

# 2 POTENCIAS Y RAÍCES

Página 29

## Resuelve

**1** ¿Cabrían los hijos e hijas de Buda en la India? Teniendo en cuenta *Mahabharata* y que la superficie de la India es de unos 3 millones de kilómetros cuadrados:

- a) ¿Cuántos metros cuadrados corresponderían a cada uno de los  $6 \cdot 10^{11}$  hijos e hijas de Buda?  
b) ¿Cuántas de las  $24 \cdot 10^{15}$  divinidades habría en cada metro cuadrado?

a) Primero, vamos a poner los datos en metros cuadrados, que es lo que nos pide el problema.

$$3 \text{ millones de km}^2 = 3 \cdot 10^6 \text{ km}^2 = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$$

Veamos cuántos metros cuadrados le corresponde a cada hijo:

$$6 \cdot 10^{11} \text{ hijos e hijas}$$

Por tanto:

$$\frac{3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2}{6 \cdot 10^{11} \text{ hijos}} = \frac{30}{6} \text{ m}^2/\text{hijo} = 5 \text{ m}^2/\text{hijo}$$

Así, a cada hijo le corresponden  $5 \text{ m}^2$  de India.

b) Pasamos los  $\text{km}^2$  a  $\text{m}^2 \rightarrow 3 \cdot 10^6 \text{ km}^2 = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$

$$\frac{24 \cdot 10^{15} \text{ divinidades}}{3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2} = 8 \cdot 10^3 \text{ divinidad}/\text{m}^2$$

Habría  $8 \cdot 10^3$  divinidades por metro cuadrado.

**2** Una antigua leyenda popular india describe una batalla en la que intervinieron  $10^{40}$  monos. ¿Cuánto podían ocupar? Vamos a suponer que un mono ocupa un volumen de unos 10 litros y que amontonamos  $10^{40}$  monos, bien apretados, dentro de una esfera. ¿Cuál sería su radio?

NOTA: de Urano al Sol hay unos 2870 millones de kilómetros.

$10^{40}$  monos ocupan un volumen de  $10^{40} \cdot 10 \text{ l} = 10^{41} \text{ l} = 10^{35} \text{ m}^3$

$$10^{35} \text{ m}^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{10^{35}}{\pi}} \approx 2,87 \cdot 10^{11} \text{ m} = 2870 \text{ millones de km}$$

El radio de la esfera sería 2870 millones de kilómetros.

**3** a) ¿Cuál o cuáles de estas potencias sirven para expresar un gúgol y cuál o cuáles para expresar un gúgolplex?

$$10^{(10^{100})}$$

$$10^{100}$$

$$10^{(10^2)}$$

$$10^{(100^{10})}$$

b) ¿Qué es mayor, un gúgol de gúgoles o un gúgolplex?

c) Suponiendo que en una hoja de papel caben, bien juntos, 3000 caracteres, ¿serías capaz de idear una expresión que indique el número de hojas necesarias para escribir un gúgolplex con todas sus cifras?

a) gúgol  $\rightarrow 10^{100}$

gúgolplex  $\rightarrow 10^{(10^{100})}$

b) Un gúgol de gúgoles.

c)  $\frac{10^{100} \text{ cifras}}{3000 \text{ caracteres por hoja}} = 3,33^{96} \text{ hojas}$

# 1 ► POTENCIACIÓN

Página 30

## 1 Reduce a una sola potencia.

- a)  $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4$       b)  $(5^6)^3$       c)  $\frac{7^6}{7^4}$       d)  $\frac{15^3}{3^3}$
- e)  $2^{10} \cdot 5^{10}$       f)  $\frac{12^5}{3^5 \cdot 4^5}$       g)  $(a^6 \cdot a^3)^2 : (a^2 \cdot a^4)^3$       h)  $(6^2)^3 \cdot 3^5 \cdot (2^7 : 2^2)$
- a)  $4^8$       b)  $5^{18}$
- c)  $7^2$       d)  $\left(\frac{15}{3}\right)^3 = 5^3$
- e)  $(2 \cdot 5)^{10} = 10^{10}$       f)  $\left(\frac{12}{3 \cdot 4}\right)^5 = 1^5 = 1$
- g)  $(a^9)^2 : (a^6)^3 = a^{18} : a^{18} = a^0 = 1$       h)  $6^6 \cdot 3^5 \cdot 2^5 = 6^6 \cdot (3 \cdot 2)^5 = 6^6 \cdot 6^5 = 6^{11}$

## 2 Calcula utilizando propiedades de las potencias.

- a)  $2^3 \cdot 5^4$       b)  $(6^5 : 2^4) : 3^5$       c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$       d)  $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4$
- e)  $\frac{20^6}{2^6}$       f)  $\frac{20^6}{2^5}$       g)  $(3^3)^2 : 3^5$       h)  $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3]$
- a)  $2^3 \cdot 5^4 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 5 = (2 \cdot 5)^3 \cdot 5 = 10^3 \cdot 5 = 1\,000 \cdot 5 = 5\,000$
- b)  $(6^5 : 2^4) : 3^5 = \left(\frac{6^5}{2^4}\right) : 3^5 = \left(\frac{(2 \cdot 3)^5}{2^4}\right) : 3^5 = \left(\frac{2^5 \cdot 3^5}{2^4}\right) : 3^5 = 2 \cdot (3)^5 : 3^5 = \frac{2 \cdot 3^5}{3^5} = 2$
- c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{2^6}{3^6} \cdot \frac{3^3}{(2^2)^3} = \frac{2^6}{3^6} \cdot \frac{3^3}{2^6} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$
- d)  $2^8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 = 2^8 \cdot \frac{5^4}{2^4} = 2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
- e)  $\frac{20^6}{2^6} = \left(\frac{20}{2}\right)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$
- f)  $\frac{20^6}{2^5} = 20 \cdot \left(\frac{20^5}{2^5}\right) = 20 \cdot 10^5 = 20 \cdot 100\,000 = 2\,000\,000$
- g)  $(3^3)^2 : 3^5 = 3^6 : 3^5 = 3^{6-5} = 3$
- h)  $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3] = 2^{15} \cdot [5^{12} : 2^3] = 2^{15} \cdot \frac{5^{12}}{2^3} = 2^{12} \cdot 5^{12} = (2 \cdot 5)^{12} = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$

**3** Calcula el resultado.

|                                |                                                |                                 |                                  |
|--------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| a) $(-2)^{-1}$                 | b) $(-2)^{-2}$                                 | c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ | d) $\left(\frac{-1}{2}\right)^2$ |
| a) $\left(-\frac{1}{2}\right)$ | b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ | c) $\frac{1}{8}$                | d) $\frac{1}{4}$                 |

**4** Calcula.

|                                    |                                   |                                     |                                      |
|------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ | b) $\left(\frac{-13}{7}\right)^0$ | c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$ | d) $\left(\frac{-3}{-5}\right)^{-3}$ |
| a) $\frac{125}{27}$                | b) 1                              | c) $\frac{81}{16}$                  | d) $\frac{125}{27}$                  |

**5** Expresa como potencia de base 10.

|                     |                     |                        |                          |
|---------------------|---------------------|------------------------|--------------------------|
| a) 0,1              | b) 0,00001          | c) 0,001 <sup>-2</sup> | d) 100 000 <sup>-3</sup> |
| a) 10 <sup>-1</sup> | b) 10 <sup>-5</sup> | c) 10 <sup>-5</sup>    | d) 10 <sup>2</sup>       |

**6** Simplifica y halla el resultado cuando sea posible.

|                                                                                                                      |                                                                                                     |                                                                                                                                            |                                                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| a) $\frac{x^6 \cdot x^{-3}}{(x^2)y}$                                                                                 | b) $\frac{y^5 \cdot y^{-1} \cdot y}{(y^2)^{-2}}$                                                    | c) $\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 : \left(\frac{1}{a^3}\right)^3$                                                                           | d) $\frac{5^6 \cdot (5^2)^{-1}}{(5^2)^3}$             |
| e) $\frac{6^4 \cdot 3^4}{9^4}$                                                                                       | f) $\frac{(-6)^5 \cdot (-3)^5}{36^5}$                                                               | g) $\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$                                                                                   | h) $\frac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}$ |
| a) $\frac{x^{6-3}}{(x^2)y} = \frac{x^3}{x^2y} = \frac{x}{y}$                                                         | b) $\frac{y^5}{y^{-4}} = y^9$                                                                       | d) $\frac{5^6 \cdot 5^{-2}}{5^6} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$                                                                                  |                                                       |
| c) $\frac{1}{a^6} : \frac{1}{a^9} = \frac{a^9}{a^6} = a^3$                                                           | f) $\frac{-6^5 \cdot (-3)^5}{(6^2)^5} = \frac{3^5}{6^5} = \frac{3^5}{2^5 \cdot 3^5} = \frac{1}{32}$ | h) $\frac{(2 \cdot 3)^2 \cdot (3)^2}{2^3 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^2} = \frac{2^2 \cdot 3^6}{2^7 \cdot 3^2} = \frac{3^4}{2^5} = \frac{81}{32}$ |                                                       |
| e) $\frac{6^4 \cdot 3^4}{(3^2)^4} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4}{3^4} = 2^4$                                       |                                                                                                     |                                                                                                                                            |                                                       |
| g) $\frac{2^5 \cdot 3^5 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^{-2}} = 3^4 = 81$ |                                                                                                     |                                                                                                                                            |                                                       |

## 2 ► NOTIFICACIÓN CIENTÍFICA

Página 32

### Cálculo mental

Opera y expresa el resultado como potencia de base 10:

a)  $1\,000 \cdot 100\,000$       b)  $1\,000 \cdot 0,01$       c)  $1\,000 : 0,01$       d)  $1\,000 : 0,000001$

e)  $1\,000 \cdot 0,000001$       f)  $0,0001 \cdot 0,01$       g)  $0,0001 : 0,01$

a)  $100\,000\,000 = 10^8$

b) 10

c)  $100\,000 = 10^5$

d)  $1\,000\,000\,000 = 10^9$

e)  $10^{-3}$

f)  $10^{-6}$

g)  $0,01 = 10^{-2}$

1 Calcula el valor de  $n$  en cada caso:

a)  $374,2 \cdot 10^5 = 3,742 \cdot 10^n$

b)  $374,2 \cdot 10^{-7} = 3,742 \cdot 10^n$

c)  $0,031 \cdot 10^5 = 3,1 \cdot 10^n$

d)  $0,031 \cdot 10^{-7} = 3,1 \cdot 10^n$

a)  $n = 7$

b)  $n = -5$

c)  $n = 3$

d)  $n = -9$

2 Calcula.

a)  $(3,25 \cdot 10^7) \cdot (9,35 \cdot 10^{-15})$

b)  $(5,73 \cdot 10^4) + (-3,2 \cdot 10^5)$

c)  $(4,8 \cdot 10^{12}) : (2,5 \cdot 10^3)$

d)  $(1,17 \cdot 10^8) - (3,24 \cdot 10^{-6})$

a)  $3,03875 \cdot 10^{-7}$

b)  $-2,627 \cdot 10^5$

c)  $1,92 \cdot 10^9$

d)  $1,17 \cdot 10^8$

Página 33

---

**3** Resuelve con la calculadora la actividad 2 de la página anterior.

a)  $3,03875 \cdot 10^{-7}$

b)  $-2,627 \cdot 10^5$

c)  $1,92 \cdot 10^9$

d)  $1,17 \cdot 10^8$

## 3 ▶ RAÍCES Y RADICALES

Página 34

### 1 Calcula las siguientes raíces:

- |                                |                                  |                                    |                                  |
|--------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| a) $\sqrt[6]{64}$              | b) $\sqrt[3]{216}$               | c) $\sqrt{14\,400}$                | d) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$      |
| e) $\sqrt[3]{\frac{64}{216}}$  | f) $\sqrt[3]{\frac{3375}{1000}}$ | g) $\sqrt[3]{1,728 \cdot 10^{21}}$ | h) $\sqrt{2,025 \cdot 10^{-11}}$ |
| a) 2                           | b) 6                             | c) 120                             | d) $\frac{1}{2}$                 |
| e) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ | f) $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ | g) $12 \cdot 10^6$                 | h) $4,5 \cdot 10^{-6}$           |

### 2 ¿Verdadero o falso?

- a) Como  $(-5)^2 = 25$ , entonces  $\sqrt{25} = -5$ .
- b)  $-5$  es una raíz cuadrada de 25.
- c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y  $-3$ .
- d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y  $-3$ .
- e) 7 tiene dos raíces cuartas:  $\sqrt[4]{7}$  y  $-\sqrt[4]{7}$ .
- f)  $\sqrt{-4} = -2$  y  $\sqrt{4} = 2$ .
- a) Falso;  $\sqrt{25}$  hace referencia a la raíz positiva,  $\sqrt{25} = 5$ .
- b) Verdadero;  $(-5)^2 = 25$ .
- c) Falso;  $3^2 = 9$  y  $(-3)^2 = 9$
- d) Falso. Solo tiene una, porque  $(-3)^3 = -27$
- e) Verdadero.
- f) Falso. No existen raíces cuadradas de números negativos.

Cálculo mental

1 Simplifica.

a)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

b)  $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{10}$

a)  $\sqrt{100} = 10$

b)  $\sqrt[3]{60}$

2 Descompón y extrae fuera del radical:

a)  $\sqrt{50}$

b)  $\sqrt[3]{24}$

c)  $\sqrt[3]{2000}$

a)  $\sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

b)  $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

c)  $\sqrt[3]{2^4 \cdot 5^3} = 10\sqrt[3]{2}$

3 Calcula el valor de estas potencias:

a)  $(\sqrt{3})^6$

b)  $(\sqrt[3]{2})^6$

c)  $(\sqrt[4]{5})^{12}$

a)  $3^3 = 27$

b)  $2^2 = 4$

c)  $5^3 = 125$

3 Simplifica las expresiones que puedas.

a)  $8\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$

b)  $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$

c)  $\sqrt[3]{25} - \sqrt{8}$

d)  $\sqrt{5} - \sqrt[3]{5}$

e)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$

f)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{7}$

g)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

h)  $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$

i)  $\sqrt[3]{5} - \sqrt[6]{5}$

j)  $(\sqrt{5})^{10}$

k)  $(\sqrt{6})^7$

l)  $(\sqrt[5]{7})^{10}$

a)  $8\sqrt{5} - 6\sqrt{3} \rightarrow$  No se puede simplificar.

b)  $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

c)  $\sqrt[3]{25} - \sqrt{8} \rightarrow$  No se puede simplificar.

d)  $\sqrt{5} - \sqrt[3]{5} \rightarrow$  No se puede simplificar.

e)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{42}$

f)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{7} \rightarrow$  No se puede simplificar.

g)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

h)  $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{343}$

i)  $\sqrt[3]{5} - \sqrt[6]{5} \rightarrow$  No se puede simplificar.

j)  $(\sqrt{5})^{10} = 5^5$

k)  $(\sqrt{6})^7 \rightarrow$  No se puede simplificar.

l)  $(\sqrt[5]{7})^{10} = 7^2 = 49$

**4 Extrae fuera del radical cuando sea posible.**

a)  $\sqrt{3^2 \cdot 5^4}$

b)  $\sqrt[3]{2^5 \cdot 3^2}$

c)  $\sqrt[4]{5^5}$

d)  $\sqrt{180}$

e)  $\sqrt{720}$

f)  $\sqrt[3]{375}$

a)  $\sqrt{3^2 \cdot 5^4} = 3 \cdot 5^2 = 75$

b)  $\sqrt[3]{2^5 \cdot 3^2} = 2 \sqrt[3]{36}$

c)  $\sqrt[4]{5^5} = 5 \sqrt[4]{5}$

d)  $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \sqrt{5}$

e)  $\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3 \sqrt{5}$

f)  $\sqrt[3]{375} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 3} = 5 \sqrt[3]{3}$

**5 Opera y simplifica.**

a)  $\sqrt{3} + \sqrt{27} + \sqrt{12}$

b)  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

a)  $\sqrt{3} + \sqrt{(3)^3} + \sqrt{3 \cdot 2^2} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

b)  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{(2)^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$



## 4 ► NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

Página 36

- 1 Sitúa cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Ten en cuenta que cada número puede estar en más de un casillero. (Hazlo en tu cuaderno).

$$107; 3,95; 3,\overline{95}; -7; \sqrt{20}; \frac{36}{9}; \sqrt{\frac{4}{9}}; -\sqrt{36}; \frac{7}{3}; \pi - 3$$

|                            |  |
|----------------------------|--|
| NATURALES, $\mathbb{N}$    |  |
| ENTEROS, $\mathbb{Z}$      |  |
| FRACCIONARIOS              |  |
| RACIONALES, $\mathbb{Q}$   |  |
| IRRACIONALES, $\mathbb{e}$ |  |

|                            |                                                                                                      |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NATURALES, $\mathbb{N}$    | 107; $36/9 = 4$                                                                                      |
| ENTEROS, $\mathbb{Z}$      | 107; $-7$ ; $36/9 = 4$ ; $-\sqrt{36} = -6$                                                           |
| FRACCIONARIOS              | $3,95$ ; $3,\overline{95}$ ; $\sqrt{4/9} = 2/3$ ; $7/3$                                              |
| RACIONALES, $\mathbb{Q}$   | 107; $3,95$ ; $3,\overline{95}$ ; $-7$ ; $36/9 = 4$ ; $\sqrt{4/9} = 2/3$ ; $-\sqrt{36} = -6$ ; $7/3$ |
| IRRACIONALES, $\mathbb{e}$ | $\sqrt{20}$ ; $\pi - 3$                                                                              |

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 37

### 1. Potencias de base diez

Hazlo tú

- El volumen aproximado de un glóbulo rojo es 90 femtolitros. Sabiendo que 1 fL es una millonésima de una milmillonésima de litro, exprésalo en mililitros y en litros.

90 femtolitros son  $9 \cdot 10^{-14}$  litros.

90 femtolitros son  $9 \cdot 10^{-11}$  mililitros.

### 2. Notificación científica

Hazlo tú

- Si pierde el contacto después de recorrer la mitad de su trayecto, y lo recupera a  $10^4$  km del planeta, ¿cuántos kilómetros recorrió sin radio?

Antes de perder el contacto por radio, ha recorrido:

$$\frac{1}{2} \cdot 10^6 = 0,5 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^5 \text{ km}$$

Cuando lo recupera, le faltan  $10^4$  km para llegar al final. Por tanto, ya lleva:

$$10^6 - 10^4 = 10^2 \cdot 10^4 - 10^4 = (10^2 - 1) \cdot 10^4 = 99 \cdot 10^4 \text{ km}$$

Si a esa cantidad le restamos lo que recorrió antes de perder el contacto, tendremos la distancia pedida:

$$99 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^5 = 99 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10 \cdot 10^4 = (99 - 50) \cdot 10^4 = 49 \cdot 10^4 \text{ km}$$

### 3. Notificación científica

Hazlo tú

- El triángulo  $ABC$  es isósceles y rectángulo en  $B$ . ¿Cuál será el perímetro si la hipotenusa mide 6 cm?

Un triángulo rectángulo isósceles tiene un ángulo de  $90^\circ$  y dos lados (catetos) iguales.

El perímetro es la suma de sus lados.

Para calcular los lados aplicamos la fórmula:

$$H^2 = c^2 + c^2$$

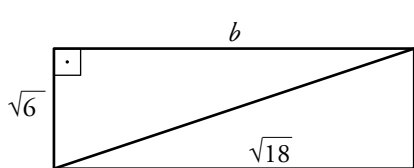
En este caso como los lados son iguales queda:

$$6^2 = 2c^2 \rightarrow 36 = 2c^2 \rightarrow \frac{36}{2} = c^2 \rightarrow c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

#### 4. Volumen de un cilindro

##### Hazlo tú

- La altura de un rectángulo mide  $\sqrt{6}$  cm, y su diagonal,  $\sqrt{18}$  cm. Calcula su base, su área y su perímetro.



$$H^2 = c^2 + b^2$$

$$(\sqrt{18})^2 = (\sqrt{6})^2 + b^2$$

$$18 - 6 = b^2$$

$$b^2 = 12$$

$$b = \sqrt{12}$$

$$b = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Área rectángulo} = b \cdot h = \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro} = 2b + 2h = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6} = (4 + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3} \text{ cm}$$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 38

### Practica

#### Potencias

**1** Calcula las potencias siguientes:

- |                                    |                                     |                                 |
|------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| a) $(-3)^3$                        | b) $(-2)^4$                         | c) $(-2)^{-3}$                  |
| d) $-3^2$                          | e) $-4^{-1}$                        | f) $(-1)^{-2}$                  |
| g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ | h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ | i) $\left(\frac{4}{3}\right)^0$ |
| a) $-27$                           | b) $16$                             | c) $-\frac{1}{8}$               |
| d) $-9$                            | e) $-\frac{1}{4}$                   | f) $1$                          |
| g) $8$                             | h) $4$                              | i) $1$                          |

**2** Expresa como una potencia de base 2 o 3.

- |                                                                                                                          |                         |                                                    |                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| a) 64                                                                                                                    | b) 243                  | c) $\frac{1}{32}$                                  | d) $\frac{1}{3}$                             |
| e) $-\frac{1}{27}$                                                                                                       | f) $\frac{3^4}{3^{-3}}$ | g) $\frac{2^{-5}}{2^3}$                            | h) $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$ |
| a) $2^6$                                                                                                                 |                         | b) $3^5$                                           |                                              |
| c) $2^{-5}$                                                                                                              |                         | d) $3^{-1}$                                        |                                              |
| e) $-(3)^{-3}$                                                                                                           |                         | f) $3^4 : 3^{-3} = 3^{4 - (-3)} = 3^{4 + 3} = 3^7$ |                                              |
| g) $2^{-5} : 2^3 = 2^{-5 - 3} = 2^{-8}$                                                                                  |                         |                                                    |                                              |
| h) $(2^{-3} : 2^{-2})^{-1} = (2^{-3 - (-2)})^{-1} = (2^{-3 + 2})^{-1} = (2^{(-1)})^{-1} = 2^{(-1) \cdot (-1)} = 2^1 = 2$ |                         |                                                    |                                              |

**3** Reduce a una sola potencia.

- |                                       |                    |                           |
|---------------------------------------|--------------------|---------------------------|
| a) $(11^7 \cdot 11^4) : 11^8$         | b) $(a^8 : a^5)^4$ | c) $(a^{-2})^3 \cdot a^9$ |
| d) $(a^{-3} \cdot a^2)^{-4} : a^{-6}$ | e) $12^5 : (-3)^5$ | f) $8^{-6} \cdot 16^{-6}$ |
| a) $11^3$                             | b) $a^{12}$        | c) $a^3$                  |
| d) $a^{10}$                           | e) $-2^{10}$       | f) $2^{-42}$              |

**4 Simplifica utilizando las propiedades de las potencias.**

a)  $\frac{m^6 \cdot m^{-6}}{(m^2)^4}$       b)  $a^5 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3$       c)  $\left(\frac{a}{b}\right)^4 : \left(\frac{1}{b}\right)^3$       d)  $\frac{a^2 \cdot a^{-1} \cdot a^{-5}}{(a^2)^{-2}}$

a)  $\frac{m^{6-6}}{(m^2)^{2 \cdot 4}} = \frac{m^0}{m^8} = \frac{1}{m^8} = m^{-8}$

b)  $a^5 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{a^5}{a^3} = a^{3-3} = a^2$

c)  $\left(\frac{a^4}{b^4}\right) : \left(\frac{1}{b^3}\right) = \frac{a^4 \cdot b^3}{b^4} = a^4 \cdot b^3 \cdot b^{-4} = a^4 \cdot b^{3-4} = a^4 \cdot b^{-1} = \frac{a^4}{b}$

d)  $\frac{a^{2-1-5}}{a^{2 \cdot (-2)}} = \frac{a^{-4}}{a^{-4}} = a^{-4-(-4)} = a^0 = 1$

**5 Calcula.**

a)  $\left(\frac{3}{2} - 1\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

b)  $\left(2 + \frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-2}$

a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

b)  $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{49} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{49}$

**6 Expresa como potencia única.**

a)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^2$

b)  $\frac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$

c)  $\left[\left(\frac{1}{2} + 1\right)^{-1}\right]^3$

d)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{4}\right)^2$

e)  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^4$

f)  $\frac{3^{-1}}{5 \cdot 15^2}$

a)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$

b)  $\frac{2^{-2}}{2^{-4}} = 2^2$

c)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

d)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

e)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$

f)  $\left(\frac{1}{15}\right)^3$

**7 ¿Verdadero o falso?**

a)  $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{9}{2}$

b)  $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-1} = \frac{3}{49}$

a) Verdadero:

$$6^2 : 2^3 = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^3} = \frac{9}{2} = 22$$

b) Falso:

$$\frac{3^2}{7^2} \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{147} \neq \frac{3}{49}$$

### 8 Opera y simplifica.

$$a) \frac{4ab}{9} : \frac{b^2}{3a}$$

$$b) \left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \cdot (a^{-1})^{-2}$$

$$c) (6a)^{-1} \cdot (3a^{-2})^{-2}$$

$$d) (a^{-1} \cdot b^2)^2 : (ab)^2$$

Las soluciones, no ordenadas, son:

$$\frac{b^3}{a}; \frac{b^2}{a^4}; \frac{4a^2}{3b}; \frac{a^3}{54}$$

$$a) \frac{4ab \cdot 3a}{9b^2} = \frac{4a^2}{3b}$$

$$b) \frac{b^3}{a^3} \cdot a^2 = \frac{b^3}{a} = a^{-1}b^3$$

$$c) \frac{1}{6a} \cdot 3^{-2}a^4 = \frac{a^3}{54}$$

$$d) \frac{b^4}{a^2} : (ab)^2 = \frac{b^4}{a^4b^2} = a^{-4}b^2$$

### 9 Calcula utilizando las propiedades de las potencias.

$$a) \frac{6^4 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4}$$

$$b) \frac{15^2 \cdot 4^2}{12^2 \cdot 10}$$

$$c) \frac{2^{-5} \cdot 4^3}{16}$$

$$d) \frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$$

$$e) \frac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}$$

$$f) \frac{2^{-5} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^{-2}}{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 6^{-1}}$$

$$a) \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot (2^3)^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^6}{3^2 \cdot 2^7} = \frac{3^4 \cdot 2^{10}}{3^2 \cdot 2^7} = 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{10} \cdot 2^{-7} = 3^2 \cdot 2^3 = 72$$

$$b) \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2)^2}{3^2 \cdot (2^2)^2 \cdot 2 \cdot 5} = 3^2 \cdot 3^{-2} \cdot 2^4 \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-1} \cdot 5^2 \cdot 5^{-1} = 3^0 \cdot 2^0 \cdot 2^{-1} \cdot 5 = 2^{-1} \cdot 5$$

$$c) \frac{2^{-5} \cdot (2^2)^3}{2^4} = 2^{-5} \cdot 2^6 \cdot 2^{-4} = 2^{-3}$$

$$d) \frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}} = \frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-(-2)} = 2^{5-5} \cdot 3^{2+2} = 2^0 \cdot 3^4 = 3^4 = 81$$

$$e) \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot (3^2)^2}{2^3 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^2} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4} = 2^2 \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^{-2} = 2^{-5} \cdot 3^4$$

$$f) \frac{2^{-5} \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3^{-2}}{2^{-4} \cdot (2^2)^2 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \frac{2^{-2} \cdot 3^0}{2^{-4} \cdot 2^4 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = 2^{-2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 2^{-1} \cdot 3$$

### 10 Simplifica.

$$a) \frac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2}$$

$$b) \frac{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 9^{-1}}{2^{-5} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^2}$$

$$a) \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^4} = \frac{2^7 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^7} = \frac{2^4}{3^5}$$

$$b) \frac{2^{-4} \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 3^{-2}}{2^{-5} \cdot 2^3 \cdot 3^4} = \frac{3^{-1}}{2^{-2} \cdot 3^4} = \frac{2^2}{3^5}$$

## Potencias de base 10

**11** Indica el valor de  $n$  en cada caso:

a)  $0,001 = 10^n$

b)  $(10\,000)^2 = 10^n$

c)  $0,0000001 = 10^n$

d)  $0,0001^3 = 10^n$

a)  $n = -3$

b)  $n = 8$

c)  $n = -7$

d)  $n = -12$

**12** ¿Verdadero o falso?

a)  $(0,001)^{-3} = 10^9$

b)  $(0,001)^4 = 10^{12}$

c)  $(0,01)^3 = 10^{-6}$

d)  $(10^{-2})^5 = (0,1)^{10}$

a) Verdadero  $\rightarrow (10^{-3})^{-3} = 10^9$

b) Falso  $\rightarrow (10^{-3})^{-4} = (10)^{-12}$

c) Verdadero  $\rightarrow (10^{-2})^3 = 10^{-6}$

d) Verdadero  $\rightarrow (10)^{-10} = (10^{-1})^{10} = (0,1)^{10}$

**13** Expresa como una potencia de base 10.

a)  $(0,01)^{-5}$

b)  $\left(\frac{1}{0,001}\right)^4$

c)  $\left(\frac{1}{10^3}\right)^{-3}$

d)  $\left(\frac{0,1^3}{10^5}\right)^2$

a)  $(10^{-2})^{-5} = 10^{10}$

b)  $\left(\frac{1}{10^{-3}}\right)^4 = (10^{-(-3)})^4 = 10^{12}$

c)  $(10^{-3})^{-3} = 10^9$

d)  $((10^{-1})^3 \cdot 10^{-5})^2 = (10^{-3})^2 \cdot (10^{-5})^2 = 10^{-6} \cdot 10^{-10} = 10^{-16}$

**14** Escribe, como se hace en los ejemplos, dos potencias de base 10 consecutivas entre las que estén los siguientes números:

•  $10^2 < 234 < 10^3$

$10^{-1} < 0,28 < 10^0$

a) 8,35

b) 762

c) 13 456

d) 1 230 022 045

e) 0,18

f) 0,008

g) 0,02

h) 0,000007

a)  $10^0 < 8,35 < 10^1$

b)  $10^2 < 762 < 10^3$

c)  $10^4 < 13\,456 < 10^5$

d)  $10^9 < 1\,230\,022\,045 < 10^{10}$

e)  $10^{-1} < 0,18 < 10^0$

f)  $10^{-3} < 0,008 < 10^{-2}$

g)  $10^{-2} < 0,02 < 10^{-1}$

h)  $10^{-6} < 0,000007 < 10^{-5}$

### Notación científica

**15** Escribe estos números con todas sus cifras:

- |                        |                        |                        |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| a) $4 \cdot 10^7$      | b) $5 \cdot 10^{-4}$   | c) $9,73 \cdot 10^8$   |
| d) $8,5 \cdot 10^{-6}$ | e) $3,8 \cdot 10^{10}$ | f) $1,5 \cdot 10^{-5}$ |
| a) 40 000 000          | b) 0,0005              | c) 973 000 000         |
| d) 0,0000085           | e) 38 000 000 000      | f) 0,000015            |

**16** Escribe en notación científica:

- |                         |                                    |                                   |
|-------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| a) 13 800 000           | b) 0,000005                        | c) 4 800 000 000                  |
| d) 0,0000173            | e) $153 \cdot 10^4$                | f) $93,8 \cdot 10^{-4}$           |
| a) $1,38 \cdot 10^7$    | b) $5 \cdot 10^{-6}$               | c) $4,8 \cdot 10^9$               |
| d) $1,73 \cdot 10^{-5}$ | e) $1\,530\,000 = 1,53 \cdot 10^6$ | f) $0,00938 = 9,38 \cdot 10^{-3}$ |

**17** Completa estas igualdades:

- |                                        |                                  |
|----------------------------------------|----------------------------------|
| a) $5,25 \cdot 10^7 = \dots 10^6$      | b) $2 \cdot 10^3 = \dots 10^4$   |
| c) $4,7 \cdot 10^{-3} = \dots 10^{-2}$ | d) $234 \cdot 10^4 = \dots 10^3$ |
| a) $52,5 \cdot 10^6$                   | b) $0,2 \cdot 10^4$              |
| c) $0,47 \cdot 10^{-2}$                | d) $2\,340 \cdot 10^3$           |

**19** Calcula y comprueba con la calculadora.

- |                                                  |                                                  |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{12})$      | b) $(1,5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$ |
| c) $(3,4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$ | d) $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$       |
| e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^7)$          | f) $(4,4 \cdot 10^8) : (2 \cdot 10^{-5})$        |
| a) $6 \cdot 10^{17}$                             | b) $3 \cdot 10^{-12}$                            |
| c) $6,8 \cdot 10^9$                              | d) $4 \cdot 10^{-5}$                             |
| e) $3 \cdot 10^{-14}$                            | f) $2,2 \cdot 10^{13}$                           |

**20** Calcula, expresa el resultado en notación científica y comprueba con la calculadora.

- |                                                                                                              |                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| a) $(2,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3)$                                                                   | b) $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^5)$      |
| c) $(7,4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$                                                             | d) $(1,2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-3})$ |
| a) $(2,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3) = 2,5 \cdot 8 \cdot 10^{10} = 20 \cdot 10^{10} = 2 \cdot 10^{11}$  |                                              |
| b) $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^5) = (5 : 8) \cdot 10^{-8} = 0,625 \cdot 10^{-8} = 6,25 \cdot 10^{-9}$   |                                              |
| c) $(7,4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6}) = 7,4 \cdot 5 \cdot 10^7 = 37 \cdot 10^7 = 3,7 \cdot 10^8$   |                                              |
| d) $(1,2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-3}) = (1,2 : 2) \cdot 10^{14} = 0,6 \cdot 10^{14} = 6 \cdot 10^{13}$ |                                              |



**21 Efectúa y comprueba con la calculadora.**

a)  $3,6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11}$

b)  $5 \cdot 10^9 + 8,1 \cdot 10^{10}$

c)  $8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9}$

d)  $5,32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}$

a)  $3,6 \cdot 10 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{11} = (36 - 4) \cdot 10^{11} = 32 \cdot 10^{11} = 3,2 \cdot 10^{12}$

b)  $5 \cdot 10^9 + 81 \cdot 10^9 = 86 \cdot 10^9 = 8,6 \cdot 10^{10}$

c)  $80 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-9} = 75 \cdot 10^{-9} = 7,5 \cdot 10^{-8}$

d)  $532 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6} = 540 \cdot 10^{-6} = 5,4 \cdot 10^{-4}$

**22 Efectúa y escribe el resultado con todas las cifras.**

a)  $5,3 \cdot 10^{11} - 1,2 \cdot 10^{12} + 7,2 \cdot 10^{10}$

b)  $4,2 \cdot 10^{-6} - 8,2 \cdot 10^{-7} + 1,8 \cdot 10^{-5}$

c)  $(2,25 \cdot 10^{22}) \cdot (4 \cdot 10^{-15}) : (3 \cdot 10^{-3})$

d)  $(1,4 \cdot 10^{-7})^2 : (5 \cdot 10^{-5})$

a) -598 000 000 000

b) 0,00002138

c) 30 000 000 000

d) 0,000000000392

**Raíces y radicales**

**23 Halla, cuando sea posible, las raíces siguientes:**

a)  $\sqrt[4]{16}$

b)  $\sqrt{\frac{16}{25}}$

c)  $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

d)  $\sqrt[4]{-1}$

e)  $\sqrt[3]{216}$

f)  $\sqrt[7]{-128}$

g)  $\sqrt[5]{-243}$

h)  $\sqrt[6]{4096}$

i)  $\sqrt[6]{64}$

j)  $\sqrt[3]{-8}$

k)  $\sqrt[4]{625}$

l)  $\sqrt{-8}$

m)  $\sqrt[4]{625/16}$

n)  $\sqrt[5]{-1}$

a) 2

b)  $\frac{4}{5}$

c)  $\frac{1}{2}$

d) No tiene solución real.

e) 6

f) -2

g) -3

h) 4

i) 2

j) -2

k) 5

l) No tiene solución real.

m)  $\frac{5}{2}$

n) -1

**24 Las siguientes raíces no son exactas. ¿Entre qué naturales consecutivos están?**

a)  $\sqrt[3]{1235}$

b)  $\sqrt[4]{520}$

c)  $\sqrt[5]{96}$

d)  $\sqrt{1,5 \cdot 10^3}$

a) Entre  $\sqrt[3]{1000} = 10$  y  $\sqrt[3]{1331} = 11$

b) Entre  $\sqrt[4]{256} = 4$  y  $\sqrt[4]{625} = 5$

c) Entre  $\sqrt[5]{32} = 2$  y  $\sqrt[5]{243} = 3$

d) Entre  $\sqrt{1444} = 38$  y  $\sqrt{1521} = 39$

**25 Extrae de cada radical los factores que sea posible:**

- |                   |                    |                    |
|-------------------|--------------------|--------------------|
| a) $\sqrt[4]{32}$ | b) $\sqrt[3]{81}$  | c) $\sqrt[3]{200}$ |
| d) $\sqrt{50}$    | e) $\sqrt[4]{144}$ | f) $\sqrt[3]{250}$ |
| g) $\sqrt[5]{64}$ | h) $\sqrt[3]{243}$ | i) $\sqrt{4a^3}$   |
- 
- |                                                  |                                                               |                                                               |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| a) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2\sqrt[4]{2}$ | b) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$              | c) $\sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^2} = 2\sqrt[3]{5^2}$ |
| d) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$  | e) $\sqrt[4]{144} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[4]{3^2}$ | f) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 5\sqrt[3]{2}$     |
| g) $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$ | h) $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3\sqrt[3]{3^2}$           | i) $\sqrt{4a^3} = 2a\sqrt{a}$                                 |

**26 Simplifica si es posible.**

- |                                 |                                     |                                    |
|---------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$    | b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16}$       | c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5}$ |
| d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$ | e) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ | f) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6}$   |
- 
- |                    |                       |                   |
|--------------------|-----------------------|-------------------|
| a) $\sqrt{16} = 4$ | b) $\sqrt{80}$        | c) $\sqrt[3]{20}$ |
| d) No es posible.  | e) $\sqrt[4]{81} = 3$ | f) No es posible. |

**27 Simplifica.**

- |                                  |                               |                               |
|----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $(\sqrt[4]{2})^4$             | b) $(\sqrt[3]{2})^6$          | c) $(\sqrt[6]{2^2})^3$        |
| d) $\sqrt[3]{10} \sqrt[3]{1000}$ | e) $\sqrt[5]{2} \sqrt[5]{16}$ | f) $\sqrt[3]{9} \sqrt[3]{81}$ |
- 
- |                     |          |      |
|---------------------|----------|------|
| a) 2                | b) $2^2$ | c) 2 |
| d) $10\sqrt[3]{10}$ | e) 2     | f) 9 |

**29 Extrae factores fuera de cada raíz.**

- |                                     |                              |                                          |
|-------------------------------------|------------------------------|------------------------------------------|
| a) $\sqrt{2^2 \cdot 5^3}$           | b) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 7^3}$ | c) $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^6}$             |
| d) $\sqrt{5^2 \cdot 7^4 \cdot 3^5}$ | e) $\sqrt[3]{3^3 \cdot 5}$   | f) $\sqrt[3]{4^4 \cdot 5^2 \cdot 7^6}$   |
| g) $\sqrt[3]{27 \cdot a \cdot b^3}$ | h) $\sqrt[4]{16a^5 \cdot b}$ | i) $\sqrt[5]{32 \cdot a^2 \cdot b^{10}}$ |
- 
- |                                    |                       |                                       |
|------------------------------------|-----------------------|---------------------------------------|
| a) $10\sqrt{5} = 4$                | b) $2^2 \cdot 7$      | c) $3\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2}$         |
| d) $5 \cdot 7^2 \cdot 3^2\sqrt{3}$ | e) $3\sqrt[3]{5}$     | f) $4 \cdot 7^2\sqrt[3]{4 \cdot 5^2}$ |
| g) $3b\sqrt[3]{a}$                 | h) $2a^4\sqrt[4]{ab}$ | i) $2b^2\sqrt[5]{a^2}$                |

**30 Extrae factores y simplifica.**

$$\sqrt[3]{54ab^3} : \sqrt[3]{16a^4}$$

$$\sqrt[3]{3^3 \cdot 2 \cdot ab^3} : \sqrt[3]{2^4 \cdot a^4} = 3b\sqrt[3]{2a} : 2a\sqrt[3]{2a} = 3b(2a)^{1/3} \cdot (2a)^{-1} \cdot (2a)^{-1/3} = 3b(2a)^{-1} = \frac{3b}{2a}$$

**31 Introduce factores en la raíz, como en el ejemplo.**

•  $2^2 \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{(2^2)^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 7} = \sqrt[3]{448}$

a)  $5a\sqrt{3}$

b)  $a^2 \cdot \sqrt{13ab}$

c)  $ab \cdot \sqrt[3]{2a}$

d)  $-2b \cdot \sqrt[3]{3}$

e)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{5}$

f)  $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$

a)  $\sqrt{(5a)^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3 \cdot a^2} = \sqrt{75a^2}$

b)  $\sqrt{(a^2)^2 \cdot 13ab} = \sqrt{13ba^5}$

c)  $\sqrt[3]{(ab)^3 \cdot 2a} = \sqrt[3]{2a^4 b^3}$

d)  $\sqrt[3]{3(-2b)^3} = \sqrt[3]{3(-2)^3 b^3} = \sqrt[3]{-24b^3}$

e)  $\sqrt[4]{(\sqrt{2})^4 5} = \sqrt[4]{(2^{1/2})^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 5} = \sqrt[4]{20}$

f)  $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 5}{3^3 \cdot 2^2}} = \sqrt[3]{\frac{10}{27}}$

**32 Opera y simplifica.**

a)  $\sqrt{1125} : \sqrt{15}$

b)  $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$

c)  $(3\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$

d)  $(\sqrt{5} + \sqrt{6})(\sqrt{5} - \sqrt{6})$

a)  $\sqrt{5^3 \cdot 3^2} : \sqrt{5 \cdot 3} = \sqrt{\frac{5^3 \cdot 3^2}{5 \cdot 3}} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$

b)  $\sqrt[3]{2^2 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6$

c)  $(3\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + (\sqrt{8})^2 = 9(\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{2 \cdot 8} + 8 = 18 + 24 + 8 = 50$

d)  $(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2 = 5 - 6 = -1$

**33 Solo tres de estas expresiones se pueden simplificar. Compruébalo:**

a)  $\sqrt{5} + \sqrt{10}$

b)  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}$

c)  $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

d)  $\sqrt[3]{7} + \sqrt{7}$

e)  $(\sqrt[3]{4})^5$

f)  $\sqrt{36} : \sqrt{18}$

a)  $\sqrt{5} + \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = (1 + \sqrt{2})\sqrt{5}$

b)  $\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{3^3 \cdot 2} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 2} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3^2 = 18$

c)  $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$  no se puede simplificar

d)  $\sqrt[3]{7} + \sqrt{7}$  no se puede simplificar

e)  $((2^2)^{1/3})^5 = (2)^{10/3} = 8\sqrt[3]{2}$  no se puede simplificar

f)  $\sqrt{2^2 \cdot 3^2} : \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 3^2}} = \sqrt{2}$

**34** Simplifica las expresiones que puedas, y en las restantes, indica por qué no se pueden simplificar.

a)  $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$

b)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

c)  $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

d)  $\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$

e)  $2\sqrt{5} - \frac{1}{3}\sqrt{5}$

f)  $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

a)  $3\sqrt{2}$

b) No se puede, porque tienen distinto radicando.

c)  $-\sqrt{3}$

d) Igual que b).

e)  $\frac{5}{3}\sqrt{3}$

f)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**35** Efectúa.

a)  $\sqrt{50} + \sqrt{72} - 10\sqrt{2}$

b)  $\sqrt{80} - \sqrt{45} - \sqrt{20}$

c)  $-\sqrt{48} + 3\sqrt{75} - \sqrt{108}$

d)  $\sqrt{175} + \sqrt{28} - 5\sqrt{63}$

e)  $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2}$

f)  $\sqrt[3]{81} + 7\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{24}$

a)  $\sqrt{50} + \sqrt{72} - 10\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^3 \cdot 3^2} - 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = \sqrt{2}$

b)  $\sqrt{80} - \sqrt{45} - \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 2^4} - \sqrt{5 \cdot 3^2} - \sqrt{5 \cdot 2^2} = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -\sqrt{5}$

c)  $-\sqrt{48} + 3\sqrt{75} - \sqrt{108} = -\sqrt{3 \cdot 2^4} + 3\sqrt{3 \cdot 5^2} - \sqrt{3^3 \cdot 2^2} = -4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

d)  $\sqrt{175} + \sqrt{28} - 5\sqrt{63} = \sqrt{7 \cdot 5^2} + \sqrt{7 \cdot 2^2} - 5\sqrt{7 \cdot 3^2} = 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 15\sqrt{7} = -8\sqrt{7}$

e)  $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} - \sqrt[3]{2^7} + \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

f)  $\sqrt[3]{3^4} + 7\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3 \cdot 2^3} + 7\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} = 8\sqrt[3]{3}$

### Resuelve problemas

**36** Expresa en notación científica el número de segundos que tiene un año. ¿Qué edad tendría una persona que haya vivido 2 000 millones de segundos?

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ año tiene } 365 \text{ días} \\ 1 \text{ día tiene } 24 \text{ horas} \\ 1 \text{ hora tiene } 3\,600 \text{ segundos} \end{array} \right\} \rightarrow 365 \cdot 24 \cdot 3\,600 = 31\,536\,000$$

\* si el año es bisiesto el resultado es otro.

$3,1536 \cdot 10^7$  segundos tiene un año.

$2\,000\,000\,000$  segundos  $\rightarrow 2 \cdot 10^9 : 3,1536 \cdot 10^7 = 63,4$  años.

**37** La longitud media de una bacteria es de  $2 \mu\text{m}$ , que equivale a  $2 \cdot 10^{-6}$  m. En el mundo hay aproximadamente  $5 \cdot 10^{30}$  bacterias. Si se pusieran una detrás de otra, ¿cuántos kilómetros mediría la fila? ¿A cuántos años luz corresponde esa distancia?

$$2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{30} = 10 \cdot 10^{24} \text{ m} = 10^{25} \text{ m}$$

$$\text{Pasamos a km } \frac{10^{25}}{1\,000} = 10^{22} \text{ km}$$

$$\text{Año luz: } 9,6 \cdot 10^{12} \text{ km} \rightarrow 10^{22} : 9,6 \cdot 10^{12} \approx 10^9 \text{ años luz.}$$

**38** Un centímetro cúbico de agua contiene  $3,35 \cdot 10^{22}$  moléculas de agua. Si en nuestro planeta hay, aproximadamente,  $1,39 \cdot 10^9$  km<sup>3</sup> de agua, ¿cuántas moléculas de agua hay en la Tierra? ¿Y en un vaso de 2/5 de litro?

$$1,39 \cdot 10^9 \cdot 10^{15} = 1,39 \cdot 10^{24} \text{ cm}^3$$

$$1,39 \cdot 10^{24} \cdot 3,35 \cdot 10^{22} = 4,6565 \cdot 10^{46} \text{ moléculas.}$$

$$\frac{2}{5} \text{ de litro} = \frac{2}{5} \text{ dm}^3 = \frac{2}{5} \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 0,4 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$$

$$0,4 \cdot 10^3 \cdot 3,35 \cdot 10^{22} = 1,34 \cdot 10^{25} \text{ moléculas en un vaso.}$$

**39** El diámetro de un virus es  $5 \cdot 10^{-4}$  mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra? (Radio medio de la Tierra: 6371 km).

$$\text{Calculamos el perímetro de la Tierra} \rightarrow 2\pi r = 2\pi \cdot 6371 = 12742 \pi \text{ km}$$

$$12742\pi : 5 \cdot 10^{-4} = 2548,4\pi \cdot 10^4 \text{ virus}$$

**40** De Neptuno al Sol hay  $4,50 \cdot 10^9$  km, y de la Tierra al Sol,  $1,50 \cdot 10^8$  km. Cuando los tres estén alineados, ¿a qué distancia se encontrará Neptuno de la Tierra? Si una nave espacial sale de la Tierra con dirección a Neptuno a 18000 km/h, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a su destino?

Consideramos que el sol está en un extremo, entonces se restan las distancias:

$$4,5 \cdot 10^9 - 1,5 \cdot 10^8 = 4,4 \cdot 10^9 \text{ km}$$

$$t = \frac{e}{v} = \frac{4,4 \cdot 10^9}{1,8 \cdot 10^4} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ horas.}$$

**41** Observa las masas de estos planetas:

Tierra:  $5,98 \cdot 10^{24}$  kg

Marte:  $6,42 \cdot 10^{23}$  kg

Júpiter:  $1,90 \cdot 10^{27}$  kg

a) ¿Cuántos kilos pesa más la Tierra que Marte?

b) ¿Cuántas veces pesa más Júpiter que Marte?

a) La Tierra pesa  $5,98 \cdot 10^{24} - 6,42 \cdot 10^{23} = 5,338 \cdot 10^{24}$  kg más que Marte.

b) Júpiter pesa aproximadamente  $\frac{1,90 \cdot 10^{27}}{6,42 \cdot 10^{23}} \approx 3000$  veces más (2959,501).

**42** La galaxia M87, que está a 50 millones de años-luz de la Tierra, tiene un agujero negro cuyo diámetro es 60 años-luz y cuya masa es dos mil millones de veces la masa del Sol.

a) Calcula la masa del agujero negro en kilogramos. (La masa del Sol es, aproximadamente,  $2 \cdot 10^{30}$  kg).

b) Expresa en kilómetros la distancia de esa galaxia a la Tierra y el diámetro del agujero negro.

a) La masa del agujero negro es  $2 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30} = 4 \cdot 10^{39}$  kg.

b) Un año luz son  $9,46 \cdot 10^{12}$  km.

$$\text{Distancia} = 50 \cdot 10^6 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 4,73 \cdot 10^{20} \text{ km}$$

$$\text{Diámetro} = 60 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 5,68 \cdot 10^{14} \text{ km}$$

- 43** En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide  $2\sqrt{6}$  m, y uno de los catetos,  $2\sqrt{3}$  m. ¿Cuánto mide el otro cateto? ¿Y su área? Da los valores exactos; es decir, con radicales.

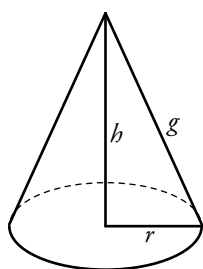
$$(2\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{3})^2 + c^2 \rightarrow 4 \cdot 6 = 4 \cdot 3 + c^2 \rightarrow 24 = 12 + c^2 \rightarrow c^2 = 24 - 12 \rightarrow$$

$$\rightarrow c^2 = 12 \rightarrow c = \sqrt{12} \rightarrow c = \sqrt{2^2 \cdot 3} \rightarrow c = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{(2\sqrt{3})^2}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ m}^2$$

- 44** Halla el volumen de un cono de 18 cm de generatriz y  $6\sqrt{3}$  cm de radio de la base.

💡  $V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$



$$g^2 = r^2 + h^2 \rightarrow (18)^2 = (6\sqrt{3})^2 + h^2 \rightarrow 324 = 36 \cdot 3 + h^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 324 - 108 = h^2 \rightarrow h^2 = 216 \rightarrow h = \sqrt{216} \rightarrow h = \sqrt{2^3 \cdot 3^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = 2 \cdot 3\sqrt{6} \rightarrow h = 6\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$\text{Luego } V_{\text{CONO}} = \frac{1}{3} \pi (6\sqrt{3})^2 \cdot 6\sqrt{6} = \frac{1}{3} \pi 36 \cdot 3 \cdot 6\sqrt{6} = \pi \cdot 216\sqrt{6} \text{ cm}^3$$

- 45** El volumen de la Luna es de  $2,2 \cdot 10^{10} \text{ km}^3$ . ¿Cuántos kilómetros mide su radio? Utiliza la calculadora y da el resultado en notación científica.



💡  $V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \pi R^3$

$$2,2 \cdot 10^{10} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rightarrow R^3 = \frac{2,2 \cdot 10^{10} \cdot 3}{4\pi} \rightarrow R^3 = \frac{6,6 \cdot 10^{10}}{4\pi} \rightarrow$$

$$\rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{6,6 \cdot 10^{10}}{4\pi}} \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{6,6}{4\pi}} \cdot \sqrt[3]{10^{10}} \rightarrow R = 1,74 \cdot 10^3 \text{ km}$$

- 46** El VCM (Volumen Corpuscular Medio) es el volumen promedio de los glóbulos rojos. En una adolescente, el VCM es de 90 femtolitros (1 fL =  $10^{-15}$  L). Si tiene unos 5 L de sangre y 5 millones de glóbulos rojos por  $\text{mm}^3$ , ¿cuántos litros ocupan los glóbulos rojos de una adolescente promedio?

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ litros de sangre} \rightarrow 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \rightarrow 5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^6 = 2,5 \cdot 10^{13} \\ 90 \text{ fl} = 90 \cdot 10^{-15} = 9 \cdot 10^{-14} \text{ litros} \end{array} \right\} \rightarrow 2,5 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 2,25 \text{ litros}$$

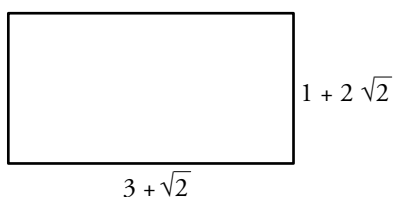
**47 Meta 11.6.** Leo en un diario: *La cantidad anual de CO<sub>2</sub> emitida en 2016 por una central de carbón fue 6930 000 toneladas, según el Registro Estatal de Emisiones y Fuentes Contaminantes. Para los coches nuevos, la emisión media es de 118,1 g CO<sub>2</sub>/km según la Agencia Europea de Medio Ambiente y se estima que un vehículo nuevo recorre en España unos 25 000 km al año.*

- a) ¿La emisión de cuántas toneladas anuales de CO<sub>2</sub> se evitarían si suprimiéramos un vehículo nuevo?  
b) ¿A cuántos coches nuevos equivale la cantidad de CO<sub>2</sub> emitida por la central en 2016?  
c) ¿Es correcta la siguiente afirmación?

*Un coche nuevo emite 2,9 t anuales de CO<sub>2</sub> y 2,3 millones de ellos emitirán tanto como la central.*

- a)  $118,1 \cdot 25\,000 = 2\,952\,500 \text{ g} \approx 2,95 \text{ toneladas de CO}_2$  emitidas por un coche nuevo.  
b)  $6\,930\,000 : 2,95 = 2\,349\,152,5$  coches nuevos.  
c) Un coche nuevo emite 2,9 toneladas anuales.  
2,3 millones emiten 6785 000  
Luego la afirmación es correcta.

**48** Halla el perímetro y el área del rectángulo  $ABCD$  tal que:  $\overline{AB} = 3 + \sqrt{2} \text{ cm}$  y  $\overline{BC} = 1 + 2\sqrt{2} \text{ cm}$ . Escribe las respuestas en la forma  $a + b\sqrt{2}$ , donde  $a$  y  $b$  son números naturales.



El perímetro del rectángulo es:

$$P = 2(\overline{AB}) + 2(\overline{BC}) = 2(3 + \sqrt{2}) + 2(1 + 2\sqrt{2}) = 6 + 2\sqrt{2} + 2 + 4\sqrt{2} = 8 + 6\sqrt{2}$$

El área del rectángulo es:

$$A = b \cdot h = (3 + \sqrt{2}) \cdot (1 + 2\sqrt{2}) = 3 + 6\sqrt{2} + \sqrt{2} + 4 = 7 + 7\sqrt{2}$$

**49** Las cápsulas de un fármaco están formadas por dos semiesferas de 7 mm de diámetro y un cilindro de 14 mm de altura. Un laboratorio produce 4 toneladas de ese fármaco y quiere envasarlo en cápsulas que contengan 500 mg cada una.

¿Cuántas cápsulas puede producir? Halla el volumen de cada cápsula.

$$4 \text{ toneladas} \rightarrow 4 \cdot 1\,000 \text{ kg} \rightarrow 4 \cdot 10^3 \text{ kg} = 4 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \text{ mg} = 4 \cdot 10^9 \text{ mg}$$

$$1.^\circ) 4 \cdot 10^9 : 500 = 8 \cdot 10^6 \text{ cápsulas.}$$

2.º) Volumen de cada cápsula:

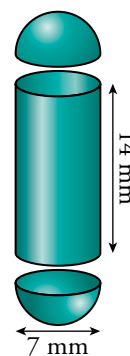
Calculamos el volumen de una esfera de radio 3,5 mm.

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3,5)r^3 = \frac{4}{3}(42,875)\pi \text{ mm}^3$$

$$V_{CILINDRO} = A_{BASE} \cdot \text{Altura} = \pi r^2 \cdot 14 = \pi(3,5)^2 \cdot 14 = 12,25 \cdot 14 \cdot \pi = 171,5 \cdot \pi \text{ mm}^3$$

$$V_{CÁPSULA} = V_{ESFERA} + V_{CILINDRO} = \frac{4}{3}(42,875)\pi + 171,5 \cdot \pi =$$

$$= \left(\frac{4}{3}(42,875) + 171,5\right)\pi = 228,67 \cdot \pi \text{ mm}^3$$



Resuelve: un poco más difícil

**50** Dados un cuadrado de lado  $1 + \sqrt{3}$  cm y un rectángulo de 1 cm de altura y base variable:

a) ¿Cuál debe ser la base del rectángulo para que las dos figuras tengan el mismo perímetro?

b) ¿Cuánto debe medir la base para que el área del cuadrado sea el doble de la del rectángulo?

a) 1.º) Calculamos el perímetro del cuadrado:

$$P_c = 4(1 + \sqrt{3}) = 4 + 4\sqrt{3}$$

2.º) Calculamos el perímetro del rectángulo mediante la fórmula:

$$P_r = 2 \cdot h + 2 \cdot b$$

Donde  $h$  y  $b$  son la altura y la base respectivamente:

$$P_r = 2 \cdot 1 + 2 \cdot b$$

3.º) Como los perímetros han de ser iguales, igualamos y despejamos  $b$ :

$$4 + 4\sqrt{3} = 2 + 2b \rightarrow b = \frac{4 - 2 + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + 4\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}$$

b) Procedemos del mismo modo con las áreas:

1.º)  $A_c = (1 + 2\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$

2.º)  $A_r = b \cdot h = 1 \cdot b$

3.º) El área del cuadrado tiene que ser el doble que el área del rectángulo luego:

$$2 \cdot b = 4 + 2\sqrt{3} \rightarrow b = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

**51** Si el radio de un CD mide 6 cm, ¿es posible guardarlo en un sobre cuadrado de 16 cm de diagonal? ¿Y de 17 cm de diagonal?

El radio del CD es 6 cm  $\rightarrow$  El diámetro es 12 cm.

Necesitamos un sobre de lado mayor o igual que 12 cm.

Sabemos que la diagonal del cuadrado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales, luego tenemos la fórmula:

$$h^2 = 2c^2$$

Calculamos  $c$ :

$$(16)^2 = 2c^2 \rightarrow 256 = 2c^2 \rightarrow \frac{256}{2} = c^2 \rightarrow 128 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{128} \rightarrow c = \sqrt{2^7} \rightarrow$$

$$\rightarrow c = 2^3\sqrt{2} \rightarrow c = 8\sqrt{2} \approx 11,3$$

Entonces no nos vale un sobre de 16 cm de diagonal de 16 cm.

Veamos si nos vale uno de 17 cm:

$$(17)^2 = 2c^2 \rightarrow 289 = 2c^2 \rightarrow \frac{289}{2} = c^2 \rightarrow 144,5 = c^2 \rightarrow c = 12,021$$

Luego con uno de 17 cm de diagonal si nos vale.



**52** Reemplaza cada cuadrado por una cifra para que se cumplan estas igualdades:

a)  $\sqrt{12\square\square} = 3\square$

b)  $\sqrt{\square} \cdot \sqrt{\square 8} = 6$

c)  $\sqrt{6\square + \square 6} = 10$

d)  $\sqrt{6\square + \square 6} = 10$

a)  $\sqrt{1225} = 35$

b)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = 6$

c)  $\sqrt{64 + 36} = 10$

d)  $\sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{3}$

### Reflexiona

**53** Justifica cuál debe ser el valor de  $a$ , en cada caso, para que se verifique la igualdad:

a)  $a^3 = 2^6$

b)  $a^{-1} = 2$

c)  $\sqrt{a} = \frac{4}{5}$

d)  $\sqrt[4]{a} = 1$

e)  $a^{-2} = \frac{1}{4}$

f)  $a^{-5} = -1$

a)  $a = 2^2$

b)  $a = \frac{1}{2}$

c)  $a = \frac{16}{25}$

d)  $a = 1$

e)  $a = 2$

f)  $a = -1$

**54** ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

a) La potencia de un número negativo puede ser igual a 1.

b) Si  $x < 0$ , entonces  $-x^3 > 0$ .

c)  $-x^2$  es siempre un número positivo.

d) El cubo de un número negativo es siempre menor que dicho número.

a) Verdadero. Por ejemplo:  $(-1)^2$ .

b) Verdadero. Por ejemplo:  $-(-3)^3 > 0$ .

c) Falso. Por ejemplo:  $-(-3)^2 < 0$ .

d) Verdadero. Por ejemplo:  $(-3)^3 = -9$ ;  $-9 < -3$ .

**55** La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores. Cuando escribimos  $-\sqrt{4}$  nos referimos a la raíz negativa. Es decir,  $-\sqrt{4} = -2$ .

¿Cuál es el valor de las siguientes expresiones?

a)  $-\sqrt{64}$

b)  $\sqrt[4]{81}$

c)  $-\sqrt{1}$

d)  $\sqrt[6]{1}$

e)  $-\sqrt{9}$

f)  $\sqrt[3]{-8}$

a)  $-8$

b)  $\pm 3$

c)  $-1$

d)  $\pm 1$

e)  $-3$

f)  $-2$

**56 ¿Verdadero o falso?**

- a)  $(\sqrt{-2})^2 = 2$                       b)  $\sqrt[3]{(-2)^{-3}} = -\frac{1}{2}$   
c)  $\sqrt{16+25} = 9$                       d)  $\sqrt[4]{(-10)(-10)} = \sqrt{10}$   
e)  $\frac{\sqrt{18}-\sqrt{2}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}} = 1$                       f)  $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$

- a) Falso  $\rightarrow (\sqrt{-2})^2 = -2$ .  
b) Verdadero.  
c) Falso  $\rightarrow \sqrt{16+25} = \sqrt{41} \neq 9$ .  
d) Verdadero.  
e) Falso  $\rightarrow \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ .  
f) Verdadero.

**57 Si  $a^2 = b^2$ , ¿qué podemos afirmar de  $a$  y  $b$ ?**

Si  $a^2 = b^2$  se pueden afirmar dos cosas. O bien  $a = b$ , o  $a$  es un número cualquiera y  $b$  es el mismo número pero negativo.

**58 Ordena los números  $n$ ,  $n^2$ ,  $\sqrt{n}$  y  $1/n$  en los siguientes casos:**

- a) Si  $n > 1$ .                      b) Si  $0 < n < 1$ .  
a)  $\frac{1}{n} < \sqrt{n} < n < n^2$                       b)  $n^2 < n < \sqrt{n} < \frac{1}{n}$

**59 ¿Qué resultado obtendrás si realizas esta operación con tu calculadora? Justifícalo.**

$$\frac{10^{20} + 100}{10^{20}}$$

El resultado será 1.

La explicación es que la calculadora tiene un límite que son los dígitos que entran en la pantalla.

Sumar 100 a una cantidad tan grande como  $10^{20}$  para la calculadora es como no hacer nada (no puedo representar todos los dígitos de esa operación).

Entonces considera 100 una cantidad despreciable frente a  $10^{20}$ .

**60 Halla el número de cifras que tienen  $2^8$ ,  $5^8$  y  $10^8$ . Haz lo mismo con  $2^{11}$ ,  $5^{11}$  y  $10^{11}$ . ¿Puedes deducir alguna regla?**

Si la potencia  $2^{456}$  tiene  $m$  cifras y  $5^{456}$  tiene  $n$  cifras, ¿cuántas cifras tendrá  $10^{456}$ ?

$2^8 \rightarrow 3$  cifras;  $5^8 \rightarrow 6$  cifras;  $10^8 \rightarrow 9 = 3 + 6$  cifras

$2^{11} \rightarrow 4$  cifras;  $5^{11} \rightarrow 8$  cifras;  $10^{11} \rightarrow 12 = 4 + 8$  cifras

Regla:

$10^k$  tiene  $m + n$  cifras siendo  $m$  el número de cifras que tiene  $2^k$  y  $n$  el número de cifras que tiene  $5^k$ .

Luego si  $2^{456} \rightarrow p$  cifras y  $5^{456} \rightarrow q$  cifras

Entonces  $10^{456} \rightarrow p + q$  cifras

### Conjetura y generaliza

- OBSERVA:  $1^3 = 1 \rightarrow 1^2 = 1^2$   
 $1^3 + 2^3 = 9 \rightarrow 3^2 = (1 + 2)^2$   
 $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \rightarrow 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$
- HAZ UNA CONJETURA: ¿Puedes predecir el valor de las siguientes expresiones?  
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = ?$      $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = ?$     ¡Compruébalo!
- GENERALIZA TUS CONCLUSIONES:
  - ¿Cuál sería el valor de  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$ ?
  - Elabora una fórmula que te permita calcular:  
 $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$  cualquiera que sea el término natural  $n$ .  
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3025$   
 $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

Entrénate resolviendo problemas

- Un coche y un camión parten a la vez de una población, por la misma carretera pero en sentidos opuestos.



La velocidad del coche es de 120 km/h, y la del camión es de 90 km/h. ¿Qué distancia los separa al cabo de 10 minutos?

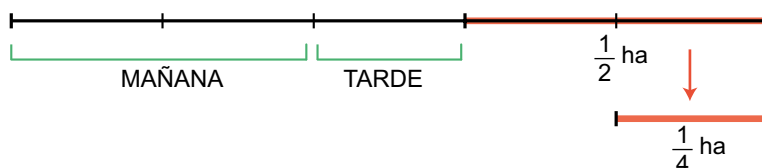
$$10 \text{ min} = \frac{1}{6} \text{ h}$$

$$d_{\text{coche}} = v \cdot t = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20 \text{ km} \quad d_{\text{camión}} = v \cdot t = 90 \cdot \frac{1}{6} = 15 \text{ km}$$

$$d_{\text{total}} = 20 + 15 = 35 \text{ km}$$

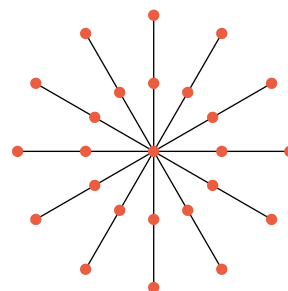
- Un labrador ara por la mañana dos quintas partes de un campo. Por la tarde, vuelve al trabajo y ara un tercio de lo que le quedaba.

Sabiendo que aún falta por arar media hectárea, ¿cuál es la superficie del campo?

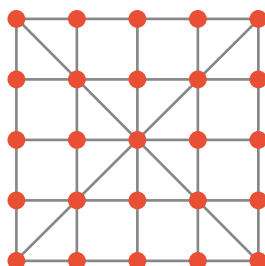


La superficie total del campo es de  $\frac{5}{4}$  ha = 125 áreas.

- Aquí tienes un problema y la solución que ha encontrado Andrés para él: «Con veinticinco soldaditos de plomo, ¿cómo formaríamos seis filas de cinco soldaditos cada una?».



Sin embargo, Susana ha dispuesto los 25 soldados de modo que el número de filas, con 5 soldados en cada una, son muchas más de seis. ¿Te atreves a probar?



## AUTOEVALUACIÓN

### 1 Opera.

$$(-3)^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 2^{-3} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$(-3)^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 2^{-3} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} + \frac{4}{3} - 2^{-3} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{3} - \frac{1}{8} (2^2) = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} - \frac{4}{8} = \frac{2 + 24 - 9}{18} = \frac{17}{18}$$

### 2 Simplifica.

a)  $\frac{3ab^{-2}}{6a^2b^{-1}}$

b)  $\left(\frac{-1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

c)  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \frac{a^3}{b^2}$

d)  $\left(\frac{b}{a}\right)^{-3} : \frac{(b^2)^{-1}}{a^{-4}}$

a)  $\frac{1}{2ab}$

b)  $-ab^2$

c)  $\frac{b^2}{a}$

d)  $\frac{1}{ab}$

### 3 Aplica las propiedades de las potencias para simplificar esta expresión:

$$\frac{(6^2)^3 \cdot 2^{-4}}{12 \cdot (-9)^2}$$

$$\frac{6^2 \cdot 3 \cdot 2^{-4}}{(3 \cdot 2^2) \cdot 9^2} = \frac{(2 \cdot 3)^6 \cdot 2^{-4}}{2^2 \cdot (3) \cdot (3^2)^2} = \frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^{-4}}{2^2 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 2} = \frac{3^6 \cdot 2^{6-4}}{2^2 \cdot 3 \cdot 3^4} = \frac{3^6 \cdot 2^2}{2^2 \cdot 3^5} = 3^6 \cdot 3^{-5} \cdot 2^2 \cdot 2^{-2} =$$

$$= 3^{6-5} \cdot 2^{2-2} = 3 \cdot 2^0 = 3$$

### 4 Expresa en notación científica.

a)  $758 \cdot 10^{-5}$

b)  $0,035 \cdot 10^{13}$

c)  $101 \cdot 10^{11}$

d)  $0,1001 \cdot 10^{-7}$

a)  $7,58 \cdot 10^7$

b)  $3,5 \cdot 10^{11}$

c)  $1,01 \cdot 10^{13}$

b)  $1,001 \cdot 10^{-8}$

### 5 Opera y comprueba luego con la calculadora.

a)  $(3,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^{-13})$

b)  $(9,6 \cdot 10^{-8}) : (3,2 \cdot 10^{10})$

c)  $(2,7 \cdot 10^8) + (3,3 \cdot 10^7)$

a)  $28 \cdot 10^{-6} = 2,8 \cdot 10^{-5}$

b)  $3 \cdot 10^{-18}$

c)  $27 \cdot 10^7 + 3,3 \cdot 10^7 = 30,3 \cdot 10^7 = 3,03 \cdot 10^8$

**6** Las siguientes raíces no son exactas. Indica entre qué dos números enteros está comprendida cada una:

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| a) $\sqrt{430}$    | b) $\sqrt[3]{-32}$   |
| c) $\sqrt[4]{786}$ | d) $\sqrt[5]{234}$   |
| a) Entre 20 y 21   | b) Entre $-4$ y $-3$ |
| c) Entre 5 y 6     | d) Entre 2 y 3       |

**7** Simplifica.

- |                          |                                              |
|--------------------------|----------------------------------------------|
| a) $\sqrt[3]{-1331}$     | b) $\sqrt[5]{125} \cdot \sqrt[5]{25}$        |
| c) $\sqrt[3]{120a^3b^4}$ | d) $\sqrt[4]{32a^3b^5} \cdot \sqrt[4]{2b^3}$ |
| a) $-11$                 | b) $5$                                       |
| c) $2a\sqrt[3]{15b}$     | d) $2b^2\sqrt[4]{2^2a^3}$                    |

**8** Simplifica cuando sea posible.

- |                                                     |                                                                 |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| a) $\sqrt{3}\sqrt{27}$                              | b) $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}$                             |
| c) $\sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{5} - \sqrt{9 \cdot 5}$ | d) $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{2}$                                |
| a) $\sqrt{3^4} = 3^2$                               | b) $\left(\frac{1}{2} + 1\right)\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ |
| c) $(2 + 1 - 3)\sqrt{5} = 0$                        | d) $2\sqrt{2}$                                                  |

**9** La reserva de gas natural más grande de Asia Central contiene un volumen de  $9 \cdot 10^{11} \text{ m}^3$ . Si su producción anual es de  $1,8 \cdot 10^{13}$  litros y se mantiene el mismo ritmo a lo largo del tiempo, ¿cuántos años se podrá explotar este recurso energético?

$$1,8 \cdot 10^{13} \text{ litros} = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ m}^3$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } 1,8 \cdot 10^{10} \text{ m}^3 \rightarrow 1 \text{ años} \\ \text{Entonces } 9 \cdot 10^{11} \text{ m}^3 \rightarrow x \text{ años} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{9 \cdot 10^{11}}{1,8 \cdot 10^{10}} = 50 \text{ años}$$

**10** En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide  $\sqrt{3} \text{ cm}$ , y el otro,  $\sqrt{6} \text{ cm}$ . Calcula la longitud de la hipotenusa y el área del triángulo.

$$H^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 \rightarrow H^2 = 3 + 6 \rightarrow H = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Área del triángulo} \rightarrow \frac{b \cdot h}{2} \text{ donde } \begin{array}{l} b \rightarrow \text{cateto 1} \\ h \rightarrow \text{cateto 2} \end{array}$$

$$A_t = \rightarrow \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3}{2} = \sqrt{2} \text{ cm es el área}$$