ \sqrt[3]{-8};\ -\frac{58}{45};\ 1{,}0\widehat{7}$ $\mathbb{R}$: $\frac{51}{17};\ \sqrt[3]{-8};\ -\frac{58}{45};\ 1{,}0\widehat{7};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[5]{2^3}$

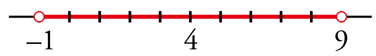
2 **Expresa en forma de intervalo y haz la representación**

a) $|x| \geq 8$ **b)** $|x-4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$



b) $(-1, 9)$



3 **Escribe como potencia y simplifica.**

$$\left(\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}\right) : \left(a\sqrt{a}\right)$$

$$\left(\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}\right) : \left(a\sqrt{a}\right) = \left(a^{3/4} \cdot a^{-1}\right) : \left(a \cdot a^{1/2}\right) = \left(a^{3/4-1}\right) : \left(a^{1+1/2}\right) = \left(a^{-1/4}\right) : \left(a^{3/2}\right) = a^{-1/4-3/2} = a^{-7/4}$$

4 **Calcula y simplifica:** $\sqrt{\frac{125}{27}} - \sqrt{\frac{3}{5}}$

$$\sqrt{\frac{125}{27}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{5^3}{3^3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{25-9}{3\sqrt{15}} = \frac{16}{3\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{45}$$

5 **Racionaliza.**

a) $\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{2}{3-\sqrt{3}}$

a) $\frac{4+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(4+\sqrt{6})(\sqrt{3})}{(2\sqrt{3})(\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{18}}{2\cdot 3} = \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

b) $\frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{6+2\sqrt{3}}{9-3} = \frac{6+2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$

6 **Simplifica:** $\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175}$

$$\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175} = \sqrt{3^2\cdot 7} - 2\sqrt{2^2\cdot 7} + \sqrt{5^2\cdot 7} = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

7 **Sabiendo que** $A = 3{,}24 \cdot 10^6$; $B = 5{,}1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3{,}8 \cdot 10^{11}$ **y** $D = 6{,}2 \cdot 10^{-6}$, **calcula** $\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D$. **Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

$$\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D = \left(\frac{3{,}24 \cdot 10^6}{5{,}1 \cdot 10^{-5}} + 3{,}8 \cdot 10^{11}\right) \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-6} = \left(\frac{3{,}24}{5{,}1} 10^{11} + 3{,}8 \cdot 10^{11}\right) \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-6} =$$

$$= (0{,}63529 + 3{,}8) \cdot 10^{11} \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-6} = 4{,}4353 \cdot 6{,}2 \cdot 10^5 = 27{,}499 \cdot 10^5 =$$

$$= 2{,}7499 \cdot 10^6 = 2{,}75 \cdot 10^6$$

E.A. $< 0{,}5 \cdot 10^4$

E.R. $< \frac{0{,}5 \cdot 10^4}{2{,}75 \cdot 10^6} = 1{,}8182 \cdot 10^{-3} = 0{,}00182 = 0{,}18\ \%$

8 **Aplica la definición de logaritmo y obtén *x*.**

a) $\log_3 x = -1$ **b)** $\log x = 2{,}5$ **c)** $\ln x = 2$

a) $\log_3 x = -1 \rightarrow x = 3^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{3}$

b) $\log x = 2{,}5 \rightarrow x = 10^{2{,}5} \rightarrow x = 10^{5/2} = \sqrt{10^5} = 10^2\sqrt{10}$

c) $\ln x = 2 \rightarrow x = e^2$

9 **Calcula *x* en cada caso.**

a) $2{,}5^x = 0{,}0087$ **b)** $1{,}005^{3x} = 143$

a) $x \log 2{,}5 = \log 0{,}0087 \rightarrow x = \dfrac{\log 0{,}0087}{\log 2{,}5} = -5{,}18$

b) $1{,}005^{3x} = 143$

Tomamos logaritmos:

$\log 1{,}005^{3x} = \log 143 \rightarrow 3x \log 1{,}005 = \log 143 \rightarrow x = \dfrac{\log 143}{3\log 1{,}005} \approx 331{,}68$

10 **Expresa como un solo logaritmo y di el valor de *A*:**

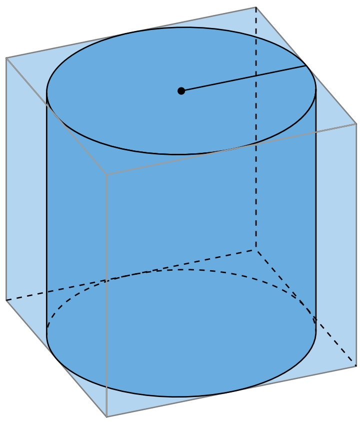
$$\log 5 + 2\log 3 - \log 4 = \log A$$

$\log 5 + 2\log 3 - \log 4 = \log 5 + \log 3^2 - \log 4 = \log\left(\dfrac{5\cdot 9}{4}\right) \rightarrow A = \dfrac{45}{4}$

11 **Si $\log k = 0{,}8$, ¿cuál es el valor de $\log 10k^3 + \log \dfrac{\sqrt{k}}{100}$?**

$\log 10k^3 + \log\dfrac{\sqrt{k}}{100} = \log 10 + \log k^3 + \log\sqrt{k} - \log 100 = 1 + 3\log k + \dfrac{1}{2}\log k - 2 = 1 + 3\cdot 0{,}8 + \dfrac{1}{2}0{,}8 - 2 = 1{,}8$

12 **El área total de un cubo es 12 cm². ¿Cuál es el área total del cilindro inscrito en el cubo? Da el valor exacto.**



El área total del cubo es $6a^2 = 12 \rightarrow a = \sqrt{2}$.

El radio del cilindro inscrito es $r = \dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

El área de una base del cilindro es $\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$.

El área lateral del cilindro es $2\pi\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi$.

El área total del cilindro es $2\cdot\dfrac{\pi}{4} + \sqrt{2}\pi = \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)\pi$ cm².