6 ECUACIONES

Página 109

Resuelve

1 **Traduce a lenguaje algebraico y resuelve por tanteo el problema del papiro egipcio: *El montón más un séptimo del montón…***

$x + \frac{x}{7} = 24 \rightarrow x = 21$

2 **Selecciona, entre las siguientes ecuaciones, la traducción algebraica del problema de los elefantes. Resuélvela primero por tanteo e intenta después resolverla aplicando algún otro método de resolución que conozcas.**

I $\boxed{x + x^2 + x^4 = 2x}$ II $\boxed{x + 2x + 4x = x^2}$ III $\boxed{x + 2x + 4x = (6x)^2}$

$x + 2x + 4x = x^2 \rightarrow x = 7$ (por tanteo)

$7x = x^2 \rightarrow x^2 - 7x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 7) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no es solución)} \\ x = 7 \end{cases}$

3 **¿Cuál de las siguientes ecuaciones resuelve el epitafio de Diofanto?**

I $\boxed{\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x}$ II $\boxed{\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{5}{x} + \frac{x}{2} + \frac{4}{x} = 1}$

¿A qué edad murió?

Supongamos que la vida entera de Diofanto duró x años. Entonces:

- Juventud: $\frac{x}{6}$
- Su mejilla se cubrió de vello: $+\frac{x}{12}$
- Antes de casarse: $+\frac{x}{7}$
- Tuvo un hijo: +5
- Su hijo murió a los $\frac{x}{2}$ años.
- Diofanto vivió luego: +4

Por tanto, Diofanto vivió:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \rightarrow x = \frac{14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336}{84} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{75x + 756}{84} \rightarrow 84x = 75x + 756 \rightarrow$$

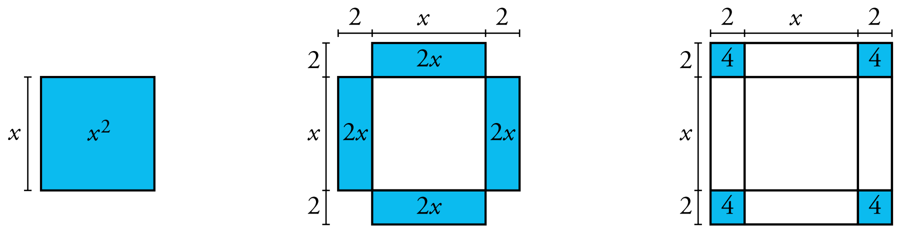
$$\rightarrow 9x = 756 \rightarrow x = 84$$

Diofanto murió a los 84 años.

4 **Resuelve mediante el método geométrico expuesto arriba:**

a) $x^2 + 8x = 84$ **b)** $x^2 + 20x = 69$

a) $x^2 + 8x = 84$

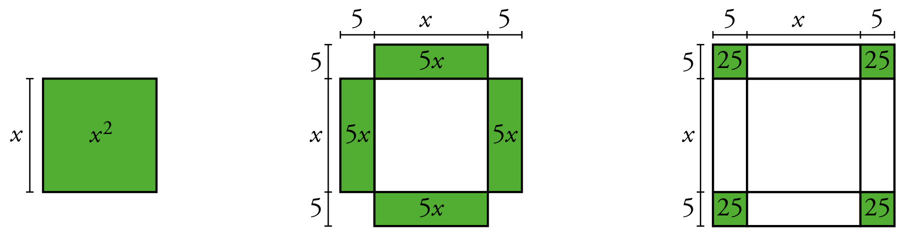


ÁREA: x^2 ÁREA: $x^2 + 8x(= 84)$ ÁREA: $84 + 4 \cdot 4 = 100$

El área del último cuadrado es 100. Por tanto, su lado mide 10. Así:

$2 + x + 2 = 10 \rightarrow x = 6$

b) $x^2 + 20x = 169$



ÁREA: x^2 ÁREA: $x^2 + 20x(= 169)$ ÁREA: $169 + 4 \cdot 25 = 269$

El área del último cuadrado es 269. Por tanto, su lado mide 16,4.

$5 + x + 5 = 16,4 \rightarrow x = 6,4$

1 ECUACIONES. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Página 110

1 **¿Es 5 solución de alguna de las siguientes ecuaciones? Justifica tu respuesta:**

a) $8x + 3 = 11x - 12$ **b)** $x^4 - x^3 = 500$ **c)** $3x - 7 = x^2 - 10$

d) $1^x = 5$ **e)** $x^2 - 12 = 4x - 7$ **f)** $2^{x-1} = 16$

g) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 161$ **h)** $10x + 25 = x^3$ **i)** $x^2 - 20 = 2x - 5$

j) $\sqrt{3x+1} = 16$ **k)** $(2x - 3)^2 = 144$ **l)** $3(x^2 + 3) - 84 = 0$

a) $\left.\begin{array}{l} 8 \cdot 5 + 3 = 43 \\ 11 \cdot 5 - 12 = 43 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

b) $\left.\begin{array}{l} 5^4 - 5^3 = 500 \\ 500 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

c) $\left.\begin{array}{l} 3 \cdot 5 - 7 = 8 \\ 5^2 - 10 = 15 \end{array}\right\} \to x = 5$ no es solución de la ecuación.

d) $\left.\begin{array}{l} 1^5 = 1 \\ 5 \end{array}\right\} \to x = 5$ no es solución de la ecuación.

e) $\left.\begin{array}{l} 5^2 - 12 = 13 \\ 4 \cdot 5 - 7 = 13 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

f) $\left.\begin{array}{l} 2^{5-1} = 16 \\ 16 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

g) $\left.\begin{array}{l} 5^3 + 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 161 \\ 161 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

h) $\left.\begin{array}{l} 10 \cdot 5 + 25 = 75 \\ 5^3 = 125 \end{array}\right\} \to x = 5$ no es solución de la ecuación.

i) $\left.\begin{array}{l} 5^2 - 20 = 5 \\ 2 \cdot 5 - 5 = 5 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

j) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{3 \cdot 5 + 1} = 4 \\ 16 \end{array}\right\} \to x = 5$ no es solución de la ecuación.

k) $\left.\begin{array}{l} (2 \cdot 5 - 3)^2 = 49 \\ 144 \end{array}\right\} \to x = 5$ no es solución de la ecuación.

l) $\left.\begin{array}{l} 3(5^2 + 3) - 84 = 0 \\ 0 \end{array}\right\} \to x = 5$ es solución de la ecuación.

2 **En el ejercicio anterior hay varias ecuaciones polinómicas. Escríbelas y di cuál es su grado.**

a) $8x + 3 = 11x - 12$ → Ecuación polinómica de grado 1.

b) $x^4 - x^3 = 500$ → Ecuación polinómica de grado 4.

c) $3x - 7 = x^2 - 10$ → Ecuación polinómica de grado 2.

e) $x^2 - 12 = 4x - 7$ → Ecuación polinómica de grado 2.

g) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 161$ → Ecuación polinómica de grado 3.

h) $10x + 25 = x^3$ → Ecuación polinómica de grado 3.

i) $x^2 - 20 = 2x - 5$ → Ecuación polinómica de grado 2.

k) $(2x - 3)^2 = 144$ → Ecuación polinómica de grado 2.

l) $3(x^2 + 3) - 84 = 0$ → Ecuación polinómica de grado 2.

Página 111

3 Tanteando, halla la solución entera de las ecuaciones siguientes:

a) $2x^2 = 50$ **b)** $2x^3 + x^2 = 20$ **c)** $4 \cdot 10^x = 40\,000$

d) $(x - 12)^4 = 81$ **e)** $(3 + x)^{(x-6)} = 121$ **f)** $\sqrt[3]{x - 23} = 2$

g) $x^3 + x^2 = 150$ **h)** $3^x = 2\,187$ **i)** $x^x = 46\,656$

j) $\sqrt{7x + 4} = 9$ **k)** $5^{x+1} = 15\,625$ **l)** $\sqrt{x - 12} = x - 8$

a) $x = 5 \rightarrow 2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$

b) $x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2^3 + 2^2 = 2 \cdot 8 + 4 = 16 + 4 = 20$

c) $x = 4 \rightarrow 4 \cdot 10^4 = 40\,000$

d) $x = 15 \rightarrow (15 - 12)^4 = 3^4 = 81$

e) $x = 8 \rightarrow (3 + 8)^{(8-6)} = 11^2 = 121$

f) $x = 31 \rightarrow \sqrt[3]{31 - 23} = \sqrt[3]{8} = 2$

g) Si $x = 4$, entonces $4^3 + 4^2 = 64 + 16 = 80$. Por tanto, la solución no es válida.

Sin embargo, si $x = 5$, entonces $5^3 + 5^2 = 125 + 25 = 150$. Luego $x = 5$ es la solución.

h) Si $x = 5$, entonces $3^5 = 243$. Por tanto, la solución no es válida.

Si $x = 6$, entonces $3^6 = 729$. Por tanto, la solución no es válida.

Sin embargo, si $x = 7$, entonces $3^7 = 2\,187$. Luego $x = 7$ es la solución.

i) Si $x = 7$, entonces $7^7 = 823\,543$. Por tanto, la solución no es válida.

Si $x = 6$, entonces $6^6 = 46\,656$. Luego $x = 6$ es la solución.

j) A esta solución es fácil llegar, ya que lo de dentro de la raíz debe valer 81 para que al hacer la raíz salga 9. Si probamos con $x = 10$, tendríamos 74 dentro de la raíz, que no vale. Sin embargo, con $x = 11$, obtenemos $77 + 4 = 81$, por lo tanto, $x = 11$ es la solución.

k) Si $x = 6$, entonces $5^{6+1} = 5^7 = 78\,125$. Por tanto, la solución no es válida.

Si $x = 5$, entonces $5^{5+1} = 5^6 = 15\,625$. Luego $x = 5$ es la solución.

l) Lo primero que vemos es que $x > 12$, ya que si no saldría la raíz de un número negativo, lo cual es imposible. Si probamos con $x = 13$, tendríamos $1 = 5$, que no vale. Si probamos con $x = 16$, tendríamos $2 = 8$, que no vale. Podemos observar que según probemos con números más altos, más dispares van a ser las igualdades. Podemos concluir que esta ecuación no tiene solución.

4 **Encuentra la solución, aproximando hasta las décimas, de las siguientes ecuaciones. Hazlo por tanteo ayudándote de la calculadora.**

a) $x^2 = 1\,000$ **b)** $x^3 + 1 = 100$ **c)** $x^5 = 1\,500$

d) $x^6 - 40 = 1\,460$ **e)** $(x - 3)^4 = 35\,027$ **f)** $x^4 + x^2 = 40$

g) $x^3 + x^2 = 200$ **h)** $x^3 - x^2 = 200$ **i)** $\sqrt{x^2 - x} = 5$

j) $x^{x+1} = 250$

a) Damos valores enteros a x:

$31^2 = 961 < 1\,000$

$32^2 = 1\,024 > 1\,000$

Por tanto, x es mayor que 31 pero menor que 32.

Damos a x los valores 31,5; 31,6; 31,7; …

$31{,}5^2 = 992{,}25 < 1\,000$

$31{,}6^2 = 998{,}56 < 1\,000$

$31{,}7^2 = 1\,004{,}89 > 1\,000$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 31{,}6$.

b) Es lo mismo que hallar $x^3 = 99$.

Damos valores enteros a x:

$4^3 = 65 < 99$

$5^3 = 126 > 99$

Por tanto, x es mayor que 4 pero menor que 5.

Damos a x los valores 4,5; 4,6; 4,7; …

$4{,}5^3 = 92{,}125 < 99$

$4{,}6^3 = 98{,}336 < 99$

$4{,}7^3 = 104{,}823 > 99$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 4{,}6$.

c) Damos valores enteros a x:

$4^5 = 1\,024 < 1\,500$

$5^5 = 3\,125 > 1\,500$

Por tanto, x es mayor que 4 y menor que 5.

Damos a x los valores 4,2; 4,3; 4,4; …

$4{,}2^5 = 1\,306{,}912\ldots < 1\,500$

$4{,}3^5 = 1\,470{,}084\ldots < 1\,500$

$4{,}4^5 = 1\,649{,}162\ldots > 1\,500$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 4{,}3$.

d) Es lo mismo que hallar $x^6 = 1\,500$.

Damos valores enteros a x:

$3^6 = 729 < 1\,500$

$4^5 = 4\,096 > 1\,500$

Por tanto, x es mayor que 3 y menor que 4.

Damos a x los valores 3,3; 3,4; 3,5; …

$3{,}3^6 = 1\,291{,}467\ldots < 1\,500$

$3{,}4^6 = 1\,544{,}804\ldots > 1\,500$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 3{,}3$.

e) Damos valores enteros a x:

$(16 - 3)^4 = 28\,561 < 35\,027$

$(17 - 3)^4 = 38\,416 > 35\,027$

Por tanto, x es mayor que 16 pero menor que 17.

Damos a x los valores 16,5; 16,6; 16,7; …

$(16{,}5 - 3)^4 \approx 33\,215{,}06 < 35\,027$

$(16{,}6 - 3)^4 \approx 34\,210{,}2 < 35\,027$

$(16{,}7 - 3)^4 \approx 35\,227{,}54$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 16{,}6$.

f) Damos valores enteros a x:

$2^4 + 2^2 = 20 < 40$

$3^4 + 3^2 = 90 > 40$

Por tanto, x es mayor que 2 pero menor que 3.

Damos a x los valores 2,3; 2,4; 2,5; …

$2{,}3^4 + 2{,}3^2 \approx 33{,}27 < 40$

$2{,}4^4 + 2{,}4^2 \approx 38{,}94 > 40$

$2{,}5^4 + 2{,}5^2 \approx 45{,}31 > 40$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 2{,}4$.

g) Damos valores enteros a x:

$5^3 + 5^2 = 150 < 200$

$6^3 + 6^2 = 252 > 200$

Por tanto, x es mayor que 5 y menor que 6.

Damos a x los valores 5,3; 5,4; 5,5; …

$5{,}3^3 + 5{,}3^2 = 176{,}967 < 200$

$5{,}4^3 + 5{,}4^2 = 186{,}624 < 200$

$5{,}5^3 + 5{,}5^2 = 196{,}625 < 200$

$5{,}6^3 + 5{,}6^2 = 206{,}976 > 200$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 5{,}5$.

h) Damos valores enteros a x:

$6^3 - 6^2 = 180 < 200$

$7^3 - 7^2 = 294 > 200$

Por tanto, x es mayor que 6 y menor que 7.

Damos a x los valores 6,1; 6,2; 6,3; …

$6{,}1^3 - 6{,}1^2 = 189{,}771 < 200$

$6{,}2^3 - 6{,}2^2 = 199{,}888 < 200$

$6{,}3^3 - 6{,}3^2 = 210{,}357 > 200$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 6{,}2$.

i) Damos valores enteros a x:

$\sqrt{5^2 - 5} = 4{,}47 < 5$

$\sqrt{6^2 - 6} \approx 5{,}48 > 5$

Por tanto, x es mayor que 5 pero menor que 6.

Damos a x los valores 5,4; 5,5; 5,6; …

$\sqrt{5{,}4^2 - 5{,}4} \approx 4{,}87 < 5$

$\sqrt{5{,}5^2 - 5{,}5} \approx 4{,}97 < 5$

$\sqrt{5{,}6^2 - 5{,}6} \approx 5{,}08 > 5$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 5{,}5$.

j) Damos valores enteros a x:

$3^4 = 81 < 250$

$4^5 = 1\,024 > 250$

Por tanto, x es mayor que 3 pero menor que 4.

Damos a x los valores 3,3; 3,4; 3,5; …

$3{,}3^{4{,}3} \approx 169{,}67 < 250$

$3{,}4^{4{,}4} \approx 218{,}03 < 250$

$3{,}5^{4{,}5} = 280{,}74 > 250$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 3{,}4$.

2 ▶ ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Página 112

1 Encuentra el error en cada transformación:

a) $3(x + 1) = 21 \to 3(x) = 21 - 1$

b) $5(x - 2) + 3 = 10 \to (x - 2) + 3 = 10/5$

c) $3 - x/2 = 6 \to 3 - x = 6 \cdot 2$

d) $(4x - 9)/3 = 5 \to 4x/3 = 5 + 9$

e) $10(x + 3) = 40 - x \to x + 3 = 40/10 - x$

a) $3(x + 1) = 21 \to 3x + 3 = 21 \to 3x = 21 - 3$

b) $5(x - 2) + 3 = 10 \to 5(x - 2) = 10 - 3 = (x - 2) = \dfrac{10 - 3}{5}$

c) $3 - x/2 = 6 \to \dfrac{6}{2} - \dfrac{x}{2} = 6 \to \dfrac{6 - x}{2} = 6 \to 6 - x = 6 \cdot 2$

d) $(4x - 9)/3 = 5 \to \dfrac{4x}{3} - \dfrac{9}{3} = 5 \to \dfrac{4x}{3} = 5 + \dfrac{9}{3}$

e) $10(x + 3) = 40 - x \to (x + 3) = \dfrac{40 - x}{10}$

Página 113

2 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{3x}{15}-x=-\frac{3x}{3}+\frac{9}{5}$

b) $\frac{x}{3}+\frac{x}{9}-\frac{4x}{27}=\frac{11}{27}-\frac{x}{9}$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x-3}{8}+\frac{2x+2}{16}=\frac{x-2}{2}$

d) $\frac{13+x}{20}-\frac{5x}{2}=\frac{10+x}{5}+\frac{1-12x}{10}$

e) $3x-\frac{x+3}{4}=13$

f) $4-\frac{x+2}{4}=x-4$

g) $\frac{x}{2}-\frac{2(x+2)}{7}=\frac{x-3}{4}$

h) $\frac{1-x}{25}-\frac{x}{6}+\frac{x+7}{9}=\frac{2}{5}-\frac{3x}{15}$

i) $\frac{(1+x)^2}{5}=\frac{2x+4}{25}+\frac{x^2}{5}+\frac{1}{5}$

j) $\frac{x-4}{8}+\frac{9-x}{12}-\frac{2x-7}{24}+5=x-8$

k) $x+\frac{9(5+x)}{5}=9-x$

l) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{4}=\frac{3(4x^2+1)}{12}-x$

m) $(x-3)(x+3)=\frac{3(x-1)}{2}+x^2$

n) $\frac{x-7}{4}+\frac{25(x-2)}{3}=\frac{5x+35}{4}+\frac{5}{2}(x-7)$

a) $\frac{3x}{15}-x=-\frac{3x}{3}+\frac{9}{5}$

$3x-15x=-15x+27$

$3x-15x+15x=27$

$3x=27$

$x=9$

b) $\frac{x}{3}+\frac{x}{9}-\frac{4x}{27}=\frac{11}{27}-\frac{x}{9}$

$9x+3x-4x=11-3x$

$9x+3x-4x+3x=11$

$11x=11$

$x=1$

c) $\frac{x}{2}+\frac{x-3}{8}+\frac{2x+2}{16}=\frac{x-2}{2}$

$8x+2(x-3)+2x+2=8(x-2)$

$8x+2x-6+2x+2=8x-16$

$8x+2x+2x-8x=-16+6-2$

$4x=-12$

$x=-3$

d) $\frac{13+x}{20}-\frac{5x}{2}=\frac{10+x}{5}+\frac{1-12x}{10}$

$13+x-50x=4(10+x)+2(1-12x)$

$13+x-50x=40+4x+2-24x$

$x-50x-4x+24x=40+2-13$

$-29x=29$

$x=-1$

e) $3x-\frac{x+3}{4}=13$

$12x-(x+3)=52$

$12x-x-3=52$

$12x-x=52+3$

$11x=55$

$x=5$

f) $4-\frac{x+2}{4}=x-4$

$16-(x+2)=4(x-4)$

$16-x-2=4x-16$

$-x-4x=-16-16+2$

$-5x=-30$

$x=6$

g) $\frac{x}{2}-\frac{2(x+2)}{7}=\frac{x-3}{4}$

$14x-8(x+2)=7(x-3)$

$14x-8x-16=7x-21$

$14x-8x-7x=-21+16$

$-x=-5$

$x=5$

h) $\frac{1-x}{25}-\frac{x}{6}+\frac{x+7}{9}=\frac{2}{5}-\frac{3x}{15}$

$18(1-x)-75x+50(x+7)=180-90x$

$18-18x-75x+50x+350=180-90x$

$-18x-75x+50x+90x=180-18-350$

$47x=-188$

$x=-4$

i) $\dfrac{(1+x)^2}{5} = \dfrac{2x+4}{25} + \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{1}{5}$

$5(1 + x)^2 = 2x + 4 + 5x^2 + 5$

$5(1 + 2x + x^2) = 2x + 5x^2 + 9$

$5 + 10x + 5x^2 = 2x + 5x^2 + 9$

$10x + 5x^2 - 2x - 5x^2 = 9 - 5$

$8x = 4 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$

j) $\dfrac{x-4}{8} + \dfrac{9-x}{12} - \dfrac{2x-7}{24} + 5 = x - 8$

$3(x-4) + 2(9-x) - (2x-7) + 120 = 24(x-8)$

$3x - 12 + 18 - 2x - 2x + 7 + 120 = 24x - 192$

$3x - 2x - 2x - 24x = -192 + 12 - 18 - 7 - 120$

$-25x = -325$

$x = 13$

k) $x + \dfrac{9(5+x)}{5} = 9 - x$

$5x + 9(5 + x) = 5(9 - x)$

$5x + 45 + 9x = 45 - 5x$

$5x + 9x + 5x = 45 - 45$

$19x = 0$

$x = 0$

l) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{4} = \dfrac{3(4x^2+1)}{12} - x$

$3(4x^2 - 1) = 3(4x^2 + 1) - 12x$

$12x^2 - 3 = 12x^2 + 3 - 12x$

$12x^2 - 12x^2 + 12x = 3 + 3$

$12x = 6$

$x = \dfrac{1}{2}$

m) $(x - 3)(x + 3) = \dfrac{3(x-1)}{2} + x^2$

$2(x^2 - 9) = 3(x - 1) + 2x^2$

$2x^2 - 18 = 3x - 3 + 2x^2$

$2x^2 - 3x - 2x^2 = -3 + 18$

$-3x = 15$

$x = -5$

n) $\dfrac{x-7}{4} + \dfrac{25(x-2)}{3} = \dfrac{5x+35}{4} + \dfrac{5}{2}(x-7)$

$3(x-7) + 100(x-2) = 3(5x+35) + 30(x-7)$

$3x - 21 + 100x - 200 = 15x + 105 + 30x - 210$

$3x + 100x - 15x - 30x = 105 - 210 + 21 + 200$

$58x = 116$

$x = 2$

3 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Página 114

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **b)** $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ **d)** $5x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ **f)** $6x^2 - 5x + 1 = 0$

g) $x^2 - 3x + 15 = 0$ **h)** $x^2 - 0{,}1x + 0{,}2 = 0$

a) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 3$ y $x_2 = 2$

b) $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{18} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \dfrac{-6 \pm 0}{18} \rightarrow x = \dfrac{-1}{3}$ Solución doble.

c) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{18} = \dfrac{6 \pm 0}{18} = \dfrac{1}{3}$ Solución doble.

d) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{10} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 60}}{10} = \dfrac{7 \pm \sqrt{-11}}{10}$ No tiene solución.

e) $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$ y $x_2 = -3$

f) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{12} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \dfrac{5 \pm 1}{12} \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$ y $x_2 = \dfrac{1}{3}$

g) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 60}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-51}}{2}$ No tiene solución.

h) $x = \dfrac{0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}2}}{2} = \dfrac{0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01 - 0{,}8}}{2} = \dfrac{0{,}1 \pm \sqrt{-0{,}79}}{2}$ No tiene solución.

Página 115

2 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $7x^2 - 28 = 0$

b) $7x^2 + 28 = 0$

c) $4x^2 - 9 = 0$

d) $3x^2 + 42x = 0$

e) $3x^2 = 42x$

f) $11x^2 - 37x = 0$

g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14(x + 4)$

h) $7x^2 + 5 = 68$

a) $7x^2 - 28 = 0$

$7x^2 = 28$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

b) $7x^2 + 28 = 0$

$7x^2 = -28$

$x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{-4} \rightarrow$ No tiene solución

c) $4x^2 - 9 = 0$

$4x^2 = 9$

$x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = -\frac{3}{2}$

d) $3x^2 + 42x = 0$

$3x(x + 14) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = -14$

e) $3x^2 = 42x$

$3x^2 - 42x = 0$

$3x(x - 14) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = 14$

f) $11x^2 - 37x = 0$

$x(11x - 37) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{37}{11}$

g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14x + 56$

$2(x^2 + 10x + 25) + (x^2 - 6x + 9) = 14x + 56$

$2x^2 + 20x + 50 + x^2 - 6x + 9 = 14x + 56$

$3x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -1 \rightarrow$ No tiene solución.

h) $7x^2 + 5 = 68$

$7x^2 = 63$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

Página 116

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(2x-3)(3x-2)+2x+3=0$ **b)** $3(x-1)^2+5x=5$

c) $(x+1)(x+2)=2(x+2)$ **d)** $1+(1-x)(2x+1)=x^2$

e) $3x^2-2(x+5)=(x+3)^2-19$ **f)** $(3x+4)(5x-7)=(2x+7)^2+53$

g) $(2x+4)(x-1)+(3x+5)^2=3(2x+5)^2+x$ **h)** $(x-2)(4x+2)+(3-3x)^2=4(5x+1)^2-(x-1)$

a) $(2x-3)(3x-2)+2x+3=0 \rightarrow 6x^2-4x-9x+6+2x+3=0$

$6x^2-11x+9=0$

$x=\dfrac{11\pm\sqrt{121-4\cdot6\cdot9}}{12}=\dfrac{11\pm\sqrt{-95}}{12} \rightarrow$ No tiene solución.

b) $3(x-1)^2+5x=5 \rightarrow 3(x^2-2x+1)+5x=5$

$3x^2-6x+3+5x-5=0 \rightarrow 3x^2-x-2=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot3\cdot(-2)}}{6}=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{6}=\dfrac{1\pm5}{6} \rightarrow x_1=1 \text{ y } x_2=\dfrac{-4}{6}=\dfrac{-2}{3}$

c) $(x+1)(x+2)=2(x+2) \rightarrow x^2+2x+x+2=2x+4$

$x^2+x-2=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{-1\pm3}{2} \rightarrow x_1=1 \text{ y } x_2=-2$

d) $1+(1-x)(2x+1)=x^2 \rightarrow 1+2x+1-2x^2-x=x^2$

$2+x-2x^2=x^2 \rightarrow 3x^2-x-2=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot3\cdot(-2)}}{6}=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{6}=\dfrac{1\pm5}{6} \rightarrow x_1=1 \text{ y } x_2=\dfrac{-4}{6}=\dfrac{-2}{3}$

e) $3x^2-2x-10=x^2+6x+9-19 \rightarrow 2x^2-8x=0 \rightarrow 2x\cdot(x-4)=0 \rightarrow x_1=0 \text{ y } x_2=4$

f) $(3x+4)(5x-7)=(2x+7)^2+53$

$15x^2-21x+20x-28=4x^2+28x+49+53$

$15x^2-4x^2-21x+20x-28x-28-49-53=0 \rightarrow 11x^2-29x-130=0$

$x=\dfrac{29\pm\sqrt{841-4\cdot11\cdot(-130)}}{22}=\dfrac{29\pm\sqrt{841+5\,720}}{22}=\dfrac{29\pm\sqrt{6\,561}}{22}=\dfrac{29\pm81}{22} \rightarrow$

$x_1=5 \text{ y } x_2=\dfrac{-52}{22}=\dfrac{-26}{11}$

g) $2x^2-2x+4x-4+9x^2+30x+25=12x^2+60x+75+x$

$11x^2+32x+21=12x^2-61x+75 \rightarrow x^2+29x+54=0$

$x=\dfrac{-29\pm\sqrt{29^2-4\cdot1\cdot54}}{2}=\dfrac{-29\pm\sqrt{841-216}}{2}=\dfrac{-29\pm\sqrt{625}}{2}=\dfrac{-29\pm25}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x_1=-2 \text{ y } x_2=-27$

h) $4x^2+2x-8x-4+9-18x+9x^2=100x^2+40x+4-x+1$

$13x^2-24x+5=100x^2+39x+5 \rightarrow 87x^2+63x=0 \rightarrow 3x\cdot(29x+21)=0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1=0 \text{ y } x_2=-\dfrac{21}{29}$

4 **Resuelve estas ecuaciones manualmente y con calculadora. Comprueba que los resultados coinciden.**

a) $3x(x+1) - \frac{(x-2)^2}{2} = (x+1)(x-1) + 15$ **b)** $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{3(x-1)}{4} + \frac{3x(x+1)}{2} = \frac{3}{2}$

c) $\frac{3x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ **d)** $\frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{3x}$

a) $3x(x+1) - \frac{(x-2)^2}{2} = (x+1)(x-1) + 15$

$3x^2 + 3x - \frac{(x-2)^2}{2} = x^2 - x + x - 1 + 15$

$6x^2 + 6x - x^2 + 4x - 4 = 2x^2 - 2x + 2x - 2 + 30$

$3x^2 + 10x - 32 = 0$

$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot (-32)}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{484}}{6} = \frac{-10 \pm 22}{6} \rightarrow x_1 = 2 \text{ y } x_2 = \frac{-32}{6} = \frac{-16}{3}$

b) $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{3(x-1)}{4} + \frac{3x(x+1)}{2} = \frac{3}{2}$

$2(x+1)^2 - 3(x-1) + 6x(x+1) = 6$

$2(x^2 + 2x + 1) - 3x + 3 + 6x^2 + 6x = 6$

$2x^2 + 4x + 2 - 3x + 3 + 6x^2 + 6x - 6 = 0$

$8x^2 + 7x - 1 = 0$

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{16} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{16} = \frac{-7 \pm 9}{16} \rightarrow x_1 = \frac{1}{8} \text{ y } x_2 = -1$

c) $\frac{3x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \rightarrow 2x \cdot \left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \frac{3}{2} \rightarrow 3x^2 - 2 = 3x \rightarrow 3x^2 - 3x - 2 = 0$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{6} \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{33}}{6} \\ x = \frac{3 - \sqrt{33}}{6} \end{cases}$

d) $\frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{3x} \rightarrow 3x \cdot \left(\frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x}\right) = 3x \cdot \left(1 - \frac{2}{3x}\right) \rightarrow x^2 - 3x + 3 = 3x - 2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 3x - 3x + 3 + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow$

$\begin{cases} x = \frac{6+4}{2} \rightarrow x = \frac{10}{2} \rightarrow x = 5 \\ x = \frac{6-4}{2} \rightarrow x = \frac{2}{2} \rightarrow x = 1 \end{cases}$

4 ECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO MAYOR QUE DOS

Página 118

1 Resuelve sacando factor común.

a) $\mathbf{x^5 + x^4 - 2x^3 = 0}$ **b)** $\mathbf{18x^3 - 39x^2 - 15x = 0}$

c) $\mathbf{3x^4 - 5x^4 + 2x^2 = 0}$ **d)** $\mathbf{2x^4 - 30x^3 + 12x^5 = 0}$

a) $x^5 + x^4 - 2x^3 = 0 \to x^3(x^2 + x - 2) = 0 \to \begin{cases} x^3 = 0 \to x_1 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \to x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

b) $18x^3 - 39x^2 - 15x = 0 \to 3x(6x^2 - 13x - 5) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} 3x = 0 \to x_1 = 0 \\ 6x^2 - 13x - 5 = 0 \to x = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 6 \cdot (-5)}}{12} = \dfrac{13 \pm 17}{12} \to \end{cases}$$

$$\to x_2 = \frac{30}{12} = \frac{5}{2};\ x_3 = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$$

c) $3x^4 - 5x^4 + 2x^2 = 0 \to -2x^4 + 2x^2 = 0 \to -2x^2(x^2 - 1) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} -2x^2 = 0 \to x_1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \to x^2 = 1 \to x_2 = 1;\ x_3 = -1 \end{cases}$$

d) $2x^4 - 30x^3 + 12x^5 = 0 \to -2x^3(x - 15 + 6x^2) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} 2x^3 = 0 \to x_1 = 0 \\ 6x^2 + x - 15 = 0 \to x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-15)}}{12} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{361}}{12} = \dfrac{-1 \pm 19}{12} \to \end{cases}$$

$$\to x_2 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2};\ x_3 = \frac{-20}{12} = \frac{-5}{3}$$

2 **Resuelve con ayuda de la regla de Ruffini.**

a) $\mathbf{x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0}$ **b)** $\mathbf{x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 25x - 30 = 0}$

a) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & -13 & 15 \\
1 & & 1 & -2 & -15 \\
\hline
 & 1 & -2 & -15 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & 15 & \\
\hline
 & 1 & -5 & \boxed{0} & \\
5 & & 5 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\ \to x_1 = 1 \\ \\ \to x_2 = -3 \\ \\ \to x_3 = 5
\end{array}
$$

b) $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 25x - 30 = 0$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -6 & 4 & 25 & -30 \\
-2 & & -2 & 16 & -40 & 30 \\
\hline
 & 1 & -8 & 20 & -15 & \boxed{0} \\
3 & & 3 & -15 & 15 & \\
\hline
 & 1 & -5 & 5 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\ \to x_1 = -2 \\ \\ \to x_2 = 3
\end{array}
$$

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \to x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 5 \cdot 5}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_3 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \\ x_4 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

Página 119

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ **b)** $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

c) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$ **d)** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

e) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ **f)** $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

g) $x^4 - x^2 = 0$

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \to z^2 - 2z - 8 = 0$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \left\langle \begin{array}{l} z_1 = 4 \to x^2 = 4 \to x_1 = 2;\ x_2 = -2 \\ z_2 = \dfrac{-4}{2} = -2 \to x^2 = -2 \text{ Sin solución.} \end{array} \right.$$

b) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \to z^2 - 9z + 20 = 0$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} \left\langle \begin{array}{l} z_1 = 5 \to x^2 = 5 \to x_1 = \sqrt{5};\ x_2 = -\sqrt{5} \\ z_2 = 4 \to x^2 = 4 \to x_3 = 2;\ x_4 = -2 \end{array} \right.$$

c) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0 \to z^2 + 13z + 36 = 0$

$$z = \frac{-13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{-13 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} z_1 = -4 \to x^2 = -4 \text{ Sin solución.} \\ z_2 = -9 \to x^2 = -9 \text{ Sin solución.} \end{array} \right.$$

d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \to z^2 - 13z + 36 = 0$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} z_1 = 9 \to x^2 = 9 \to x_1 = 3;\ x_2 = -3 \\ z_2 = 4 \to x^2 = 4 \to x_3 = 2;\ x_4 = -2 \end{array} \right.$$

e) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \to z^2 + 3z - 4 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} z_1 = 1 \to x^2 = 1 \to x_1 = 1;\ x_2 = -1 \\ z_2 = -4 \to x^2 = -4 \text{ Sin solución.} \end{array} \right.$$

f) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \to z^2 - 8z + 16 = 0$

$$z = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4 \to x^2 = 4 \to x_1 = 2;\ x_2 = -2$$

g) $x^4 - x^2 = 0 \to x^2(x^2 - 1) = 0 \to \begin{cases} x^2 = 0 \to x_1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \to x_2 = 1;\ x_3 = -1 \end{cases}$

4 ¿Verdadero o falso?

a) Una ecuación bicuadrada puede tener cuatro soluciones como máximo.

b) Una ecuación bicuadrada puede no tener ninguna solución.

c) Una ecuación bicuadrada no puede tener soluciones negativas.

d) Para que una ecuación bicuadrada tenga solución, la ecuación cuadrática que se resuelve con la variable *z* debe tener al menos una solución no negativa.

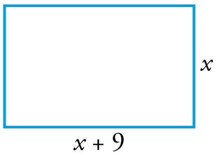
a) Verdadero. b) Verdadero.

c) Falso. d) Verdadero.

5 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES

Página 120

1 La base de un rectángulo es 9 cm mayor que su altura. Su área mide 400 cm². Calcula las dimensiones de este rectángulo.



$x \cdot (x + 9) = 400$

$$x^2 + 9x - 400 = 0 \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = -25 \end{cases}$$

- $x_1 = 16$ La altura es de 16 cm y la base es de 16 + 9 = 25 cm.
- $x_2 = -25$ No es una solución válida, porque los lados no pueden tener una medida negativa.

2 Un parque circular de 22 686,5 m² tiene un camino que lo rodea. Si el área total del camino es 2 185,44 m², ¿cuál es su anchura? (Toma π = 3,14.)

- Calculamos el radio, r, del parque:

  $S = \pi \cdot r^2 \rightarrow 22686{,}5 = 3{,}14 \cdot r^2 \rightarrow r^2 = 7225 \rightarrow r = 85$ m

- Llamamos x a la anchura del camino:

  $22686{,}5 + 2185{,}44 = 3{,}14(85 + x)^2 \rightarrow 24871{,}94 = 3{,}14(7225 + 170x + x^2) \rightarrow$

  $$\rightarrow x^2 + 170x - 696 = 0 \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -174 \end{cases}$$

  El camino tiene 4 m de anchura.

Página 121

3 **Se ha fundido un lingote de oro de 3 kg de peso y 80 % de pureza, junto con otro lingote de oro de 1 kg de peso. ¿Cuál era la pureza del segundo, si la de la mezcla resultante es del 67 %?**

Peso puro del primer lingote $\rightarrow$ $3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$ kg

Peso total de la mezcla $\rightarrow$ 4 kg

Peso puro de la mezcla $\rightarrow$ $4 \cdot 0{,}67 = 2{,}68$ kg

Kilos puros del segundo lingote $\rightarrow$ $2{,}68 - 2{,}4 = 0{,}28$ kg

Pureza del segundo lingote $\rightarrow$ $\dfrac{0{,}28}{1} \cdot 100 = 28\,\%$

4 **Un coche tarda 5 h en cubrir el trayecto A-B. Un camión, que ha salido a la misma hora, y realiza el trayecto B-A, tarda 2 h y 55 min en cruzarse con el coche. ¿Cuánto durará el viaje completo del camión?**

5 h = 300 min; 2 h 55 min = 175 min

Cuando se cruzan, al coche le faltan 125 min para recorrer el mismo espacio que el camión en 175 min. Por tanto:

$$\frac{175}{125} = \frac{x}{175} \rightarrow x = \frac{175^2}{125} = \frac{30\,625}{125} = 245 \text{ min}$$

El viaje completo del camión dura 245 + 175 = 420 min = 7 h.

5 **Dos albañiles que trabajan asociados reciben 1 400 € como pago de cierto trabajo. ¿Cuánto debe cobrar cada uno si el primero trabajó las dos quintas partes de lo que trabajó el otro?**

Llamamos x al tiempo que trabajó uno de los albañiles, entonces, el otro albañil trabajó $\dfrac{2}{5}x$.

$$x + \frac{2}{5}x = 1\,400 \rightarrow \frac{5x + 2x}{5} = 1\,400 \rightarrow \frac{7}{5}x = 1\,400 \rightarrow x = \frac{1\,400 \cdot 5}{7} = 200 \cdot 5 \rightarrow x = 1\,000$$

Uno de los albañiles debe cobrar 1 000 € y el otro, debe cobrar, $1\,000\dfrac{2}{5} = 400$ €.

6 **El suelo de mi salón tiene 1 210 baldosas cuadradas. Si el lado de cada baldosa aumentara 1 cm, solo se necesitarían 1 000 baldosas. ¿Qué dimensión tiene cada baldosa?**

Llamamos x al lado de la baldosa original, en centímetros:

$$1\,210x^2 = 1\,000(x+1)^2 \rightarrow 1\,210x^2 = 1\,000x^2 + 2\,000x + 1\,000 \rightarrow$$

$$\rightarrow 21x^2 - 200x - 100 = 0 \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -\dfrac{10}{21} \end{cases}$$

Como x es una distancia, ha de ser positiva.

Por tanto, el lado de cada baldosa mide 10 cm.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 122

Hazlo tú

- **Unos amigos ponen 15 € cada uno para comprar un regalo. Se suman 4 amigos más y así ponen un 20 % menos cada uno. ¿Cuántos son a repartir?**

Llamamos x al número inicial de amigos.

$$15x = 15 \cdot 0{,}8(x + 4) \rightarrow x = 0{,}8x + 3{,}2 \rightarrow x = \frac{3{,}2}{0{,}2} = 16$$

Al principio son 16 amigos. Después, 20.

Hazlo tú

- **Un grifo tarda tres veces más que otro en llenar un depósito. Si se abren los dos a la vez, lo llenan en 3 h. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos en llenarlo?**

Llamamos x a lo que tarda uno de los grifos en llenar el depósito.

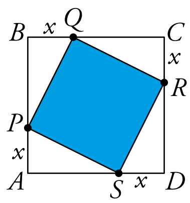
En 1 hora llena $\frac{1}{x}$ de depósito. El otro grifo llena $\frac{1}{3x}$ de depósito en 1 hora.

Por tanto: $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{3} \rightarrow 3 + 1 = x \rightarrow x = 4$

Un grifo tarda 4 horas, y el otro, 12 horas.

Hazlo tú

- **En esta misma figura, calcula el valor de x para que el lado del cuadrado coloreado sea igual a $\sqrt{26}$ cm.**



$$x^2 + (6 - x)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2 \rightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Hay dos soluciones válidas: $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$.

Hazlo tú

- **Si a un número de dos cifras le restamos el que resulta de invertir su orden, obtenemos 18. ¿Cuál es el número si acaba en 3?**

Número de dos cifras que acaba en 3 $\rightarrow$ $10x + 3$

Si invertimos sus cifras $\rightarrow$ $3 \cdot 10 + x = 30 + x$

Por tanto:

$$(10x + 3) - (30 + x) = 18 \rightarrow 10x + 3 - 30 - x = 18 \rightarrow 9x = 45 \rightarrow x = 5$$

El número buscado es 53.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 123

Practica

Ecuaciones de primer grado

1 Resuelve mentalmente estas ecuaciones:

a) $1 = 3 - 4x$ **b)** $2x + 1 = 187$ **c)** $8 - \frac{x}{3} = 5$

d) $\frac{x}{2} - 3 = 4$ **e)** $7 - \frac{x+2}{3} = 5$ **f)** $\frac{5x+1}{8} = 2$

a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = \frac{186}{2} = 93$ c) $\frac{x}{3} = 3 \rightarrow x = 9$

d) $x = 14$ e) $x = 4$ f) $x = 3$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución de cada una:

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1)$ **b)** $4 + x - 4(1 - x) + 5(2 + x) = 0$

c) $2x + 7 - 2(x - 1) = 3(x + 3)$ **d)** $4(2x - 7) - 3(3x + 1) = 2 - (7 - x)$

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1) \rightarrow 3x - 2x - 6 = x - 3x - 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$

Comprobación: $3 \cdot 1 - 2(1 + 3) = 1 - 3(1 + 1) \rightarrow -5 = -5$

b) $4 + x - 4(1 - x) + 5(2 + x) = 0 \rightarrow 4 + x - 4 + 4x + 10 + 5x = 0 \rightarrow 10x = -10 \rightarrow x = -1$

Comprobación: $4 - 1 - 4(1 + 1) + 5(2 - 1) = 4 - 1 - 8 + 5 = 0$

c) $2x + 7 - 2(x - 1) = 3(x + 3) \rightarrow 2x + 7 - 2x + 2 = 3x + 9 \rightarrow 0 = 3x \rightarrow x = 0$

Comprobación: $2 \cdot 0 + 7 - 2(0 - 1) = 3 \cdot (0 + 3) \rightarrow 9 = 9$

d) $4(2x - 7) - 3(3x + 1) = 2 - (7 - x) \rightarrow 8x - 28 - 9x - 3 = 2 - 7 + x \rightarrow$

$\rightarrow -2x = 26 \rightarrow x = -13$

Comprobación: $4[2(-13) - 7] - 3[3(-13) + 1] = 2 - [7 - (-13)] \rightarrow$

$\rightarrow -132 + 114 = 2 - 20 \rightarrow -18 = -18$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{x-3}{5} = \frac{x+1}{3} - 2$

b) $1 = \frac{x+3}{3} - \frac{x}{2}$

c) $\frac{3x+4}{5} = \frac{x+2}{2}$

d) $\frac{5x-16}{6} = -\frac{x+8}{12} + \frac{x+1}{3}$

Comprueba que las soluciones son, respectivamente, 8, 0, 18 y 4.

a) $\frac{x-3}{5} = \frac{x+1}{3} - 2 \rightarrow 15\left(\frac{x-3}{5}\right) = 15\left(\frac{x+1}{3} - 2\right)$

$3(x-3) = 5(x+1) - 30 \rightarrow 3x - 9 = 5x + 5 - 30 \rightarrow 16 = 2x \rightarrow x = 8$

b) $1 = \frac{x+3}{3} - \frac{x}{2} \rightarrow 6 \cdot 1 = 6\left(\frac{x+3}{3} - \frac{x}{2}\right) \rightarrow 6 = 2(x+3) - 3x \rightarrow$

$\rightarrow 6 = 2x + 6 - 3x \rightarrow x = 0$

c) $\frac{3x+4}{5} = \frac{x+2}{2} \rightarrow 2(3x-4) = 5(x+2) \rightarrow 6x - 8 = 5x + 10 \rightarrow x = 18$

d) $\frac{5x-16}{6} = -\frac{x+8}{12} + \frac{x+1}{3} \rightarrow 12\left(\frac{5x-16}{6}\right) = 12\left(-\frac{x+8}{12} + \frac{x+1}{3}\right) \rightarrow$

$\rightarrow 2(5x-16) = -(x+8) + 4(x+1) \rightarrow$

$\rightarrow 10x - 32 = -x - 8 + 4x + 4 \rightarrow 7x = 28 \rightarrow x = 4$

4 **Resuelve y comprueba que dos de estas ecuaciones son equivalentes. ¿Cuáles son?**

a) $\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{x+3}{3} = -\dfrac{x-4}{4} + \dfrac{x-5}{5}$ **b)** $\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{4x-1}{10} + \dfrac{5x-2}{8} = \dfrac{x+1}{4}$

c) $\dfrac{x+5}{5} - \dfrac{x+5}{24} = \dfrac{x+6}{10} + \dfrac{x+4}{60}$ **d)** $2x - \dfrac{1}{2}(1+3x) - \dfrac{3}{5}(x-2) = \dfrac{1}{4}(3-x)$

a) $\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{x+3}{3} = -\dfrac{x-4}{4} + \dfrac{x-5}{5} \;\rightarrow\; 60\left(\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{x+3}{3}\right) = 60\left(-\dfrac{x-4}{4} + \dfrac{x-5}{5}\right)$

$30(x+2) - 20(x+3) = -15(x-4) + 12(x-5) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 30x + 60 - 20x - 60 = -15x + 60 + 12x - 60 \;\rightarrow\; 37x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Comprobación: $\dfrac{0+2}{2} - \dfrac{0+3}{3} = -\dfrac{0-4}{4} + \dfrac{-5}{5} \;\rightarrow\; 1 - 1 = 1 - 1 \;\rightarrow\; 0 = 0$

b) $\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{4x-1}{10} + \dfrac{5x-2}{8} = \dfrac{x+1}{4} \;\rightarrow\; 40\left(\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{4x-1}{10} + \dfrac{5x-2}{8}\right) = 40\left(\dfrac{x+1}{4}\right)$

$8(3x+2) - 4(4x-1) + 5(5x-2) = 10(x+1) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 = 10x + 10 \;\rightarrow\; 23x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Comprobación: $\dfrac{2}{5} - \dfrac{-1}{10} + \dfrac{-2}{8} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{x+5}{5} - \dfrac{x+5}{24} = \dfrac{x+6}{10} + \dfrac{x+4}{60} \;\rightarrow\; 120\left(\dfrac{x+5}{5} - \dfrac{x+5}{24}\right) = 120\left(\dfrac{x+6}{10} + \dfrac{x+4}{60}\right)$

$24(x+5) - 5(x+5) = 12(x+6) + 2(x+4) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 24x + 120 - 5x - 25 = 12x + 72 + 2x + 8 \;\rightarrow\; 5x = -15 \;\rightarrow\; x = -3$

Comprobación: $\dfrac{-3+5}{5} - \dfrac{-3+5}{24} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{19}{60}$

$\dfrac{-3+6}{6} + \dfrac{-3+4}{60} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{60} = \dfrac{19}{60}$

d) $2x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3x}{2} - \dfrac{3x}{5} + \dfrac{6}{5} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{x}{4} \;\rightarrow\; 20 \cdot \left(2x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3x}{2} - \dfrac{3x}{5} + \dfrac{6}{5}\right) = 20 \cdot \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{x}{4}\right) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 40x - 10 - 30x - 12x + 24 = 15 - 5x \;\rightarrow\; 3x = 1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{3}$

Comprobación: $2 \cdot \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3 \cdot \frac{1}{3}}{2} - \dfrac{3 \cdot \frac{1}{3}}{5} + \dfrac{6}{5} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{6}{5} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{3}{4} - \dfrac{\frac{1}{3}}{4} = \dfrac{2}{3}$

Son equivalentes las ecuaciones a) y b.

5 **Solo una de las siguientes ecuaciones tiene solución única. Resuélvelas y compruébalo.**

a) $\frac{x+1}{2} = 2 + \frac{2x-3}{4}$

b) $\frac{4x-3}{12} - \frac{2x+1}{4} = \frac{x-1}{3} - \frac{3x+1}{6}$

c) $\frac{1+x}{3} - \frac{x+3}{5} = \frac{26}{15} - \frac{4+x}{2}$

a) $4 \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right) = 4 \cdot \left(2 + \frac{2x-3}{4}\right) \rightarrow 2x + 2 = 8 + 2x - 3 \rightarrow 2x + 2 = 2x + 5 \rightarrow 0x = 3 \rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene solución.

b) $12 \cdot \left(\frac{4x-3}{12} - \frac{2x+1}{4}\right) = 12 \cdot \left(\frac{x-1}{3} - \frac{3x+1}{6}\right) \rightarrow 4x - 3 - 6x - 3 = 4x - 4 - 6x - 2 \rightarrow$

$\rightarrow -2x - 6 = -2x - 6 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

c) $30 \cdot \left(\frac{1+x}{3} - \frac{x+3}{5}\right) = 30 \cdot \left(\frac{26}{15} - \frac{4+x}{2}\right) \rightarrow 10 + 10x - 6x - 18 = 52 - 60 - 15x \rightarrow$

$\rightarrow -8 + 4x = -8 - 15x \rightarrow 19x = 0 \rightarrow x = 0$

Comprobación: $\frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{26}{15} - \frac{4}{2} \rightarrow \frac{5}{15} - \frac{9}{15} = \frac{52}{30} - \frac{60}{30} \rightarrow -\frac{4}{15} = -\frac{4}{15}$

6 **¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución única? Resuélvelas y compruébalo.**

a) $4(2x + 1) - 3(x + 3) = 5(x - 2)$

b) $2(x - 3) + 1 = 3(x - 1) - (2 + x)$

c) $\frac{3x+1}{2} = 2x - \frac{1-x}{2}$

d) $x + \frac{2x-7}{4} = 2x + \frac{1-x}{2}$

a) $8x + 4 - 3x - 9 = 5x - 10 \rightarrow 5x - 5 = 5x - 10 \rightarrow 0x = -5 \rightarrow$ No tiene solución.

b) $2x - 6 + 1 = 3x - 3 - 2 - x \rightarrow 2x - 5 = 2x - 5 \rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

c) $2 \cdot \left(\frac{3x+1}{2}\right) = 2 \cdot \left(2x - \frac{1-x}{2}\right) \rightarrow 3x + 1 = 4x - 1 + x \rightarrow 2 = 2x \rightarrow x = 1$

Comprobación: $\frac{3 \cdot 1 + 1}{2} = 2 \cdot 1 - \frac{1-1}{2} \rightarrow 2 = 2$

d) $4 \cdot \left(x + \frac{2x-7}{4}\right) = 4 \cdot \left(2x + \frac{x-1}{2}\right) \rightarrow 4x + 2x - 7 = 8x + 2x - 2 \rightarrow 6x - 7 = 10x - 2 \rightarrow$

$\rightarrow -4x = 5 \rightarrow x = -\frac{5}{4}$

Comprobación: $-\frac{5}{4} - \frac{38}{16} = -\frac{10}{4} - \frac{9}{8} \rightarrow -\frac{20}{16} - \frac{38}{16} = -\frac{40}{16} - \frac{18}{16} \rightarrow \frac{-58}{16} = \frac{-58}{16}$

7 **Resuelve.**

a) $\frac{2}{3}(x-3)+\frac{1}{5}(x-5)=\frac{3}{5}\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{4x}{15}$ **b)** $2x-\frac{1}{2}(1+3x)=\frac{3}{5}(x-2)+\frac{1}{4}(3-x)$

c) $\frac{4}{3}(2-x)-\frac{3}{4}(2x-1)=4x-7\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}$ **d)** $x(8x-1)-(3x-4)^2=x(7-x)-2(x-4)$

a) $\frac{2x}{3}-\frac{6}{3}+\frac{x}{5}-\frac{5}{5}=\frac{3x}{5}+\frac{6}{15}+\frac{4x}{15} \to 15\cdot\left(\frac{2x}{3}-\frac{6}{3}+\frac{x}{5}-\frac{5}{5}\right)=15\cdot\left(\frac{3x}{5}+\frac{6}{15}+\frac{4x}{15}\right) \to$

$\to 10x-30+3x-15=9x+6+4x \to 13x-45=13x+6 \to$

$\to 0x=51 \to$ No tiene solución.

b) $20\cdot\left(2x-\frac{1}{2}-\frac{3x}{2}\right)=20\cdot\left(\frac{3x}{5}-\frac{6}{5}+\frac{3}{4}-\frac{x}{4}\right) \to 40x-10-30x=12x-24+15-5x \to$

$\to 10x-10=7x-9 \to 3x=1 \to x=\frac{1}{3}$

c) $\frac{8}{3}-\frac{4x}{3}-\frac{6x}{4}+\frac{3}{4}=4x-7x+\frac{7}{2}-\frac{3}{4} \to$

$\to 12\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{4x}{3}-\frac{6x}{4}+\frac{3}{4}\right)=12\cdot\left(4x-7x+\frac{7}{2}-\frac{3}{4}\right) \to$

$\to 32-16x-18x+9=48x-84x+42-9 \to 41-34x=33-36x \to 2x=-8 \to$

$\to x=-\frac{8}{2}=-4$

d) $8x^2-x-(9x^2-24x+16)=7x-x^2-2x+8 \to -x^2+23x-16=-x^2+5x+8 \to$

$\to 18x=24 \to x=\frac{24}{18}=\frac{4}{3}$

8 **Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla sus soluciones:**

a) $(4x-3)(4x+3)-4(3-2x)^2=3x$ **b)** $2x(x+3)+(3-x)^2=3x(x+1)$

c) $\frac{x(x+1)}{2}-\frac{(2x-1)^2}{8}=\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{8}$

a) $(4x-3)(4x+3)-4(3-2x)^2=3x \to 16x^2-9-4(9+4x^2-12x)=3x \to$

$\to 16x^2-9-36-16x^2+48x=3x \to 45x=45 \to x=1$

b) $2x(x+3)+(3-x)^2=3x(x+1) \to 2x^2+6x+9+x^2-6x=3x^2+3x \to$

$\to 9=3x \to x=3$

c) $\frac{x(x+1)}{2}-\frac{(2x-1)^2}{8}=\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{8} \to 8\left(\frac{x(x+1)}{2}-\frac{(2x-1)^2}{8}\right)=8\left(\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{8}\right) \to$

$\to 4x(x-1)-(2x-1)^2=2(3x+1)-1 \to 4x^2-4x-(4x^2+1-4x)=6x+2-1 \to$

$\to -1=6x+1$ 8 $-2=6x \to x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$

Ecuaciones de segundo grado

9 **Resuelve mentalmente.**

a) $x^2 - 100 = 0$ **b)** $2x^2 - 50 = 0$ **c)** $12 - 3x^3 = 0$

d) $(x-3)^2 = 0$ **e)** $(2x+1)^2 = 0$ **f)** $\dfrac{(x+1)^2}{3} - 7 = 5$

a) $x = \pm 10$ b) $x = \pm 5$ c) $x = \pm 2$

d) $x = 3$ e) $x = -\dfrac{1}{2}$ f) $x_1 = 5;\ x_2 = -7$

10 **Las siguientes ecuaciones de segundo grado son incompletas. Halla sus soluciones sin utilizar la fórmula general.**

a) $3x^2 - 12x = 0$ **b)** $x - 3x^2 = 0$

c) $2x^2 - 5x = 0$ **d)** $2x^2 - 8 = 0$

e) $9x^2 - 25 = 0$ **f)** $4x^2 + 100 = 0$

g) $16x^2 = 100$ **h)** $3x^2 - 6 = 0$

a) $3x^2 - 12x = 0 \rightarrow 3x(x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

b) $x - 3x^2 = 0 \rightarrow x(1-3x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1/3 \end{cases}$

c) $2x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(2x-5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 5/2 \end{cases}$

d) $2x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

e) $9x^2 - 25 = 0 \rightarrow 9x^2 = 25 \rightarrow x^2 = \dfrac{25}{9} \begin{cases} x = 5/3 \\ x = -5/3 \end{cases}$

f) $4x^2 + 100 = 0 \rightarrow 4x^2 = -100$ No tiene solución.

g) $16x^2 = 100 \rightarrow x^2 = \dfrac{100}{16} \begin{cases} x = 10/4 = 5/2 \\ x = -10/4 = -5/2 \end{cases}$

h) $3x^2 - 6 = 0 \rightarrow 3x^2 = 6 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

11 **Resuelve.**

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ **b)** $x^2 + 9x + 20 = 0$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ **d)** $x^2 + x + 3 = 0$

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0$ **f)** $x^2 - 2x + 3 = 0$

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ **h)** $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

a) $x^2 + 4x - 21 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 21 \cdot 4}}{2} = \dfrac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -7 \end{cases}$

b) $x^2 + 9x + 20 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 20}}{2} = \dfrac{-9 \pm 1}{2} \begin{cases} x = -4 \\ x = -5 \end{cases}$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{18} = \dfrac{12 \pm 0}{18} = \dfrac{2}{3}$

d) $x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3}}{2}$ No tiene solución.

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-28 \pm \sqrt{784 - 4 \cdot 4 \cdot 49}}{8} = \dfrac{-28 \pm 0}{8} = -\dfrac{7}{2}$

f) $x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2}$ No tiene solución.

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0 \rightarrow x = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{8} = \dfrac{20 \pm 0}{8} = \dfrac{5}{2}$

h) $-2x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-2) \cdot 2}}{-4} = \dfrac{-3 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = -2/4 = -1/2 \\ x = 2 \end{cases}$

Página 124

12 Resuelve mentalmente, igualando a cero cada factor:

a) $x(3x-1)=0$ **b)** $3x(x+2)=0$

c) $(x+1)(x+3)=0$ **d)** $(x-5)(x+5)=0$

e) $(x-5)^2=0$ **f)** $(2x-5)^2=0$

a) $x=0$; $3x-1=0 \to x=\frac{1}{3}$ *Soluciones*: $x=0$; $x=\frac{1}{3}$

b) $3x=0$; $x+2=0 \to x=-2$ *Soluciones*: $x=0$; $x=-2$

c) $x+1=0$; $x+3=0$ *Soluciones*: $x=-1$; $x=-3$

d) $x-5=0$; $x+5=0$ *Soluciones*: $x=5$; $x=-5$

e) $x-5=0$ *Solución*: $x=5$

f) $2x-5=0$ *Solución*: $x=\frac{5}{2}$

13 Opera y resuelve.

a) $(x-2)(3x+2)=(x-4)(2x+1)$ **b)** $(x-1)^2+(1-x)(x+2)=0$

c) $(x+1)^2=(x+1)(2x-3)$ **d)** $(x+4)^2-(2x-1)^2=8x$

a) $3x^2+2x-6x-4=2x^2+x-8x-4 \to 3x^2-4x-4=2x^2-7x-4 \to$

$\to x^2+3x=0 \to x\cdot(x+3)=0 \to x_1=0;\ x_2=-3$

b) $x^2-2x+1+x+2-x^2-2x=0 \to x+3=0 \to x=-3$

c) $x^2+2x+1=2x^2-3x+2x-3 \to x^2+2x+1=2x^2-x-3 \to -x^2+3x+4=0 \to$

$$\to x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-1)\cdot 4}}{-2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{-2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{-2}=\frac{-3\pm 5}{-2} \to x_1=-1;\ x_2=4$$

d) $(x+4)^2-(2x-1)^2=8x \to x^2+16+8x-4x^2-1+4x=8x \to 3x^2-4x-15=0$

$$\to x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 3\cdot(-15)}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{196}}{6}=\frac{4\pm 14}{6} \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

14 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{x}{3}(x-1)-\frac{x}{4}(x+1)+\frac{3x+4}{12}=0$

b) $\frac{(x-1)(x+2)}{12}-\frac{(x+1)(x-2)}{6}-1=\frac{x-3}{3}$

c) $\frac{(x-1)^2-3x+1}{15}+\frac{x+1}{5}=0$

d) $\frac{x+1}{2}-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{x+2}{3}+\frac{(x-2)^2}{6}=\frac{1}{6}$

Comprueba que una no tiene solución y las soluciones, no ordenadas, de las otras son 1 y –2; $\pm\sqrt{3}$ y 2.

a) $\frac{x}{3}(x-1)-\frac{x}{4}(x+1)+\frac{3x+4}{12}=0 \to 12\left(\frac{x}{3}(x-1)-\frac{x}{4}(x+1)+\frac{3x+4}{12}\right) \to$

$\to 4x(x-1)-3x(x+1)+3x+4=0 \to 4x^2-4x-3x^2-3x+3x+4=0 \to$

$\to x^2-4x+4=0 \to x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 4}}{2}=2$

b) $\frac{(x-1)(x+2)}{12}-\frac{(x+1)(x-2)}{6}-1=\frac{x-3}{3} \to \frac{x^2+x-2}{12}-\frac{x^2-x-2}{6}-1=\frac{x-3}{3} \to$

$\to 12\left(\frac{x^2+x-2}{12}-\frac{x^2-x-2}{6}-1\right)=12\left(\frac{x-3}{3}\right) \to$

$\to x^2+x-2-2(x^2-x-2)-12=4(x-3) \to$

$\to x^2+x-2-2x^2+2x+4-12=4x-12 \to -x^2-x+2=0 \to$

$\to x^2+x-2=0 \to x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

c) $\frac{(x-1)^2-3x+1}{15}+\frac{x+1}{5}=0 \to 15\left[\frac{(x-1)^2-3x+1}{15}+\frac{x+1}{5}\right]=0 \to$

$\to x^2-2x+1-3x+1+3x+3=0 \to x^2-2x+5=0 \to$

$\to x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 5}}{2} \to$ No tiene solución.

d) $\frac{x+1}{2}-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{x+2}{3}+\frac{(x-2)^2}{6}=\frac{1}{6} \to$

$\to 12\left(\frac{x+1}{2}-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{x+2}{3}+\frac{(x-2)^2}{6}\right)=12\cdot\frac{1}{6} \to$

$\to 6(x+1)-3(x^2-2x+1)-4(x+2)+2(x^2-4x+4)=2 \to$

$\to 6x+6-3x^2+6x-3-4x-8+2x^2-8x+8=2 \to$

$\to -x^2+3=0 \to x^2=3 \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$

15 Resuelve.

a) $\dfrac{(5x-4)(5x+4)}{4}=\dfrac{(3x-1)^2-9}{2}$ b) $\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{(4-x)^2}{9}=\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{(3x+1)(2x+3)}{21}+\dfrac{x^2+3}{7}=\dfrac{x^2+x-2}{3}$ d) $\dfrac{x^2-4}{3}+\dfrac{(2x-2)^2}{8}=\dfrac{7x^2-10}{12}$

a) $\dfrac{(5x-4)(5x+4)}{4}=\dfrac{(3x-1)^2-9}{2} \rightarrow \dfrac{25x^2-16}{4}=\dfrac{2(9x^2+1-6x-9)}{4} \rightarrow$

$\rightarrow 25x^2-16=18x^2+2-12x-18 \rightarrow 7x^2+12x=0 \rightarrow$

$\rightarrow x(7x+12)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=-12/7 \end{cases}$

b) $9\cdot\left(\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{(4-x)^2}{9}\right)=9\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right) \rightarrow 3x+9-(4-x)^2=3 \rightarrow$

$\rightarrow 3x+9-16+8x-x^2=3 \rightarrow -x^2+11x-10=0 \rightarrow$

$\rightarrow x=\dfrac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot(-1)\cdot(-10)}}{-2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{81}}{-2}=\dfrac{-11\pm 9}{-2} \rightarrow x_1=1;\ x_2=10$

c) $21\cdot\left[\dfrac{(3x+1)(2x+3)}{21}+\dfrac{x^2+3}{7}\right]=21\cdot\left(\dfrac{x^2+x-2}{3}\right) \rightarrow$

$\rightarrow (3x+1)\cdot(2x+3)+3x^2+9=7x^2+7x-14 \rightarrow$

$\rightarrow 6x^2+9x+2x+3+3x^2+9=7x^2+7x-14 \rightarrow 9x^2+11x+12=7x^2+7x-14 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2+4x+26=0 \rightarrow x^2+2x+13=0 \rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 13}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{-48}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene solución.

d) $24\cdot\left[\dfrac{x^2-4}{3}+\dfrac{(2x-2)^2}{8}\right]=24\cdot\left(\dfrac{7x^2-10}{12}\right) \rightarrow 8x^2-32+3\cdot(2x-2)^2=14x^2-20 \rightarrow$

$\rightarrow 8x^2-32+12x^2-24x+12=14x^2-20 \rightarrow 20x^2-24x-20=14x^2-20 \rightarrow$

$\rightarrow 6x^2-24x=0 \rightarrow 6x(x-4)=0 \rightarrow x_1=0;\ x_2=4$

16 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - \frac{3}{x} = \frac{x+1}{x}$ **b)** $\frac{x+2}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}$

c) $\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}$ **d)** $\frac{15}{x} = \frac{72-6x}{2x^2} + 2$

a) $x \cdot \left(5x - \frac{3}{x}\right) = x \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right) \to 5x^2 - 3 = x + 1 \to 5x^2 - x - 4 = 0 \to$

$\to x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{10} = \frac{1 \pm 9}{10} \to x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$

b) $6x \cdot \left(\frac{x+2}{3} - \frac{1}{x}\right) = 6x \cdot \left(\frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}\right) \to 2x^2 + 4x - 6 = 6x - 18 + 12 - 3x^2 \to$

$\to 5x^2 - 2x = 0 \to x \cdot (5x - 2) = 0 \to x_1 = 0;\ x_2 = \frac{2}{5}$

Debemos descartar la solución $x_1 = 0$, ya que anula algunos denominadores.

c) $2x\left(\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x}\right) = 2x\left(\frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}\right) \to x^2 + 3x - 2 = 2x - 6 + 4 - x^2 \to$

$\to 2x^2 + x = 0 \to x(2x + 1) = 0 \to x_1 = 0;\ x_2 = \frac{-1}{2}$

Debemos descartar la solución $x_1 = 0$, ya que anula algunos denominadores.

d) $2x^2\left(\frac{15}{x}\right) = 2x^2\left(\frac{72-6x}{2x^2} + 2\right) \to 30x = 72 - 6x + 4x^2 \to 4x^2 - 36x + 72 = 0 \to$

$\to x^2 - 9x + 18 = 0$

$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 18}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} \to x_1 = 6;\ x_2 = 3$

Ecuaciones de grado superior a dos

17 **Resuelve estas ecuaciones bicuadradas:**

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ **b)** $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

c) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$ **d)** $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$

e) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ **f)** $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \to z^2 - 13z + 36 = 0$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \to x_1 = 6;\ x_2 = 3 \begin{cases} z_1 = 9 \to x^2 = 9 \to x_1 = 3;\ x_2 = -3 \\ z_2 = 4 \to x^2 = 4 \to x_3 = 1;\ x_4 = -2 \end{cases}$$

b) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \to z^2 - 5z + 6 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} z_1 = 3 \to x^2 = 3 \to x_1 = \sqrt{3};\ x_2 = -\sqrt{3} \\ z_2 = 2 \to x^2 = 2 \to x_3 = \sqrt{2};\ x_4 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

c) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0 \to z^2 - 15z - 16 = 0$

$$z = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{15 \pm 17}{2} \begin{cases} z_1 = 16 \to x^2 = 16 \to x_1 = 4;\ x_2 = -4 \\ z_2 = -1 \to x^2 = -1 \text{ No tiene solución.} \end{cases}$$

d) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \to z^2 - 5z - 6 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \begin{cases} z_1 = 6 \to x^2 = 6 \to x_1 = \sqrt{6};\ x_2 = -\sqrt{6} \\ z_2 = -1 \to x^2 = -1 \text{ No tiene solución.} \end{cases}$$

e) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \to z^2 + 2z + 1 = 0 \to (z + 2)^2 = 0 \to z = -1 \to$

$\to x^2 = -1$ No tiene solución.

f) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0 \to z^2 + 13z + 36 = 0$

$$z = \frac{-13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-13 \pm 5}{2} \begin{cases} z_1 = -4 \to x^2 = -4 \text{ No tiene solución.} \\ z_2 = -9 \to x^2 = -9 \text{ No tiene solución.} \end{cases}$$

18 **Se pueden resolver algunas ecuaciones de grado superior a dos si se factoriza y se iguala a cero cada factor. Resuelve así estas ecuaciones:**

a) $x^4 - 9x^2 = 0$ **b)** $x^3 - x^2 + 2x = 0$

c) $x^3 - 2x^2 + x = 0$ **d)** $3x^3 - 9x^2 - 30x = 0$

a) $x^4 - 9x^2 = 0 \to x^2(x^2 - 9) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} x^2 = 0 \to x_1 = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \to x^2 = 9 \to x_2 = 3;\ x_3 = -3 \end{cases}$$

b) $x^3 - x^2 + 2x = 0 \to x(x^2 - x + 2) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x + 2 = 0 \to \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

c) $x^3 - 2x^2 + x = 0 \to x(x^2 - 2x + 1) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \to (x - 1)^2 = 0 \to x_2 = 1 \end{cases}$$

d) $3x^3 - 9x^2 - 30x = 0 \to 3x(x^2 - 3x - 10) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} 3x = 0 \to x_1 = 0 \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \to x_2 = 5;\ x_3 = -2 \end{cases}$$

19 **Resuelve con ayuda de Ruffini:**

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$

b) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

c) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$

	1	0	–3	2	
1		1	1	–2	
	1	1	–2	0	$\rightarrow x_1 = 1$
–2		–2	2		
	1	–1	0		$\rightarrow x_2 = -2$
1		1			
	1	0			

b) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

	1	–2	1	–2	
2		2	0	2	
	1	0	1	0	$\rightarrow x = 2$

$(x^2 + 1) = 0 \rightarrow$ Sin solución.

c) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

	1	–1	–5	–3	
–1		–1	2	3	
	1	–2	–3	0	$\rightarrow x_1 = -1$
–1		–1	3		
	1	–3	0		
3		3			
	1	0			$\rightarrow x_2 = 3$

d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

	1	2	–9	–18	
3		3	15	18	
	1	5	6	0	$\rightarrow x_1 = 3$
–3		–3	–6		
	1	2	0		$\rightarrow x_2 = -3$
–2		–2			
	1	0			$\rightarrow x_3 = -2$

Resolución por tanteo

20 **Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:**

a) $3^{x-5} = 27$

b) $\sqrt{x+9} = 13$

c) $(x + 1)^3 = -1$

d) $x^3 - x^2 = 48$

e) $x^3 - x^2 - x = 15$

f) $(x - 2)^4 - 625 = 0$

a) $x = 8$

b) $x = 160$

c) $x = -2$

d) $x = 4$

e) $x = 3$

f) $x = 7$

21 Busca por tanteo una solución aproximada de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 = 381$ **b)** $x^4 - x^2 = 54$ **c)** $x - \sqrt{x+5} = 0$

d) $3^{x-1} = 0{,}005$ **e)** $5x = 0{,}32$ **f)** $x^{0{,}75} = 17$

a) $x \approx 7{,}25$ b) $x \approx 4{,}14$ c) $x \approx 3$

d) $x \approx -4$ e) $x \approx -0{,}7$ f) $x \approx 44$

22 Resuelve por tanteo.

a) $\sqrt{x+8} = x - 1$ **b)** $2x^3 - x = 17$

c) $\sqrt{x^2+3} = 2x$ **d)** $2^x = 0{,}04$

a) $x \approx 4{,}58$ b) $x \approx 2{,}12$

c) $x \approx 1$ d) $x \approx -4{,}5$

Resuelve problemas

23 Se reparten 230 € entre tres personas de modo que la segunda recibe 1/3 más que la tercera, y la primera, 10 € más que la segunda. ¿Cuánto recibe cada una?

Llamamos x a lo que recibe la tercera persona.

La segunda persona recibe $\left(x + \frac{x}{3}\right)$.

La primera persona recibe $\left(x + \frac{x}{3} + 10\right)$.

$$x + \left(x + \frac{x}{3}\right) + \left(x + \frac{x}{3} + 10\right) = 230 \ \rightarrow\ 3x + \frac{2x}{3} = 220 \ \rightarrow\ 11x = 660 \ \rightarrow\ x = 60$$

La tercera persona recibe 60 €; la segunda, 80 €, y la primera, 90 €.

24 Un grupo de amigas observan que, para pagar la cuenta de una comida, si ponen 12 € cada una les faltan 8 €, y si ponen un euro más cada una les sobran 2 €. ¿Cuántas son y cuánto costó la comida?

Llamamos x al número de amigas.

$12x + 8 = 13x - 2 \ \rightarrow\ 10 = x \ \rightarrow\ x = 10$

Son 10 amigas. La comida costó $(12 \cdot 10 + 8) = 128$ €.

25 La longitud de los lados de un rectángulo son dos números enteros consecutivos. ¿Puede ser su perímetro igual a 92 cm? ¿Y a 106 cm? Justifica tu respuesta.

Llamamos x y $x + 1$ a los lados del rectángulo.

- $2(x + x + 1) = 92 \ \rightarrow\ 4x = 90 \ \rightarrow\ x = 22{,}5$

  El perímetro no puede ser 92 cm porque los lados no son números enteros, como pide el enunciado.

- $2(x + x + 1) = 106 \ \rightarrow\ 4x = 104 \ \rightarrow\ x = 26$

  El perímetro sí puede ser 106 cm. En este caso, los lados del rectángulo miden 26 cm y 27 cm.

Página 125

26 La suma de cinco números enteros consecutivos es igual a cinco veces el tercero. ¿Cuántos quintetos de números hay que cumplan esta condición?

Llamamos x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ y $x + 4$ a los cinco números consecutivos.

$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 5(x + 2) \to 5x + 10 = 5x + 10 \to 0x = 0$

Hay infinitos quintetos de números que cumplen la condición.

27 Averigua si existe algún número, x, tal que la tercera parte de x más la sexta parte de x es igual a su mitad aumentada en 1.

$\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{x}{2} + 1 \to \frac{2x + x}{6} = \frac{3x + 6}{6} \to 3x = 3x + 6 \to 0x = 6$

No tiene solución. No hay ningún número que cumpla la condición pedida.

28 Yago tiene 25 años menos que su padre. Dentro de 10 años, la edad del padre será el doble que la de Yago. ¿Qué edad tiene cada uno?

Edad actual del padre: x. Edad actual de Yago: $x - 25$

Dentro de 10 años $\to x + 10 = 2(x - 25 + 10) \to x + 10 = 2x - 30 \to x = 40$

Yago tiene $40 - 25 = 15$ años, y su padre, 40 años.

29 El precio de unos zapatos ha subido un 15 % en diciembre y ha bajado un 20 % en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96 €. ¿Cuál era el precio inicial?

Llamamos x al precio inicial de los zapatos.

$1{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot x = x - 6{,}96 \to 0{,}08x = 6{,}96 \to x = 87$

El precio inicial de los zapatos era 87 €.

30 En la fiesta benéfica que organizó una guardería se recaudaron 2 136 €. Asistieron 90 personas adultas y 116 niños y niñas. Si la entrada infantil costaba 10 € menos que la adulta, ¿cuál era su precio?

Llamamos x al precio de la entrada adulta. Por tanto, la infantil costaba $x - 10$.

$90x + 116(x - 10) \to 2\,136 \to 206x = 3\,296 \to x = 16$

La entrada adulta costaba 16 €, y la infantil, 6 €.

31 Dos hermanas se llevan 3 años y su padre tiene 45. Hace 7 años, la suma de las edades de las hijas era la mitad que la del padre. ¿Qué edad tiene cada hija?

Edades actuales de las hermanas: x y $x + 3$.

Hace 7 años $\to (x - 7) + (x + 3 - 7) = \frac{45 - 7}{2} \to 2x - 11 = 19 \to x = 15$

Las edades de las hermanas son 15 y 18 años.

32 **Un coleccionista de cómics vendió 2/5 de su colección y luego compró otros 100. Después de esto, tenía 40 cómics más que al principio. ¿Cuántos tenía?**

Llamamos x al número inicial de cómics.

$\frac{3}{5}x + 100 = x + 40 \rightarrow 3x + 500 = 5x + 200 \rightarrow x = 150$

Al principio tenía 150 cómics.

33 **La jefa de estudios de un centro escolar tiene que repartir a los nuevos estudiantes entre las clases de 3.º de ESO. Si añade 5 estudiantes por clase, sobran 3, y si añade 7 por clase, faltan 5. ¿Cuántas clases y cuántos estudiantes nuevos hay?**

Llamamos x al número de clases.

$5x + 3 = 7x - 5 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$

Hay 4 clases y $(5 \cdot 4 + 3) = 23$ estudiantes.

34 **Creía tener el dinero justo para comprar 8 entradas de teatro pero el precio de cada una es 4 € más caro de lo que pensaba. Ahora solo puedo comprar 5 y me sobran 7 €. ¿Cuál es el precio actual de una entrada?**

Llamamos x al precio que pensaba que costaba una entrada.

$8x = 5(x + 4) + 7 \rightarrow 8x = 5x + 27 \rightarrow x = 9$

El precio actual de una entrada es $9 + 4 = 13$ €.

35 **De un depósito de agua se sacan 2/7 de su contenido; después, 40 litros y, por último, 5/11 del agua restante. Si quedan aún 60 litros, ¿cuántos había?**

Llamamos x a la cantidad de agua inicial.

Sacamos $\frac{2}{7}x \rightarrow$ quedan $\frac{5}{7}x$

Sacamos 40 L $\rightarrow$ quedan $\frac{5}{7}x - 40$

Sacamos $\frac{5}{11}$ de lo que hay $\rightarrow$ quedan $\frac{6}{11}\left(\frac{5}{7}x - 40\right)$

$\frac{6}{11}\left(\frac{5}{7}x - 40\right) = 60 \rightarrow \frac{30x}{77} - \frac{240}{11} = 60 \rightarrow 30x = 6\,300 \rightarrow x = 210$

Había 210 L al principio.

36 **Dos ciudades, A y B, distan 150 km. Un camión sale de A hacia B a 80 km/h. A la misma hora sale de B hacia A un coche que tarda 45 min en encontrarse con el camión. ¿Qué velocidad lleva el coche?**

Llamamos x a la velocidad del coche.

El coche y el camión se aproximan a $(80 + x)$ km/h.

En $\frac{3}{4}$ h recorren 150 km $\rightarrow (80 + x) \cdot \frac{3}{4} = 150 \rightarrow \frac{3x}{4} = 90 \rightarrow x = 120$

El coche lleva una velocidad de 120 km/h.

37 **Contratamos un autobús para una salida al campo. Con todas las plazas ocupadas, el precio del billete es de 12 €; pero quedaron 4 plazas libres, por lo que el viaje costó 13,50 €. ¿Cuántas plazas tiene el autobús?**

Llamamos x al número de plazas del autobús.

$12x = 13{,}5(x - 4) \rightarrow 13{,}5x - 12x = 54 \rightarrow x = 36$

El autobús tiene 36 plazas.

38 **De un depósito de aceite se sacan los 2/3 de su contenido y después se le añaden 25 litros. Al día siguiente se repite esta operación, y la cantidad que queda en el depósito es los 2/3 de lo que había al principio. ¿Cuántos litros de aceite había?**

Llamamos x a los litros de aceite que había.

Cada vez que sacamos $\frac{2}{3}$, queda $\frac{1}{3}$. Por tanto:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3} + 25\right) + 25 = \frac{2}{3}x \rightarrow \frac{100}{3} = \frac{5x}{9} \rightarrow x = 60$$

En el depósito había 60 L de aceite.

39 **Un coche sale de un pueblo a 90 km/h. Media hora después sale otro del mismo lugar y en la misma dirección y tarda dos horas en alcanzar al primero. Calcula la velocidad del segundo coche y la distancia que recorren hasta el alcance.**

Llamamos x a la velocidad del segundo coche.

$90 \cdot 2{,}5 = x \cdot 2 \rightarrow x = 112{,}5$

La velocidad del segundo coche es 112,5 km/h. Recorren 225 km hasta el alcance.

40 **¿Cuántos litros de aceite de orujo de 1,60 €/L tenemos que añadir a 60 L de aceite de oliva de 2,80 €/L para obtener una mezcla de 2,50 €/L?**

x son los litros de aceite de orujo.

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
ORUJO	x	1,6	$1{,}6x$
OLIVA	60	2,8	$2{,}8 \cdot 60$
MEZCLA	$x + 60$	2,5	$2{,}5(x + 60)$

$1{,}6x + 168 = 2{,}5x + 150 \rightarrow$

$\rightarrow 18 = 0{,}9x \rightarrow x = 20\ l$

Tenemos que añadir 20 litros.

41 **Una ciclista sale de A hacia B a las 8 de la mañana. A la misma hora sale de B hacia A un autobús a una velocidad 40 km/h superior a la de la ciclista. Si la distancia entre A y B es 120 km y tardan 1,2 h en cruzarse, ¿cuáles eran sus velocidades?**

Llamamos x a la velocidad del ciclista. Velocidad del autobús: $x + 40$. Se aproximan a una velocidad de $x + x + 40 = 2x + 40$.

$120 = (2x + 40) \cdot 1{,}2 \rightarrow 120 = 2{,}4 + 48 \rightarrow x = 30$

La velocidad del ciclista es 30 km/h, y la del autobús, 70 km/h.

42 **Un ciclista que va a 21 km/h tarda tres cuartos de hora en alcanzar a otro que le lleva una ventaja de 2,25 km. ¿Qué velocidad lleva el que va delante?**

Llamamos x a la velocidad del ciclista que va delante.

$$\frac{3}{4} \cdot 21 = 2{,}25 + \frac{3}{4}x \;\to\; 0{,}75x = 15{,}75 - 2{,}25 \;\to\; x = \frac{13{,}5}{0{,}75} = 18$$

El ciclista que va delante lleva una velocidad de 18 km/h.

43 **Ana sale en su coche a 80 km/h. Se para 15 min para echar gasolina y después conduce un buen rato a 100 km/h. Cuando llega a su destino, comprueba que hizo 250 km en 3 horas, contando la parada. ¿Cuánto tiempo condujo a 80 km/h?**

Llamamos x al tiempo que conduce a 80 km/h.

El tiempo del viaje, sin parada, es 3 h – 15 min = 2,75 h. Por tanto, el tiempo que conduce a 100 km/h es $2{,}75 - x$.

El espacio que recorre a 80 km/h es $80x$ y el que recorre a 100 km/h es $100(2{,}75 - x)$. Así:

$$80x + 275 - 100x = 250 \;\to\; -20x = -25 \;\to\; x = \frac{-25}{-20} = 1{,}25$$

Ana conduce 1,25 h a 80 km/h.

44 **Al mezclar 30 kg de pintura con 50 kg de otra de calidad inferior, obtenemos una mezcla a 3,30 €/kg. Si el precio de la barata es la mitad que el de la otra, ¿cuál es el precio de cada pintura?**

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
PINTURA I	30	$2x$	$60x$
PINTURA II	50	x	$50x$
MEZCLA	80	3,30	$80 \cdot 3{,}3$

$$60x + 50x = 264 \;\to\; 110x = 264 \;\to\; x = 2{,}4 \text{ €/kg}$$

La pintura cara vale 4,8 €/kg, y la pintura barata, 2,4 €/kg.

45 **Una marca de café de 14,15 €/kg se elabora con un 30 % de café colombiano de 18 €/kg, y el resto, con otro. ¿Cuál es el precio de ese otro?**

Para obtener 1 kg de mezcla, ponemos 0,3 kg de café colombiano y 0,7 kg del otro café.

$$0{,}3 \cdot 18 + 0{,}7x = 1 \cdot 14{,}15 \;\to\; 0{,}7x = 8{,}75 \;\to\; x = 12{,}5 \text{ €/kg}$$

El precio del café barato es 12,5 €/kg.

46 **Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 145.**

Los números son x y $x + 1$.

$$x^2 + (x+1)^2 = 145 \;\to\; x^2 + x^2 + 1 + 2x - 145 = 0 \;\to$$

$$\to\; 2x^2 + 2x - 144 = 0 \;\to\; x^2 + x - 72 = 0 \;\to$$

$$\to\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 72 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm 17}{2} \begin{cases} x = 8 \\ x = -9 \end{cases}$$

Son 8 y 9, o bien, –9 y –8. Hay dos soluciones.

47 **Si al producto de un número natural por su siguiente le restamos 31, obtenemos el quíntuple de la suma de ambos. ¿De qué número se trata?**

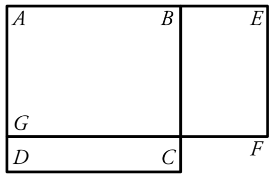
x es el número que buscamos.

$x(x + 1) - 31 = 5(x + x + 1) \rightarrow x^2 + x - 31 = 10x + 5 \rightarrow x^2 - 9x - 36 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{9 \pm 15}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -3 \end{cases}$$

El número puede ser 12, o bien, –3. Hay dos soluciones.

48 **El área del cuadrado** ***ABCD*** **es igual a la del rectángulo** ***AEFG*****. Si** $\overline{BE}$ **= 4 cm y** $\overline{GD}$ **= 3 cm, ¿cuánto mide el lado del cuadrado?**



Llamamos x al lado del cuadrado $ABCD$.

$x^2 = (x + 4)(x - 3) \rightarrow x^2 = x^2 - 3x + 4x - 12 \rightarrow x = 12$

El lado del cuadrado mide 12 cm.

Página 126

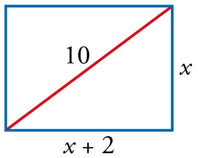
49 **Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en 147 cm². ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?**

Llamamos x al lado del cuadrado.

$(2x)^2 = x^2 + 147 \rightarrow 3x^2 = 147 \rightarrow x = 7$

El lado del cuadrado mide 7 cm.

50 **Calcula los lados de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm y en el que la base mide 2 cm más que la altura.**

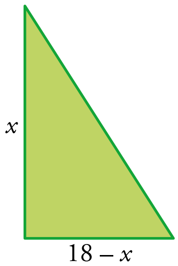


$x^2 + (x + 2)^2 = 10^2 \rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100 \rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-48)}}{2} = \dfrac{-2 \pm 14}{2} \begin{cases} x = 6 \\ x = -8. \text{ No vale.} \end{cases}$

La altura mide 6 cm, y la base, 8 cm.

51 **Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es de 40 cm². Halla las medidas de los catetos de este triángulo.**

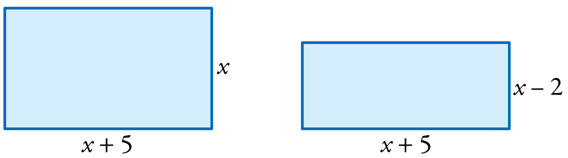


Área: $\dfrac{x(18 - x)}{2} = 40 \rightarrow 18x - x^2 = 80 \rightarrow x^2 - 18x + 80 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{18 \pm \sqrt{324 - 4 \cdot 80}}{2} = \dfrac{18 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 11 \\ x = 7 \end{cases}$

Los catetos miden 7 cm y 11 cm, respectivamente.

52 **La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será de 60 cm². ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?**

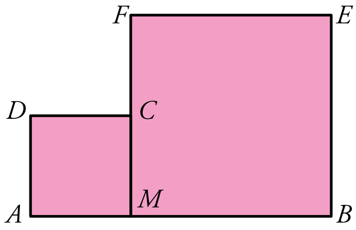


$(x + 5)(x - 2) = 60 \rightarrow x^2 + 3x - 10 = 60 \rightarrow x^2 - 3x - 70 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-70)}}{2} = \dfrac{3 \pm 17}{2} \begin{cases} x = 10 \\ x = -7. \text{ No vale.} \end{cases}$

La altura mide 7 cm, y la base, 12 cm.

53 **Sobre un segmento AB de 10 cm de longitud se construyen dos cuadrados. Expresa la suma de las áreas de los dos cuadrados en función de x ($\overline{AM} = x$).**



a) ¿Cuál debe ser la longitud de AM para que la suma de las áreas sea 52 cm²?

b) ¿Puede ser la suma de las áreas igual a 40 cm²?

Área del cuadrado pequeño = x^2

Área del cuadrado grande = $(10 - x)^2$

Área de las áreas = $x^2 + (10 - x)^2$

a) $x^2 + (10 - x)^2 = 52 \rightarrow x^2 + 100 - x^2 - 20x = 52 \rightarrow 20x^2 - 20x + 48 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

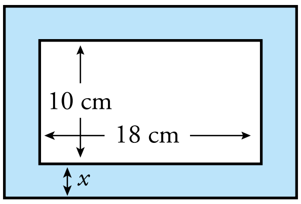
Como x es el lado pequeño, $\overline{AM} = 4$ cm.

b) $x^2 + (10 - x)^2 = 40 \rightarrow 2x^2 - 20x + 60 = 0 \rightarrow x^2 - 10x + 30 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 120}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-20}}{2} \text{ Sin solución.}$$

La suma de las área no puede ser igual a 40 cm².

54 **¿Cuánto debe valer x para que el área de la parte coloreada de la figura sea 204 cm²?**



$(10 + 2x)(18 + 2x) - 18 \cdot 10 = 204 \rightarrow 180 + 20x + 36x + 4x^2 - 180 - 204 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 + 56x - 204 = 0 \rightarrow x^2 + 14x - 51 = 0$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 204}}{2} = \frac{-14 \pm 20}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -17 \text{ No vale} \end{cases}$$

Solución: $x = 3$ cm.

55 Un padre reparte una cantidad de dinero entre sus tres hijos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 12, 18 y 20 años. Al menor le correspondieron 96 € menos que al mayor. Calcula lo que dio a cada uno y la cantidad repartida.

Llamamos x a la cantidad repartida.

$12 + 18 + 20 = 50 \rightarrow$ Al mayor le corresponden $\frac{20}{50}x$.

$\rightarrow$ Al menor le corresponden $\frac{12}{50}x$.

Por tanto:

$$\frac{20}{50}x = \frac{12}{50}x + 96 \rightarrow 20x = 12x + 4800 \rightarrow x = 600$$

Repartió 600 €. Al hijo mayor le dio 240 €; al mediano, $\frac{18}{50} \cdot 600 = 216$ €; y al menor, 144 €.

56 En un laboratorio de investigación sobre vacunas necesitan mezclar dos sustancias de 30 % y 10 % de concentración, respectivamente. ¿Cuántos litros de cada tipo deben tomar para obtener 20 litros con una concentración del 15 %?

Llamamos x a la cantidad de la 1.ª sustancia (al 30 %) que usamos en la mezcla. Por tanto, de la 2.ª sustancia usamos $(20 - x)$ L en la mezcla.

$$0{,}3x + 0{,}1(20 - x) = 0{,}15 \cdot 20 \rightarrow 0{,}3x + 2 - 0{,}1x = 3 \rightarrow 0{,}2x = 1 \rightarrow x = 5$$

Debemos tomar 5 L al 30 % y 15 L al 10 %.

57 ¿Cuántos términos de la progresión 3, 7, 11, … se deben tomar para que la suma de todos ellos sea 820?

3, 7, 11, … $\rightarrow$ Progresión airtmética con $a_1 = 3$ y $d = 4$.

Término general: $a_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow \frac{3 + (4n - 1)}{2} \cdot n = 820 \rightarrow (4n + 2)n = 1640 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4n^2 + 2n - 1640 = 0 \rightarrow 2n^2 + n - 820 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 6560}}{4} = \frac{-1 \pm 81}{4} \begin{cases} n_1 = 20 \\ n_2 = -20{,}5 \text{ No vale.} \end{cases}$$

Hay que coger 20 términos.

58 La diferencia entre invertir una cantidad al 4 % anual durante 3 años o colocarla al 6 % anual durante un año y medio, con periodos de capitalización mensuales, es de 618 €. Calcula dicha cantidad.

Mira la página 53 de la unidad 3.

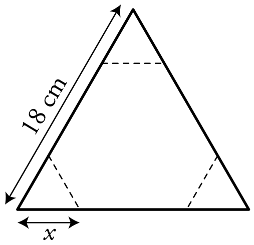
- Llamamos x a la cantidad invertida.
- Si invertimos al 4 % anual durante 3 años, obtenemos $x \cdot (1{,}04)^3$.
- Si invertimos al 6 % anual durante 1,5 años = 18 meses con periodos de capitalización mensual, obtenemos $x \cdot (1 + 0{,}005)^{18}$, pues un 6 % anual equivale a un 6 : 12 = 0,5 % mensual.

Por tanto:

$$x \cdot (1{,}04)^3 - x \cdot (1{,}005)^{18} = 618 \rightarrow x = \frac{618}{1{,}04^3 - 1{,}005^{18}} \rightarrow x \approx 19\,977{,}33 \text{ €}.$$

La cantidad invertida es 19 977,33 €.

59 **En un triángulo equilátero de lado 18 cm se corta en cada esquina un pequeño triángulo equilátero de lado x cm, de forma que la suma de los perímetros de los tres triángulos cortados es igual al perímetro del hexágono que queda. ¿Cuál es el valor de x?**



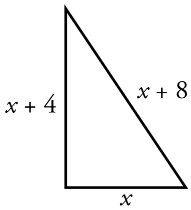
$\rightarrow$ Suma de los tres perímetros: $9x$

Perímetro del hexágono: $3(18 - 2x) + 3x$

Por tanto: $9x = 3(18 - 2x) + 3x \rightarrow 6x = 54 - 6x \rightarrow x = \dfrac{54}{12} = 4{,}5$

Solución: $x = 4{,}5$ cm.

60 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 4 cm más que el cateto mayor, y este, 4 cm más que el cateto menor. Calcula la medida de los tres lados.**



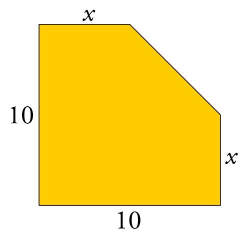
$\rightarrow (x + 8)^2 = (x + 4)^2 + x^2 \rightarrow x^2 + 64 + 16x = x^2 + 16 + 8x + x^2 \rightarrow$

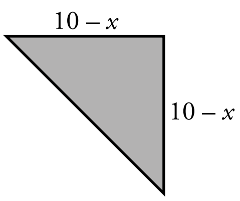
$\rightarrow 64 + 16x = 16 + 8x + x^2 \rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 192}}{2} = \frac{8 \pm 16}{2} \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = -4 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

Los lados miden 12 cm, 16 cm y 20 cm.

61 **¿Cuánto debe valer x para que el área de esta figura sea 82 cm^2?**





El área del triángulo tiene que ser 18 cm^2.

Por tanto:

$$\frac{(10 - x)^2}{2} = 18 \rightarrow 100 - 20x + x^2 = 36 \rightarrow x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 256}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2} \begin{cases} x_1 = 16 \quad \text{No vale.} \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Solución: $x = 4$ cm.

62 **Dos números naturales suman 85 y al dividir el cuadrado del mayor entre el cuadrado del menor se obtiene 5 de cociente y 475 de resto. Calcúlalos.**

Si llamamos x a un número, el otro será $85 - x$.

$(85 - x)^2 = 5x^2 + 475 \rightarrow 7\,225 - 170x + x^2 = 5x^2 + 475 \rightarrow 4x^2 + 170x - 6\,750 = 0$

$$x = \frac{-170 \pm \sqrt{170^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6\,750)}}{2 \cdot 4} = \frac{-170 \pm \sqrt{136\,900}}{8} = \frac{-170 \pm 370}{8} \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = -67,5 \end{cases}$$

La solución $x = -67{,}5$ no es válida, pues no es un número natural.

Los números son 25 y 60.

63 **Si a un número de dos cifras le restamos el que resulta de invertir el orden de estas, el resultado es 18. ¿Cuál es el número si la cifra de las unidades es 2?**

Supongamos que el número es ab, y como $b = 2$:

$b + 10a - a - 10b = 18 \rightarrow 9a - 9b = 18 \rightarrow 9a - 18 = 18 \rightarrow 9a = 36 \rightarrow a = 4$

El número es el 42.

64 **Un depósito de agua tiene un grifo de abastecimiento y un desagüe. El grifo llena el depósito en 9 horas. Si además se abre el desagüe, el depósito tarda 36 horas en llenarse. Averigua cuánto tarda el desagüe en vaciar el depósito lleno, estando cerrado el grifo.**

El grifo llena, en 1 hora, $\frac{1}{9}$ del depósito.

El desagüe vacía, en 1 hora, $\frac{1}{x}$ del depósito.

Abriendo los dos, llenan en 1 hora $\frac{1}{36}$ del depósito.

Por tanto:

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{x} = \frac{1}{36} \rightarrow \frac{x - 9}{9x} = \frac{1}{36} \rightarrow 36(x - 9) = 9x \rightarrow 36x - 324 = 9x \rightarrow$$

$$\rightarrow 27x = 324 \rightarrow x = 12 \text{ h}$$

Tarda en vacias el depósito lleno 12 h.

65 **Un grifo tarda el doble que otro en llenar un depósito. Abriendo los dos a la vez, tardan 8 horas. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos en llenarlo?**

Un grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{x}$ del depósito, y el otro grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{2x}$ del depósito.

Los dos juntos, en 1 hora, llenan $\frac{1}{8}$.

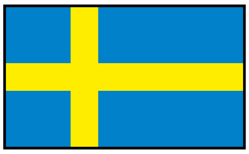
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{3}{2x} = \frac{1}{8} \rightarrow 2x = 24 \rightarrow x = 12 \text{ h}$$

Uno de los grifos tarda 12 h, y el otro, 24 horas en llenar el depósito.

Resuelve: un poco más difícil

66 **La bandera de Suecia es un rectángulo azul con una cruz amarilla como la de la figura. El área de la cruz ocupa los 3/10 de la superficie del rectángulo, y sus dos brazos tienen la misma anchura, *x*.**

Calcula *x* si las dimensiones del rectángulo son 16 dm × 10 dm.



$\frac{3}{10}(16 \cdot 10) = 48$

$16x + 10x - x^2 = 48 \rightarrow x^2 - 26x + 48 = 0$

$x = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 192}}{2} = \frac{26 \pm 22}{2}$ $\begin{cases} x_1 = 24 & \text{No vale.} \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Solución: $x = 2$ dm.

Página 127

67 **Un pintor tarda 3 h más que otro en pintar una pared. Trabajando juntos, pintarían la misma pared en 2 h. ¿Cuánto tardaría cada uno en solitario?**

Un pintor tarde x h en pintar una pared. En 1 hora pinta $\frac{1}{x}$ de pared.

El otro tarde $(x + 3)$ h. En 1 hora pinta $\frac{1}{x+3}$ de pared.

Trabajando juntos tardan 2 h. En 1 hora pintan $\frac{1}{2}$ de pared.

Por tanto: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \rightarrow 2(x + 3) + 2x = x(x + 3) \rightarrow 2x + 6 + 3x = x^2 + 3x \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - x + 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

Un pintor tardaría 3 h, y el otro, 6 h.

68 **Ana, en su camino diario al colegio, ha comprobado que si va andando a 4 km/h llega 5 minutos tarde, pero si se da prisa y va a 5 km/h llega 10 minutos antes de la hora. ¿Cuál es la distancia al colegio? ¿Llegará puntual si hace la mitad del camino a 4 km/h y la otra mitad a 5 km/h?**

- Llamamos x a la distancia al colegio.

  La diferencia entre 25 a 4 km/h y 5 km/h son 5 + 10 = 15 min = 1/4 h.

  $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{1}{4} \rightarrow x = 5$

  La distancia al colegio son 5 km.

- $\frac{2{,}5}{4} + \frac{2{,}5}{5} = 0{,}625 + 0{,}5 = 1{,}125$ h = 1 h 7 min.

  Si va a 5 km/h tarda 1 h. Así que si va mitad y mitad, llegará 3 min antes.

69 **Luisa y Miguel van a visitar a sus abuelos. Como solo tienen una bicicleta, acuerdan que Miguel la lleve hasta la mitad del camino y la deje allí hasta que Luisa, que sale andando, la recoja. La segunda mitad, Miguel caminará y Luisa irá en bicicleta. De esta forma tardan una hora en llegar a su destino. El que camina va a 4 km/h y el que va en bicicleta, a 12 km/h. ¿Cuál es la distancia que han recorrido? ¿Cuánto tiempo estuvo parada la bicicleta?**

t: tiempo que emplea Miguel en recorrer la mitad del camino en bicicleta.

$12t = 4(1 - t) \rightarrow 16t = 4 \rightarrow t = \frac{1}{4}$ h

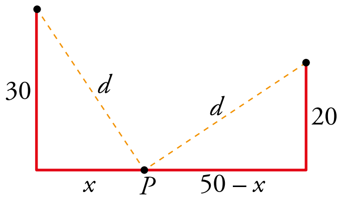
Andando tarda $\frac{3}{4}$ h.

Distancia: $12 \cdot \frac{1}{4} + 4\frac{3}{4} = 3 + 3 = 6$ km

Tiempo de bicicleta parada: La deja cuando ha pasado $\frac{1}{4}$ h y el otro la recoge a los $\frac{3}{4}$ h. Está parada $\frac{1}{2}$ hora.

70 **En las dos orillas de un río hay dos palmeras. La más alta mide 30 codos; la otra, 20 codos, y la distancia entre ambas es de 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. Al descubrir los dos pájaros un pez en la superficie del río, se lanzan rápidamente, alcanzando al pez al mismo tiempo.**

¿A qué distancia del tronco de la palmera más alta apareció el pez?



$$\left.\begin{array}{l} d^2 = 20^2 + (50 - x)^2 \\ d^2 = 30^2 + x^2 \end{array}\right\}$$ La distancia a P es la misma desde las dos palmeras.

$20^2 + (50 - x)^2 = 30^2 + x^2 \to 400 + 2\,500 - 100x + x^2 = 900 + x^2 \to 2\,000 = 100x \to$

$\to x = 20$ codos

A 20 codos de la palmera más alta.

71 **Tenemos tres tetrabriks con forma de prisma rectangular cuyas bases miden 4 cm × 6 cm, 3 cm × 6 cm y 2 cm × 6 cm, y cuyas alturas son, respectivamente, *a*, *b* y *c*. El primero tiene doble capacidad que el segundo; y el segundo, doble que el tercero. Si las alturas suman 39 cm, ¿cuánto medirá cada una?**

Llamamos V_1, V_2 y V_3 a los volúmenes de cada tetrabrik.

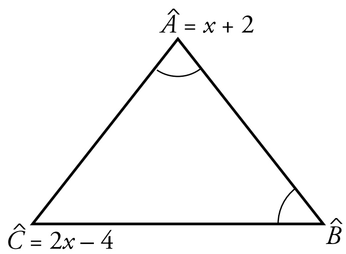
$$\left.\begin{array}{l} V_1 = 4 \cdot 6 \cdot a = 24a \\ V_2 = 3 \cdot 6 \cdot b = 18b \end{array}\right\} \to 24a = 2 \cdot 18b \to a = \frac{36b}{24} \to a = 1{,}5b$$

$$\left.\begin{array}{l} V_2 = 3 \cdot 6 \cdot b = 18b \\ V_3 = 2 \cdot 6 \cdot c = 12c \end{array}\right\} \to 18b = 2 \cdot 12c \to c = \frac{18b}{24} \to c = 0{,}75b$$

$a + b + c = 39 \to 1{,}5b + b + 0{,}75b = 39 \to 3{,}25b = 39 \to b = 12$

$a = 1{,}5 \cdot 12 = 18$ cm; $b = 12$ cm; $c = 0{,}75 \cdot 12 = 9$ cm

72 **En un triángulo *ABC*, el ángulo $\widehat{A}$ mide $x + 2$ grados y el ángulo $\widehat{C}$ mide $2x - 4$ grados. Calcula el valor de x para que el triángulo sea isósceles. María dice que el problema tiene tres soluciones y Pablo dice que solo tiene dos. ¿Quién tiene razón?**



$\to \widehat{B} = 180 - x - 2 - 2x + 4 = 182 - 3x$

- Si $\widehat{A} = \widehat{C} \to x + 2 = 2x - 4 \to x = 6°$

  Entonces: $\widehat{A} = 8°$; $\widehat{B} = 164°$; $\widehat{C} = 8°$
- Si $\widehat{B} = \widehat{C} \to 182 - 3x = 2x - 4 \to x = 37{,}2°$

  Entonces: $\widehat{A} = 39{,}2°$; $\widehat{B} = 70{,}4°$; $\widehat{C} = 70{,}4°$
- Si $\widehat{A} = \widehat{B} \to x + 2 = 182 - 3x \to x = 45°$

  Entonces: $\widehat{A} = 47°$; $\widehat{B} = 47°$; $\widehat{C} = 86°$

Hay tres soluciones. Tiene razón María.

73 **Carmen hace cuentas sobre las compras que ha hecho y observa que el abrigo le ha costado el triple que el bolso; el bolso, 5 € menos que la camisa; la camisa, 6 € más que los deportivos; los deportivos, el doble que el estuche; el estuche, la mitad que el pantalón, y este, 120 € menos que la suma de todos los demás artículos. Calcula el precio de cada compra y el total.**

$A = 3B;\ \ B = C - 5;\ \ C = D + 6;\ \ D = 2E;\ \ E = \dfrac{P}{2}$

$P = A + B + C + D + E - 120$

$A = 3(C - 5) = 3(D + 6 - 5) = 3(D + 1) = 3(2E + 1) = 3(P + 1) = 3P + 3$

$B = D + 6 - 5 = D + 1 = 2E + 1 = P + 1$

$C = 2E + 6 = P + 6$

$D = P$

$P = 3P + 3 + P + 1 + P + 6 + P + \dfrac{P}{2} - 120 \ \rightarrow\ 5P + \dfrac{P}{2} = 110 \ \rightarrow\ \dfrac{11P}{2} = 110 \ \rightarrow\ P = 20$

$P = 20$ € precio pantalón.

E = 10 € estuche; D = 20 € deportivos; C = 26 € camisa; $B = 21$ € bolso; $A = 63$ € abrigo

Gasto total: 140 €

Reflexiona

74 **¿Verdadero o falso? Razona las respuestas.**

a) La ecuación $5x = 0$ no tiene solución.

b) Si multiplicamos por –3 los dos miembros de una ecuación, su solución no varía.

c) La ecuación $0x = 4$ tiene infinitas soluciones.

d) El discriminante de una ecuación de segundo grado es $-b^2 + 4ac$.

e) La ecuación $ax^2 + c = 0$ no tiene solución si $c > 0$.

f) Una solución de $2^x + 2^{x-1} - 2^{x+1} = -4$ es –2.

g) Si $b^2 - 4ac = -1$, la ecuación de segundo grado no tiene solución.

a) Falso. $x = 0$ es solución de la ecuación.

b) Verdadero. Se obtiene una ecuación equivalente, con las mismas soluciones.

c) Falso. No tiene soluciones. Ningún número multiplicado por 0 da 4.

d) Falso. Es $b^2 - 4ac$.

e) Falso. Si $a < 0$ sí tiene solución.

f) Falso. $2^{-2} + 2^{-3} - 2^{-1} = -2^{-3} \neq 4$.

g) Verdadero. No existen las raíces cuadradas de números negativos.

75 **En la ecuación $mx - m = x + 3m$:**

a) ¿Cuánto debe valer m para que la solución sea $x = 5$? ¿Y para que no tenga solución?

b) ¿Hay algún valor de m para el que tenga infinitas soluciones?

a) $mx - m = x + 3m$

- Si $x = 5$ es solución $\rightarrow$ $5m - m = 5 + 3m \rightarrow 4m = 5 + 3m \rightarrow m = 5$
- $mx - x = x + 3m \rightarrow x(m - 1) = 3m + m \rightarrow x = \dfrac{3m + m}{m - 1}$

  No tiene solución si $m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$

b) Para que tenga infinitas soluciones, tenemos que buscar un valor de m que haga 0 estas dos expresiones a la vez:

$$\left.\begin{array}{l} 3m + m = 0 \\ m - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{No existe ese valor de } m.$$

76 **Una igualdad de dos expresiones algebraicas es una identidad si:**

a) Se verifica para cualquier valor de las letras.

b) No tiene solución.

c) Se verifica para algunos valores de las letras.

Elige la respuesta correcta y pon ejemplos.

La respuesta correcta es a).

Por ejemplo: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 2$

$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

78 **Inventa ecuaciones de segundo grado con:**

a) Dos soluciones: $x = 3$ y $x = -\dfrac{2}{3}$

b) Dos soluciones: $x = 0$ y $x = -5$

c) Una solución: $x = 4$

d) Ninguna solución.

a) $(x - 3)\left(x + \dfrac{2}{3}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \dfrac{7}{3}x - 2 = 0 \rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$

b) $x(x + 5) = 0 \rightarrow x^2 + 5x = 0$

c) $(x - 4)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$

d) $x^2 + 100 = 0$

79 **En la ecuación $x^2 - 14x + m = 0$:**

a) ¿Qué valor debe tomar m para que tenga dos soluciones iguales?

b) ¿Y para que sean distintas?

c) ¿Y para que no tenga solución?

a) $x^2 - 14x + m = 0$

$\Delta = 142 - 4 \cdot m = 0 \rightarrow 196 - 4m = 0 \rightarrow m = 49$

b) Para que sean distintas, $m \neq 49$ y $m < 49$.

c) Para que no tenga solución, $196 - 4m < 0 \rightarrow 196 < 4m \rightarrow m > 49$.

Página 128

Infórmate

Sabías que…

Ecuación viene del término latino *aequatio*, que, a su vez, se deriva de *aequare* (igualar) o *aequus* (igual).

A la derecha tienes otras palabras del castellano con la misma raíz.

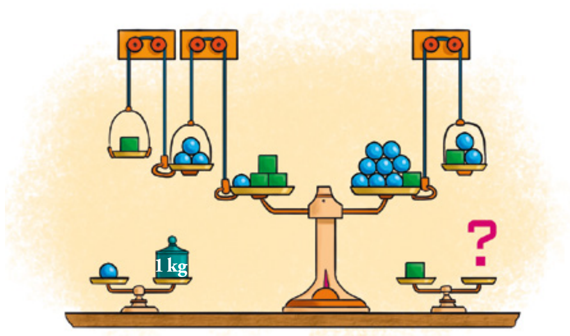
- **Busca otras cuatro palabras que tengan la misma raíz que ecuación.**

  Por ejemplo: equitativo, ecuánime, equilibrio y equinocio.

Utiliza tu ingenio

En perfecto equilibrio

- **Si cada bola pesa un kilo, ¿cuánto pesa cada caja?**



Las poleas sirven para restar peso. Teniendo esto en cuenta, las balanzas y los juegos de poleas dan lugar a la siguiente ecuación (llamamos x al peso de la caja):

$$3x + 1 - (3 - x) = 8 + x - (x + 2)$$

Su solución es $x = 2$. La caja pesa 2 kilogramos.

Usa la equis

- **Completa esta tabla de forma que sumando los números de dos casillas consecutivas obtengas el número de la siguiente:**

5						81

5	x	$5+x$	$5+2x$	$10+3x$	$15+5x$	$25+8x=81$

La solución de la ecuación es $x = 7$. Por tanto, la tabla queda así:

5	7	12	19	31	50	81
1	2	3	4	5	6	7

Ingéniatelas como puedas…

- **… para buscar una solución de esta ecuación:**

$$7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}}=8$$

$x = 144$

Interpreta, describe, exprésate

- **Escribe un número cualquiera de tres cifras, *abc*, e inviértelo, *cba*.**

Resta al mayor el menor y suma las cifras de la diferencia obtenida.

¡Esta suma es siempre 18!

a) Comprueba, con ejemplos, que siempre se cumple la afirmación anterior. ¿Sabrías justificar por qué ocurre?

b) Analiza y explica el proceso que se expone a continuación.

Sea *abc* un número de tres cifras. Supongamos que $a > c$.

PASO 1

	a	b	c
$-$	c	b	a
			$c-a<0$

PASO 2

	a	$b-1$	$c+10$
$-$	c	b	a
			$10+c-a$

PASO 3

	$a-1$	$10+b-1$	$c+10$
$-$	c	b	a
	$a-1-c$	9	$10+c-a$

Sumamos las cifras de la diferencia y…

$824 - 428 = 396$, $3+9+6=18$; $351-153=198$, $1+9+8=18$

Entrénate resolviendo otros problemas

- **Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:**

  — Si los envaso por docenas, me sobran 5.

  — Si tuviera uno más, podría envasarlos, exactamente, en cajas de 10.

  — Casi he recogido 100 huevos.

  ¿Cuántos huevos recogió el granjero?

Considerando los puntos tercero y segundo, puede tener 79 u 89 ó 99.

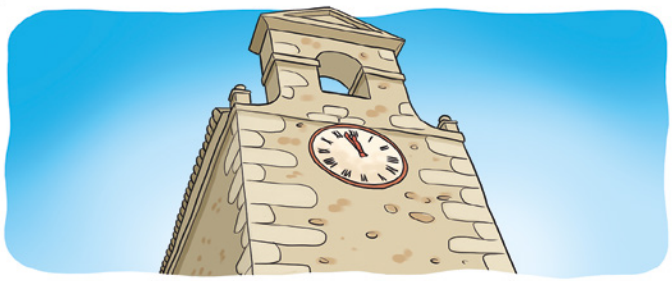
Eliminamos 5 huevos de cada uno de estos grupos (por el punto primero):

74 84 94

La única cantidad que resulta ser múltiplo de 12 es 84.

Por tanto, el granjero recogió 89 huevos.

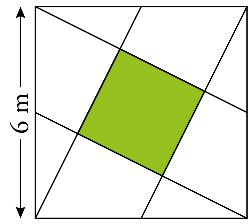
- **El reloj de una torre tarda 15 segundos en dar las seis. ¿Cuánto tardará en dar las doce?**

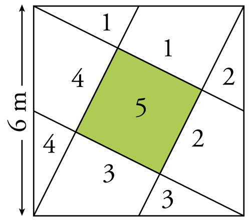


Entre la primera y la sexta campanadas hay 5 intervalos de tiempo. Los 15 segundos se reparten entre 5 y, así, se obtienen 3 segundos entre campanada y campanada.

Por lo tanto, para dar las 12 (11 intervalos de tiempo) el reloj tarda $11 \cdot 3 = 33$ segundos.

• **Calcula la superficie del cuadrado verde.**





Vemos claramente que el cuadrado grande está formado por cinco cuadrados iguales, uno de los cuales es el verde.

La superficie del cuadrado grande es $6^2 = 36\ m^2$.

La superficie del cuadrado verde será $\frac{36}{5} = 7{,}2\ m^2$.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones y explica el proceso seguido:**

a) $(x + 13)^2 = 25$ **b)** $\sqrt{x^2 + 15} = 8$

a) La suma que hay dentro del paréntesis debe ser 5, porque es el número que elevado al cuadrado da 25, por lo que $x = -8$.

b) La suma que hay dentro de la raíz debe dar 64, cuya raíz cuadrada es 8. Por ello, x^2 debe ser 49, y el número que elevado al cuadrado da 49 es 7, por lo que $x = 7$.

2 **Resuelve, por tanteo, con ayuda de la calculadora.**

a) $(x - 14)^3 = x + 10$ **b)** $\sqrt{x^4 - x^2} = 5$

a) $x = 17$ b) $x \approx 2{,}37$

3 **Resuelve.**

a) $\dfrac{3x-2}{5} - \dfrac{3(x+1)}{10} = \dfrac{3-x}{4} - \dfrac{9}{10}$ **b)** $\dfrac{x+1}{2} = x - \dfrac{2x+3}{4}$

c) $\dfrac{5}{2}x^2 - 2x = 0$ **d)** $4x^2 + 25 = 0$

a) $20\left(\dfrac{3x-2}{5} - \dfrac{3x+3}{10}\right) = 20\left(\dfrac{3-x}{4} - \dfrac{9}{10}\right) \rightarrow 12x - 8 - 6x - 6 = 15 - 5x - 18 \rightarrow$

$\rightarrow 12x - 6x + 5x = 15 - 18 + 8 + 6 \rightarrow 11x = 11 \rightarrow x = 1$

b) $4\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 4\left(x - \dfrac{2x+3}{4}\right) \rightarrow 2x + 2 = 4x - 2x - 3 \rightarrow 2x + 2 = 2x - 3 \rightarrow 0x = -5.$

No tiene solución.

c) $2 \cdot \left(\dfrac{5}{2}x^2 - 2x\right) = 0 \rightarrow 5x^2 - 4x = 0 \rightarrow x \cdot (5x - 4) \rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \dfrac{4}{5}$

d) $4x^2 = -25 \rightarrow x = \sqrt{-\dfrac{25}{4}} \rightarrow$ No tiene solución.

4 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $(x+3)(x-3)-25x=9x-298$ **b)** $\dfrac{(x-2)(x-3)}{6}-\dfrac{(x-1)^2}{4}=2-x$

c) $4x^3+4x^2+x=0$

a) $x^2-9-25x=9x-298 \rightarrow x^2-34x+289=0$

$$x=\frac{-(-34)\pm\sqrt{(-34)^2-4\cdot 1\cdot 289}}{2}=\frac{34\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{34}{2}=17 \rightarrow \text{Solución única.}$$

b) $\dfrac{x^2-5x+6}{6}-\dfrac{x^2-2x+1}{4}=2-x \rightarrow 2x^2-10x+12-3x^2+6x-3=24-12x \rightarrow$

$$\rightarrow -x^2+8x-15=0 \rightarrow x^2-8x+15=0 \rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\pm 2}{2}\begin{cases} x=5 \\ x=3\end{cases}$$

c) $4x^3+4x^2+x=0 \rightarrow x(4x^2+4x+1)=0 \rightarrow x(2x+1)^2=0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ 2x+1=0 \rightarrow x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

5 **Mezclamos 6 kg de harina de 1,30 €/kg con otra de 0,70 €/kg para obtener una mezcla de 1,10 €/kg. ¿Qué cantidad tenemos que poner del segundo tipo de harina?**

Llamamos x a la cantidad de harina que desconocemos. La cantidad de la mezcla será $6+x$.

$$1{,}3\cdot 6+0{,}7x=1{,}1\cdot(6+x) \rightarrow 7{,}8+0{,}7x=6{,}6+1{,}1x \rightarrow 0{,}4x=1{,}2 \rightarrow x=\frac{1{,}2}{0{,}4}=3 \text{ kg}$$

Tenemos que poner 3 kg del segundo tipo de harina.

6 **Un tren sale de A hacia B a 135 km/h. Una hora más tarde sale de B hacia A otro tren a 115 km/h. Si la distancia entre A y B es de 485 km, ¿cuánto tardarán en cruzarse?**

Como el primer tren sale una hora antes, cuando sale el segundo tren, el primero ya ha recorrido 135 km, y le quedan por recorrer 350 km. Si comenzamos a contar el tiempo desde ahí, se cruzan cuando se igualan los tiempos:

$$t=\frac{e}{v} \rightarrow t_1=t_2 \rightarrow \frac{x}{135}=\frac{350-x}{115} \rightarrow 115x=-135x+47\,250 \rightarrow 250x=47\,250 \rightarrow$$

$$\rightarrow x=189;\ t=\frac{189}{135}=1{,}4 \text{ h}$$

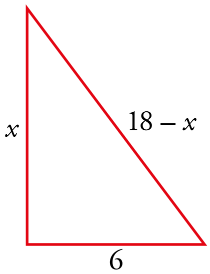
Sumando la hora que le quitamos al principio, los trenes se encuentran 2,4 horas después de que saliera el primer tren.

7 **Tres talleres cobran 540 € por hacer un trabajo. El primero trabajó 12 horas y el segundo, que trabajó 2 horas más que el tercero, recibió 180 €. ¿Cuántas horas y cuánto dinero corresponden a cada uno?**

$\dfrac{180}{540}=\dfrac{1}{3} \rightarrow$ Como sabemos que el segundo hizo un tercio del trabajo, y el tercero trabajó dos horas menos, el primero trabajó dos horas más, por lo que trabajaron 12, 10 y 8 horas respecticamente.

El primero cobró: $\dfrac{12}{30}\cdot 540=216$ € El tercero cobró: $\dfrac{8}{30}\cdot 540=144$ €

8 **Con una cuerda de 24 m de longitud hacemos un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos mide 6 m. ¿Cuánto medirán el otro cateto y la hipotenusa?**



$x^2 + 6^2 = (18 - x)^2 \rightarrow x^2 + 36 = 324 - 36x + x^2 \rightarrow 36x = 288 \rightarrow x = 8$

Catetos: 6 y 8 m; hipotenusa: 10 m.

9 **Para embaldosar un salón de 48 m² de área, se han utilizado 375 baldosas rectangulares en las que un lado mide 8 cm menos que el otro. Halla las dimensiones de las baldosas.**

$x \cdot (x - 0{,}08) \cdot 375 = 48 \rightarrow (x^2 - 0{,}08x) \cdot 375 = 48 \rightarrow 375x^2 - 30x = 48 \rightarrow$

$\rightarrow 375x^2 - 30x - 48 = 0 \rightarrow 125x^2 - 10x - 16 = 0$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 125 \cdot (-16)}}{2 \cdot 125} = \frac{10 \pm \sqrt{8100}}{250} = \frac{10 \pm 90}{250} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{10}{25} = 0{,}4 \text{ m}; \; x_2 = -\frac{8}{25} \text{ m}$$

La única solución válida es 0,4 m (no puede ser un valor negativo).

Las baldosas miden 0,4 m × 0,32 m.