

7 VECTORES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.2.) CE 1.8. (EA 1.8.2.-EA 1.8.3.-EA 1.8.4.) CE 1.9. (EA 1.9.1.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2. EA 1.14.3.)

Página 179

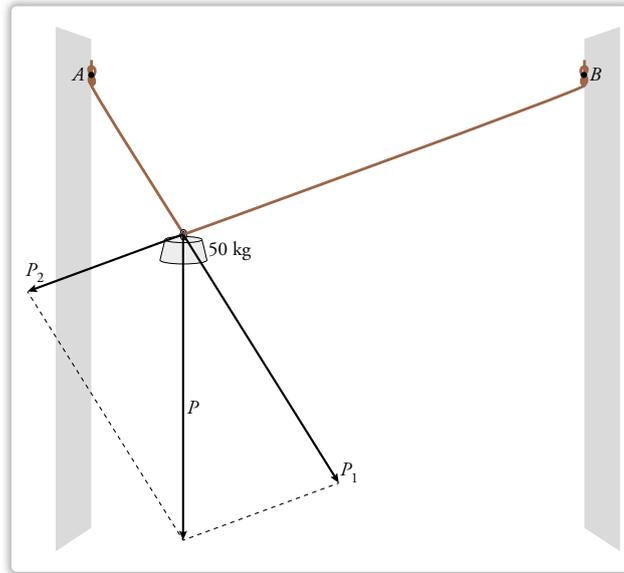
Resuelve

Descomposición de una fuerza

- I. Una cuerda de 10 m de larga cuelga de dos esarpías, A y B, situadas a la misma altura y a 8 m de distancia entre sí. De ella se cuelga una pesa de 50 kg de masa que permanece en equilibrio en un punto situado a 3 m de A y a 7 m de B.

Observa que descomponemos el peso, P , que produce los 50 kg de masa, en dos componentes, P_1 y P_2 , cada una de las cuales tira de uno de los trozos de cuerda.

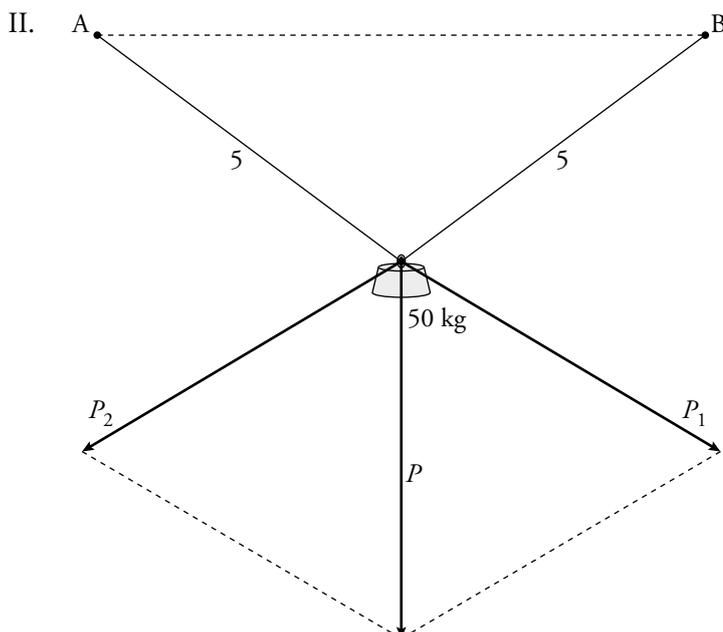
Estima, midiendo y teniendo en cuenta la escala, la magnitud de cada una de las dos componentes del peso.



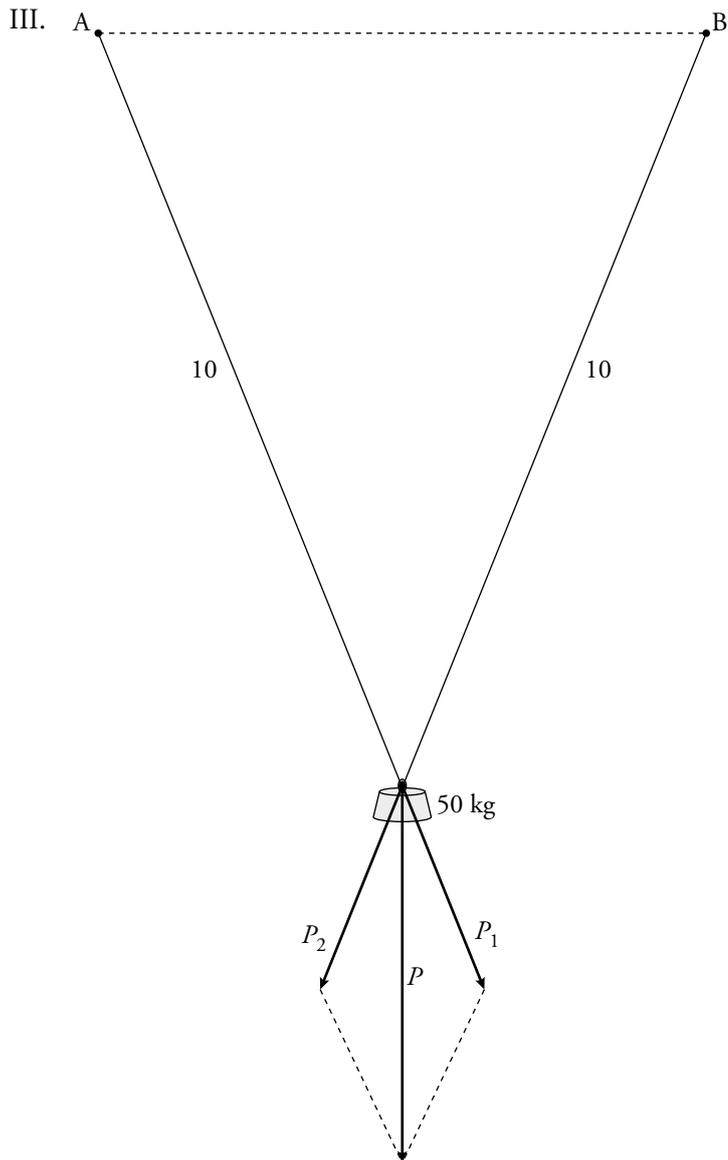
- II. Repite la construcción suponiendo que la masa se coloca simétricamente respecto a las dos esarpías (5 m de cuerda a cada lado). Estima, midiendo, la tracción que, en este caso, debe soportar cada trozo de cuerda.
- III. Vuelve a repetir la construcción para una cuerda de doble longitud y en la que se coloca la pesa simétricamente.

Si la cuerda fuera débil y temieras que pudiera romperse con tracciones fuertes, ¿cuál de las tres situaciones I, II o III te parecería la más adecuada para colgar la pesa?

I. $P = 50 \text{ kg}$ $P_1 = 48 \text{ kg}$ $P_2 = 27 \text{ kg}$



Cada componente del peso es de unos 42 kg.



Cada componente del peso es de unos 27 kg.

Conclusiones: Si la cuerda es débil, tenemos que colgar el peso en el centro y cuanto más larga sea la cuerda, mejor.

2 ▶ COORDENADAS DE UN VECTOR

C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.4.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.-EA 1.14.3.)

Página 183

1 Si $\vec{u}(-2, 5)$ y $\vec{v}(1, -4)$ son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3(-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, \frac{-5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

Página 186

1  **Lápices al centro.** [La estructura en cuatro apartados del ejercicio permite trabajar esta estrategia].

Dados $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(-1, 3)$. Calcula.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

c) El valor de k para que $(4, k)$ sea perpendicular a \vec{v} .

d) La proyección de \vec{u} sobre \vec{v} y su vector proyección.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -4) \cdot (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -15$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-1, 3) \cdot (3, -4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -15$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-15}{5\sqrt{10}} = -0,9486832981 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 161^\circ 33' 54''$

c) $(4, k) \perp (-1, 3) \rightarrow (4, k) \cdot (-1, 3) = 0 \rightarrow -4 + 3k = 0 \rightarrow k = \frac{4}{3}$

Para que $(4, k)$ sea perpendicular a \vec{v} , ha de ser $k = \frac{4}{3}$.

d) $proy_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-15}{\sqrt{10}} = \frac{-15\sqrt{10}}{10} = \frac{-3\sqrt{10}}{2}$

El vector proyección, como $|\vec{v}| = \sqrt{10}$, será: $\frac{-3\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (-1, 3) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 187

1. Producto escalar en bases no ortonormales

Hazlo tú

- Calcula el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$, siendo $\vec{a}(0, 3)$ y $\vec{b}(-1, 1)$ sus coordenadas respecto a la base B .

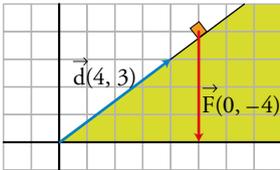
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{v} \cdot (-\vec{u}) + 3\vec{v} \cdot \vec{v} = -3\vec{u} \cdot \vec{v} + 3|\vec{v}|^2 = -9 + 9 = 0$$

Página 188

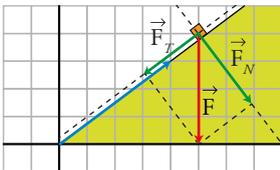
4. Descomponer un vector

Hazlo tú

- Realiza el mismo problema con estos otros datos:



Resolución gráfica:



Resolución analítica:

El vector $\vec{d}(4, 3)$ es paralelo a la rampa y, por tanto, a \vec{F}_T . El vector $\vec{n}(3, -4)$ es perpendicular a \vec{d} y, por tanto, paralelo a \vec{F}_N .

Por ser \vec{F}_T paralelo a $\vec{d}(4, 3)$: $\vec{F}_T = k\vec{d} = (4k, 3k)$, $k \in \mathbb{R}$

Por ser \vec{F}_N paralelo a $\vec{n}(3, -4)$: $\vec{F}_N = h\vec{n} = (3h, -4h)$, $h \in \mathbb{R}$

$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N \rightarrow (0, -4) = (4k, 3k) + (3h, -4h) = (4k + 3h, 3k - 4h)$$

Igualando coordenadas:

$$\begin{cases} 0 = 4k + 3h \\ -4 = 3k - 4h \end{cases}$$

$$\text{Por tanto: } k = -\frac{12}{25}; h = \frac{16}{25}$$

$$\vec{F}_N = \left(\frac{48}{25}, -\frac{64}{25}\right); \vec{F}_T = \left(-\frac{48}{25}, -\frac{36}{25}\right)$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 4.3. (EA 4.3.1.-EA 4.3.2.)

Página 189

1. Obtención de vectores paralelos y perpendiculares a uno dado

• Dado el vector $\vec{v}(9, 12)$, calcular las coordenadas de los siguientes vectores:

- \vec{u} , unitario y de la misma dirección que el vector \vec{v} .
- \vec{w} , ortogonal al vector \vec{v} y del mismo módulo.
- \vec{z} , de módulo 5 y ortogonal a \vec{v} .

a) $|\vec{v}| = \sqrt{81+144} = 15$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{15}(9, 12) = \left(\frac{9}{15}, \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Otra solución: $\vec{u}_2 = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{w}_1 = (-12, 9)$

Otra solución: $\vec{w}_2 = (12, -9)$

c) $|\vec{w}| = \sqrt{144+81} = 15$

$$\vec{z}_1 = 5 \cdot \frac{1}{15}(-12, 9) = (-4, 3)$$

$$\vec{z}_2 = 5 \cdot \frac{1}{15}(12, -9) = (4, -3)$$

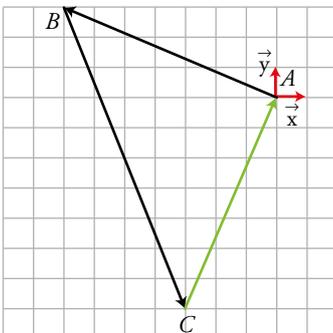
2. Demostración de que un triángulo es isósceles

• Dados $\vec{AB}(-7, 3)$ y $\vec{BC}(4, -10)$, comprobar que el triángulo formado por los vectores \vec{AB} , \vec{BC} y \vec{AC} es isósceles.

- Comparando sus lados.
- Comparando sus ángulos.

Resolución gráfica:

Vemos que el módulo de \vec{AB} es igual al de \vec{AC} y los ángulos $\hat{B} = \hat{C}$. Además, $\hat{A} = 90^\circ$.



Resolución analítica:

Empezamos dibujando el vector $\vec{AB}(-7, 3)$ desde el punto $A(0, 0)$ por lo que $B(-7, 3)$.

Calculamos \vec{AC} como la suma de los vectores que ya tenemos de inicio:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \rightarrow (-7, 3) + (4, -10) = (-3, -7)$$

Ya podemos decir, por sus coordenadas, que \vec{AB} y \vec{AC} son perpendiculares.

Calculemos los módulos de los 3 vectores:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58} = 7,6$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{16+100} = \sqrt{116} = 10,8$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} = 7,6$$

Por lo que el triángulo tiene dos lados iguales.

Como $\hat{A} = 90^\circ$ ya que \vec{AB} y \vec{AC} son perpendiculares, podemos calcular el ángulo en \hat{B} .

$$\cos \hat{B} = \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{BC}|} = \frac{7,6}{10,8} = 0,7 \rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

Y como los ángulos del triángulo deben sumar $180^\circ \rightarrow \hat{C} = 45^\circ$

Hemos comprobado que el triángulo tiene dos lados iguales y también dos ángulos iguales.

3. Cálculo de los módulos de la suma y de la diferencia de dos vectores

- De los vectores \vec{a} y \vec{b} conocemos sus módulos, 1 y $\sqrt{2}$, respectivamente, y sabemos que forman un ángulo de 45° .

Hallar $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$\begin{aligned} a) |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ + 2 = \\ &= 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 5 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ + 2 = \\ &= 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 1 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 1$$

4. Cálculo de ángulos en un rombo

- Los vectores \vec{AB} (6, 8) y \vec{AD} (10, 0) son dos lados contiguos de un rombo.

- Comprobar que sus lados son iguales.
- Comprobar que sus diagonales son perpendiculares.
- Hallar los ángulos interiores del rombo.
- Calcular la longitud de sus diagonales.

$$a) |\vec{AB}| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$|\vec{AD}| = \sqrt{100+0} = \sqrt{100} = 10$$

b) Veamos que:

$$\vec{d}_1 = \vec{AD} + \vec{AB} = (10, 0) + (6, 8) = (16, 8) = \vec{AC}$$

$$\vec{d}_2 = \vec{AB} - \vec{AD} = (6, 8) - (10, 0) = (-4, 8) = \vec{BD}$$

Veamos que son perpendiculares comprobando que su producto escalar es cero:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 16 \cdot 4 + 8 \cdot (-8) = 64 - 64 = 0$$

c) Hallemos el ángulo entre \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AD} , es decir, el \hat{A} según el dibujo:

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{(6,8) \cdot (10,0)}{100} = \frac{60+0}{100} = 0,6 \rightarrow \hat{A} = 53^{\circ} 7' 48''$$

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD}$, calculemos el ángulo en \hat{B} :

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{-AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{-AD}|} = \frac{(6,8) \cdot (-10,0)}{100} = \frac{-60+0}{100} = -0,6 \rightarrow \hat{B} = 126^{\circ} 52' 12''$$

d) $|\vec{d}_1| = |(16, 8)| = \sqrt{16^2 + 8^2} = \sqrt{256 + 64} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$

$$|\vec{d}_2| = |(-4, 8)| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

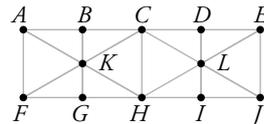
C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 190

Para practicar

Los vectores y sus operaciones

1 Observa la siguiente figura:



a) Compara el módulo, la dirección y el sentido de las siguientes parejas de vectores: \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{IJ} ; \overrightarrow{AH} y \overrightarrow{LC} .

b) Calcula $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}$ y $\overrightarrow{HC} + 2\overrightarrow{CL}$.

c) Completa las siguientes igualdades: $\overrightarrow{LC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{L...}$; $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{H...} = \overrightarrow{HC}$

a) \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{IJ} tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

\overrightarrow{AH} y \overrightarrow{LC} tienen misma dirección, sentido contrario y $|\overrightarrow{AH}| = 2|\overrightarrow{LC}|$.

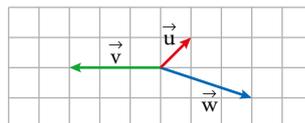
b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{HC} + 2\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{HJ}$

c) $\overrightarrow{LC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{LD}$

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HC}$

2 Sean \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} los siguientes vectores:



Representa en una cuadrícula:

a) $\vec{u} + \vec{v}$

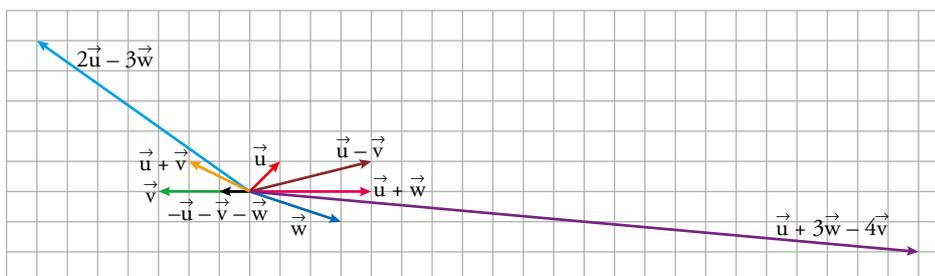
b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $\vec{u} + \vec{w}$

d) $2\vec{u} - 3\vec{w}$

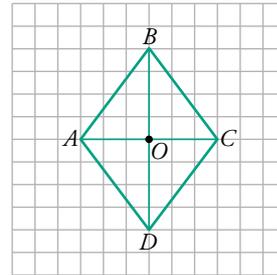
e) $\vec{u} + 3\vec{w} - 4\vec{v}$

f) $-\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$



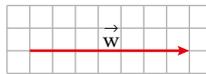
3 Observa el rombo y expresa el resultado de cada suma o resta como se hace en los apartados resueltos a) y b).

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$
- c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$
- d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
- e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- f) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$



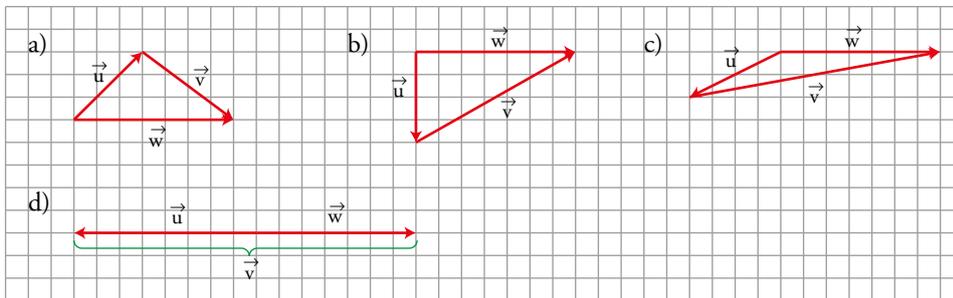
- a) \overrightarrow{AC}
- b) $\vec{0}$
- c) \overrightarrow{DC}
- d) $\vec{0}$
- e) \overrightarrow{AC}
- f) $2\overrightarrow{DC}$

4 Considera el vector \vec{w} :

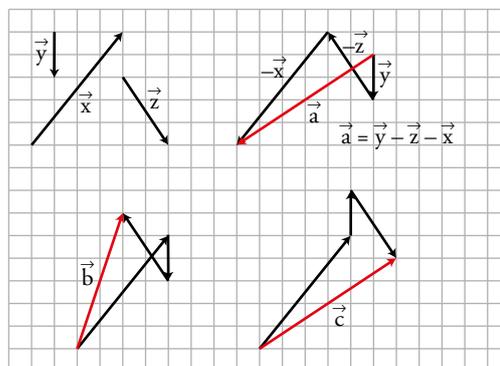


Dibuja en cada uno de estos casos un vector \vec{v} que sumado con \vec{u} dé como resultado \vec{w} :

- a)
- b)
- c)
- d)



5 Hemos obtenido los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} operando con los vectores \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} . ¿Qué operaciones hemos hecho en cada caso?



$$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$$

$$\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$$

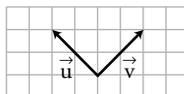
Bases y coordenadas

6 A la vista de la figura, dibuja los vectores:

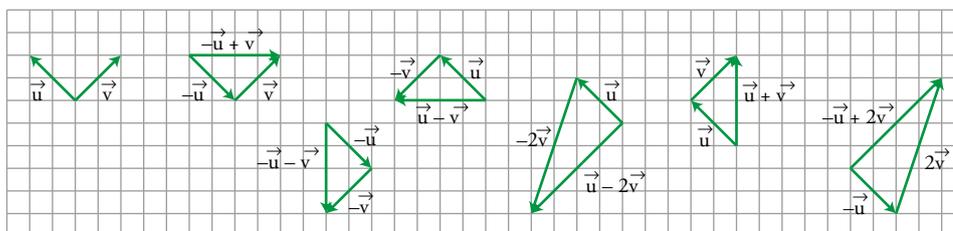
$$\begin{aligned} &-\vec{u} + \vec{v} \\ &-\vec{u} - \vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vec{u} - \vec{v} \\ &-\vec{u} + 2\vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vec{u} + \vec{v} \\ &\vec{u} - 2\vec{v} \end{aligned}$$



Si tomamos como base $B(\vec{u}, \vec{v})$, ¿cuáles son las coordenadas de los vectores que has dibujado?



$$-\vec{u} + \vec{v} = (-1, 1)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (1, -1)$$

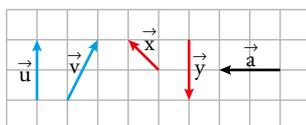
$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$$

$$-\vec{u} - \vec{v} = (-1, -1)$$

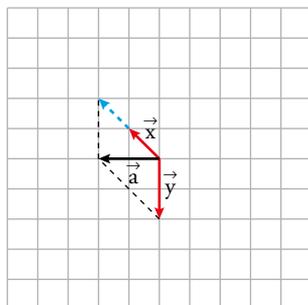
$$-\vec{u} + 2\vec{v} = (-1, 2)$$

$$\vec{u} - 2\vec{v} = (1, -2)$$

7 Escribe el vector \vec{a} como combinación lineal de los vectores \vec{x} e \vec{y} . Escríbelo también como combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} .

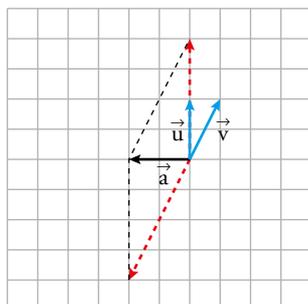


¿Cuáles son las coordenadas de \vec{a} respecto de la base $B(\vec{x}, \vec{y})$? ¿Y respecto de la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$?



$$\vec{a} = 2\vec{x} + \vec{y}$$

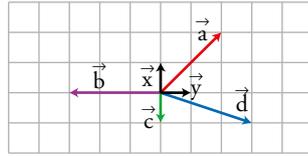
En la base $B(\vec{x}, \vec{y})$, las coordenadas de \vec{a} son $\vec{a} = (2, 1)$.



$$\vec{a} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$$

En la base $B'(\vec{u}, \vec{v})$, las coordenadas de \vec{a} son $\vec{a} = (2, -2)$.

8 Escribe las coordenadas de los vectores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} y \vec{d} respecto de la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.



$$\vec{a} = (2, 2); \vec{b} = (0, -3); \vec{c} = (-1, 0); \vec{d} = (-1, 3)$$

9 ¿En qué casos $B(\vec{u}, \vec{v})$ es una base?

a) $\vec{u}(3, -1), \vec{v}(1, 3)$

b) $\vec{u}(2, 6), \vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

a) Sí, tienen distinta dirección ($\vec{u} \neq k\vec{v}$ para cualquier k). Basta con representarlos gráficamente para comprobarlo.

b) No, pues tienen la misma dirección ($\vec{u} = 3\vec{v}$).

10  1-2-4. [Los alumnos y las alumnas pueden compartir sus respuestas que, seguramente serán diferentes y, posteriormente, debatirlas para encontrar una posición común].

Considera el vector $\vec{u}(-1, -3)$. Escribe un vector \vec{v} para que $B(\vec{u}, \vec{v})$:

a) Sea una base.

b) Sea una base ortogonal.

c) No sea base.

d) Sea una base ortonormal.

a) Para que formen una base sus coordenadas no pueden ser proporcionales. Hay muchas soluciones, pero una de ellas es $\vec{v} = (1, 4)$.

b) Para que sea ortogonal necesitamos que su producto escalar sea igual a cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, -3) \cdot (v_1, v_2) = -v_1 - 3v_2$$

escogemos uno de ellos, por ejemplo $\vec{v} = (-3, 1)$.

c) Para que no formen una base, sus coordenadas tienen que ser proporcionales. Hay muchas soluciones, pero una de ellas es $\vec{v} = (2, 6)$.

d) Para que sea ortonormal necesitamos que sea ortogonal y que su módulo sea 1. Cogemos la base de b) y solamente necesitamos dividirlos entre su módulo:

$$\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{1+9}} (-1, -3) = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}} \right)$$

$$\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{9+1}} (-3, 1) = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

Página 191

11 Dados los vectores $\vec{u}(3, -5)$ y $\vec{v}(-2, 1)$, calcula:

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

b) $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a) $-2(3, -5) + \frac{1}{2}(-2, 1) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{21}{2}\right)$

b) $\frac{1}{2}[(3, -5) + (-2, 1)] - \frac{2}{3}[(3, -5) - (-2, 1)] = \frac{1}{2}(1, -4) - \frac{2}{3}(5, -6) = \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right)$

12 Halla el vector \vec{b} tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1, 3)$ y $\vec{c}(7, -2)$.

$$(7, -2) = 3(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \rightarrow \begin{cases} 7 = -3 - (1/2)b_1 \rightarrow b_1 = -20 \\ -2 = 9 - (1/2)b_2 \rightarrow b_2 = 22 \end{cases}$$

$$\vec{b}(-20, 22)$$

26 Dada la base $B(\vec{u}, \vec{v})$ donde $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(0, -8)$, determina, en cada caso, una base B' de vectores unitarios tales que:

a) Los vectores de B' sean paralelos a los de B .

b) Los vectores de B' sean perpendiculares a \vec{u} y \vec{v} .

a) $B' = (\vec{u}', \vec{v}')$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9+16} = 5; \quad |\vec{v}| = \sqrt{0+64} = 8$$

$$\vec{u}' = \frac{1}{5}\vec{u} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \quad \vec{v}' = \frac{1}{8}\vec{v} = \frac{1}{8}(0, -8) = (0, -1)$$

b) $B' = (\vec{u}', \vec{v}')$

$$\vec{u}' \perp \vec{u} \rightarrow \vec{u}' = (4, 3)$$

$$\vec{v}' \perp \vec{v} \rightarrow \vec{v}' = (8, 0)$$

27 Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:

a) \vec{u} sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de \vec{u} sea igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \rightarrow -20 - 2k = 0 \rightarrow k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \rightarrow 25 + k^2 = 34 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

28 Dado el vector $\vec{u}(5, 12)$, determina:

a) Los vectores unitarios paralelos a \vec{u} .

b) Los vectores ortogonales a \vec{u} que tengan el mismo módulo que \vec{u} .

c) Los vectores unitarios y perpendiculares a \vec{u} .

$$|\vec{u}| = \sqrt{25+144} = 13$$

a) $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(5, 12) = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

$$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(5, 12) = \left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$$

b) $\vec{v}_1 = (-12, 5)$

$$\vec{v}_2 = (12, -5)$$

c) $\vec{v}_1 = \frac{1}{13}(-12, 5) = \left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$

$$\vec{v}_2 = -\frac{1}{13}(-12, 5) = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$$

29 Halla un vector de módulo 50 que sea perpendicular al vector $\vec{a}(8, 6)$.

$\vec{u}' = (6, -8)$ es perpendicular a \vec{a} .

$$|\vec{u}'| = \sqrt{36+64} = 10$$

Un vector con esta dirección y de módulo 1 es:

$$\vec{u} = \frac{1}{10}(6, -8) = \left(\frac{6}{10}, -\frac{8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

El vector que buscamos es:

$$\vec{v} = 50\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = (30, -40)$$

También es solución $\vec{v}' = (-30, 40)$.

30 Halla el ángulo que forman estos pares de vectores:

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$ b) $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$ c) $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

a) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 5}{\sqrt{9+4} \sqrt{1+25}} = -\frac{7}{26} \sqrt{2} \approx -0,38 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112^\circ 20' 12''$

b) $\cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \frac{4 \cdot 3 - 6 \cdot 2}{\sqrt{16+36} \sqrt{9+4}} = 0 \rightarrow (\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 90^\circ$

c) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot 3}{\sqrt{1+36} \sqrt{\frac{1}{4}+9}} = -1 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180^\circ$

31 Dados $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, k\right)$ y $\vec{v}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, calcula k para que \vec{u} y \vec{v} formen un ángulo de 60° .

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + k \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{4} + k^2} \sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + k^2}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + k^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{4} + k^2} = 1 \rightarrow k = -\frac{1}{2}\sqrt{3}; k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

32 Calcula x , de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3, -5)$ y $\vec{b}(x, 2)$ sea igual a 7. ¿Qué ángulo forman los vectores \vec{a} y \vec{b} ?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \rightarrow 3x - 10 = 7 \rightarrow x = \frac{17}{3}$$

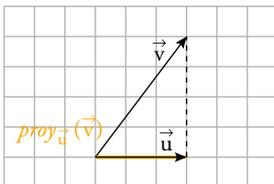
$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{7}{\sqrt{9+25} \sqrt{\left(\frac{17}{3}\right)^2 + 4}} = \frac{21\sqrt{442}}{2 \cdot 210} \approx 0,2 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 79^\circ 31' 17''$$

33 Calcula la proyección de \vec{u} sobre \vec{v} , la de \vec{v} sobre \vec{u} y representa gráficamente cada situación.

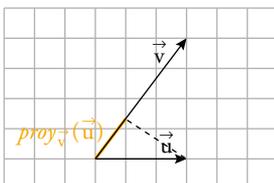
a) $\vec{u}(3, 0)$ y $\vec{v}(3, 4)$ b) $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(-4, 2)$ c) $\vec{u}(-2, -5)$ y $\vec{v}(5, -2)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{9+0} = 3$; $|\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5$; $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{9}{3 \cdot 5} = \frac{3}{5}$

$$\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$$

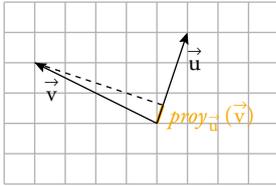


$$\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$

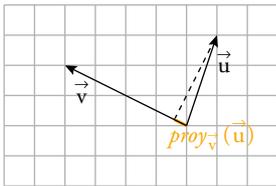


$$b) |\vec{u}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}; |\vec{v}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}; \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{-4 \cdot 6}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$



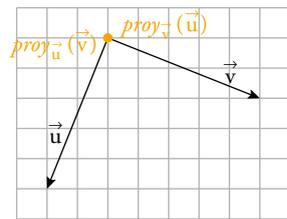
$$\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{10} \cdot \frac{1}{10}\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$$



$$c) |\vec{u}| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}; |\vec{v}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}; \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$$

$$\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$$

$$\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{u}) = |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$$

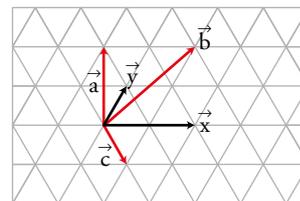


Página 192

Para resolver

34 Expresa los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} como combinación lineal de \vec{x} e \vec{y} .

$$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y} \quad \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y} \quad \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}$$



35 Sean los puntos A , B y C los vértices de un triángulo. Si $\overrightarrow{AB}(-1, 4)$, $\overrightarrow{AC}(3, -1)$ y $\overrightarrow{BC}(4, -5)$, ¿puede tratarse de un triángulo rectángulo?

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 4); \overrightarrow{AC} = (3, -1); \overrightarrow{BC} = (4, -5)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1, 4) \cdot (3, -1) = -7$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1, 4) \cdot (4, -5) = -24$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (3, -1) \cdot (4, -5) = 17$$

Ninguno de los tres productos escalares es cero, luego ningún par de vectores es perpendicular.

Los lados no son perpendiculares. Por tanto, el triángulo no es rectángulo.

36 Sean $\vec{a}(-6, 8)$ y $\vec{b}(3, 4)$. Halla, en cada caso, un vector $\vec{c}(x, y)$ perpendicular a \vec{b} tal que:

a) $|\vec{c}| = |\vec{a}|$ b) $|\vec{c}| = 1$ c) $\vec{c} \cdot \vec{a} = 4$

a) $|\vec{a}| = \sqrt{36+64} = 10$; $|\vec{b}| = \sqrt{9+16} = 5$

Un vector $\vec{c} \perp \vec{b}$ es de la forma $\vec{c} = k \cdot (-4, 3)$.

$\vec{c} = k(-4, 3) = 10 \cdot \frac{1}{5}(-4, 3) = (-8, 6)$

b) $\vec{c} = \frac{1}{5}(-4, 3) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

c) $\vec{c} \cdot \vec{a} = k \cdot (-4, 3) \cdot (-6, 8) = 24k + 24k = 48k = 4 \rightarrow k = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$

$\vec{c} = \frac{1}{12}(-4, 3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$

37 Dados los vectores $\vec{u}(-1, a)$ y $\vec{v}(b, 15)$, halla a y b , en cada caso, de modo que:

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ y $|\vec{u}| = \sqrt{10}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ y $|\vec{v}| = 17$

a) $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ |\vec{u}| = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 0 \\ \sqrt{1+a^2} = \sqrt{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 0 \\ 1 + a^2 = 10 \end{cases}$

Soluciones: $a_1 = -3, b_1 = -45$; $a_2 = 3, b_2 = 45$

b) $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \\ |\vec{v}| = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-1, a) \cdot (b, 15) = 7 \\ \sqrt{b^2 + 15^2} = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15a - b = 7 \\ b^2 + 15^2 = 17^2 \end{cases}$

Soluciones: $a_1 = -\frac{1}{15}, b = -8$; $a_2 = 1, b_2 = 8$

38 Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.

$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= 2(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6) \\ \vec{b} &= -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15) \end{cases}$

Ahora, como el producto escalar de ambos vectores debe ser 0, por ser ortogonales:

$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \rightarrow (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \rightarrow 9k^2 + 36k + 32 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow k = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 1152}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} = \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$

39 Calcula la proyección de $\vec{u} + \vec{v}$ sobre \vec{u} sabiendo que $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 45^\circ$.

Por ser $|\vec{u}| = |\vec{v}| \rightarrow (\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 22^\circ 30'$

$proy_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u} + \vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{|\vec{u} + \vec{v}|^2} \cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})} \cos(\widehat{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}}) =$
 $= \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2} \cos 22^\circ 30' = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4} \cos 22^\circ 30' =$
 $= \sqrt{8 + 4\sqrt{2}} \cdot 0,92 \approx 3,4$

40 Si A , B y C son los vértices de un triángulo, clasifica en cada caso estos triángulos según la amplitud de sus ángulos:

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ y $\overrightarrow{BC} = (3, -2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$ y $\overrightarrow{CA} = (-3, 2)$

c) $\overrightarrow{BC} = (4, -2)$ y $\overrightarrow{CA} = (-7, 1)$

d) $\overrightarrow{AB} = (2, 0)$ y $\overrightarrow{CA} = (-4, 2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ y $\overrightarrow{BC} = (3, -2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 - 4 = -1 < 0 \rightarrow \text{Es un triángulo obtusángulo.}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$ y $\overrightarrow{CA} = (-3, 2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -12 + 2 = -10 < 0 \rightarrow \text{Es un triángulo obtusángulo.}$$

c) $\overrightarrow{BC} = (4, -2)$ y $\overrightarrow{CA} = (-7, 1)$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -28 - 2 = -30 < 0 \rightarrow \text{Es un triángulo obtusángulo.}$$

d) $\overrightarrow{AB} = (2, 0)$ y $\overrightarrow{CA} = (-4, 2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -8 + 0 = -8 < 0 \rightarrow \text{Es un triángulo obtusángulo.}$$

41 Calcula el ángulo que forman estos vectores con $\vec{y} (1, 0)$.

a) $\vec{u} (3, 4)$

b) $\vec{v} (-4, 1)$

c) $\vec{w} (0, -5)$

d) $\vec{x} (3, 0)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{y} = |\vec{u}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{y}})$

Sustituimos y calculamos:

$$3 + 0 = \sqrt{9 + 16} \cdot \sqrt{1} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{y}}) \rightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{y}} = 53^\circ 7' 5''$$

b) Usaremos la misma fórmula:

$$-4 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{1} \cdot \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{y}}) \rightarrow \widehat{\vec{v}, \vec{y}} = 165^\circ 57' 22''$$

c) Usaremos la misma fórmula:

$$0 = \sqrt{25} \cdot \sqrt{1} \cdot \cos(\widehat{\vec{w}, \vec{y}}) \rightarrow \widehat{\vec{w}, \vec{y}} = 90^\circ$$

d) En este caso son vectores proporcionales por lo que su ángulo es cero. Si lo calculamos:

$$3 = \sqrt{9} \cdot \sqrt{1} \cdot \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \rightarrow \widehat{\vec{x}, \vec{y}} = 0^\circ$$

42 De los vectores \vec{a} y \vec{b} sabemos que $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 5$ y que forman un ángulo de 120° .
Calcula $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Como: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| |\vec{v}| \cos 0^\circ = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

Entonces podemos decir que:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ + 5^2 = 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 49$$

Luego: $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

43 Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$$

Como $|\vec{u}| = 3$, se tiene que:

$$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \rightarrow |\vec{v}|^2 = 20 \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{20}$$

44 Si $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$, ¿qué ángulo forman \vec{u} y \vec{v} ?

Razonando como en el problema guiado número 2, llegamos a:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) + |\vec{v}|^2$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$5^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) + 3^2$$

$$25 = 16 + 24 \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) + 9$$

$$\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{25 - 25}{24} = 0 \rightarrow (\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 90^\circ$$

45 Si $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ y $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$:

a) Halla el ángulo entre \vec{a} y \vec{b} .

b) Calcula el ángulo entre \vec{b} y $\vec{a} - \vec{b}$.

c) Halla el ángulo entre \vec{a} y $\vec{a} + \vec{b}$.

$$a) |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})})$$

Sustituimos y calculamos:

$$7 = 1 + 4 - 2(2 \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})})) \rightarrow \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \frac{7 - 5}{4} = -\frac{1}{2} \rightarrow (\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 120^\circ$$

$$b) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 2 \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = -1$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{a} - |\vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 = -1 - 4 = -5$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{b}||\vec{a} - \vec{b}| \cos(\widehat{(\vec{b}, \vec{a} - \vec{b})}) = 2\sqrt{7} \cos(\widehat{(\vec{b}, \vec{a} - \vec{b})})$$

Igualando tenemos:

$$2\sqrt{7} \cos(\widehat{(\vec{b}, \vec{a} - \vec{b})}) = -5 \rightarrow \cos(\widehat{(\vec{b}, \vec{a} - \vec{b})}) = \frac{-5}{2\sqrt{7}} \rightarrow (\widehat{(\vec{b}, \vec{a} - \vec{b})}) = 160^\circ 53' 3''$$

$$c) \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \rightarrow (\widehat{(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})}) = 90^\circ$$

46 Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45° .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 45^\circ \rightarrow 7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 14 + 2x = \sqrt{100(1+x^2)} \rightarrow \frac{14+2x}{10} = \sqrt{1+x^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7+x}{5} = \sqrt{1+x^2} \rightarrow \frac{49+x^2+14x}{25} = 1+x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \rightarrow 24x^2 - 14x - 24 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 12x^2 - 7x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49+576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$$

47 Halla un vector unitario que forme un ángulo de 30° con el vector $\vec{a}(1, \sqrt{3})$.

Llamamos $\vec{u} = (x, y)$ al vector buscado:

$$\begin{cases} \widehat{(\vec{u}, \vec{a})} = 30^\circ \\ |\vec{u}| = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos 30^\circ = \frac{x + y\sqrt{3}}{1 \cdot \sqrt{1+3}} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x + y\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} = x + y\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son: $x = 0, y = 1$; $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}, y = \frac{1}{2}$

Por tanto: $\vec{u}_1 = (0, 1)$; $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

48 Determina x para que los vectores $\vec{u}(x, 1)$ y $\vec{v}(x, 0)$ formen un ángulo de 30° .

$$\cos 30^\circ = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1} \cdot x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 2x = \sqrt{3}\sqrt{x^2+1} \rightarrow 4x^2 = 3(x^2+1) \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

49 De una base $B(\vec{u}, \vec{v})$ se sabe que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ y que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. En esa base las coordenadas de dos vectores son $\vec{x}(1, 2)$ e $\vec{y}(-1, 1)$. Calcula $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

* Mira el problema resuelto número 1.

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= -|\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2|\vec{v}|^2 = 4 - (-1) + 2 = 7 \end{aligned}$$

50 Dados $\vec{a}(1, 2)$ y $\vec{b}(5, 5)$, expresa el vector \vec{b} como suma de dos vectores: uno de la misma dirección que \vec{a} y otro ortogonal a \vec{a} .

* Mira el problema resuelto número 4.

$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$, donde:

- \vec{x} tiene la misma dirección de $\vec{a} \rightarrow \vec{x} = k\vec{a} = k(1, 2) = (k, 2k)$
- $\vec{y} \perp \vec{a} \rightarrow \vec{y} = h(-2, 1) = (-2h, h)$

Entonces:

$$(5, 5) = \vec{x} + \vec{y} = (k, 2k) + (-2h, h) = (k - 2h, 2k + h)$$

$$\begin{cases} 5 = k - 2h \\ 5 = 2k + h \end{cases} \begin{matrix} k = 3 \\ h = -1 \end{matrix}$$

Los vectores pedidos son $\vec{x}(3, 6)$ e $\vec{y}(2, -1)$.

51 Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que \vec{a} y \vec{b} son unitarios. ¿Cuál es el ángulo que forman \vec{a} y \vec{b} ?

$$\text{Si } \vec{c} \perp \vec{d} \rightarrow \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \rightarrow 5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

Como \vec{a} y \vec{b} son unitarios $\rightarrow |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

$$5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \frac{1}{2} \rightarrow (\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 60^\circ$$

52 Demuestra que el vector $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ es perpendicular al vector \vec{c} .

Hay que probar que el producto escalar de ambos vectores es igual a 0.

- Veamos primero cuáles son las coordenadas del primer vector:

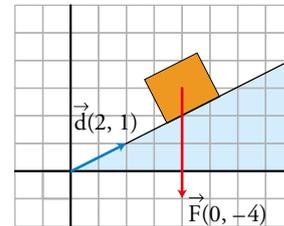
$$\begin{aligned} (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} &= (b_1c_1 + b_2c_2)(a_1, a_2) - (a_1c_1 + a_2c_2)(b_1, b_2) = \\ &= ((b_1c_1 + b_2c_2)a_1, (b_1c_1 + b_2c_2)a_2) - ((a_1c_1 + a_2c_2)b_1, (a_1c_1 + a_2c_2)b_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2, a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \end{aligned}$$

- Calculamos ahora:

$$\begin{aligned} [(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}] \cdot \vec{c} &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \cdot (c_1, c_2) = \\ &= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)c_1 + (a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)c_2 = \\ &= a_1b_2c_2c_1 - a_2b_1c_2c_1 + a_2b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_2 = 0 \end{aligned}$$

53 [El ejercicio propone consultar el ejercicio resuelto 4. El alumnado puede aprovechar esta ayuda para trabajar la dimensión productiva (productividad)].

Descompón \vec{F} en dos vectores, \vec{F}_T y \vec{F}_N , de modo que \vec{F}_T sea paralelo a la rampa y \vec{F}_N , perpendicular.



* Mira el problema resuelto número 4.

El vector $\vec{d}(2, 1)$ es paralelo a la rampa y, por tanto, a \vec{F}_T . El vector $\vec{n}(1, -2)$ es perpendicular a \vec{d} y, por tanto, paralelo a \vec{F}_N .

Por ser \vec{F}_T paralelo a $\vec{d}(2, 1)$: $\vec{F}_T = \vec{d}k = (2k, k), k \in \mathbb{R}$

Por ser \vec{F}_N paralelo a $\vec{n}(1, -2)$: $\vec{F}_N = \vec{n}h = (h, -2h), h \in \mathbb{R}$

$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N \rightarrow (0, -4) = (2k, k) + (h, -2h) = (2k + h, k - 2h)$$

$$\text{Igualando coordenadas: } \begin{cases} 0 = 2k + h \\ -4 = k - 2h \end{cases}$$

$$\text{Por tanto: } k = -\frac{4}{5}; h = \frac{8}{5}$$

54 Rastreador de problemas. [La resolución del problema planteado se puede aprovechar para trabajar esta estrategia de pensamiento].

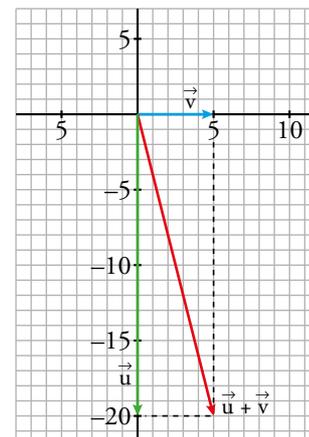
Una barca se desplaza por un río en dirección sur a una velocidad de 20 km/h. Si empieza a soplar un viento en dirección este a 5 km/h, ¿en qué dirección y a qué velocidad se moverá la barca?

$$\text{La velocidad es } |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2} = \sqrt{400 + 25} = 5\sqrt{17}$$

La dirección es $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u})$. Calculemos este ángulo:

$$\cos(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}) = \frac{20}{5\sqrt{17}} \approx 0,97 \rightarrow (\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}) \approx 14^\circ 4' 11''$$

Se mueve en dirección sureste con $14^\circ 4' 11''$ respecto de la dirección sur.



55 Calcula analítica y gráficamente el vector proyección de \vec{v} sobre \vec{u} en cada caso.

a) $\vec{u}(3, 4)$ y $\vec{v}(4, -4)$

b) $\vec{u}(-2, 6)$ y $\vec{v}(2, -1)$

a) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 0$

Luego, $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (0, 0)$

b) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \sqrt{5} \frac{(8, 6) \cdot (2, -1)}{10\sqrt{5}} = 1$

Luego, $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{10}(8, 6) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Si el ángulo es agudo, $proy_{\vec{u}}(\vec{v})$ tiene el mismo sentido que \vec{u} , si el triángulo es obtuso, tiene sentido contrario a \vec{u} .

Cuestiones teóricas

56 Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, entonces $B(\vec{u}, \vec{v})$ es una base.

b) Dos vectores paralelos pueden tener sus coordenadas no proporcionales.

c) Si dos vectores son perpendiculares, sus coordenadas no pueden ser proporcionales.

d) \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BA} tienen igual módulo, pero distinta dirección.

e) El módulo de $-3\vec{v}$ es el triple que el módulo de \vec{v} .

a) Verdadera, porque los vectores son perpendiculares, luego no tienen la misma dirección.

b) Falsa. Si son paralelos, sus coordenadas son proporcionales porque $\vec{u} = k\vec{v}$.

c) Verdadera. Si las coordenadas fueran proporcionales, serían paralelos.

d) Falsa. Tienen el mismo módulo y la misma dirección, pero sentidos contrarios.

e) Verdadera: $|-3\vec{v}| = |-3| |\vec{v}| = 3|\vec{v}|$

Página 193

57 ¿Cómo es el ángulo formado \vec{u} y \vec{v} en estos casos?

a) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) > 0$

b) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) < 0$

c) $proy_{\vec{u}}(\vec{v}) = 0$

a) $0^\circ < \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} < 90^\circ$

b) $90^\circ < \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} < 180^\circ$

c) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 90^\circ$

58 Indica si el resultado de las siguientes operaciones es un número o un vector:

a) $2\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

c) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

a) Número.

b) Vector.

c) Número.

d) Número.

63 Prueba que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$, entonces se verifica que $\vec{a} \perp \vec{c}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \text{Si } \vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

64 Justifica por qué $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

$|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \leq 1$ porque el coseno de un ángulo, en valor absoluto, siempre es menor o igual que 1.

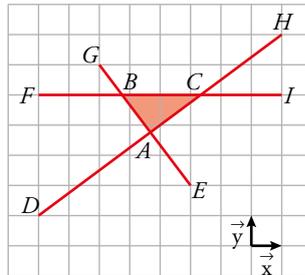
Luego, pasando el denominador (que siempre es positivo) al segundo miembro:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

Para profundizar

65  [La resolución de esta actividad de profundización requiere que el alumnado trabaje la dimensión productiva (innovación)].

Halla los ángulos interiores del triángulo ABC .



Observa que puedes expresar estos ángulos como ángulos entre vectores. Las coordenadas de estos vectores las obtendrás expresándolos como combinación lineal de la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.

$$\overrightarrow{DH} = (8, 6); \overrightarrow{EG} = (-3, 4)$$

$$\hat{A} = (\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}})$$

$$\cos \hat{A} = \cos(\widehat{\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EG}}) = \frac{(8, 6) \cdot (-3, 4)}{|(8, 6)| |(-3, 4)|} = 0 \rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\overrightarrow{HD} = (-8, -6); \overrightarrow{IF} = (-8, 0)$$

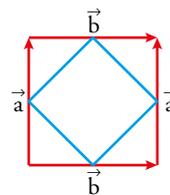
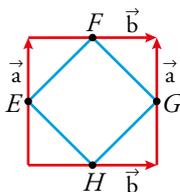
$$\hat{C} = (\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}})$$

$$\cos \hat{C} = \cos(\widehat{\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{IF}}) = \frac{(-8, -6) \cdot (-8, 0)}{|(-8, -6)| |(-8, 0)|} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\hat{C} = 35^\circ 52' 11''$$

$$\hat{B} = 90^\circ - 35^\circ 52' 11'' = 54^\circ 7' 49''$$

66 Sean \vec{a} y \vec{b} los vectores que definen un cuadrado. Demuestra que los puntos medios de sus lados definen otro cuadrado.



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \vec{HG} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{EF} = \vec{HG}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{EH} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \\ \vec{FG} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{EH} = \vec{FG}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{EH}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} - 2\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ |\vec{EF}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} + 2\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \end{array} \right\} \rightarrow |\vec{EH}| = |\vec{EF}|$$

$$\begin{aligned} \vec{EF} \cdot \vec{FG} &= \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} = \\ &= -\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = 0 \text{ porque el polígono original era cuadrado y, por tanto, } |\vec{a}| = |\vec{b}|. \end{aligned}$$

Como los otros dos lados son paralelos a estos, también son perpendiculares entre sí. Luego los lados del polígono $EFGH$ miden lo mismo, los opuestos son paralelos y son perpendiculares dos a dos. Por tanto, el polígono $EFGH$ es un cuadrado.

5 Considera el vector $\vec{u}(3, -4)$. Calcula:

a) Un vector paralelo a \vec{u} de módulo 1.

b) Un vector perpendicular a \vec{u} de módulo 2.

$$a) |\vec{u}| = 5; \vec{v} = \frac{1}{5}(3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$$b) \vec{v} = 2 \cdot \frac{1}{5}(4, 3) = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

6 Sea $\vec{u}(-3, k)$. Calcula k de forma que:

a) \vec{u} sea ortogonal a $\vec{v}(4, -6)$.

b) El módulo de \vec{u} sea igual a 5.

a) El producto escalar de dos vectores ortogonales es igual a 0.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, k) \cdot (4, -6) = -12 - 6k = 0 \rightarrow k = -2$$

$$b) |\vec{u}| = \sqrt{9 + k^2} = 5 \rightarrow 9 + k^2 = 25 \rightarrow k = \pm 4$$

7 Determina las coordenadas de un vector $\vec{a}(x, y)$ que forme con $\vec{v}(-1, 0)$ un ángulo de 60° y cuyo módulo sea 2.

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{v}}) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-x}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2} = 2 \rightarrow 1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Hay dos soluciones para el vector \vec{a} : $\begin{cases} \vec{a}(-1, \sqrt{3}) \\ \vec{a}(-1, -\sqrt{3}) \end{cases}$

8 Obtén un vector $\vec{u}(x, y)$ ortogonal a $\vec{v}(8, 6)$ y cuyo módulo sea la mitad del de \vec{v} .

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}; |\vec{v}| = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$(x, y) \cdot (8, 6) = 8x + 6y = 0$$

$$|\vec{u}| = \frac{1}{2}|\vec{v}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 6y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}y \\ \frac{9}{16}y^2 + y^2 = 25 \end{array} \rightarrow \frac{25}{16}y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4$$

$$y = 4 \rightarrow x = -3$$

$$y = -4 \rightarrow x = 3$$

Hay dos soluciones: $\vec{u}(-3, 4)$; $\vec{u}(3, -4)$

9 Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores unitarios que forman un ángulo de 120° . Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$\begin{aligned} a) |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ &= 1 - 1 + 1 = 1 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \end{aligned}$$