5 FÓRMULAS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 1.4. (EA 1.14.1.-EA 1.4.2.) CE 4.1. (EA 4.1.1.)

1 FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Página 137

1 **Demuestra la fórmula (II.2) a partir de la fórmula:**

$\boldsymbol{cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta}$

$cos\ (\alpha - \beta) = cos\ (\alpha + (-\beta)) = cos\ \alpha\ cos\ (-\beta) - sen\ \alpha\ sen\ (-\beta) =$

$= cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ (-sen\ \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen$

2 **Demuestra (II.3) a partir de** $\boldsymbol{tg\ (\alpha + \beta) = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta}}$**.**

$$tg\ (\alpha - \beta) = tg\ (\alpha + (-\beta)) = \frac{tg\ \alpha + tg\ (-\beta)}{1 - tg\ \alpha\ tg\ (-\beta)} \overset{(*)}{=} \frac{tg\ \alpha + (-tg\ \beta)}{1 - tg\ \alpha\ (-tg\ \beta)} = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

(*) Como $\left.\begin{array}{l} sen\ (-\alpha) = -sen\ \alpha \\ cos\ (-\alpha) = cos\ \alpha \end{array}\right\} \rightarrow tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha$

3 **Demuestra la fórmula (II.3) a partir de las siguientes:**

$\boldsymbol{sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta}$

$\boldsymbol{cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta}$

$$tg\ (\alpha - \beta) = \frac{sen\ (\alpha - \beta)}{cos\ (\alpha - \beta)} = \frac{sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta} \overset{(*)}{=} \frac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} - \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{cos\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} + \dfrac{sen\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador por $cos\ \alpha\ cos\ \beta$.

4 **Si** $\boldsymbol{sen\ 12° = 0{,}2}$ **y** $\boldsymbol{sen\ 37° = 0{,}6}$**, halla** $\boldsymbol{cos\ 12°}$**,** $\boldsymbol{tg\ 12°}$**,** $\boldsymbol{cos\ 37°}$ **y** $\boldsymbol{tg\ 37°}$**. Calcula, a partir de ellas, las razones trigonométricas de 49° y de 25°, usando las fórmulas (I) y (II).**

- $sen\ 12° = 0{,}2$

  $cos\ 12° = \sqrt{1 - sen^2\ 12°} = \sqrt{1 - 0{,}04} = 0{,}98$

  $tg\ 12° = \dfrac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$

- $sen\ 37° = 0{,}6$

  $cos\ 37° = \sqrt{1 - sen^2\ 37°} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$

  $tg\ 37° = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

- $49° = 12° + 37°$, luego:

  $sen\ 49° = sen\ (12° + 37°) = sen\ 12°\ cos\ 37° + cos\ 12°\ sen\ 37° = 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$

  $cos\ 49° = cos\ (12° + 37°) = cos\ 12°\ cos\ 37° - sen\ 12°\ sen\ 37° = 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$

  $tg\ 49° = tg\ (12° + 37°) = \dfrac{tg\ 12° + tg\ 37°}{1 - tg\ 12°\ tg\ 37°} = \dfrac{0{,}2 + 0{,}75}{1 - 0{,}2 \cdot 0{,}75} = 1{,}12$

  $\left(\text{Podría calcularse } tg\ 49° = \dfrac{sen\ 49°}{cos\ 49°}\right)$.

- 25° = 37° – 12°, luego:

  $sen\ 25° = sen\ (37° - 12°) = sen\ 37°\ cos\ 12° - cos\ 37°\ sen\ 12° = 0{,}6 \cdot 0{,}98 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}428$

  $cos\ 25° = cos\ (37° - 12°) = cos\ 37°\ cos\ 12° + sen\ 37°\ sen\ 12° = 0{,}8 \cdot 0{,}98 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}904$

  $$tg\ 25° = tg\ (37° - 12°) = \frac{tg\ 37° - tg\ 12°}{1 + tg\ 37°\ tg\ 12°} = \frac{0{,}75 - 0{,}2}{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}2} = 0{,}478$$

5 Demuestra esta igualdad:

$$\boldsymbol{\frac{cos\ (a+b) + cos\ (a-b)}{sen\ (a+b) + sen\ (a-b)} = \frac{1}{tg\ a}}$$

$$\frac{cos\ (a+b) + cos\ (a-b)}{sen\ (a+b) + sen\ (a-b)} = \frac{cos\ a\ cos\ b - sen\ a\ sen\ b + cos\ a\ cos\ b + sen\ a\ sen\ b}{sen\ a\ cos\ b + cos\ a\ sen\ b + sen\ a\ cos\ b - cos\ a\ sen\ b} =$$

$$= \frac{2\ cos\ a\ cos\ b}{2\ sen\ a\ cos\ b} = \frac{cos\ a}{sen\ a} = \frac{1}{tg\ a}$$

6 Demuestra las fórmulas (III.1) y (III.3) haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas (I).

$sen\ 2\alpha = sen\ (\alpha + \alpha) = sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos\ \alpha\ sen\ \alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

$$tg\ 2\alpha = tg\ (\alpha + \alpha) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \alpha}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \alpha} = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}$$

7 Halla las razones trigonométricas de 60° usando las de 30°.

$$sen\ 60° = sen\ (2 \cdot 30°) = 2\ sen\ 30°\ cos\ 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 60° = cos\ (2 \cdot 30°) = cos^2\ 30° - sen^2\ 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = tg\ (2 \cdot 30°) = \frac{2\ tg\ 30°}{1 - tg^2\ 30°} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$$

8 Halla las razones trigonométricas de 90° usando las de 45°.

$$sen\ 90° = sen\ (2 \cdot 45°) = 2\ sen\ 45°\ cos\ 45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$cos\ 90° = cos\ (2 \cdot 45°) = cos^2\ 45° - sen^2\ 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$tg\ 90° = tg\ (2 \cdot 45°) = \frac{2\ tg\ 45°}{1 - tg^2\ 45°} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \to \text{No existe.}$$

9 Demuestra que: $\boldsymbol{\dfrac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}$

$$\frac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha\ (1 - cos\ \alpha)}{2\ sen\ \alpha\ (1 + cos\ \alpha)} = \frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$$

Página 138

Hazlo tú

1 Halla *cos* 15° y *tg* 15°.

- $cos\ 15° = cos\ \dfrac{30°}{2} = \sqrt{\dfrac{1+cos\ 30°}{2}} = \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}{2} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$

- $tg\ 15° = tg\ \dfrac{30°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-cos\ 30°}{1+cos\ 30°}} = \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

Piensa y practica

10 Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas IV.1, IV.2 y IV.3.

- $cos\ \alpha = cos\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right) = cos^2\dfrac{\alpha}{2} - sen^2\dfrac{\alpha}{2}$

  Por la igualdad fundamental:

  $cos^2\dfrac{\alpha}{2} + sen^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 \ \to\ 1 = cos^2\dfrac{\alpha}{2} + sen^2\dfrac{\alpha}{2}$

  De aquí:

  a) Sumando ambas igualdades:

  $1 + cos\ \alpha = 2\ cos^2\dfrac{\alpha}{2} \ \to\ cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+cos\ \alpha}{2} \ \to\ cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+cos\ \alpha}{2}}$

  b) Restando las igualdades (2.ª – 1.ª):

  $1 - cos\ \alpha = 2\ sen^2\dfrac{\alpha}{2} \ \to\ sen^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-cos\ \alpha}{2} \ \to\ sen\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-cos\ \alpha}{2}}$

- Por último:

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{sen\ (\alpha/2)}{cos\ (\alpha/2)} = \frac{\pm\sqrt{\dfrac{1-cos\ \alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\dfrac{1+cos\ \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-cos\ \alpha}{1+cos\ \alpha}}$$

11 Sabiendo que *cos* 78° = 0,2, calcula *sen* 78° y *tg* 78°. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

- $cos\ 78° = 0,2$

  $sen\ 78° = \sqrt{1-cos^2 78°} = \sqrt{1-0,2^2} = 0,98$

  $tg\ 78° = \dfrac{0,98}{0,2} = 4,9$

- $sen\ 39° = sen\ \dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-0,2}{2}} = 0,63$

  $cos\ 39° = cos\ \dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1+cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+0,2}{2}} = 0,77$

  $tg\ 39° = tg\ \dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-cos\ 78°}{1+cos\ 78°}} = \sqrt{\dfrac{1-0,2}{1+0,2}} = 0,82$

12 Halla las razones trigonométricas de 30° a partir de *cos* 60° = 0,5.

- $cos\ 60° = 0,5$
- $sen\ 30° = sen\ \dfrac{60°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-0,5}{2}} = 0,5$

$cos\ 30° = cos\ \dfrac{60°}{2} = \sqrt{\dfrac{1+0,5}{2}} = 0,866$

$tg\ 30° = tg\ \dfrac{60°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-0,5}{1+0,5}} = 0,577$

13 Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de *cos* 90° = 0.

- $cos\ 90° = 0$
- $sen\ 45° = sen\ \dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 45° = cos\ \dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1+0}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ 45° = tg\ \dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-0}{1+0}} = \sqrt{1} = 1$

14 Piensa y comparte en pareja. **[Compartir con el compañero o compañera la toma de decisiones que se deben tomar en este tipo de demostraciones permite trabajar esta estrategia].**

Demuestra: $2\ tg\ \alpha \cdot sen^2 \dfrac{\alpha}{2} + sen\ \alpha = tg\ \alpha$

$$2\ tg\ \alpha \cdot sen^2 \frac{\alpha}{2} + sen\ \alpha = 2\ tg\ \alpha \cdot \frac{1-cos\ \alpha}{2} + sen\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}(1-cos\ \alpha) + sen\ \alpha = sen\ \alpha\left(\frac{1-cos\ \alpha}{cos\ \alpha}+1\right) =$$

$$= sen\ \alpha\left(\frac{1-cos\ \alpha + cos\ \alpha}{cos\ \alpha}\right) = sen\ \alpha \cdot \frac{1}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha$$

15 Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = tg^2\ \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha\,(1-cos\ \alpha)}{2\ sen\ \alpha\,(1+cos\ \alpha)} = \frac{1-cos\ \alpha}{1+cos\ \alpha} = tg^2\ \frac{\alpha}{2}$$

Página 139

16 Para demostrar las fórmulas (V.3) y (V.4), da los siguientes pasos:

- **Expresa en función de α y β:**

  ***cos* $(\alpha + \beta)$ = …** ***cos* $(\alpha - \beta)$ = …**

- **Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.**
- **Sustituye en las expresiones anteriores:**

$$\left.\begin{aligned}\alpha + \beta = A\\ \alpha - \beta = B\end{aligned}\right\}$$

- $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta$

  $cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta$

Sumando $\rightarrow$ $cos\ (\alpha + \beta) + cos\ (\alpha - \beta) = 2\ cos\ \alpha\ cos\ \beta$ (1)

Restando $\rightarrow$ $cos\ (\alpha + \beta) - cos\ (\alpha - \beta) = -2\ sen\ \alpha\ sen\ \beta$ (2)

- Llamando $\left.\begin{aligned}\alpha + \beta = A\\ \alpha - \beta = B\end{aligned}\right\} \rightarrow \alpha = \dfrac{A+B}{2},\ \beta = \dfrac{A-B}{2}$ (al resolver el sistema)

- Luego, sustituyendo en (1) y (2), se obtiene:

(1) $\rightarrow$ $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ (2) $\rightarrow$ $\cos A - \cos B = -2\,\text{sen}\,\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}$

17 Transforma en producto y calcula.

a) $\boldsymbol{\text{sen}\,75° - \text{sen}\,15°}$ **b)** $\boldsymbol{\text{sen}\,75° + \text{sen}\,15°}$ **c)** $\boldsymbol{\cos 75° - \cos 15°}$

a) $\text{sen}\,75° - \text{sen}\,15° = 2\cos\frac{75°+15°}{2}\,\text{sen}\,\frac{75°-15°}{2} = 2\cos 45°\,\text{sen}\,30° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen}\,75° + \text{sen}\,15° = 2\,\text{sen}\,\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} = 2\,\text{sen}\,45°\cos 30° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\cos 75° - \cos 15° = -2\,\text{sen}\,\frac{75°+15°}{2}\,\text{sen}\,\frac{75°-15°}{2} = -2\,\text{sen}\,45°\cos 30° = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

18 Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:

$$\boldsymbol{\frac{\text{sen}\,4\alpha + \text{sen}\,2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}}$$

$$\frac{\text{sen}\,4\alpha + \text{sen}\,2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{2\,\text{sen}\,\frac{4\alpha+2\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha-2\alpha}{2}}{2\cos\frac{4\alpha+2\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha-2\alpha}{\alpha}} = \frac{2\,\text{sen}\,3\alpha}{2\cos 3\alpha} = \text{tg}\,3\alpha$$

2 ▸ ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

C.E.: CE 4.2. (EA 4.2.1.)

Página 140

Hazlo tú

1 **Resuelve** $\boldsymbol{sen\ (\alpha + 30°) = 2\ cos\ \alpha}$**.**

$sen\ (\alpha + 30°) = 2\ cos\ \alpha$

$sen\ \alpha\ cos\ 30° + cos\ \alpha\ sen\ 30° = 2\ cos\ \alpha$

$$\frac{1}{2}\, sen\ \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\, cos\ \alpha = 2\ cos\ \alpha$$

Dividimos los dos miembros entre $cos\ \alpha$:

$$\frac{1}{2}\, tg\ \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \to tg\ \alpha + \sqrt{3} = 4 \to tg\ \alpha = 4 - \sqrt{3}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} \alpha_1 = 66°\, 12'\, 22'' \\ \alpha_2 = 246°\, 12'\, 22'' \end{cases}$$

Hazlo tú

2 **Resuelve** $\boldsymbol{cos\ \alpha = sen\ 2\alpha}$**.**

$cos\ \alpha = sen\ 2\alpha$

$cos\ \alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha \to cos\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 0 \to cos\ \alpha\ (1 - 2\ sen\ \alpha) = 0$

$$\text{Posibles soluciones: } \begin{cases} cos\ \alpha = 0 \to \alpha_1 = 90°,\ \alpha_2 = 270° \\ 1 - 2\ sen\ \alpha = 0 \to sen\ \alpha = \dfrac{1}{2} \to \alpha_3 = 30°,\ \alpha_4 = 150° \end{cases}$$

Al comprobarlas sobre la ecuación inicial, vemos que las cuatro soluciones son válidas.

Página 141

Hazlo tú

3 **Resuelve** $\boldsymbol{sen\ 3x - sen\ x = 0}$**.**

$sen\ 3x - sen\ x = 0$

$$2\ cos\ \frac{3x + x}{2}\ sen\ \frac{3x - x}{2} = 0 \to 2\ cos\ 2x\ sen\ x = 0 \to cos\ 2x\ sen\ x = 0$$

$$\text{Si } cos\ 2x = 0 \to \begin{cases} 2x = 90° \to x_1 = 45° \\ 2x = 270° \to x_2 = 135° \\ 2x = 90° + 360° = 450° \to x_3 = 225° \\ 2x = 270° + 360° = 630° \to x_4 = 315° \end{cases}$$

Si $sen\ x = 0 \to x_5 = 0°,\ x_6 = 180°$

Piensa y practica

1 **Resuelve.**

a) $\boldsymbol{tg\ \alpha = -\sqrt{3}}$ **b)** $\boldsymbol{sen\ \alpha = cos\ \alpha}$ **c)** $\boldsymbol{sen^2\ \alpha = 1}$ **d)** $\boldsymbol{sen\ \alpha = tg\ \alpha}$

a) $x = 120° + k \cdot 360°$ o bien $x = 300° + k \cdot 360°$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$x = 120° + k \cdot 180° = \frac{2\pi}{3} + k\,\pi \text{ rad} = x \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\,\pi$ rad con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } sen\, x = 1 \;\to\; x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \\ \text{Si } sen\, x = -1 \;\to\; x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad}\end{array}\right\} \to\; x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$\left.\begin{array}{l}\text{O bien } sen\, x = 0 \;\to\; x = k\pi \text{ rad} \\ \text{O bien } cos\, x = 1 \;\to\; x = 2k\pi \text{ rad}\end{array}\right\} \to\; x = k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

2 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $2\, cos^2\, \alpha + cos\, \alpha - 1 = 0$

b) $2\, sen^2\, \alpha - 1 = 0$

c) $tg^2\, \alpha - tg\, \alpha = 0$

d) $2\, sen^2\, \alpha + 3\, cos\, \alpha = 3$

a) $cos\, \alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \;\to\; \alpha_1 = 60°,\; \alpha_2 = 300° \\ -1 \;\to\; \alpha_3 = 180° \end{cases}$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

b) $2\, sen^2\, \alpha - 1 = 0 \;\to\; sen^2\, \alpha = \dfrac{1}{2} \;\to\; sen\, \alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\, \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\to\; \alpha_1 = 45°,\; \alpha_2 = 135°$
- Si $sen\, \alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\to\; \alpha_3 = -45° = 315°,\; \alpha_4 = 225°$

Todas las soluciones son válidas.

c) $tg^2\, \alpha - tg\, \alpha = 0 \;\to\; tg\, \alpha\, (tg\, \alpha - 1) = 0 \;\begin{cases} tg\, \alpha = 0 \;\to\; \alpha_1 = 0°,\; \alpha_2 = 180° \\ tg\, \alpha = 1 \;\to\; \alpha_3 = 45°,\; \alpha_4 = 225° \end{cases}$

Todas las soluciones son válidas.

d) $2\, sen^2\, \alpha + 3\, cos\, \alpha = 3 \;\overset{(*)}{\to}\; 2(1 - cos^2\, \alpha) + 3\, cos\, \alpha = 3$

(*) Como $sen^2\, \alpha + cos^2\, \alpha = 1 \;\to\; sen^2\, \alpha = 1 - cos^2\, \alpha$

$2 - 2\, cos^2\, \alpha + 3\, cos\, \alpha = 3 \;\to\; 2\, cos^2\, \alpha - 3\, cos\, \alpha + 1 = 0$

$cos\, \alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Entonces:

- Si $cos\, \alpha = 1 \;\to\; \alpha_1 = 0°$
- Si $cos\, \alpha = \dfrac{1}{2} \;\to\; \alpha_2 = 60°,\; \alpha_3 = -60° = 300°$

Las tres soluciones son válidas.

3 **Transforma en producto** $sen\, 5\alpha - sen\, 3\alpha$ **y resuelve después la ecuación** $sen\, 5\alpha - sen\, 3\alpha = 0$**.**

$sen\, 5\alpha - sen\, 3\alpha = 0 \;\to\; 2\, cos\, \dfrac{5\alpha + 3\alpha}{2}\, sen\, \dfrac{5\alpha - 3\alpha}{2} = 0 \;\to\; 2\, cos\, \dfrac{8\alpha}{2}\, sen\, \dfrac{2\alpha}{2} = 0 \;\to$

$\to\; 2\, cos\, 4\alpha\, sen\, \alpha = 0 \;\to\; \begin{cases} cos\, 4\alpha = 0 \\ sen\, \alpha = 0 \end{cases}$

- Si $cos\, 4\alpha = 0 \;\to\; \begin{cases} 4\alpha = 90° & \to\; \alpha_1 = 22°\, 30' \\ 4\alpha = 270° & \to\; \alpha_2 = 67°\, 30' \\ 4\alpha = 90° + 36° & \to\; \alpha_3 = 112°\, 30' \\ 4\alpha = 270° + 360° & \to\; \alpha_4 = 157°\, 30' \end{cases}$
- Si $sen\, \alpha = 0 \;\to\; \alpha_5 = 0°,\; \alpha_6 = 180°$

Comprobamos que las seis soluciones son válidas.

4 **Resuelve.**

a) $4 \, cos \, 2x + 3 \, cos \, x = 1$

b) $tg \, 2x + 2 \, cos \, x = 0$

c) $\sqrt{2} \, cos \, (x/2) - cos \, x = 1$

d) $2 \, sen \, x \, cos^2 x - 6 \, sen^3 x = 0$

a) $4 \, cos \, 2\alpha + 3 \, cos \, \alpha = 1 \rightarrow 4 \, (cos^2 \alpha - sen^2 \alpha) + 3 \, cos \, \alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4 \, (cos^2 \alpha - (1 - cos^2 \alpha)) + 3 \, cos \, \alpha = 1 \rightarrow 4 \, (2 \, cos^2 \alpha - 1) + 3 \, cos \, \alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 8 \, cos^2 \alpha - 4 + 3 \, cos \, \alpha = 1 \rightarrow 8 \, cos^2 \alpha + 3 \, cos \, \alpha - 5 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow cos \, \alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0{,}625 \\ -1 \end{cases}$$

- Si $cos \, \alpha = 0{,}625 \rightarrow \alpha_1 = 51° \, 19' \, 4{,}13'', \; \alpha_2 = -51° \, 19' \, 4{,}13''$
- Si $cos \, \alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b) $tg \, 2\alpha + 2 \, cos \, \alpha = 0 \rightarrow \dfrac{2 \, tg \, \alpha}{1 - tg^2 \alpha} + 2 \, cos \, \alpha = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{tg \, \alpha}{1 - tg^2 \alpha} + cos \, \alpha = 0 \rightarrow \frac{\dfrac{sen \, \alpha}{cos \, \alpha}}{1 - \dfrac{sen^2 \alpha}{cos^2 \alpha}} + cos \, \alpha = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{sen \, \alpha \, cos \, \alpha}{cos^2 \alpha - sen^2 \alpha} + cos \, \alpha = 0 \rightarrow sen \, \alpha \, cos \, \alpha + cos \, \alpha \, (cos^2 \alpha - sen^2 \alpha) = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow cos \, \alpha \, (sen \, \alpha + cos^2 \alpha - sen^2 \alpha) = 0 \rightarrow cos \, \alpha \, (sen \, \alpha + 1 - sen^2 \alpha - sen^2 \alpha) \rightarrow$

$\rightarrow cos \, \alpha \, (1 + sen \, \alpha - 2 \, sen^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos \, \alpha = 0 \\ 1 + sen \, \alpha - 2 \, sen^2 \alpha = 0 \rightarrow sen \, \alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

- Si $cos \, \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90°, \; \alpha_2 = 270°$
- Si $sen \, \alpha = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 210°, \; \alpha_4 = 330° = -30°$
- Si $sen \, \alpha = 1 \rightarrow \alpha_5 = 90° = \alpha_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c) $\sqrt{2} \, cos \, \dfrac{\alpha}{2} - cos \, \alpha = 1 \rightarrow \sqrt{2} \sqrt{\dfrac{1 + cos \, \alpha}{2}} - cos \, \alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{1 + cos \, \alpha} - cos \, \alpha = 1 \rightarrow \sqrt{1 - cos \, \alpha} = 1 + cos \, \alpha \rightarrow$

$\rightarrow 1 + cos \, \alpha = 1 + cos^2 \alpha + 2 \, cos \, \alpha \rightarrow cos^2 \alpha + cos \, \alpha = 0 \rightarrow cos \, \alpha \, (cos \, \alpha + 1) = 0$

- Si $cos \, \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90°, \; \alpha_2 = 270°$
- Si $cos \, \alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son: $\alpha_1 = 90°$ y $\alpha_3 = 180°$

d) $2 \, sen \, \alpha \, cos^2 \alpha - 6 \, sen^3 \alpha = 0 \rightarrow 2 \, sen \, \alpha \, (cos^2 \alpha - 3 \, sen^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \, sen \, \alpha \, (cos^2 \alpha + sen^2 \alpha - 4 \, sen^2 \alpha) = 0 \rightarrow 2 \, sen \, \alpha \, (1 - 4 \, sen^2 \alpha) = 0$

- Si $sen \, \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0°, \; \alpha_2 = 180°$
- Si $sen^2 \alpha = \dfrac{1}{4} \rightarrow sen \, \alpha = \pm\dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30°, \; \alpha_4 = 150°, \; \alpha_5 = 210°, \; \alpha_6 = 330°$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

5 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\boldsymbol{sen\ (180° - x) = cos\ (270° - x) + cos\ 180°}$

b) $\boldsymbol{sen\ (45° - x) + \sqrt{2}\ sen\ x = 0}$

a) $sen\ (180° - \alpha) = cos\ (270° - \alpha) + cos\ 180°$

$sen\ 180°\ cos\ \alpha - cos\ 180°\ sen\ \alpha = cos\ 270°\ cos\ \alpha + sen\ 270°\ sen\ \alpha - 1$

$sen\ \alpha = -sen\ \alpha - 1 \ \rightarrow\ 2\ sen\ \alpha = -1 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = -\frac{1}{2} \ \rightarrow\ \alpha_1 = 210°,\ \ \alpha_2 = 330°$

b) $sen\ (45° - \alpha) + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0$

$sen\ 45°\ cos\ \alpha - cos\ 45°\ sen\ \alpha + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} sen\ \alpha + \sqrt{2}\ sen\ \alpha = 0$

$cos\ \alpha - sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ cos\ \alpha + sen\ \alpha = 0$

Dividimos entre $cos\ \alpha$:

$1 + tg\ \alpha = 0 \ \rightarrow\ tg\ \alpha = -1 \ \rightarrow\ \alpha_1 = 135°,\ \ \alpha_2 = 315°$

3 ▶ FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

C.E.: CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.-EA 1.4.3.) **CE 3.1.** (EA 3.1.1.) **CE 4.1.** (EA 4.1.1.)

Página 143

1 **¿Verdadero o falso?**

a) El radián es una medida de longitud equivalente al radio.

b) Un radián es un ángulo algo menor que 60°.

c) Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, un ángulo completo (360°) tiene 2π radianes.

d) 180° es algo menos de 3 radianes.

e) Un ángulo recto mide $\pi/2$ radianes.

a) Falso. El radián es una medida angular, no es una medida de longitud.

b) Verdadero, porque un radián tiene 57° 17' 45''.

c) Verdadero, porque cada radián abarca un arco de longitud r.

d) Falso. 180° es la mitad de un ángulo completo y equivale, por tanto, a π radianes, algo más de 3 radianes.

e) Verdadero. Un ángulo recto es la cuarta parte de un ángulo completo y tiene $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radianes.

2 **Pasa a radianes los siguientes ángulos:**

a) 30° **b) 72°**

c) 90° **d) 127°**

e) 200° **f) 300°**

Expresa el resultado en función de π y luego en forma decimal. Por ejemplo:

$$30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 0{,}52 \text{ rad}$$

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 30° = \frac{\pi}{6}$ rad $\approx 0{,}52$ rad

b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 72° = \frac{2\pi}{5}$ rad $\approx 1{,}26$ rad

c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi}{2}$ rad $\approx 1{,}57$ rad

d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 127° \approx 2{,}22$ rad

e) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 200° = \frac{10\pi}{9}$ rad $\approx 3{,}49$ rad

f) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 300° = \frac{5\pi}{3}$ rad $\approx 5{,}24$ rad

3 **Pasa a grados los siguientes ángulos:**

a) 2 rad **b) 0,83 rad**

c) $\frac{\pi}{5}$ rad **d) $\frac{5\pi}{6}$ rad**

e) 3,5 rad **f) π rad**

a) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 2 = 114°\ 35'\ 29{,}6''$

b) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 0{,}83 = 47°\ 33'\ 19{,}8''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36°$

d) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150°$

e) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 3{,}5 = 200°\ 32'\ 6{,}8''$

f) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \pi = 180°$

4 Cabezas pensantes. **[Antes de completar la tabla el alumnado podrá compartir en pequeños grupos el método que hay que seguir para calcular los valores correctos].**

Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno y añade las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de cada uno de los ángulos:

GRADOS	0°	30°		60°	90°		135°	150°	
RADIANES			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π

GRADOS	210°	225°		270°			330°	360°
RADIANES			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

La tabla completa está en la página 144 del libro de texto.

Página 144

5 **[El alumnado puede explicar a sus compañeros y compañeras por qué cree que las afirmaciones son verdaderas o falsas para trabajar la destreza expresión oral de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) Las funciones trigonométricas son periódicas.

b) Las funciones ***sen*** **y** ***cos*** **tienen un periodo de 2π.**

c) La función ***tg x*** **tiene periodo π.**

d) La función ***cos x*** **es como** ***sen x*** **desplazada $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.**

a) Verdadero. La forma de sus gráficas se repite a lo largo del eje horizontal, cada 2π radianes.

b) Verdadero.

$$\left.\begin{array}{l} sen\,(x+2\pi)=sen\,x \\ cos\,(x+2\pi)=cos\,x \end{array}\right\} \text{ porque } 2\pi \text{ radianes equivalen a una vuelta completa.}$$

c) Verdadero.

$tg\,(x+\pi) = tg\,x$

Podemos observarlo en la gráfica de la función $tg\,x$ en la página 138 del libro de texto.

d) Verdadero. Se puede observar en las gráficas de la página 138 del libro de texto.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 4.1. (EA 4.1.1.) CE 4.2. (EA 4.2.1.)

Página 145

1. Razones trigonométricas de un ángulo a partir de las de otros con los que lo podemos relacionar

Hazlo tú

- **Sabiendo que *sen* 54 = 0,81, halla:**

a) ***cos*** **108°** **b)** ***tg*** **27°**

c) ***sen*** **24°** **d)** ***cos*** **99°**

a) $sen^2\,54° + cos^2\,54° = 1 \;\to\; 0{,}81^2 + cos^2\,54° = 1 \;\to\; cos\,54° = \sqrt{1-0{,}81^2} = 0{,}59$

$cos\,108° = cos\,(2 \cdot 54°) = cos^2\,54° - sen^2\,54° = 0{,}59^2 - 0{,}81^2 = -0{,}31$

b) $tg\,27° = tg\left(\dfrac{54°}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-cos\,54°}{1+cos\,54°}} = \sqrt{\dfrac{1-0{,}59}{1+0{,}59}} = 0{,}51$

c) $sen\,24° = sen\,(54° - 30°) = sen\,54°\,cos\,30° - cos\,54°\,sen\,30° = 0{,}81 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}59 \cdot \dfrac{1}{2} = 0{,}41$

d) $cos\,99° = cos\,(54° + 45°) = cos\,54°\,cos\,45° - sen\,54°\,sen\,45° = 0{,}59 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}81 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}16$

2. Demostración de una identidad trigonométrica

Hazlo tú

- **Demuestra:**

$\boldsymbol{cos\,\alpha\,cos\,(\alpha-\beta) + sen\,\alpha\,sen\,(\alpha-\beta) = cos\,\beta}$

$cos\,\alpha\,cos\,(\alpha-\beta) + sen\,\alpha\,sen\,(\alpha-\beta) =$

$= cos\,\alpha\,(cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\beta) + sen\,\alpha\,(sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta) =$

$= cos^2\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta\,cos\,\alpha + sen^2\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,cos\,\beta\,cos\,\alpha = cos\,\beta\,(cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha) = cos\,\beta$

3. Simplificación de una expresión trigonométrica

Hazlo tú

- **Simplifica:**

$\boldsymbol{sen\,2\alpha - tg\,\alpha\,cos\,2\alpha}$

$sen\,2\alpha - tg\,\alpha\,cos\,2\alpha = 2sen\,\alpha\,cos\,\alpha - tg\,\alpha\,(cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha) = sen\,\alpha\left(2\,cos\,\alpha - cos\,\alpha + \dfrac{sen^2\,\alpha}{cos\,\alpha}\right) = sen\,\alpha\left(cos\,\alpha + \dfrac{sen^2\,\alpha}{cos\,\alpha}\right) =$

$= \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}\,(cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha) = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = tg\,\alpha$

Página 146

4. Resolución de una ecuación trigonométrica factorizable

Hazlo tú

- **Resuelve:**

$\boldsymbol{sen^3\, x - sen\, x\, cos^2\, x} = 0$

Extraemos factor común: $sen\, x(sen^2\, x - cos^2\, x) = 0$

Igualamos a cero cada factor:

$sen\, x = 0 \;\rightarrow\; x = 0° + 360° \cdot k;\;\; x = 180° + 360° \cdot k$

$sen^2\, x - cos^2\, x = 0 \;\rightarrow\; sen^2\, x - (1 - sen^2\, x) = 0 \;\rightarrow\; 2sen^2\, x = 1 \;=\; sen^2\, x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; sen\, x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Si $sen\, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 45° + 360° \cdot k;\;\; x = 135° + 360° \cdot k$

Si $sen\, x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 225° + 360° \cdot k;\;\; x = 315° + 360° \cdot k$

5. Resolución de una ecuación trigonométrica con dos razones de un mismo ángulo

Hazlo tú

- **Resuelve:**

$\boldsymbol{sen\, x + cos\, x} = 1$

Elevamos al cuadrado:

$$cos^2\, x + sen^2\, x + 2\, sen\, x\, cos\, x = 1 \;\rightarrow\; 2\, sen\, x\, cos\, x = 1 \;\rightarrow\; 2\, sen\, x\, cos\, x = 0 \;\rightarrow\; sen\, x\, cos\, x = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; sen\, x = 0 \;\text{ o }\; cos\, x = 0 \;\rightarrow\; x = 0° + k\,180° \;\text{ o }\; x = 90° + k\,180°, k \in \mathbb{Z}$$

6. Resolución de una ecuación trigonométrica con dos ángulos y dos razones

Hazlo tú

- **Resuelve:**

$\boldsymbol{tg^2\, \dfrac{x}{2}} = 1 - \boldsymbol{cos\, x}$

Utilizamos la fórmula de la tangente del ángulo mitad:

$$\left(\sqrt{\frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x}}\right)^2 = 1 - cos\, x \;\rightarrow\; \frac{1 - cos\, x}{1 + cos\, x} = 1 - cos\, x \;\rightarrow\; 1 - cos\, x = 1 - cos^2\, x \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; cos^2\, x - cos\, x = 0 \;\rightarrow\; cos\, x\,(1 - cos\, x) = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \begin{cases} cos\, x = 0 \;\rightarrow\; x = 90° + 360° \cdot k;\;\; x = 270° + 360° \cdot k \\ cos\, x = 1 \;\rightarrow\; x = 0° + 360° \cdot k \end{cases}$$

7. Resolución de una ecuación trigonométrica aplicando las fórmulas de suma de senos y cosenos

Hazlo tú

- $\dfrac{\boldsymbol{cos\, 4x + cos\, 2x}}{\boldsymbol{sen\, 4x - sen\, 2x}} = 1$

Transformamos las sumas en productos:

$$\frac{2\, cos\, \dfrac{4x + 2x}{2}\, cos\, \dfrac{4x - 2x}{2}}{2\, cos\, \dfrac{4x + 2x}{2}\, sen\, \dfrac{4x - 2x}{2}} = 1 \;\rightarrow\; \frac{cos\, x}{sen\, x} = 1 \;\rightarrow\; \frac{1}{tg\, x} = 1 \;\rightarrow\; tg\, x = 1 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; x = 45° + 360° \cdot k;\;\; x = 225° + 360° \cdot k$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 147

1. Razones trigonométricas de $tg\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

- **Conociendo** $cosec\,\alpha = \frac{5}{4}$**,** $90° < \alpha < 180°$**, y** $sec\,\beta = 3$**,** $270° < \beta < 360°$**, calcular** $tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}$ **sin hallar los ángulos** α **y** β**.**

Por su definición sabemos: $cosec\,\alpha = \dfrac{1}{sen\,\alpha} \to sen\,\alpha = \dfrac{4}{5}$

También por definición: $sec\,\beta = \dfrac{1}{cos\,\beta} \to cos\,\beta = \dfrac{1}{3}$

Calcularemos $cos\,\alpha$ y $sen\,\beta$ a partir de la igualdad:

$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$

$cos\,\alpha = -\sqrt{1-sen^2\alpha} = -\sqrt{1-\dfrac{16}{25}} = -\dfrac{3}{5}$ (sabemos que es negativo porque α pertenece al segundo cuadrante).

$sen\,\beta = -\sqrt{1-cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (sabemos que es negativo porque β pertenece al cuarto cuadrante).

Por la fórmula del ángulo mitad:

$$tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos(\alpha+\beta)}{1+cos(\alpha+\beta)}} = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\;sen\,\beta}{1+cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1-\frac{3}{15}+\frac{8\sqrt{2}}{15}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{18-8\sqrt{2}}{15}}{\frac{12+8\sqrt{2}}{15}}} = \sqrt{\frac{2(9-4\sqrt{2})}{2(6+4\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{9-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}}$$

2. Identidades trigonométricas

- **Demostrar:** $\boldsymbol{cos\,3x = 4\,cos^3 x - 3\,cos\,x}$

$$cos\,3x = cos(2x+x) = cos\,2x\,cos\,x - sen\,2x\,sen\,x = (cos^2 x - sen^2 x)\,cos\,x - 2\,sen\,x\,cos\,x\,sen\,x =$$
$$= cos^3 x - sen^2 x\,cos\,x - 2\,sen^2 x\,cos\,x = cos^3 x - 3\,sen^2 x\,cos\,x = cos^3 x - 3(1-cos^2 x)\,cos\,x =$$
$$= cos^3 x - 3cos\,x + 3cos^3 x = 4cos^3 x - 3cos\,x$$

3. Expresiones algebraicas equivalentes

- **Escribir la expresión:** $cos(\alpha+\beta)\,cos(\alpha-\beta)$ **en función de** $cos\,\alpha$ **y** $sen\,\beta$**.**

$$cos(\alpha+\beta)\,cos(\alpha-\beta) = (cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta)(cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta) =$$
$$= cos^2\alpha\,cos^2\beta - sen^2\alpha\,sen^2\beta = cos^2\alpha\,(1-sen^2\beta) - (1-cos^2\alpha)\,sen^2\beta =$$
$$= cos^2\alpha - cos^2\alpha\,sen^2\beta - sen^2\beta + cos^2\alpha\,sen^2\beta = cos^2\alpha - sen^2\beta$$

4. Simplificación de expresiones trigonométricas

- **Simplificar esta expresión: $2\ tg\,\alpha\ cos^2 \frac{\alpha}{2} - sen\,\alpha$**

$$2\ tg\,\alpha\ cos^2 \frac{\alpha}{2} - sen\,\alpha = 2\ tg\,\alpha \left(\pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}\right)^2 - sen\,\alpha = 2\,\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}\cdot\frac{1+cos\,\alpha}{2} - sen\,\alpha =$$

$$= \frac{sen\,\alpha\,(1+cos\,\alpha) - sen\,\alpha\ cos\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha + sen\,\alpha\ cos\,\alpha - sen\,\alpha\ cos\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = tg\,\alpha$$

5. Otras ecuaciones trigonométricas

- **Resolver estas ecuaciones:**

a) $cos^2\,(2x + 30°) = \frac{1}{4}$

b) $4\ sen\,x + 4\ cos^2 x\ tg\,x + tg\,x = 0$

Expresar el resultado obtenido en grados y radianes.

a) $cos\,(2x + 30°) = \pm\frac{1}{2}$

Si $cos\,(2x + 30°) = \frac{1}{2} \to \begin{cases} 2x + 30° = 60° \to x = 15° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 300° \to x = 135° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 60° + 360° \to x = 195° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 300° + 360° \to x = 315° + 360° \cdot k \end{cases}$

Si $cos\,(2x + 30°) = -\frac{1}{2} \to \begin{cases} 2x + 30° = 120° \to x = 45° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 240° \to x = 105° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 120° + 360° \to x = 225° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 240° + 360° \to x = 285° + 360° \cdot k \end{cases}$

b) Si $tg\,x = 0$ entonces $x = 0° + 360° \cdot k$; $x = 180° + 360° \cdot k$ son soluciones de la ecuación, ya que el seno de estos ángulos también es 0.

Si $tg \neq 0$, dividimos entre esta función los dos términos de la ecuación:

$$\frac{4\ sen\,x}{tg\,x} + 4\ cos^2 x + 1 = 0 \to \frac{4\ sen\,x}{\frac{sen\,x}{cos\,x}} + 4\ cos^2 x + 1 = 0 \to 4\ cos^2 x + 4\ cos\,x + 1 = 0 \to$$

$$\to cos\,x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \to x = 120° + 360° \cdot k;\ x = 240° + 360° \cdot k$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 148

Para practicar

Fórmulas trigonométricas

1 **Calcula las razones trigonométricas de 22° 30' a partir de las de 45°.**

$$sen\,(22°\,30') = sen\,\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$cos\,(22°\,30') = cos\,\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$tg\,(22°\,30') = tg\,\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

2 **Si $cos\,78° = 0,2$ y $sen\,37° = 0,6$ halla las razones trigonométricas de 41° y de 115°.**

$41° = 78° - 37°$

- $sen\,78° = \sqrt{1-cos^2\,78°} = \sqrt{1-0,2^2} = 0,98$
- $cos\,37° = \sqrt{1-sen^2\,37°} = \sqrt{1-0,6^2} = 0,8$

Ahora ya podemos calcular:

- $sen\,41° = sen\,(78° - 37°) = sen\,78°\,cos\,37° - cos\,78°\,sen\,37° = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$
- $cos\,41° = cos\,(78° - 37°) = cos\,78°\,cos\,37° + sen\,78°\,sen\,37° = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$
- $tg\,41° = \dfrac{sen\,41°}{cos\,41°} = \dfrac{0,664}{0,748} = 0,8877$
- $sen\,115° = sen\,(78° + 37°) = sen\,78°\,cos\,37° + cos\,78°\,sen\,37° = 0,98 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,904$
- $cos\,115° = cos\,(78° + 37°) = cos\,78°\,cos\,37° - sen\,78°\,sen\,37° = 0,2 \cdot 0,8 - 0,98 \cdot 0,6 = -0,428$
- $tg\,115° = \dfrac{sen\,115°}{cos\,115°} = -\dfrac{0,904}{0,428} = -2,112$

3 **a) Halla el valor exacto de las razones trigonométricas de 75° a partir de las de 30° y 45°.**

b) Utilizando los resultados del apartado a), calcula las razones trigonométricas de 105°; 165°; 15°; 195° y 135°.

a) $sen\,75° = sen\,(30° + 45°) = sen\,30°\,cos\,45° + cos\,30°\,sen\,45° = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$cos\,75° = cos\,(30° + 45°) = cos\,30°\,cos\,45° - sen\,30°\,sen\,45° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$tg\,75° = tg\,(30° + 45°) = \frac{tg\,30° + tg\,45°}{1 - tg\,30°\,tg\,45°} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}} = \sqrt{3}+2$$

b) $sen\ 105° = sen\ (30° + 75°) = sen\ 30°\ cos\ 75° + cos\ 30°\ sen\ 75° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$cos\ 105° = cos\ (30° + 75°) = cos\ 30°\ cos\ 75° - sen\ 30°\ sen\ 75° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 105° = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = -\sqrt{3}-2$$

$sen\ 165° = sen\ (90° + 75°) = sen\ 90°\ cos\ 75° + cos\ 90°\ sen\ 75° = cos\ 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$cos\ 165° = cos\ (90° + 75°) = cos\ 90°\ cos\ 75° - sen\ 90°\ sen\ 75° = -sen\ 75° = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 165° = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \sqrt{3}-2$$

$sen\ 15° = sen\ (90° - 75°) = sen\ 90°\ cos\ 75° - cos\ 90°\ sen\ 75° = cos\ 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$cos\ 15° = cos\ (90° - 75°) = cos\ 90°\ cos\ 75° + sen\ 90°\ sen\ 75° = sen\ 75° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 15° = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = 2-\sqrt{3}$$

$sen\ 195° = sen\ (270° - 75°) = sen\ 270°\ cos\ 75° - cos\ 270°\ sen\ 75° = -cos\ 75° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$cos\ 195° = cos\ (270° - 75°) = cos\ 270°\ cos\ 75° + sen\ 270°\ sen\ 75° = -sen\ 75° = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$tg\ 195° = \frac{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$$

$sen\ 135° = sen\ (180° - 45°) = sen\ 180°\ cos\ 45° - cos\ 180°\ sen\ 45° = sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 135° = cos\ (180° - 45°) = cos\ 180°\ cos\ 45° + sen\ 180°\ sen\ 45° = -cos\ 45° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$tg\ 135° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1$$

4 Sabiendo que $cos\ \alpha = \frac{-7}{25}$ (180° < α < 270°) y $tg\ \beta = \frac{4}{3}$ (180° < β < 270°), calcula $tg\ \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Usamos la relación $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ para calcular $sen\ \alpha$:

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha + \frac{49}{625} = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = \frac{576}{625} \rightarrow sen\ \alpha = -\frac{24}{25}$ porque el ángulo está en el 3.^{er} cuadrante.

$\frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \frac{4}{3} \rightarrow sen\ \beta = \frac{4}{3} cos\ \beta$

$sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow \frac{16}{9} cos^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow \frac{25}{9} cos^2\ \beta = 1 \rightarrow cos^2\ \beta = \frac{9}{25} \rightarrow cos\ \beta = -\frac{3}{5}$ porque también pertenece al tercer cuadrante.

$sen\ \beta = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$

Como 360° < $\alpha + \beta$ < 540°, dividiendo las desigualdades entre 2 tenemos que $180° < \frac{\alpha+\beta}{2} < 270°$.

Por tanto, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ pertenece al tercer cuadrante y la tangente de $\frac{\alpha+\beta}{2}$ es positiva.

Calculamos $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta = \frac{-7}{25} \cdot \frac{-3}{5} - \frac{-24}{25} \cdot \frac{-4}{5} = -\frac{3}{5}$

Por tanto, $tg\ \frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ (\alpha+\beta)}{1 + cos\ (\alpha+\beta)}} = \sqrt{\frac{1-(3/5)}{1+(-3/5)}} = 2$

5 **Si $tg\ \frac{\alpha}{2} = -3$ y $\alpha < 270°$, halla $sen\ \alpha$, $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.**

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = -3 \rightarrow \sqrt{\frac{1-cos\ \alpha}{1+cos\ \alpha}} = -3 \rightarrow \frac{1-cos\ \alpha}{1+cos\ \alpha} = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - cos\ \alpha = 9 + 9\ cos\ \alpha \rightarrow 10\ cos\ \alpha = -8 \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$sen\ \alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$tg\ \alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$$

6 **Si $tg\ 2\alpha = \sqrt{6}$ y $\alpha < 90°$, halla $sen\ \alpha$, $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.**

$$\frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha} = \sqrt{6} \rightarrow 2\ tg\ \alpha = \sqrt{6} - \sqrt{6}\ tg^2\ \alpha \rightarrow \sqrt{6}\ tg^2\ \alpha + 2\ tg\ \alpha - \sqrt{6} = 0 \rightarrow tg\ \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2\sqrt{6}} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$$

Como α está en el primer cuadrante, solo puede darse que $tg\ \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$.

$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}}\ cos\ \alpha$$

$$\left(\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}}\right)^2 cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow \frac{8-2\sqrt{7}}{6}\ cos^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7-\sqrt{7}}{3}\ cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{3}{7-\sqrt{7}} \rightarrow cos\ \alpha = \sqrt{\frac{3}{7-\sqrt{7}}}$$

$$sen\ \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{3}{7-\sqrt{7}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{2(7-\sqrt{7})}}$$

7 **Si sabemos que $cos\ \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$ y que $180° < \alpha < 270°$, halla $cos\ 2\alpha$, sin hallar el ángulo α.**

Nos dicen que el ángulo está en el tercer cuadrante, por lo que su coseno será negativo y el seno también. En cambio $\frac{\alpha}{2}$ estará en el segundo cuadrante y tendrá seno positivo y coseno negativo.

Queremos encontrar $cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha$ por lo que buscaremos $cos\ \alpha$ y $sen\ \alpha$.

Calculamos: $sen\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Por las fórmulas del ángulo medio: $\frac{1}{3} = cos\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\ \alpha}{2}}$

Elevando al cuadrado: $\frac{1}{9} = \frac{1+cos\ \alpha}{2} \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{7}{9}$

Por otra parte: $sen\ \alpha = 2\ sen\ \frac{\alpha}{2}\ cos\ \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

Así podemos volver al principio y sustituir:

$$cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha = \frac{49}{81} - \frac{32}{81} = \frac{17}{81}$$

8 **Transforma las siguientes sumas en productos:**

a) $\boldsymbol{sen\ 65° + sen\ 35°}$ **b)** $\boldsymbol{sen\ 65° - sen\ 35°}$

c) $\boldsymbol{cos\ 48° + cos\ 32°}$ **d)** $\boldsymbol{cos\ 48° - cos\ 32°}$

e) $\boldsymbol{\frac{1}{2} + sen\ 50°}$ **f)** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2} + cos\ 75°}$

a) $sen\ 65° + sen\ 35° = 2\ sen\ \dfrac{65°+35°}{2}\ cos\ \dfrac{65°-35°}{2} = 2\ sen\ 50°\ cos\ 15°$

b) $sen\ 65° - sen\ 35° = 2\ cos\ \dfrac{65°+35°}{2}\ sen\ \dfrac{65°-35°}{2} = 2\ cos\ 50°\ sen\ 15°$

c) $cos\ 48° + cos\ 32° = 2\ cos\ \dfrac{48°+32°}{2}\ cos\ \dfrac{48°-32°}{2} = 2\ cos\ 40°\ cos\ 8°$

d) $cos\ 48° - cos\ 32° = -2\ sen\ \dfrac{48°+32°}{2}\ sen\ \dfrac{48°-32°}{2} = -2\ sen\ 40°\ sen\ 8°$

e) $\dfrac{1}{2} + sen\ 50° = sen\ 30° + sen\ 50° = 2\ sen\ \dfrac{30°+50°}{2}\ cos\ \dfrac{30°-50°}{2} = 2\ sen\ 40°\ cos\ (-10°) = 2\ sen\ 40°\ cos\ 10°$

f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + cos\ 75° = cos\ 45° + cos\ 75° = 2\ cos\ \dfrac{45°+75°}{2}\ cos\ \dfrac{45°-75°}{2} = 2\ cos\ 60°\ cos\ (-15°) = 2\ cos\ 60°\ cos\ 15°$

9 **Calcula el valor exacto de las siguientes expresiones sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora:**

a) $\boldsymbol{cos\ 195° + cos\ 75°}$ **b)** $\boldsymbol{sen\ 195° - sen\ 105°}$

a) $cos\ 195° + cos\ 75° = cos\left(180° + 15°\right) + cos\left(60° + 15°\right) =$

$= cos\ 180°\ cos\ 15° - sen\ 180°\ sen\ 15° + cos\ 60°\ cos\ 15° - sen\ 60°\ sen\ 15° =$

$= -cos\ 15° - 0 + \dfrac{1}{2}\ cos\ 15° - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ sen\ 15° = -\dfrac{1}{2}\ cos\ 15° - \dfrac{\sqrt{3}}{2} sen\ 15° \quad (*)$

Buscamos el valor de $cos\ 15°$ a partir de la fórmula del ángulo mitad:

$$cos\ 15° = \sqrt{\frac{1 + cos\ 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$sen^2\ 15° = 1 - cos^2\ 15° = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \rightarrow sen\ 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Ya podemos sustituir en (*):

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = -0,707$$

b) $sen\ 195° - sen\ 105° = sen\left(180° + 15°\right) - \left(sen\ 90º + 15°\right) =$

$= sen\ 180°\ cos\ 15° + cos\ 180°\ sen\ 15° - \left(sen\ 90°\ cos\ 15° + cos\ 90°\ sen\ 15°\right) =$

$= 0 - sen\ 15° - cos\ 15° - 0 = -\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = -1,225$

Hemos usado los valores calculados en el apartado anterior de *sen* 15° y *cos* 15°.

10 **Si sabemos que *cosec* α = 2,5 y *sec* β =1,25, comprueba, sin hallar los ángulos α y β, que el valor aproximado de *cotg* (α + β) es 0,57.**

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} = 2,5 \rightarrow sen\ \alpha = \frac{1}{2,5} = 0,4$$

Aplicando la igualdad fundamental: $cos\ \alpha = \sqrt{1-0,4^2} = 0,916$

$$sec\ \beta = \frac{1}{cos\ \beta} = 1,25 \rightarrow cos\ \beta = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

Aplicando la igualdad fundamental:

$$sen\ \beta = \sqrt{1-0,8^2} = 0,655$$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0,436$$

$$tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = 0,818$$

Por otro lado sabemos que $cotg\left(\alpha+\beta\right) = \dfrac{1}{tg\left(\alpha+\beta\right)}$ y $tg\left(\alpha+\beta\right) = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ \ tg\ \beta}$:

$$cotg\left(\alpha+\beta\right) = \frac{1}{tg\left(\alpha+\beta\right)} = \frac{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta}{tg\ \alpha + tg\ \beta} = \frac{1-0,436\cdot 0,818}{0,436+0,818} = 0,513$$

11 **Si llamamos *tg* α = *t*, escribe *sen* 2α y *cos* 2α en función de *t*.**

Como $\dfrac{1}{cos^2\ \alpha} = \dfrac{cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \dfrac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} + \dfrac{cos^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = tg^2\ \alpha + 1 = 1 + t^2 \rightarrow cos^2\ \alpha = \dfrac{1}{1+t^2}$

Por la igualdad fundamental:

$$sen^2\ \alpha = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Por las fórmulas del ángulo doble:

$$cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Finalmente, aplicando la igualdad fundamental:

$$sen^2\ 2\alpha = 1 - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = 1 - \frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} = \frac{1+2t^2+t^4-\left(1-2t^2+t^4\right)}{1+2t^2+t^4} = \frac{4t^2}{\left(1+t\right)^2} \rightarrow sen\ 2\alpha = \frac{2t}{1+t}$$

12 **Desarrolla, en función de las razones trigonométricas de α, y simplifica las siguientes expresiones:**

a) $sen\ (45° + \alpha) - cos\ (\alpha - 45°)$

b) $\dfrac{cos\ 2\alpha}{cos\ \alpha + sen\ \alpha}$

c) $cos^2\ \dfrac{\alpha}{2} \cdot sen^2\ \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{4}\ cos^2\ \alpha$

a) $sen\ (45° + \alpha) - cos\ (\alpha - 45°) = sen\ 45°\ cos\ \alpha + cos\ 45°\ sen\ \alpha - (cos\ \alpha\ cos\ 45° + sen\ \alpha\ sen\ 45°) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ \alpha = 0$$

b) $\dfrac{cos\ 2\alpha}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = \dfrac{cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = \dfrac{(cos\ \alpha + sen\ \alpha)\ (cos\ \alpha - sen\ \alpha)}{cos\ \alpha + sen\ \alpha} = cos\ \alpha - sen\ \alpha$

c) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - 2\ sen\ \alpha + cos\ 2\alpha = sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - 2\ sen\ \alpha + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha =$

$$= 2(cos^2\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha)$$

13 **Simplifica estas expresiones:**

a) $\dfrac{cosec\ x}{cotg\ x + tg\ x}$ **b)** $\dfrac{cos^4 x - sen^4 x}{(sen\ x + cos\ x)(sen\ x - cos\ x)}$

a) $$\frac{cosec\ x}{cotg\ x + tg\ x} = \frac{\frac{1}{sen\ x}}{\frac{1}{tg\ x} + tg\ x} = \frac{\frac{1}{sen\ x}}{\frac{1 + tg^2 x}{tg\ x}} = \frac{tg\ x}{sen\ x\left(1 + tg^2 x\right)} = \frac{\frac{sen\ x}{cos\ x}}{sen\ x\left(1 + tg^2 x\right)} =$$

$$= \frac{1}{cos\ x\left(\frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x}\right)} = \frac{1}{cos\ x\left(\frac{1}{cos^2 x}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{cos\ x}} = cos\ x$$

b) $$\frac{cos^4 x - sen^4 x}{(sen\ x + cos\ x)(sen\ x - cos\ x)} = \frac{\left(cos^2 x - sen^2 x\right)\left(cos^2 x + sen^2 x\right)}{sen^2 x - cos^2 x} = -\frac{\left(cos^2 x - sen^2 x\right)\left(cos^2 x + sen^2 x\right)}{-sen^2 x + cos^2 x} =$$

$$= -\left(cos^2 x + sen^2 x\right) = -1$$

Identidades trigonométricas

14 **¿Verdadero o falso? Desarrolla y comprueba.**

a) $sen\ (\alpha + 270°) = -cos\ \alpha$ **b)** $cos\ (270° + \alpha) = sen\ \alpha$

c) $sen\ (270° - \alpha) = cos\ \alpha$ **d)** $cos\ (270° - \alpha) = -sen\ \alpha$

e) **Si** $\alpha + \beta = 120°$, **entonces:** $\dfrac{sen\ \alpha + sen\ \beta}{cos\ \alpha + cos\ \beta} = \sqrt{3}$

a) Falso.

Por la fórmula del ángulo suma: $sen\left(\alpha + 270°\right) = sen\ \alpha\ cos\ 270° + cos\ \alpha\ sen\ 270°$

Como sabemos el seno y coseno de 270°, sustituimos:

$sen\ \alpha\ cos\ 270° + cos\ \alpha\ sen\ 270° = sen\ \alpha \cdot 0 + cos\ \alpha \cdot 1 = cos\ \alpha$

b) Verdadero.

$cos\left(\alpha + 270°\right) = cos\ \alpha\ cos\ 270° - sen\ \alpha\ sen\ 270° = \left(-1\right) sen\ \alpha = cos\ \alpha \cdot 0 - \left(-1 \cdot sen\ \alpha\right) = sen\ \alpha$

c) Falso.

$sen\left(270° - \alpha\right) = sen\ 270°\ cos\ \alpha - cos\ 270°\ sen\ \alpha = -1\ cos\ \alpha - 0 = -\ cos\ \alpha$

d) Verdadero.

$cos\left(270° - \alpha\right) = cos\ 270°\ cos\ \alpha - sen\ 270°\ sen\ \alpha = 0 - 1\ sen\ \alpha = -\ sen\ \alpha$

e) Verdadero.

$$\frac{sen\ \alpha + sen\ \beta}{cos\ \alpha + cos\ \beta} = \frac{2\ sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{2\ cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} = \frac{sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} = \frac{sen\ 60°}{cos\ 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

15 **Demuestra las siguientes identidades teniendo en cuenta las relaciones fundamentales:**

a) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = 4\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

b) $sen\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha = sen\ \alpha$

c) $\dfrac{sen\ \alpha}{1 + cos\ \alpha} + \dfrac{sen\ \alpha}{1 - cos\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ \alpha}$

d) $\dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha} \cdot cos\ 2\alpha = 1 + sen\ 2\alpha$

a) $(sen\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - (sen\ \alpha - cos\ \alpha)^2 = sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - (sen^2\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha) =$

$= sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha - cos^2\ \alpha = 4\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

b) $sen\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha + sen^3\ \alpha = sen\ \alpha\ (cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha) = sen\ \alpha \cdot 1 = sen\ \alpha$

c) $\dfrac{sen\ \alpha}{1 + cos\ \alpha} + \dfrac{sen\ \alpha}{1 - cos\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha - sen\ \alpha\ cos\ \alpha + sen\ \alpha + sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{(1 + cos\ \alpha)\ (1 - cos\ \alpha)} = \dfrac{2\ sen\ \alpha}{1 - cos^2\ \alpha} = \dfrac{2\ sen\ \alpha}{sen^2\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ \alpha}$

d) $\dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha} \cdot cos\ 2\alpha = \dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha}\ (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) = \dfrac{cos\ \alpha + sen\ \alpha}{cos\ \alpha - sen\ \alpha}\ (cos\ \alpha + sen\ \alpha)\ (cos\ \alpha - sen\ \alpha) =$

$= (cos\ \alpha + sen\ \alpha)\ (cos\ \alpha + sen\ \alpha) = cos^2\ \alpha + 2\ cos\ \alpha\ sen\ \alpha + sen^2\ \alpha =$

$= 1 + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha = 1 + sen\ 2\alpha$

16 **Prueba que son verdaderas las identidades siguientes:**

a) $\boldsymbol{cos\ (x + 60°) - cos\ (x + 120°) = cos\ x}$

b) $\boldsymbol{tg\ (x + 45°) - tg\ (x - 45°) = \dfrac{2 + 2\ tg^2\ x}{1 - tg^2\ x}}$

a) $cos\ (x + 60°) - cos\ (x + 120°) = cos\ x\ cos\ 60° - sen\ x\ sen\ 60° - (cos\ x\ cos\ 120° - sen\ x\ sen\ 120°) =$

$= cos\ x\ cos\ 60° - sen\ x\ sen\ 60° - cos\ x\ cos\ 120° + sen\ x\ sen\ 120° =$

$= cos\ x\ cos\ 60° - sen\ x\ sen\ 60° - cos\ x \cdot (-cos\ 60°) + sen\ x\ sen\ 60° =$

$= 2\ cos\ x\ cos\ 60° = 2 \cdot \dfrac{1}{2}\ cos\ x = cos\ x$

b) $tg\ (x + 45°) - tg\ (x - 45°) = \dfrac{tg\ x + tg\ 45°}{1 - tg\ x\ tg\ 45°} - \dfrac{tg\ x - tg\ 45°}{1 + tg\ x\ tg\ 45°} = \dfrac{tg\ x + 1}{1 - tg\ x} - \dfrac{tg\ x - 1}{1 + tg\ x} =$

$= \dfrac{1 + 2\ tg\ x + tg^2\ x - (-1 + 2\ tg\ x - tg^2\ x)}{(1 - tg\ x)\ (1 + tg\ x)} = \dfrac{2 + 2\ tg^2\ x}{1 - tg^2\ x}$

17 **Comprueba que se verifican las dos identidades siguientes:**

a) $\boldsymbol{sen\ \alpha\ sen\ (\alpha + \beta) + cos\ \alpha\ cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \beta}$

b) $\boldsymbol{\dfrac{sen\ (\alpha + \beta)}{sen\ (\alpha - \beta)} = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{tg\ \alpha - tg\ \beta}}$

* ***En b), divide numerador y denominador entre** $\boldsymbol{cos\ \alpha\ cos\ \beta}$.*

a) $sen\ \alpha\ sen\ (\alpha + \beta) + cos\ \alpha\ cos\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ (sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta) + cos\ \alpha\ (cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= sen^2\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ cos\ \alpha\ sen\ \beta + cos^2\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \alpha\ sen\ \beta =$

$= (sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha)\ cos\ \beta = cos\ \beta$

b) $\dfrac{sen\ (\alpha + \beta)}{sen\ (\alpha - \beta)} = \dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta}{sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta} = \dfrac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} =$

$= \dfrac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} + \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} - \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} = \dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{tg\ \alpha - tg\ \beta}$

18 **Demuestra.**

a) $\boldsymbol{cos}\ (\alpha + \beta)\ \boldsymbol{cos}\ (\alpha - \beta) = \boldsymbol{cos}^2\ \beta - \boldsymbol{sen}^2\ \alpha$

b) $\boldsymbol{sen}\ (\alpha + \beta)\ \boldsymbol{sen}\ (\alpha - \beta) = \boldsymbol{sen}^2\ \alpha - \boldsymbol{sen}^2\ \beta$

a) $cos\ (\alpha + \beta)\ cos\ (\alpha - \beta) = (cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta)\ (cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= cos^2\ \alpha\ cos^2\ \beta + cos\ \alpha\ cos\ \beta\ sen\ \alpha\ sen\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta\ cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta =$

$= cos^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = (1 - sen^2\ \alpha)\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ (1 - cos^2\ \beta) =$

$= cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha + sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta = cos^2\ \beta - sen^2\ \alpha$

b) $sen\ (\alpha + \beta)\ sen\ (\alpha - \beta) = (sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta)\ (sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - sen\ \alpha\ cos\ \beta\ cos\ \alpha\ sen\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta\ sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta =$

$= sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha\ (1 - sen^2\ \beta) - (1 - sen^2\ \alpha)\ sen^2\ \beta =$

$= sen^2\ \alpha - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta - sen^2\ \beta + sen^2 \alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha - sen^2 \beta$

19 **Demuestra la igualdad** $\dfrac{\mathbf{1} + \boldsymbol{tg}^2\ (\alpha/2)}{\mathbf{2}\ \boldsymbol{tg}\ (\alpha/2)} = \boldsymbol{cosec}\ \alpha$**.**

$$\frac{1 + tg^2\left(\alpha/2\right)}{2\ tg\left(\alpha/2\right)} = \frac{1 + \left(\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}\right)}{\pm 2\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}} = \frac{\dfrac{1 + cos\ \alpha + 1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}{\pm 2\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}} = \frac{2}{\pm 2\left(1 + cos\ \alpha\right)\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}} = \frac{1}{\pm\left(1 + cos\ \alpha\right)\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}}$$

Si elevamos al cuadrado:

$$\frac{1}{\left(1 + cos\ \alpha\right)^2\left(\dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}\right)} = \frac{1}{\left(1 + cos\ \alpha\right)\left(1 - cos\ \alpha\right)} = \frac{1}{1 - cos^2\ \alpha} = \frac{1}{sen^2\ \alpha} = cosec^2 \alpha$$

Por tanto, la igualdad queda demostrada.

20 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) $\boldsymbol{tg}\ \alpha + \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{tg}\ \alpha} = \dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{sen}\ 2\alpha}$

b) $\mathbf{2}\ \boldsymbol{tg}\ \alpha \cdot \boldsymbol{cos}^2\ \alpha - \boldsymbol{sen}\ \alpha = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos}\ \alpha}$

c) $\boldsymbol{cotg}^2\ \alpha\ -\ \boldsymbol{cos}^2\ \alpha = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{tg}^2\ \alpha} \cdot \boldsymbol{cos}^2\ \alpha$

d) $\dfrac{\mathbf{1} - \boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{x}} - \dfrac{\boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{x}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{x}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{x}}$

e) $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{x}} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{cos}\ \boldsymbol{x}} = \mathbf{2}\ \boldsymbol{cosec}^2 \boldsymbol{x}$

a) $tg\ \alpha + \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} + \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \dfrac{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha}{sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{1}{sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{2}{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \dfrac{2}{sen\ 2\alpha}$

b) Falso.

Basta con comprobar que no se cumple para $\alpha = 0$:

$2tg\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha - sen\ \alpha = \dfrac{2\ sen\ \alpha \cdot cos^2 \alpha}{cos\ \alpha} - sen\ \alpha = 2\ sen\ \alpha \cdot cos\ \alpha - sen\ \alpha$; para $\alpha = 0 \ \to\ 0 - 0\ = 0$

Sin embargo, $\dfrac{1}{cos\ 0°} = 1$.

c) Falso.

$$cotg^2\,\alpha - cos^2\,\alpha = \frac{1}{tg^2\,\alpha} - cos^2\,\alpha = \frac{1}{tg^2\,\alpha}(1 - sen^2\,\alpha\, cos^2\,\alpha)$$

d) Falso.

Igual que en el apartado b) probamos qué pasa para $\alpha = 0$:

$$\frac{1-0}{1} - \frac{1}{1-0} = 1 - 1 = 0$$

Sin embargo, $\frac{1}{cos\,\alpha} = 1$.

e) Verdadero.

$$\frac{1}{1+cos\,\alpha} + \frac{1}{1-cos\,\alpha} = \frac{1 - cos\,\alpha + 1 + cos\,\alpha}{1-cos^2\,\alpha} = \frac{2}{sen^2\,\alpha} = 2\,cosec^2\,\alpha$$

21 **Comprueba, sin utilizar la calculadora, las siguientes igualdades.**

a) $sen\,130° + sen\,50° = 2\,cos\,40°$

b) $cos\,75° - cos\,15° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $sen\,130° + sen\,50° = 2\,sen\,\frac{130°+50°}{2}\,cos\,\frac{130°-50°}{2} = 2\,sen\,90°\,cos\,40° = 2\,cos\,40°$

b) $cos\,75° - cos\,15° = -2\,sen\,\frac{75°+15°}{2}\,sen\,\frac{75°-15°}{2} = -2\,sen\,45°\,sen\,30° = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Página 149

Ángulos en radianes

22 **Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:**

$\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{3\pi}{5}$; **1,5; 3,2**

$\frac{5\pi}{6}\text{ rad} = \frac{5\cdot 180°}{6} = 150°$ $\frac{7\pi}{3}\text{ rad} = \frac{7\cdot 180°}{3} = 420°$ $\frac{4\pi}{9}\text{ rad} = \frac{4\cdot 180°}{9} = 80°$

$\frac{3\pi}{5}\text{ rad} = \frac{3\cdot 180°}{5} = 108°$ $1,5\text{ rad} = \frac{1,5\cdot 180°}{\pi} = 85°\,56'\,37''$ $3,2\text{ rad} = \frac{3,2\cdot 180°}{\pi} = 183°\,20'\,47''$

23 **Pasa a radianes estos ángulos. Exprésalos en función de π:**

135°; 210°; 108°; 72°; 126°; 480°

$$135° = \frac{135\cdot\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}\text{ rad}$$

$$210° = \frac{210\cdot\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}\text{ rad}$$

$$108° = \frac{108\cdot\pi}{180} = \frac{3\pi}{5}\text{ rad}$$

$$72° = \frac{72\cdot\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}\text{ rad}$$

$$126° = \frac{126\cdot\pi}{180} = \frac{7\pi}{10}\text{ rad}$$

$$480° = \frac{480\cdot\pi}{180} = \frac{8\pi}{3}\text{ rad}$$

24 **Prueba que:**

a) $4\ sen\ \frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\ cos\ \frac{\pi}{4} + cos\ \pi = 2$

b) $2\sqrt{3}\ sen\ \frac{2\pi}{3} + 4\ sen\ \frac{\pi}{6} - 2\ sen\ \frac{\pi}{2} = 3$

c) $sen\ \frac{2\pi}{3} - cos\ \frac{7\pi}{6} + tg\ \frac{4\pi}{3} + tg\ \frac{11\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

a) $4\ sen\ \frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\ cos\ \frac{\pi}{4} + cos\ \pi = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $2\sqrt{3}\ sen\ \frac{2\pi}{3} + 4\ sen\ \frac{\pi}{6} - 2\ sen\ \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 2 = 3$

c) $sen\ \frac{2\pi}{3} - cos\ \frac{7\pi}{6} + tg\ \frac{4\pi}{3} + tg\ \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

25 **Halla el valor exacto de cada una de estas expresiones sin utilizar la calculadora:**

a) $5\ cos\ \frac{\pi}{2} - cos\ 0 + 2\ cos\ \pi - cos\ \frac{3\pi}{2} + cos\ 2\pi$

b) $sen\ \frac{\pi}{4} + sen\ \frac{\pi}{2} + sen\ \pi$

c) $cos\ \frac{5\pi}{3} + tg\ \frac{4\pi}{3} - tg\ \frac{7\pi}{6}$

d) $\sqrt{3}\ cos\ \frac{\pi}{6} + sen\ \frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\ cos\ \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\ sen\ \frac{\pi}{3}$

Comprueba los resultados con calculadora.

a) $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b) $\left.\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}\ \right\} \to \mathbf{2\ cos^2\ x - cos^2\ x = 0}$

c) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

26 **[El intercambio de información para decidir el cuadrante en el que se encuentran los ángulos permite trabajar la comunicación (dimensión social)].**

Halla las razones trigonométricas de estos ángulos e indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno:

a) 0,8 rad

b) 3,2 rad

c) 2 rad

d) 4,5 rad

e) $\pi/8$ rad

f) $7\pi/4$ rad

g) $3\pi/5$ rad

h) $1{,}2\pi$ rad

* ***Ten en cuenta:*** $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57;\quad \pi \approx 3{,}14;\quad \frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7;\quad 2\pi \approx 6{,}28$

Para saber en qué cuadrante está cada uno, podemos usar también los signos de las razones trigonométricas.

a) $sen\ 0{,}8 = 0{,}72$ $\quad cos\ 0{,}8 = 0{,}69$ $\quad tg\ 0{,}8 = 1{,}03 \to$ Cuadrante I

b) $sen\ 3{,}2 = -0{,}06$ $\quad cos\ 3{,}2 = -1$ $\quad tg\ 3{,}2 = 0{,}06 \to$ Cuadrante III

c) $sen\ 2 = 0{,}91$ $\quad cos\ 2 = -0{,}42$ $\quad tg\ 2 = -2{,}19 \to$ Cuadrante II

d) $sen\ 4{,}5 = -0{,}98$ $\quad cos\ 4{,}5 = -0{,}21$ $\quad tg\ 4{,}5 = 4{,}64 \to$ Cuadrante III

e) $sen\ \frac{\pi}{8} = 0{,}38$ $\quad cos\ \frac{\pi}{8} = 0{,}92$ $\quad tg\ \frac{\pi}{8} = 0{,}41 \to$ Cuadrante I

f) $sen\ \frac{7\pi}{4} = -0{,}71$ $\quad cos\ \frac{7\pi}{4} = 0{,}71$ $\quad tg\ \frac{7\pi}{4} = -1 \to$ Cuadrante IV

g) $sen\ \frac{3\pi}{5} = 0{,}95$ $\quad cos\ \frac{3\pi}{5} = -0{,}31$ $\quad tg\ \frac{3\pi}{5} = -3{,}08 \to$ Cuadrante II

h) $sen\ 1{,}2\pi = -0{,}59$ $\quad cos\ 1{,}2\pi = -0{,}81$ $\quad tg\ 1{,}2\pi = 0{,}73 \to$ Cuadrante III

27 **En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo α tales que:**

a) $sen\ \alpha = 0,32$

b) $cos\ \alpha = 0,58$

c) $tg\ \alpha = -1,5$

d) $sen\ \alpha = -0,63$

a) $\alpha_1 = 0,33;\ \alpha_2 = 2,82$

b) $\alpha_1 = 0,95;\ \alpha_2 = 5,33$

c) $\alpha_1 = -0,98;\ \alpha_2 = 2,16$

d) $\alpha_1 = -0,68;\ \alpha_2 = 3,82$

Ecuaciones trigonométricas

28 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $2\ sen^2\ x = 1$

b) $3\ tg^2\ x - 1 = 0$

c) $1 - 4\ cos^2\ x = 0$

d) $3\ tg\ x + 4 = 0$

a) $2\ sen^2\ x = 1 \rightarrow sen^2\ x = \frac{1}{2} \rightarrow sen\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45° + 360° \cdot k;\ x = 135° + 360° \cdot k$
- Si $sen\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 225° + 360° \cdot k;\ x = 315° + 360° \cdot k$

Es decir, las soluciones son todos los ángulos del tipo $x = 45° + 90° \cdot k$

b) $3\ tg^2\ x - 1 = 0 \rightarrow tg^2\ x = \frac{1}{3} \rightarrow tg\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

- Si $tg\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 30° + 360° \cdot k;\ x = 210° + 360° \cdot k$
- Si $tg\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 150° + 360° \cdot k;\ x = 330° + 360° \cdot k$

c) $1 - 4\ cos^2\ x = 0 \rightarrow cos^2\ x = \frac{1}{4} \rightarrow cos\ x = \pm\frac{1}{2}$

- Si $cos\ x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60° + 360° \cdot k;\ x = 300° + 360° \cdot k$
- Si $cos\ x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120° + 360° \cdot k;\ x = 240° + 360° \cdot k$

d) $3\ tg\ x + 4 = 0 \rightarrow tg\ x = -\frac{4}{3} \rightarrow x = 126°\ 52'\ 12'' + 360° \cdot k;\ x = 306°\ 52'\ 12'' + 360° \cdot k$

29 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $2\ cos^2\ x - sen^2\ x + 1 = 0$

b) $sen^2\ x - sen\ x = 0$

c) $2\ cos^2\ x - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

d) $2cos^2\ x + sen\ x = 1$

a) $\left.2\ cos^2\ x - \underbrace{sen^2\ x + 1}_{cos^2\ x} = 0\ \right\} \rightarrow 2\ cos^2\ x - cos^2\ x = 0$

$cos^2 = 0 \rightarrow cos\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podemos expresar como:

$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $sen\, x\,(sen\, x - 1) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} sen\, x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180° \\ sen\, x = 1 \;\rightarrow\; x_3 = 90° \end{cases}$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, de otra forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k\,\pi = k \cdot 180° \\ x_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi = 90° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 así incluye las soluciones x_1 y x_2 anteriores)

c) $cos\, x\,(2\, cos\, x - \sqrt{3}) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} cos\, x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270° \\ cos\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; x_3 = 30°,\; x_4 = 330° \end{cases}$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$$

d) $2\,(1 - sen^2\, x) + sen\, x = 1 \;\rightarrow\; 2 - 2\, sen^2\, x + sen\, x = 1 \;\rightarrow\; 2sen^2\, x - sen\, x - 1 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; sen\, x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \;\rightarrow\; x_1 = 90° \\ -1/2 \;\rightarrow\; x_2 = 210°,\; x_3 = 330° \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

30 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $sen\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}$

b) $sen\ 2x-2\ cos^2 x=0$

c) $cos\ 2x-3\ sen\ x+1=0$

d) $sen\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{2}\ sen\ x=0$

a) $sen\frac{\pi}{6}cos\ x-cos\frac{\pi}{6}sen\ x+cos\frac{\pi}{3}cos\ x+sen\frac{\pi}{3}sen\ x=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}cos\ x-\frac{\sqrt{3}}{2}sen\ x+\frac{1}{2}cos\ x+\frac{\sqrt{3}}{2}sen\ x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}cos\ x+\frac{1}{2}cos\ x=\frac{1}{2} \rightarrow cos\ x=\frac{1}{2} \Big\langle \begin{array}{l} x_1=\pi/3 \\ x_2=5\pi/3 \end{array}$$

Comprobamos y vemos que:

$$x_1 \rightarrow sen\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)+cos\ 0=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

$$x_2 \rightarrow sen\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right)=sen\left(-\frac{3\pi}{3}\right)+cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Son válidas las dos soluciones. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi=60°+k\cdot 360° \\ x_2=\frac{5\pi}{3}+2k\pi=300°+k\cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

b) $2\ sen\ x\ cos\ x-2\ cos^2 x=0 \rightarrow 2\ cos\ x(sen\ x-cos\ x)=0 \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} cos\ x=0 \rightarrow x_1=90°,\ x_2=270° \\ sen\ x=cos\ x \rightarrow x_3=45°,\ x_4=225° \end{array}\right.$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas.

$$\left.\begin{array}{l} x_1=90°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x_2=270°+k\cdot 360°=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \\ x_3=45°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x_4=225°+k\cdot 360°=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

También podríamos expresarlas como:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=90°+k\cdot 180°=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x_2=45°+k\cdot 180°=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

c) $cos^2 x-sen^2 x-3\ sen\ x+1=0 \rightarrow 1-sen^2 x-sen^2 x-3\ sen\ x+1=0 \rightarrow$

$\rightarrow 1-2\ sen^2 x-3\ sen\ x+1=0 \rightarrow 2\ sen^2 x+3\ sen\ x-2=0 \rightarrow$

$$\rightarrow sen\ x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}= \Big\langle \begin{array}{l} 1/2 \rightarrow x_1=30°,\ x_2=150° \\ -2 \rightarrow \text{¡Imposible!, pues } |sen\ x|\le 1 \end{array}$$

Comprobamos que la dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=30°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x_2=150°+k\cdot 360°=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

d) $sen\,\frac{\pi}{4}\,cos\,x + cos\,\frac{\pi}{4}\,sen\,x - \sqrt{2}\,sen\,x = 0 \;\rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2}\,cos\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,sen\,x - \sqrt{2}\,sen\,x = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\,cos\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,sen\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x - sen\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x = sen\,x \;\rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{4},\; x_2 = \frac{5\pi}{4}$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi = 45° + k \cdot 360° \\ x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi = 225° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en: $x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi = 45° + k \cdot 180°$ con $k \in \mathbb{Z}$

31 **Lápices al centro. [Esta estrategia puede resultar conveniente para la resolución de las ecuaciones trigonométricas planteadas].**

Resuelve.

a) $cos^2 \frac{x}{2} + cos\,x - \frac{1}{2} = 0$

b) $tg^2 \frac{x}{2} + 1 = cos\,x$

c) $2\,sen^2 \frac{x}{2} + cos\,2x = 0$

d) $4\,sen^2 x\,cos^2 x + 2\,cos^2 x - 2 = 0$

a) $\frac{1 + cos\,x}{2} + cos\,x - \frac{1}{2} = 0 \;\rightarrow\; 1 + cos\,x + 2\,cos\,x - 1 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; 3\,cos\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x = 0 \;\left\langle\begin{array}{l} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{array}\right.$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270 + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones: $x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{1 - cos\,x}{1 + cos\,x} + 1 = cos\,x \;\rightarrow\; 1 - cos\,x + 1 + cos\,x = cos\,x + cos^2 x \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; 2 = cos\,x + cos^2 x \;\rightarrow\; cos^2 x + cos\,x - 2 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; cos\,x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \;\left\langle\begin{array}{l} 1 \;\rightarrow\; x = 0° \\ -2 \;\rightarrow\; \text{¡Imposible, pues } |cos\,x| \le 1 \end{array}\right.$$

Luego: $x = k \cdot 360° = 2k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $2 \cdot \frac{1 - cos\, x}{2} + cos^2\, x - sen^2\, x = 0 \;\to\; 1 - cos\, x + cos^2\, x - (1 - cos^2\, x) = 0 \;\to$

$\to\; 1 - cos\, x + cos^2\, x - 1 + cos^2\, x = 0 \;\to\; 2\, cos^2\, x - cos\, x = 0 \;\to$

$$\to\; cos\, x\,(2\, cos\, x - 1) = 0 \;\to\; \begin{cases} cos\, x = 0 \;\to\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270° \\ cos\, x = 1/2 \;\to\; x_3 = 60°,\; x_4 = 300° \end{cases}$$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_4 = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones quedaría:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_3 = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

d) $4\,(1 - cos^2\, x)\, cos^2\, x + 2\, cos^2\, x - 2 = 0 \;\to\; 4\, cos^2\, x - 4\, cos^4\, x + 2\, cos^2\, x - 2 = 0 \;\to$

$\to\; 4\, cos^4\, x - 6\, cos^2\, x + 2 = 0 \;\to\; 2\, cos^4\, x - 3\, cos^2\, x + 1 = 0$

Sea $cos^2\, x = z \;\to\; cos^4\, x = z^2$

Así:

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \;\to\; z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} z_1 = 1 \;\to\; cos\, x = \pm 1 \\ z_2 = \frac{1}{2} \;\to\; cos\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que todas son válidas. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_4 = 315° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_5 = 135° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_6 = 225° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{4} + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

O, agrupando las soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2} \end{array}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

32 **Transforma estas ecuaciones en otras equivalentes cuya incógnita sea $tg\,x$ y resuélvelas:**

a) $sen\,x + cos\,x = 0$

b) $sen^2\,x - 2\sqrt{3}\,sen\,x\,cos\,x + 3\,cos^2\,x = 0$

c) $sen^2\,x + sen\,x\,cos\,x = 0$

a) Dividimos toda la ecuación entre $cos\,x$:

$$\frac{sen\,x}{cos\,x} + \frac{cos\,x}{cos\,x} = 0 \to tg\,x + 1 = 0 \to tg\,x = -1 \to x = 135° + 360° \cdot k;\ x = 315° + 360° \cdot k$$

b) Dividimos toda la ecuación entre $cos^2\,x$:

$$\frac{sen^2\,x}{cos^2\,x} - 2\sqrt{3}\,\frac{sen\,x\,cos\,x}{cos^2\,x} + 3\,\frac{cos^2\,x}{cos^2\,x} = 0 \to tg^2\,x - 2\sqrt{3}\,tg\,x + 3 = 0 \to$$

$$\to tg\,x = \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{2} = \sqrt{3} \to x = 60° + 360° \cdot k;\ x = 240° + 360° \cdot k$$

c) Dividimos toda la ecuación entre $cos^2\,x$:

$$\frac{sen^2\,x}{cos^2\,x} + \frac{sen\,x\,cos\,x}{cos^2 x} = 0 \to tg^2\,x + tg\,x = 0 \to tg\,x\,(tg\,x + 1) = 0 \to \begin{cases} tg\,x = 0 \\ tg\,x = -1 \end{cases}$$

- Si $tg\,x = 0 \to x = 0° + 360° \cdot k;\ x = 180° + 360° \cdot k$
- Si $tg\,x = -1 \to x = 135° + 360° \cdot k;\ x = 315° + 360° \cdot k$

33 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\sqrt{3}\,cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + cos\,(x - \pi) = 2$

b) $cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + sen\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0$

c) $sen\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$

d) $cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sqrt{3}\,sen\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$

a) $\sqrt{3}\left(cos\,\frac{3\pi}{2}\,cos\,x - sen\,\frac{3\pi}{2}\,sen\,x\right) + cos\,x\,cos\,\pi + sen\,x\,sen\,\pi = 2 \to$

$$\to \sqrt{3}\,sen\,x - cos\,x = 2 \to \sqrt{3}\,sen\,x - 2 = cos\,x$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$3\,sen^2\,x - 4\sqrt{3}\,sen\,x + 4 = cos^2\,x \to 3\,sen^2\,x - 4\sqrt{3}\,sen\,x + 4 = 1 - sen^2\,x \to$$

$$\to 4\,sen^2\,x - 4\sqrt{3}\,sen\,x + 3 = 0 \to sen\,x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to$$

$$\to x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$x = \frac{\pi}{3} \to \sqrt{3} \cdot cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1 \neq 2$ No vale.

$x = \frac{2\pi}{3} \to \sqrt{3} \cdot cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right) = 2$ Vale.

b) $cos\,\frac{5\pi}{6}\,cos\,x + sen\,\frac{5\pi}{6}\,sen\,x + sen\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0 \;\rightarrow\; -\frac{\sqrt{3}\,cos\,x}{2} + \frac{sen\,x}{2} + sen\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; \frac{3}{2}\,sen\,x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,cos\,x$$

Dividimos los dos miembros entre $cos\,x$:

$\frac{3}{2}\,tg\,x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; tg\,x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\; x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot k$

c) $sen\,\frac{\pi}{4}\,cos\,x + cos\,\frac{\pi}{4}\,sen\,x + cos\,\frac{\pi}{4}\,cos\,x - sen\,\frac{\pi}{4}\,sen\,x = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2}(cos\,x + sen\,x + cos\,x - sen\,x) = 1 \;\rightarrow\; 2\,cos\,x = \frac{2}{\sqrt{2}} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; cos\,x = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k;\; x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot k$

d) $cos\,\frac{\pi}{3}\,cos\,x + sen\,\frac{\pi}{3}\,sen\,x - \sqrt{3}\left(sen\,\frac{\pi}{3}\,cos\,x - cos\,\frac{\pi}{3}\,sen\,x\right) = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \frac{cos\,x}{2} + \frac{\sqrt{3}\,sen\,x}{2} - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}\,cos\,x}{2} - \frac{sen\,x}{2}\right) = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; cos\,x + \sqrt{3}\,sen\,x - 3\,cos\,x + \sqrt{3}\,sen\,x = 2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; -2\,cos\,x + 2\sqrt{3}\,sen\,x = 2 \;\rightarrow\; \sqrt{3}\,sen\,x = 1 + cos\,x$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$3\,sen^2\,x = 1 + 2\,cos\,x + cos^2\,x \;\rightarrow\; 3 - 3\,cos^2\,x = 1 + 2\,cos\,x + cos^2\,x \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; 4\,cos^2\,x + 2\,cos\,x - 2 = 0 \;\rightarrow\; 2\,cos^2\,x + cos\,x - 1 = 0 \;\rightarrow\; cos\,x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

- Si $cos\,x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \;\rightarrow\; x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot k$
- Si $cos\,x = -1 \;\rightarrow\; x = \pi + 2\pi \cdot k$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

- Si $x = \frac{\pi}{3} \;\rightarrow\; cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ Vale.
- Si $x = \frac{5\pi}{3} \;\rightarrow\; cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = -2 \neq 1$ No vale.
- Si $x = \pi \;\rightarrow\; cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) - \sqrt{3} \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1$ Vale.

34 **Resuelve.**

a) $\boldsymbol{sen\,\frac{x}{2} + cos\,\frac{x}{2} = \sqrt{2}}$

b) $\boldsymbol{cos\,3x + cos\,x = 2 \cdot cos\,210° \cdot cos\,x}$

c) $\boldsymbol{4\,sen\,\frac{x}{2} + cos\,x = 3}$

a) Aplicamos las fórmulas del ángulo mitad:

$$\sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}} = \sqrt{2}$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{1 - cos\,\alpha}{2} + \frac{1 + cos\,\alpha}{2} + 2\sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}} = 2$$

$$1 + 2\sqrt{\frac{1 - cos^2\,\alpha}{4}} = 2 \;\rightarrow\; 1 + 2\left(\frac{sen\,\alpha}{2}\right) = 2 \;\rightarrow\; sen\,\alpha = 1 \;\rightarrow\; \alpha = 90° + 360°\,k$$

Como hemos elevado al cuadrado debemos comprobar que las soluciones son válidas y observamos que cuando k es impar, el valor de α que resulta no es solución de la ecuación pero cuando k es par, sí que lo es.

Por tanto, la solución es: $\alpha = 90° + 720°\,k$

b) Aplicando las fórmulas de la suma de cosenos:

$2\,cos\,2x \cdot cos\,x = 2\,cos\,210° \cdot cos\,x$

Si $cos\,x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 90° + 180°\,k$

Si $cos\,x \neq 0$:

$2\,cos\,2x = 2\,cos\,210° \;\rightarrow\; cos\,2x = cos\,210°$

Por tanto:

$2x = 210° + 360°\,k \;\rightarrow\; x = 105° + 180°\,k$

Y como $cos\,210° = cos\,150°$:

$2x = 105° + 360°\,k \;\rightarrow\; x = 75° + 180°\,k$

Solución: $x = 90° + 180°$; $x = 105° + 180°\,k$; $x = 75° + 180°\,k$

c) Aplicando la fórmula del ángulo medio y restando $cos\,x$:

$$4\sqrt{\frac{1 - cos\,x}{2}} = 3 - cos\,x$$

Ahora elevamos al cuadrado:

$$\frac{16\,(1 - cos\,x)}{2} = 9 + cos^2\,x - 6\,cos\,x \;\rightarrow\; 8 - 8\,cos\,x - 9 - cos^2\,x + 6\,cos\,x = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; cos^2\,x + 2\,cos\,x + 1 = 0 \;\rightarrow\; cos\,x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = -1 \;\rightarrow\; x = 180° + 360°\,k$$

De nuevo, si comprobamos las soluciones, observamos que para valores impares de k, el valor de x obtenido no es solución de la ecuación mientras que para los valores pares sí que lo es, por tanto, la solución es: $x = 180° + 720°\,k$.

35 **Resuelve transformando en producto.**

a) $\boldsymbol{sen\ 6x - sen\ 4x = 2 \cdot cos\ 60° \cdot sen\ x}$

b) $\boldsymbol{sen\ 5x + sen\ 3x = 2 \cdot sen\ 240° \cdot cos\ x}$

a) Por las fórmulas de la resta de senos:

$2\ cos\ 5x \cdot sen\ x = 2\ cos\ 60° \cdot sen\ x$

Si $sen\ x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 0° + 180°\ k$

Si $sen\ x \neq 0$, dividimos ambos miembros de la ecuación por $sen\ x$:

$2\ cos\ 5x = 2\ cos\ 60° \ \rightarrow\ cos\ 5x = cos\ 60° \ \rightarrow\ 5x = 60° + 360°\ k \ \rightarrow\ x = 12° + 72°\ k$

Como $cos\ 60° = cos\ 300°$:

$2\ cos\ 5x = 2\ cos\ 60° \ \rightarrow\ 2\ cos\ 5x = 2\ cos\ 300° \ \rightarrow\ cos\ 5x = cos\ 300° \ \rightarrow\ 5x = 300° + 360°\ k \ \rightarrow$

$\rightarrow\ x = 60° + 72°\ k$

Solución: $x = 0° + 180\ k$; $x = 12° + 72°\ k$; $x = 60° + 72°\ k$

b) Por la fórmula de la suma de los senos:

$2\ sen\ 4x\ cos\ x = 2\ sen\ 240°\ cos\ x$

Si $cos\ x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 90° + 180°\ k$

Si $cos\ x \neq 0$, dividimos ambos miembros de la ecuación por $cos\ x$:

$2\ sen\ 4x = 2\ sen\ 240° \ \rightarrow\ sen\ 4x = sen\ 240° \ \rightarrow\ 4x = 240° + 360°\ k \ \rightarrow\ x = 60° + 60°\ k$

Como $sen\ 240° = sen\ 300°$:

$sen\ 4x = sen\ 240° \ \rightarrow\ sen\ 4x = sen\ 300° \ \rightarrow\ 4x = 300° + 360°\ k \ \rightarrow\ x = 75° + 90°\ k$

Solución: $x = 90° + 180°\ k$; $x = 60° + 72°\ k$; $x = 75° + 90°\ k$

36 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x + sen^2 y = 2} \\ \boldsymbol{x + cos^2 y = 1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{sen^2 x + cos^2 y = \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{cos^2 x - sen^2 y = \frac{1}{2}} \end{cases}$

* ***Da las soluciones del intervalo [0°, 360°).***

a) De la segunda ecuación sabemos que $x = sen^2\ y$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $sen^2\ y + sen^2\ y = 2 \ \rightarrow\ sen^2\ y = 1 \ \rightarrow\ x = 1$

Por tanto: $1 = sen^2\ y \ \rightarrow\ sen\ y = \pm 1 \ \rightarrow\ y = 90°,\ \ y = 270°$

Soluciones: $x = 1,\ y = 90°$; $x = 1,\ y = 270°$

b) Restamos las ecuaciones (1.ª ecuación – 2.ª ecuación)

$sen^2\ x - cos^2\ x + cos^2\ y + sen^2\ y = 0 \ \rightarrow\ sen^2\ x - cos^2\ x + 1 = 0 \ \rightarrow\ sen^2\ x - \left(1 - sen^2\ x\right) + 1 = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 2\ sen^2\ x = 0 \ \rightarrow\ x = 0°,\ \ x = 180°$

Volviendo a la primera ecuación:

$cos^2\ y = \frac{1}{2} \ \rightarrow\ cos\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Si $cos\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \rightarrow\ y = 45°,\ \ y = 315°$

Si $cos\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ \rightarrow\ y = 135°,\ \ y = 225°$

Soluciones:

$x = 0°,\ y = 45°$	$x = 0°,\ y = 135°$	$x = 0°,\ y = 315°$	$x = 0°,\ y = 225°$
$x = 180°,\ y = 45°$	$x = 180°,\ y = 135°$	$x = 180°,\ y = 315°$	$x = 180°,\ y = 225°$

37 **Elige la respuesta correcta: «Las soluciones de la ecuación** $\boldsymbol{sen\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **en el intervalo [0, 2π) son»:**

a) $\frac{17\pi}{12}$ **y** $\frac{23\pi}{12}$ **b)** $\frac{\pi}{12}$ **y** $\frac{7\pi}{12}$ **c)** $\frac{5\pi}{12}$ **y** $\frac{11\pi}{12}$

Veamos que la solución correcta es a).

Para que se cumpla la igualdad dada se tiene que cumplir:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{6}-x=\dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{\pi}{6}-x=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

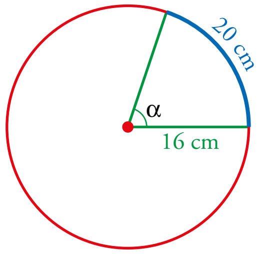
De la primera igualdad: $x=-\frac{\pi}{12}=2\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{23\pi}{12}$

De la segunda igualdad: $x=-7\frac{\pi}{12}=2\pi-\frac{7\pi}{12}=\frac{17}{12}\pi$

Página 150

Para resolver

38 **En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central que corresponde a ese arco en grados y en radianes.**

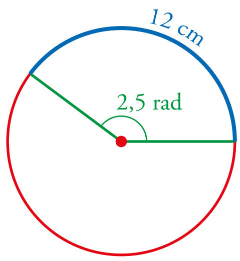


Como la circunferencia completa (100,53 cm) son 2π *rad*, entonces:

$\frac{100,53}{20}=\frac{2\pi}{\alpha}\to\alpha=\frac{20\cdot 2\pi}{100,53}=1,25\ rad$

$\alpha=\frac{360°}{2\pi}\cdot 1,25=71°\ 37'\ 11''$

39 **En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes. ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?**



$\frac{2,5\ rad}{1\ rad}=\frac{12\text{ cm}}{R\text{ cm}}\to R=\frac{12}{2,5}=4,8\text{ cm}$

40 **Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y 2π tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de** $\boldsymbol{\frac{19\pi}{5}}$**.**

Como $\frac{19}{5}=3,8$, el ángulo α dado verifica $2\pi<\alpha<4\pi$, luego tiene más de una vuelta completa y menos de dos vueltas.

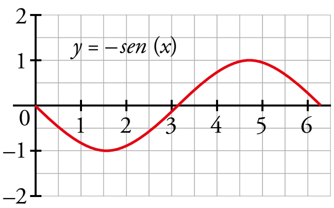
Si le restamos una vuelta (2π) obtendremos el ángulo que nos piden.

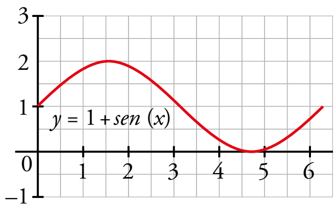
Tiene las mismas razones trigonométricas que el ángulo $\frac{19\pi}{5}-2\pi=\frac{9\pi}{5}$ y $0<\frac{9\pi}{5}\text{ rad}<2\pi$.

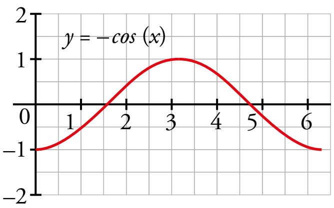
41 **Haz una tabla de valores como la de la página 144 para cada una de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente en el intervalo [0 , 2π):**

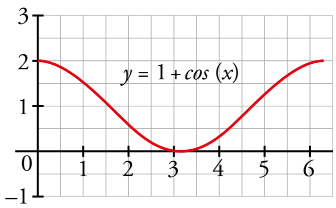
a) $y = -sen\ x$ **b)** $y = 1 + sen\ x$ **c)** $y = -cos\ x$ **d)** $y = 1 + cos\ x$

Grad (°)	rad	–sen x	1 + sen x	–cos x	1 + cos x
0	0	0	1	–1	2
30	π/6	–1/2	3/2	$-\sqrt{3}/2$	$1+\sqrt{3}/2$
45	π/4	$-\sqrt{2}/2$	$1+\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$1+\sqrt{2}/2$
60	π/3	$-\sqrt{3}/2$	$1+\sqrt{3}/2$	–1/2	3/2
90	π/2	–1	2	0	1
120	2π/3	$-\sqrt{3}/2$	$1+\sqrt{3}/2$	1/2	1/2
135	3π/4	$-\sqrt{2}/2$	$1+\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1-\sqrt{2}/2$
150	5π/6	–1/2	3/2	$\sqrt{3}/2$	$1-\sqrt{3}/2$
180	π	0	1	1	0
210	7π/6	1/2	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1-\sqrt{3}/2$
225	5π/4	$\sqrt{2}/2$	$1-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1-\sqrt{2}/2$
240	4π/3	$\sqrt{3}/2$	$1-\sqrt{3}/2$	1/2	1/2
270	3π/2	1	0	0	1
300	5π/3	$\sqrt{3}/2$	$1-\sqrt{3}/2$	–1/2	3/2
315	7π/4	$\sqrt{2}/2$	$1-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$1+\sqrt{2}/2$
330	11π/6	1/2	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$1+\sqrt{3}/2$
360	2π	0	1	–1	2



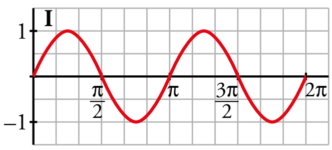


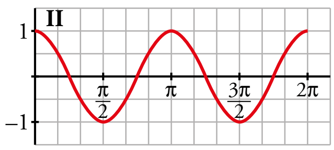


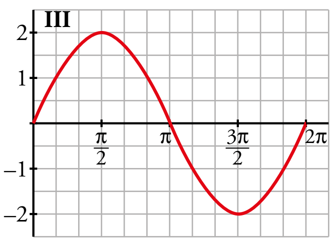


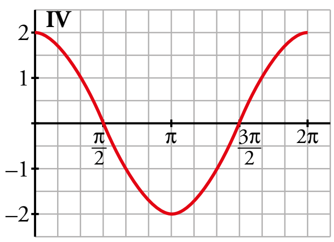
42 **Asocia a cada una de estas funciones su gráfica:**

a) $y = 2\ sen\ x$ **b)** $y = cos\ 2x$ **c)** $y = 2\ cos\ x$ **d)** $y = sen\ 2x$









a) Grafica III.
b) Gráfica II.
c) Gráfica IV.
d) Gráfica I.

43 En un triángulo ABC conocemos $\hat{B} = 45°$ y $cos\,\hat{A} = -1/5$. Calcula, sin hallar los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, las razones trigonométricas del ángulo $\hat{C}$.

Calculamos primero las razones trigonométricas de $\hat{A}$ y de $\hat{B}$.

$$sen^2\,\hat{A} + cos^2\,\hat{A} = 1 \rightarrow sen^2\,\hat{A} + \frac{1}{25} = 1 \rightarrow sen^2\,\hat{A} = \frac{24}{25} \rightarrow sen^2\,\hat{A} = \frac{\sqrt{24}}{5} \text{ ya que } \hat{A} < 180°.$$

$$sen\,\hat{B} = sen\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\ cos\,\hat{B} = cos\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\,\hat{C} = sen\,(180° - (\hat{A} + \hat{B})) = sen\,180°\,cos\,(\hat{A} + \hat{B}) - cos\,180°\,sen\,(\hat{A} + \hat{B}) = sen\,(\hat{A} + \hat{B}) =$$

$$= sen\,\hat{A}\,cos\,\hat{B} + cos\,\hat{A}\,sen\,\hat{B} = \frac{\sqrt{24}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{10}$$

$$cos\,\hat{C} = cos\,(180° - (\hat{A} + \hat{B})) = cos\,180°\,cos\,(\hat{A} + \hat{B}) + sen\,180°\,sen\,(\hat{A} + \hat{B}) = -cos\,(\hat{A} + \hat{B}) =$$

$$= -(cos\,\hat{A}\,cos\,\hat{B} - sen\,\hat{A}\,sen\,\hat{B}) = -\left(-\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{10}$$

$$tg\,\hat{C} = \frac{sen\,\widehat{C}}{cos\,\widehat{C}} = \frac{\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{10}}{\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{10}} = \frac{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{25-4\sqrt{6}}{23}$$

44 Si $sen\,x \cdot cos\,x = 0{,}25$ comprueba sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora, que $tg\,x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Según el enunciado:

$$sen\,x\,cos\,x = 1/4 \rightarrow sen\,x\,\sqrt{1 - sen^2\,x} = 1/4 \rightarrow sen^2\,x\,(1 - sen^2\,x) = 1/16 \rightarrow$$

$$\rightarrow sen^4\,x - sen^2 + 1/16 = 0$$

Obtenemos, por tanto, una ecuación bicuadrada en la que obtenemos como soluciones:

$$sen\,x = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ o bien } sen\,x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Si comprobamos las soluciones en la ecuación inicial, observamos que solo son válidas las soluciones:

$$sen\,x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ o bien } sen\,x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Por otra parte, sabemos:

$$tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x} = \frac{sen\,x}{1/4\,sen\,x} = 4\,sen^2\,x$$

$$\text{Si } sen\,x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \rightarrow tg\,x = 4\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 2-\sqrt{3}$$

$$\text{Si } sen\,x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \rightarrow tg\,x = 4\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 2+\sqrt{3}$$

45 Demuestra estas igualdades:

a) $\dfrac{tg\,\alpha}{tg\,2\alpha - tg\,\alpha} = cos\,2\alpha$ **b)** $sen\,3x = 3sen\,x - 4\,sen^3\,x$

a) $$\frac{tg\,\alpha}{tg\,2\alpha - tg\,\alpha} = \frac{tg\,\alpha}{\frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} - tg\,\alpha} = \frac{tg\,\alpha\,(1 - tg^2\,\alpha)}{2\,tg\,\alpha - tg\,\alpha\,(1 - tg^2\,\alpha)} = \frac{tg\,\alpha\,(1 - tg^2\,\alpha)}{tg\,\alpha + tg^3\,\alpha} = \frac{tg\,\alpha\,(1 - tg^2\,\alpha)}{tg\,\alpha\,(1 + tg^2\,\alpha)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha}}{1 + \frac{sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha}} = \frac{\frac{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha}}{\frac{cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha}} = \frac{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha} = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha = cos\,2\alpha$$

b) $sen\, 3x = 3\, sen\, x - 4\, sen^3\, x \;\rightarrow\; sen\, 3x - sen\, x = 2\, sen\, x - 4\, sen^3\, x$

Podemos aplicar la fórmula de la suma de senos:

$2\, cos\, 2x\, sen\, x = sen\, x\left(2 - 4\, sen^2\, x\right)$

Aplicamos la fórmula del ángulo doble:

$$2\left(cos^2\, x - sen^2\, x\right) sen\, x = sen\, x\left(2 - 4\, sen^2\, x\right) \;\rightarrow\; sen\, x\left(2\, cos^2\, x - 2\, sen^2\, x - 2 + 4\, sen^2\, x\right) = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; sen\, x\left(2\, cos^2\, x + 2\, sen^2\, x - 2\right) = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; sen\, x\left(2 - 2\right) = 0 \;\rightarrow\; 0 = 0$$

Todos los valores de x son solución de la igualdad y, por tanto, es cierta.

46 Simplifica.

a) $\dfrac{2\, cos\,(45° + \alpha)\, cos\,(45° - \alpha)}{cos\, 2\alpha}$ **b)** $sen\, \alpha \cdot cos\, 2\alpha - cos\, \alpha \cdot sen\, 2\alpha$

a) $$\frac{2\, cos\,(45° + \alpha)\, cos\,(45° - \alpha)}{cos\, 2\alpha} = \frac{2\,(cos\, 45°\, cos\, \alpha - sen\, 45°\, sen\, \alpha)\,(cos\, 45°\, cos\, \alpha + sen\, 45°\, sen\, \alpha)}{cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha} =$$
$$= \frac{2\,(cos^2\, 45°\, cos^2\, \alpha - sen^2\, 45°\, sen^2\, \alpha)}{cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha} =$$
$$= \frac{2 \cdot [(\sqrt{2}/2)^2\, cos^2\, \alpha - (\sqrt{2}/2)^2\, sen^2\, \alpha]}{cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha} =$$
$$= \frac{2 \cdot 1/2\, cos^2\, \alpha - 2 \cdot 1/2\, sen^2\, \alpha}{cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha} = \frac{cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha}{cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha} = 1$$

b) $$sen\, \alpha \cdot cos\,(2\alpha) - cos\, \alpha \cdot sen\,(2\alpha) = sen\, \alpha\,(cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha) - cos\, \alpha\, 2\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha =$$
$$= sen\, \alpha\, cos^2\, \alpha - sen^3\, \alpha - 2\, sen\, \alpha\, cos^2\, \alpha = -sen^3\, \alpha - sen\, \alpha\, cos^2\, \alpha =$$
$$= -sen\, \alpha\,(sen^2\, \alpha + cos^2\, \alpha) = -sen\, \alpha$$

47 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\dfrac{sen\, 5x + sen\, 3x}{cos\, x + cos\, 3x} = 1$ **b)** $\dfrac{sen\, 3x + sen\, x}{cos\, 3x - cos\, x} = \sqrt{3}$

c) $sen\, 3x - sen\, x = cos\, 2x$ **d)** $sen\, 3x - cos\, 3x = sen\, x - cos\, x$

a) $$\frac{2\, sen\, \frac{5x + 3x}{2}\, cos\, \frac{5x - 3x}{2}}{2\, cos\, \frac{3x + x}{2}\, cos\, \frac{3x - x}{2}} = 1 \;\rightarrow\; \frac{2\, sen\, 4x\, cos\, x}{2\, cos\, 2x\, cos\, x} = 1 \;\rightarrow\; \frac{sen\, 4x}{cos\, 2x} = 1 \;\rightarrow\; \frac{sen\,(2 \cdot 2x)}{cos\, 2x} = 1 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; \frac{2\, sen\, 2x\, cos\, 2x}{cos\, 2x} = 1 \;\rightarrow\; 2\, sen\, 2x = 1 \;\rightarrow\; sen\, 2x = \frac{1}{2} \;\rightarrow$$
$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 30° \;\rightarrow\; x_1 = 15° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{12} + 2k\,\pi \\ 2x = 150° \;\rightarrow\; x_2 = 75° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\,\pi \\ 2x = 390° \;\rightarrow\; x_3 = 195° + k \cdot 360° = \dfrac{13\pi}{12} + 2k\,\pi \\ 2x = 510° \;\rightarrow\; x_4 = 255° + k \cdot 360° = \dfrac{17\pi}{12} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Al comprobar, vemos que todas las soluciones son válidas.

b) $$\frac{2\, sen\, \frac{3x + x}{2}\, cos\, \frac{3x - x}{2}}{-2\, sen\, \frac{3x + x}{2}\, sen\, \frac{3x - x}{2}} = \sqrt{3} \;\rightarrow\; \frac{2\, sen\, 2x\, cos\, x}{-2\, sen\, 2x\, sen\, x} = \frac{cos\, x}{-sen\, x} = -\frac{1}{tg\, x} = \sqrt{3} \;\rightarrow\; tg\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x_1 = 150° \\ x_2 = 330° \end{array}\right.$$

Ambas soluciones son válidas, luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2\,cos\,\dfrac{3x+x}{2}\,sen\,\dfrac{3x-x}{2} = cos\,2x$

$2\,cos\,2x\,sen\,x = cos\,2x \;\to\; 2\,sen\,x = 1 \;\to\; sen\,x = \dfrac{1}{2} \;\to\; x_1 = 30°,\; x_2 = 150°$

Comprobando, vemos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen\,3x - sen\,x = cos\,3x - cos\,x \;\to\; 2\,cos\,2x\,sen\,x = -2\,sen\,2x\,sen\,x \;\to\;$ (Dividimos entre $2\,sen\,x$)

$$\to\; cos\,2x = -sen\,2x \;\to\; \frac{sen\,2x}{cos\,2x} = -1 \;\to\; tg\,2x = -1 \;\to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} 2x = 315° \;\to\; x_1 = 157,5° + k \cdot 360° \\ 2x = 135° \;\to\; x_2 = 67,5° + k \cdot 360° \\ 2x = 675° \;\to\; x_3 = 337,5° + k \cdot 360° \\ 2x = 495° \;\to\; x_4 = 247,5° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos comprobar que las cuatro soluciones son válidas. Agrupándolas:

$x = 67,5° + k \cdot 90°$ con $k \in \mathbb{Z}$

48 a) Demuestra: $\boldsymbol{sen^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) - sen^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}$

b) Utiliza el resultado del apartado a) para demostrar:

$$\boldsymbol{cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}$$

a) El primer miembro de la igualdad es una diferencia de cuadrados, luego podemos factorizarlo como una suma por una diferencia:

$$\left[sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] \cdot \left[sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] \overset{(*)}{=} \left[2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+cos\,\beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-cos\,\beta}{2}} = \sqrt{(1-cos\,\beta)\,(1+cos\,\beta)\,(1+cos\,\alpha)\,(1-cos\,\beta)} =$$

$$= \sqrt{(1-cos^2\,\alpha)\,(1-cos^2\,\beta)} = \sqrt{sen^2\,\alpha \cdot sen^2\,\beta} = sen\,\alpha\;sen\,\beta$$

(*) Transformamos la suma y la diferencia en productos, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \beta$$

b) Procedemos de manera análoga al apartado anterior, pero ahora:

$$\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} = -\beta$$

$$cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] \cdot \left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[2\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{-\beta}{2}\right] \cdot \left[-2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{-\beta}{2}\right] = \left[2\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+cos\,\beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-cos\,\beta}{2}} = \sqrt{(1-cos^2\,\alpha)\,(1-cos^2\,\beta)} = \sqrt{sen^2\,\alpha \cdot sen^2\,\beta} = sen\,\alpha\;sen\,\beta$$

NOTA: También podríamos haberlo resuelto aplicando el apartado anterior como sigue:

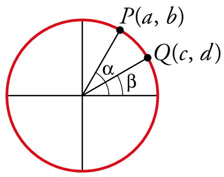
$$cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=1-sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-1+sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\overset{(*)}{=}sen\,\alpha\;sen\,\beta$$

(*) Por el apartado anterior.

49 **En una circunferencia goniométrica dibujamos los ángulos α y β.**

Llamamos $\gamma = \alpha - \beta$.



a) ¿Cuál de estas expresiones es igual a *sen* γ?

I. *ac* + *bd* **II. *bc* – *ad***

III. *ad* – *bc* **IV. *ab* + *cd***

b) ¿Alguna de ellas es igual a *cos* γ?

a) $sen\,\gamma = sen\,(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta = bc - ad$ (II)

b) $cos\,\gamma = cos\,(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta = bd + ac$ (I)

50 **Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:**

a) $\begin{cases} x+y=120° \\ sen\,x - sen\,y = \dfrac{1}{2}\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} sen\,x + cos\,y = 1 \\ x+y=90°\end{cases}$

c) $\begin{cases} sen^2\,x + cos^2\,y = 1 \\ cos^2\,x - sen^2\,y = 1\end{cases}$ **d)** $\begin{cases} sen\,x + cos\,y = 1 \\ 4\,sen\,x\,cos\,y = 1\end{cases}$

a) De la segunda ecuación: $2\,cos\,\dfrac{x+y}{2}\,sen\,\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}$

Como:

$$x+y=120° \;\to\; 2\,cos\,60°\,sen\,\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}\;\to\;2\cdot\frac{1}{2}\,sen\,\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}\;\to$$

$$\to\; sen\,\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}\;\to\;\frac{x-y}{2}=30°\;\to\;x-y=60°$$

Así: $x + y = 120°$

$x - y = 60°$

$2x = 180° \;\to\; x = 90° \;\to\; y = 30°$

Luego la solución es (90°, 30°)

b) $x + y = 90° \;\to$ complementarios $\to\; sen\,x = cos\,y$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$cos\,y + cos\,y = 1 \;\to\; 2\,cos\,y = 1 \;\to\; cos\,y = \frac{1}{2} \;\to\; y = 60° \;\to\; x = 90° - y = 90° - 60° = 30°$$

Luego la solución es: (30°, 60°)

c) Como $\begin{cases} cos^2\,y = 1 - sen^2\,y \\ cos^2\,x = 1 - sen^2 x\end{cases}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} sen^2\,x + 1 - sen^2\,y = 1 \\ 1 - sen^2\,x - sen^2\,y = 1 \end{array}\right\} \;\to\; \left.\begin{array}{r} sen^2\,x - sen^2\,y = 0 \\ \underline{-sen^2\,x - sen^2\,y = 0} \end{array}\right\}$$

$$-2\,sen^2\,y = 0 \;\to\; sen\,y = 0 \;\to\; y = 0°$$

Sustituyendo en la segunda ecuación (por ejemplo) del sistema inicial, se obtiene:

$$cos^2 x - 0 = 1 \ \rightarrow \ cos^2 x = 1 = \begin{cases} cos\ x = 1 \ \rightarrow \ x = 0° \\ cos\ x = -1 \ \rightarrow \ x = 180° \in \text{ 2.º cuadrante} \end{cases}$$

Luego la solución es: (0°, 0°)

d) $\left.\begin{array}{l} sen\ x + cos\ y = 1 \\ 4\ sen\ x\ cos\ y = 1 \end{array}\right\} \ cos\ y = 1 - sen\ x$

$$4\ sen\ x\,(1 - sen\ x) = 1 \ \rightarrow \ 4\ sen^2 x - 4\ sen\ x + 1 = 0 \ \rightarrow \ sen\ x = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ cos\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Las diferentes posibilidades son:

$$\begin{cases} x = 30° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases} \quad \begin{cases} x = 30° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases} \quad \begin{cases} x = 150° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases} \quad \begin{cases} x = 150° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$$

51 **Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo [0, 2π):**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{cos\ x + cos\, y = -1/2} \\ \boldsymbol{cos\ x\ cos\, y = -1/2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = \pi/2} \\ \boldsymbol{\sqrt{3}\ cos\ x - cos\ y = 1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{sen\ (x - y) = 1/2} \\ \boldsymbol{cos\ (x + y)\ = 0} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \boldsymbol{sen\ x + cos\, y = 1/2} \\ \boldsymbol{cosec\ x + sec\ y = -1} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} cos\ x + cos\ y = -\dfrac{1}{2} \\ cos\ x \cdot cos\ y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} cos\ y = -\dfrac{1}{2} - cos\ x \\ cos\ x\left(-\dfrac{1}{2} - cos\ x\right) = -\dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ -\dfrac{1}{2}\,cos\ x - cos^2 x = -\dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ cos\ x + 2\ cos^2 x = 1 \end{array}$

$$2\ cos^2 x + cos\ x - 1 = 0 \ \rightarrow \ cos\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \begin{cases} \dfrac{-1 - 3}{4} = -1 \\ \dfrac{-1 + 3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $cos\ x = -1 \ \rightarrow \ x = \pi$

  $cos\ y = -\dfrac{1}{2} - (-1) = \dfrac{1}{2} \begin{cases} y = \pi/3 \\ y = 5\pi/3 \end{cases}$

- Si $cos\ x = \dfrac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} \ \rightarrow \ cos\ y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = -1 \ \rightarrow \ y = \pi \end{cases}$

  Soluciones: $\left(\pi, \dfrac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \dfrac{5\pi}{3}\right), \left(\dfrac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\dfrac{5\pi}{3}, \pi\right)$

b) $y = \dfrac{\pi}{2} - x$

$$\sqrt{3}\ cos\ x - cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \ \rightarrow \ \sqrt{3}\ cos\ x - cos\ \frac{\pi}{2}\ cos\ x - sen\ \frac{\pi}{2}\ sen\ x = 1 \ \rightarrow \ \sqrt{3}\ cos\ x = sen\ x + 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$3\ cos^2 x = sen^2 x + 2\ sen\ x + 1 \ \rightarrow \ 3\,(1 - sen^2 x) = sen^2 x + 2\ sen\ x + 1 \ \rightarrow \ 4\ sen^2 x + 2\ sen\ x - 2 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 2\ sen^2 x + sen\ x - 1 = 0 \ \rightarrow \ sen\ x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

- Si $sen\ x = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ x = \dfrac{\pi}{6},\ x = \dfrac{5\pi}{6}$

  $x = \dfrac{\pi}{6} \ \rightarrow \ y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ y $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ vale.

  $x = \dfrac{5\pi}{6} \ \rightarrow \ y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3}$ no puede ser porque no está en el intervalo dado.

- Si $sen\ x = -1 \ \rightarrow \ x = \dfrac{3\pi}{2} \ \rightarrow \ y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{2} = -\pi$ tampoco es posible por el mismo motivo.

c) De la primera ecuación tenemos:

$x - y = 30$ o bien $x - y = 150$

De la segunda ecuación tenemos:

$x + y = 90$ o bien $x - y = 180$

Tenemos que resolver 4 sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ x + y = 90 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 120 \rightarrow x = 60 \rightarrow y = 30$

$$\begin{cases} x - y = 150 \\ x + y = 90 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 240 \rightarrow x = 120 \rightarrow y = 330$

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ x + y = 180 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 210 \rightarrow x = 105 \rightarrow y = 75$

$$\begin{cases} x - y = 150 \\ x + y = 180 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones: $2x = 330 \rightarrow x = 165 \rightarrow y = 345$

Soluciones: $x_1 = 60°, y_1 = 30°$; $x_2 = 120°, y_2 = 330°$; $x_3 = 105°, y_3 = 75°$; $x_4 = 165°, y_4 = 345°$

d) De la primera ecuación tenemos que $sen\ x = \frac{1}{2} - cos\ y$, y sustituimos en la segunda ecuación:

$$cosec\ x + sec\ y = -1 \rightarrow \frac{1}{sen\ x} + \frac{1}{cos\ y} = -1 \rightarrow \frac{cos\ y + \frac{1}{2} - cos\ y}{\left(\frac{1}{2} - cos\ y\right) cos\ y} = -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow cos^2\ y - \frac{1}{2} cos\ y - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow cos\ y = 1 \quad \text{o bien} \quad cos\ y = -1/2$$

Si $cos\ y = 1 \rightarrow y = 0$

Si $cos\ y = -1/2 \rightarrow y_1 = 120, y_2 = 240$

Volvemos a la primera ecuación: $sen\ x = \frac{1}{2} - cos\ y$

Si $cos\ y = 1 \rightarrow sen\ x = -1/2 \rightarrow x_1 = 330, x_2 = 210$

Si $cos\ y = -1/2 \rightarrow sen\ x = 1 \rightarrow x = 90$

Soluciones: $x_1 = 330°, y_1 = 0°$; $x_2 = 210°, y_2 = 0°$; $x_3 = 90°, y_3 = 120°$; $x_4 = 90°, y_4 = 240°$

52 Halla los valores de α y β para los que se cumple la igualdad $sen\ (\alpha + \beta) = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \beta$.

Como $sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta$, $sen\ (\alpha + \beta) = 2 sen\ \alpha\ cos\ \beta \rightarrow$

$\rightarrow sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \beta \rightarrow cos\ \alpha\ sen\ \beta = sen\ \alpha\ cos\ \beta$

Esta relación es cierta, obviamente si $\alpha = \beta$.

Por otro lado, dividiendo entre $cos\ \alpha\ cos\ \beta$ se tiene que $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{sen\ \beta}{cos\ \alpha}$, luego los ángulos α y β deben tener la misma tangente.

Esto ocurre cuando $\beta = \alpha + 180° \cdot k$ por la periodicidad de la función $y = tg\ x$.

Si $cos\ \alpha = 0$ entonces $0 = sen\ \alpha\ cos\ \beta \rightarrow cos\ \beta = 0$ ya que $sen\ \alpha = \pm 1$.

Por tanto, la relación también es cierta si α y β son simultáneamente de la forma $90° + 360° \cdot k$ o $270° + 360° \cdot k$.

En resumen, se verifica la igualdad cuando $\beta = \alpha + 180° \cdot k$.

53 **[El docente puede preguntar al alumnado el porqué de sus conclusiones para que trabaje la destreza expresión oral de esta clave].**

Sin desarrollar las razones trigonométricas de la suma o de la diferencia de ángulos, averigua para qué valores de x se verifica cada una de estas igualdades:

a) $sen\ 2x - sen\ (x - 60°) = 0$

b) $cos\ (2x + 60°) - cos\ (x - 45°) = 0$

c) $cos\ (2x - 30°) - cos\ (x + 45°) = 0$

a) $sen\ (x-60°) = sen\ 2x \ \rightarrow\ sen\ 2x - sen\ (x-60°) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ 2\ cos\ \frac{2x+x-60°}{2}\ sen\ \frac{2x-(x-60°)}{2} = 0 \ \rightarrow\ cos\ \frac{3x-60°}{2}\ sen\ \frac{x+60°}{2} = 0$$

- Si $cos\ \dfrac{3x-60°}{2} = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} \dfrac{3x-60°}{2} = 90° \ \rightarrow\ x = 80° + 360° \cdot k \\ \dfrac{3x-60°}{2} = 270° \ \rightarrow\ x = 200° + 360° \cdot k \end{cases}$

  Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\dfrac{3x-60°}{2} = 90° + 360° \ \rightarrow\ x = 320° + 360° \cdot k$

- Si $sen\ \dfrac{x+60°}{2} = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} \dfrac{x+60}{2} = 0° \ \rightarrow\ x = 300° + 360° \cdot k \\ \dfrac{x+60°}{2} = 180° \ \rightarrow\ x = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

b) $cos\ (x-45°) = cos\ (2x+60°) \ \rightarrow\ cos\ (2x+60°) - cos\ (x-45°) = \ 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ -2\ sen\ \frac{2x+60°+x-45°}{2}\ sen\ \frac{2x+60°-(x-45°)}{2} = 0 \ \rightarrow\ sen\ \frac{3x+15°}{2}\ sen\ \frac{x+105°}{2} = 0$$

- Si $sen\ \dfrac{3x+15°}{2} = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} \dfrac{3x+15°}{2} = 0° \ \rightarrow\ x = 355° + 360° \cdot k \\ \dfrac{3x+15°}{2} = 180° \ \rightarrow\ x = 115° + 360° \cdot k \end{cases}$

  Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\dfrac{3x+15°}{2} = 0° + 360° \ \rightarrow\ x = 235° + 360° \cdot k$

- Si $sen\ \dfrac{x+105°}{2} = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} \dfrac{x+105°}{2} = 0° \ \rightarrow\ x = 255° + 360° \cdot k \\ \dfrac{x+105°}{2} = 180° \ \rightarrow\ x = 255° + 360° \cdot k \end{cases}$

c) $cos\ (2x-30°) = cos\ (x+45°) \ \rightarrow\ cos\ (2x-30°) - cos\ (x+45°) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ -2\ sen\ \frac{2x-30°+x+45°}{2}\ sen\ \frac{2x-30°-(x+45°)}{2} = 0 \ \rightarrow\ sen\ \frac{3x+15°}{2}\ sen\ \frac{x-75°}{2} = 0$$

- Si $sen\ \dfrac{3x+15°}{2} = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} \dfrac{3x+15°}{2} = 0° \ \rightarrow\ x = 355° + 360° \cdot k \\ \dfrac{3x+15°}{2} = 180° \ \rightarrow\ x = 115° + 360° \cdot k \end{cases}$

  Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\dfrac{3x+15°}{2} = 0 + 360° \ \rightarrow\ x = 235° + 360° \cdot k$

- Si $sen\ \dfrac{x-75°}{2} = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} \dfrac{x-75°}{2} = 0° \ \rightarrow\ x = 75° + 360° \cdot k \\ \dfrac{x-75°}{2} = 180° \ \rightarrow\ x = 75° + 360° \cdot k \end{cases}$

Página 151

Cuestiones teóricas

54 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) Las gráficas de las funciones $y = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ y de $y = sen\ x$ son iguales.

b) La gráfica de la función $y = cos(x + \pi)$ es igual que la de $y = -cos\ x$.

c) Al duplicarse un ángulo su tangente también se duplica.

d) La ecuación $sec\ x = 2$ no tiene solución.

e) La ecuación $sen\ 3x = -\frac{1}{2}$ tiene seis soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

a) Falso.

Veamos que son distintos, por ejemplo, en $x = \frac{\pi}{4}$:

$$cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Verdadero, porque el signo del coseno cambia cada 180°.

c) Falso, la fórmula del ángulo doble nos dice que no se cumple $tg\,2\alpha = 2tg\,\alpha$.

d) Falso, ya que tiene por ejemplo $\frac{\pi}{3}$ es solución:

$$sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

e) Verdadero.

Sabemos que $sen(3x) = -\frac{1}{2} \rightarrow 3x = 210° + 360°\,k$ o $x = 330° + 360°\,k$

$\rightarrow x = 70° + 120°\,k$ o $x = 110° + 120°\,k$

Por tanto, las soluciones del intervalo [0, 360°) son:

$x = 70°$, $x = 110°$, $x = 190°$, $x = 230°$, $x = 310°$, $x = 330°$

Es decir, la ecuación tiene seis soluciones en el intervalo [0, 360°).

55 **¿En qué puntos del intervalo $[0, 4\pi]$ corta al eje X cada una de las siguientes funciones?:**

a) $y = cos\ \frac{x}{2}$ **b) $y = sen\ (x - \pi)$** **c) $y = cos\ (x + \pi)$**

Los puntos de corte con el eje X son aquellos para los que $y = 0$.

a) $$cos\frac{x}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = 3\pi \end{cases}$$

b) $$sen(x - \pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - \pi = -\pi \rightarrow x = 0 \\ x - \pi = 0 \rightarrow x = \pi \\ x - \pi = \pi \rightarrow x = 2\pi \\ x - \pi = 2\pi \rightarrow x = 3\pi \\ x - \pi = 3\pi \rightarrow x = 4\pi \end{cases}$$

c) $$y = cos(x + \pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + \pi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{5\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{7\pi}{2} \rightarrow x = \frac{5\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{9\pi}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

56 **¿Qué relación existe entre las gráficas de $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$ y la de cada una de las funciones siguientes?:**

a) $y = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $y = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **d)** $y = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

La relación que existe es que la gráfica de la función $y = cos\ x$ está desplazada horizontalmente hacia la izquierda $\frac{\pi}{2}$ unidades respecto de *sen x*.

a) Coincide con la gráfica de la función $y = cos\ x$.
b) Es la gráfica de la función $y = -sen\ x$.
c) Coincide con la gráfica de la función $y = sen\ x$.
d) Coincide con la gráfica de la función $y = cos\ x$.
(Además de comprobarse mediante la representación gráfica, puede probarse fácilmente usando las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma o diferencia de ángulos).

Para profundizar

57 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $cos\ x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $2\ sen\ x + 1 > 0$

a) $cos\ x = -\sqrt{3}/2$ 8 $x = \frac{5\pi}{6},\ x = \frac{7\pi}{6}$

Por tanto, la solución es: $x \in (5\pi/6,\ 7\pi/6)$

b) Resolvemos $2\ sen\ x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{7\pi}{6},\ x = \frac{11\pi}{6}$

Por tanto, la solución es: $x \in (7\pi/6,\ 11\pi/6)$

58 **Demuestra que si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, se verifica: $tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma = tg\ \alpha \cdot tg\ \beta \cdot tg\ \gamma$**

$$tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma = tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ (360° - (\alpha + \beta)) = tg\ \alpha + tg\ \beta + \frac{tg\ 180° - tg\ (\alpha + \beta)}{1 + tg\ 180° \cdot tg\ (\alpha + \beta)} =$$

$$= tg\ \alpha + tg\ \beta - tg\ (\alpha + \beta) = tg\ \alpha + tg\ \beta - \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta - tg^2\ \alpha\ tg\ \beta - tg\ \alpha\ tg^2\ \beta - tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} =$$

$$= \frac{-tg^2\ \alpha\ tg\ \beta - tg\ \alpha\ tg^2 \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} = tg\ \alpha\ tg\ \beta\ \frac{-tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} = tg\ \alpha\ tg\ \beta\ [-tg\ (\alpha + \beta)] =$$

$$= tg\ \alpha\ tg\ \beta\ tg\ (360° - (\alpha + \beta)) = tg\ \alpha\ tg\ \beta\ tg\ \gamma$$

59 **Prueba si existe algún triángulo isósceles en el que el coseno del ángulo distinto sea igual a la suma de los cosenos de los ángulos iguales.**

Si llamamos x a cada uno de los ángulos iguales, entonces el ángulo desigual es $180° - 2x$.

Se trata de ver si la siguiente ecuación tiene solución: $cos\ (180° - 2x) = 2\ cos\ x$

Veámoslo:

$$cos\ 180°\ cos\ 2x + sen\ 180°\ sen\ 2x = 2\ cos\ x \rightarrow -cos\ 2x = 2\ cos\ x \rightarrow -cos^2 x + sen^2 x = 2\ cos\ x \rightarrow$$

$$\rightarrow -cos^2 x + 1 - cos^2 x = 2\ cos\ x \rightarrow 2\ cos^2 x + 2\ cos\ x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow cos\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Si $cos\ x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \rightarrow x = 68°\ 31'\ 45''$ tiene cada uno de los ángulos iguales y el ángulo desigual tiene $180° - 2 \cdot 68°\ 31'\ 45'' = 42°\ 56'\ 30''$

$cos\ x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} > 1$ que no es posible porque el coseno de un ángulo no puede ser mayor que 1.

Luego no existe ningún triángulo con esas condiciones.

60 **[La resolución de los sistemas de ecuaciones planteados permite al alumnado trabajar la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo [0, 2π):

a) $\begin{cases} sen\ x + sen\ y = \sqrt{3}/2 \\ sen^2\ x + sen^2 y = 3/4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} sen\ x \cdot cos\ y = 1/4 \\ cos\ x \cdot sen\ y = 1/4 \end{cases}$

a) Elevamos al cuadrado la primera ecuación:

$sen^2\ x + 2\ sen\ x\ sen\ y + sen^2\ y = \frac{3}{4} \rightarrow 2\ sen\ x\ sen\ y + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow sen\ x\ sen\ y = 0$

Si $sen\ x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pi$

Además, $sen\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{3},\ y = \frac{2\pi}{3}$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{2\pi}{3}\right)$ Valen.

Si $sen\ y = 0 \rightarrow y = 0,\ y = \pi$

Además, $sen\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{2\pi}{3}$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ Valen.

b) Elevamos al cuadrado la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$sen^2\ x\ cos^2\ y = \frac{1}{16} \rightarrow cos^2\ y = \frac{1}{16\ sen^2 x}$

$cos^2\ x\ sen^2\ y = \frac{1}{16} \rightarrow cos^2\ x\,(1 - cos^2\ y) = \frac{1}{16} \rightarrow cos^2\ x\left(1 - \frac{1}{16\ sen^2\ x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow$

$\rightarrow (1 - sen^2\ x)\left(1 - \frac{1}{16\ sen^2\ x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow 1 - \frac{1}{16\ sen^2\ x} - sen^2\ x + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \rightarrow$

$\rightarrow 1 - \frac{1}{16\ sen^2\ x} - sen^2\ x = 0 \rightarrow 16\ sen^2\ x - 1 - 16\ sen^4\ x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 16\ sen^4\ x - 16\ sen^2\ x + 1 = 0 \rightarrow sen^2\ x = \frac{16 + \sqrt{192}}{32} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$

- Si $sen\ x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \rightarrow cos\ y = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

  $x = 75°,\ x = 105°,\ y = 75°,\ y = 285°$

  Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

  (75°, 75°) → Vale.

  (75°, 285°) → No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (105°, 75°) → No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (105°, 285°) → Vale.

- Si $sen\ x = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \rightarrow cos\ y = -\frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

  $x = 285°,\ x = 255°,\ y = 105°,\ y = 255°$

  Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

  (285°, 105°) $\rightarrow$ Vale.

  (285°, 255°) $\rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (255°, 105°) $\rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

  (255°, 255°) $\rightarrow$ Vale.

61 Demuestra que:

a) $sen\ x = \frac{2\ tg\ (x/2)}{1 + tg^2\ (x/2)}$ **b)** $cos\ x = \frac{1 - tg^2\ (x/2)}{1 + tg^2\ (x/2)}$

a) Desarrollamos y operamos en el segundo miembro de la igualdad:

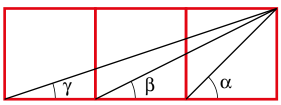
$$\frac{2\ tg\ \frac{x}{2}}{1 + tg^2\ \frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}}{1 + \frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}} = \frac{2\sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}}{\frac{1+cos\ x+1-cos\ x}{1+cos\ x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}}{\frac{2}{1+cos\ x}} = (1+cos\ x)\sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}} =$$

$$= \sqrt{(1+cos\ x)^2\ \frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}} = \sqrt{(1+cos\ x)(1-cos\ x)} = \sqrt{1-cos^2\ x} = \sqrt{sen^2\ x} = sen\ x$$

b) $$\frac{1 - tg^2\ \frac{x}{2}}{1 + tg^2\ \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}{1 + \frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}} = \frac{\frac{1+cos\ x-1+cos\ x}{1+cos\ x}}{\frac{1+cos\ x+1-cos\ x}{1+cos\ x}} = \frac{2\ cos\ x}{2} = cos\ x$$

62 Demuestra que, en la siguiente figura, $\alpha = \beta + \gamma$:



Supongamos que los cuadrados tienen lado l.

Por una parte,

$$tg\ \alpha = \frac{l}{l} = 1$$

Por otro lado,

$$tg\ (\beta + \gamma) = \frac{tg\ \beta + tg\ \gamma}{1 - tg\ \beta\ tg\ \gamma} = \frac{\frac{l}{2l} + \frac{l}{3l}}{1 - \frac{l}{2l} \cdot \frac{l}{3l}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

Así, α y $\beta + \gamma$ son dos ángulos comprendidos entre 0° y 90° cuyas tangentes coinciden. Por tanto, los ángulos tienen que ser iguales, es decir, $\alpha = \beta + \gamma$.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1-EA 1.3.2.) **CE 3.1.** (EA 3.1.1.) **CE 4.2.** (EA 4.2.1.)

Página 151

1 **Expresa los radianes en grados y viceversa.**

a) $\frac{3\pi}{5}$ ***rad*** **b)** **1,4 *rad*** **c)** **140°**

a) 108° b) 80° 13' c) $7\pi/9$

2 **¿Cuánto mide el arco correspondiente a un ángulo de 0,75 radianes en una circunferencia de 12 cm de diámetro?**

Aplicamos la fórmula de la longitud de un arco:

$$L = radio \cdot \alpha(rad) = 6 \cdot 0,75 = 4,5$$

3 **Si** $\boldsymbol{cos\ \alpha = -\frac{1}{4}}$ **y** $\boldsymbol{\alpha < \pi}$**, halla:**

a) $sen\ \alpha$ **b)** $cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$ **c)** $tg\ \frac{\alpha}{2}$ **d)** $sen\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

a) $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 \rightarrow sen^2 \alpha + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow sen^2 \alpha = \frac{15}{16} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ya que el ángulo está en el 2.º cuadrante.

b) $cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = cos\ \frac{\pi}{3}\ cos\ \alpha - sen\ \frac{\pi}{3}\ sen\ \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5} - 1}{8}$

c) $tg\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ porque $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$

d) $sen\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = sen\ \frac{\pi}{6}\ cos\ \alpha - cos\ \frac{\pi}{6}\ sen\ \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5} - 1}{8}$

4 **Demuestra cada una de estas igualdades:**

a) $\boldsymbol{tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}}$

b) $\boldsymbol{sen\ (\alpha + \beta) \cdot sen\ (\alpha - \beta) = sen^2\ \alpha - sen^2\ \beta}$

a) $tg\ 2\alpha = \frac{sen\ 2\alpha}{cos\ 2\alpha} = \frac{2sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos^2 \alpha - sen^2\ \alpha} = \frac{\frac{2sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{cos^2\ \alpha}}{1 - \frac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha}} = \frac{2tg\ \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$

b) $sen\ (\alpha + \beta) \cdot sen\ (\alpha - \beta) = (sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta)\ (sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta) =$

$= sen^2\ \alpha\ cos^2\ \beta - cos^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha\ (1 - sen^2\ \beta) - (1 - sen^2\ \alpha)\ sen^2\ \beta =$

$= sen^2\ \alpha - sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta - sen^2\ \beta + sen^2\ \alpha\ sen^2\ \beta = sen^2\ \alpha - sen^2\ \beta$

5 **Resuelve.**

a) $\boldsymbol{\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1}$ **b)** $\boldsymbol{2\, tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = 1}$

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

$\cos^2 x - sen^2 x - (-sen\, x) = 1 \rightarrow 1 - sen^2 x - sen^2 x + sen\, x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2\, sen^2 x + sen\, x = 0 \rightarrow sen\, x(-2\, sen\, x + 1) = 0 \begin{cases} sen\, x = 0 \rightarrow x = 0°,\ x = 180° \\ sen\, x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30°,\ x = 150° \end{cases}$

Soluciones:

$x_1 = 360° \cdot k;\ x_2 = 180° + 360° \cdot k;\ x_3 = 30° + 360° \cdot k;\ x_4 = 150° + 360° \cdot k,$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $2tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = 1 \rightarrow 2tg\, x \frac{1 + \cos x}{2} - sen\, x = 1 \rightarrow tg\, x + tg\, x \cos x - sen\, x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow tg\, x + \frac{sen\, x}{\cos x} \cos x - sen\, x = 1 \rightarrow tg\, x = 1 \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

6 **a) Simplifica:** $\boldsymbol{\frac{sen\, 5x - sen\, 3x}{\cos 5x + \cos 3x}}$

b) Resuelve: $\boldsymbol{\frac{sen\, 5x - sen\, 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = cotg\, x}$

a) Aplicando las fórmulas de suma y resta de seno y coseno:

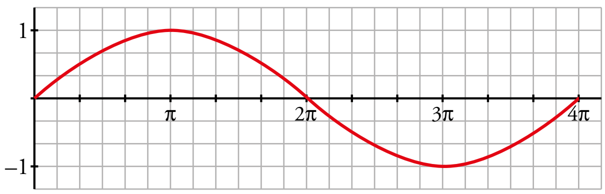
$\frac{sen\, 5x - sen\, 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \frac{2 \cos 4x\, sen\, x}{2 \cos 4x \cos x} = \frac{sen\, x}{\cos x} = tg\, x$

b) Tenemos que resolver $cotg\, x = \frac{sen\, x}{\cos x} \rightarrow \frac{1}{tg\, \alpha} = tg\, \alpha \rightarrow tg^2\, \alpha = 1 \rightarrow tg\, \alpha \pm 1$

$x_1 = 45° + 180°\, k$

$x_2 = 135° + 180°\, k$

7 **Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:**



a) $\boldsymbol{y = \frac{sen\, x}{2}}$ **b)** $\boldsymbol{y = sen\, 2x}$ **c)** $\boldsymbol{y = sen\, \frac{x}{2}}$

La función representada es de periodo 4π y se corresponde con la del apartado c).

Podemos comprobarlo estudiando algunos puntos. Por ejemplo:

$x = \pi \rightarrow y = sen\, \frac{\pi}{2} = 1$

$x = 2\pi \rightarrow y = sen\, \frac{2\pi}{2} = sen\, \pi = 0$

$x = 3\pi \rightarrow y = sen\, \frac{3\pi}{2} = -1$

$x = 4\pi \rightarrow y = sen\, \frac{4\pi}{2} = sen\, 2\pi = 0$

8 **Resuelve dando las soluciones en el intervalo [0°, 360°).**

a) $\begin{cases} sen\ x + sen\ y = 3/2 \\ sen\ x\ sen\ y = 1/2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} sen\ 3x + sen\ y = 3/2 \\ cos\ \dfrac{3x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

a) Aislamos *sen x* en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\left(\frac{3}{2} - sen\ y\right) sen\ y = \frac{1}{2} \rightarrow sen\ y = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{-2} \rightarrow sen\ y = 1 \text{ o } sen\ y = \frac{1}{2}$$

Si $sen\ y = 1 \rightarrow sen\ x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30,\ \ y = 90$ o bien $x = 150,\ \ y = 90$

Si $sen\ y = 1/2 \rightarrow sen\ \ x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \rightarrow x = 90,\ \ y = 30$ o bien $x = 90,\ \ y = 150$

Solución del sistema:

$x_1 = 30° + 360°,\ y_1 = 90° + 360°\ k$

$x_2 = 150° + 360°\ k,\ y_2 = 90° + 360°\ k$

$x_3 = 90° + 360°\ k,\ y_3 = 30° + 360°\ k$

$x_4 = 90° + 360°\ k,\ y_4 = 150° + 360°\ k$

b) Para resolver el sistema, aplicaremos las fórmulas de suma de senos a la primera ecuación:

$$sen\ 3x + sen\ y = 2sen\ \frac{3x+y}{2}\ cos\ \frac{3x-y}{2} = 3/2$$

Ahora podemos sustituir la segunda ecuación en la primera:

$$2\ sen\ \frac{3x+y}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow sen\ \frac{3x+y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{3x+y}{2} = 60° \text{ o bien } \frac{3x+y}{2} = 120°\ (*)$$

Si $\frac{3x+y}{2} = \frac{\pi}{3} \rightarrow y = \frac{2\pi}{3} - 3x$

Y de la segunda ecuación: $cos\ \frac{(3x-y)}{2} = 3/2 \rightarrow \frac{3x-y}{2} = 30°$ o bien $\frac{3x-y}{2} = 330°\ (**)$

Combinamos (*) y (**) para encontrar sus soluciones:

$\begin{cases} \dfrac{3x+y}{2} = 60 \\ \dfrac{3x-y}{2} = 30 \end{cases}$ Solución: $x = 30°,\ y = 30°$

$\begin{cases} \dfrac{3x+y}{2} = 60 \\ \dfrac{3x-y}{2} = 330 \end{cases}$ Solución: $x = 130°,\ y = -270° = 90°$

$\begin{cases} \dfrac{3x+y}{2} = 120 \\ \dfrac{3x-y}{2} = 30 \end{cases}$ Solución: $x = 50°,\ y = 90°$

$\begin{cases} \dfrac{3x+y}{2} = 120 \\ \dfrac{3x-y}{2} = 330 \end{cases}$ Solución: $x = 150°,\ y = -210° = 150°$

$x_1 = 30° + 360°\ k,\ y_1 = 30° + 360°\ k$

$x_2 = 130° + 360°\ k,\ y_2 = 90° + 360°\ k$

$x_3 = 50° + 360°\ k,\ y_3 = 90° + 360°\ k$

$x_4 = 150° + 360°\ k,\ y_4 = 150° + 360°\ k$