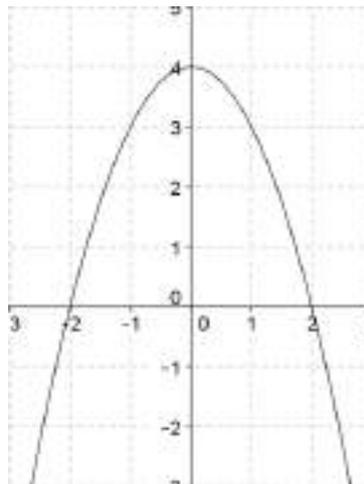


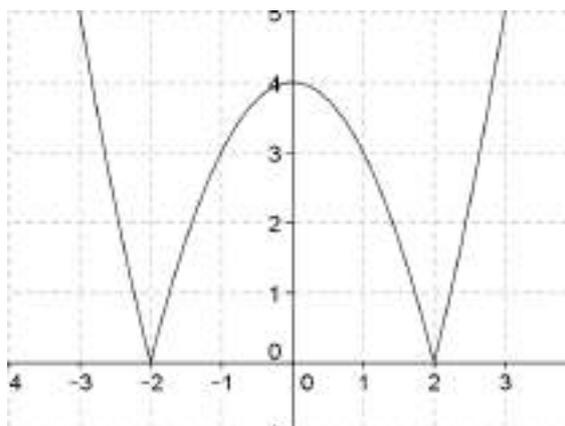
UNIDAD 8: Funciones racionales e irracionales

ACTIVIDADES-PÁG. 164

1. La expresión algebraica correspondiente al problema es $t = \frac{400}{v}$ y la distancia entre las ciudades es de 400 km.
2. a) La gráfica es la simétrica respecto de OX de la función dada.



- b) La gráfica es el valor absoluto de la función dada y se obtiene dejando igual la parte positiva y haciendo la simétrica respecto de OX con la negativa.



3. La asociación es: a) con (III) b) con (I) c) con (II)

ACTIVIDADES-PÁG. 177

1. La suma queda $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2$

2. La solución queda:

1^{er} piso: se necesitan 2 naipes.

2^o piso: se necesitan 5 naipes.

3^{er} piso: se necesitan 8 naipes.

4^o piso: se necesitan 11 naipes.

Luego en el enésimo piso habrá $(3n - 1)$ naipes.

Una torre de n pisos tendrá $\frac{(3n + 1) \cdot n}{2}$ naipes.

Una torre de 15 pisos tendrá $\frac{(3 \cdot 15 + 1) \cdot 15}{2} = 345$ naipes.

Veamos cuántos pisos tendrá un castillo de 3775 naipes:

$$\frac{(3n + 1) \cdot n}{2} = 3775 \quad \Rightarrow \quad 3n^2 + n - 7750 \quad \Rightarrow \quad n = 50 \text{ pisos.}$$

3. Imaginamos que la rueda del padre tarda 6 segundos en dar una vuelta y la del hijo 6 segundos en dar vuelta y media.

En la situación de partida vuelven a estar a cabo de 12'', pero en ningún momento coincidirán las marcas azules sobre el suelo.

4. El cuadrado de cualquier número entero termina en 0, 1, 4, 5, 6 ó 9.

Si un número cuadrado es par, su cuadrado es múltiplo de 4.

Así, $14^2 = 169 = \overset{\cdot}{4}$.

Si el número entero es impar, su cuadrado es múltiplo de $4 + 1$, Así, $13^2 = 169 = \overset{\cdot}{4} + 1$.

Ahora bien, si el número al cuadrado termina en 111, 555, 666 ó 999, éstos no son múltiplos de 4 ni múltiplo de $4 + 1$, luego no pueden ser.

Veamos, pues, los que terminan en 000 ó 444.

Efectivamente, $1444 = 38^2$, luego también se verifican si no son cero las cifras.

5. La demostración queda de la siguiente forma:

El valor de $(2n)!$ es $(2n)! = 2n \cdot (2n - 1) \cdot (2n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Veamos si es cierta la igualdad anterior transformada en otra:

$$2n \cdot (2n - 1) \cdot (2n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)]^2 \cdot \sqrt{2n + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)} > \sqrt{2n + 1} \Rightarrow \frac{2n \cdot (2n - 2) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n - 1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n + 1}$$

Esto es lo que vamos a demostrar por el método de inducción:

Para $n = 1$: $2 > \sqrt{2 \cdot 1 + 1} \Rightarrow 2 > \sqrt{3}$.

Supongamos que se cierto para n : $\frac{2n \cdot (2n - 2) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n - 1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n + 1}$.

Veamos que es cierto para $n + 1$: $\frac{(2n + 2) \cdot 2n \cdot (2n - 2) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n + 1) \cdot (2n - 1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n + 3}$ [I]

$$\frac{(2n + 2) \cdot 2n \cdot (2n - 2) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n + 1) \cdot (2n - 1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{(2n + 2)}{(2n + 1)} \cdot \frac{(2n) \cdot (2n - 2) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n - 1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \frac{2n + 2}{2n + 1} \cdot \sqrt{2n + 1} > \sqrt{2n + 3}$$

Elevando al cuadrado:

$$(2n + 2)^2 \cdot (2n + 1) > (2n + 1) > (2n + 1)^2 \cdot (2n + 3) \Rightarrow 16n + 4 > 14n + 3 \Rightarrow 2n + 1 > 0$$

Esto siempre es cierto ya que n es un número natural.

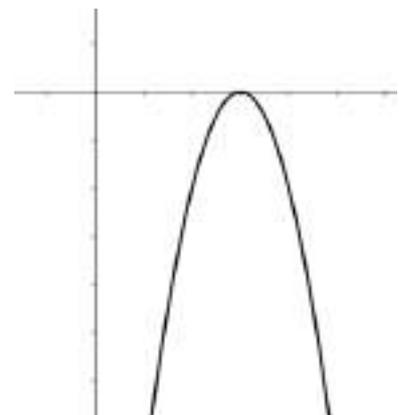
Por tanto, la desigualdad [I] es cierta y el enunciado es cierto.

ACTIVIDADES-PÁG. 179

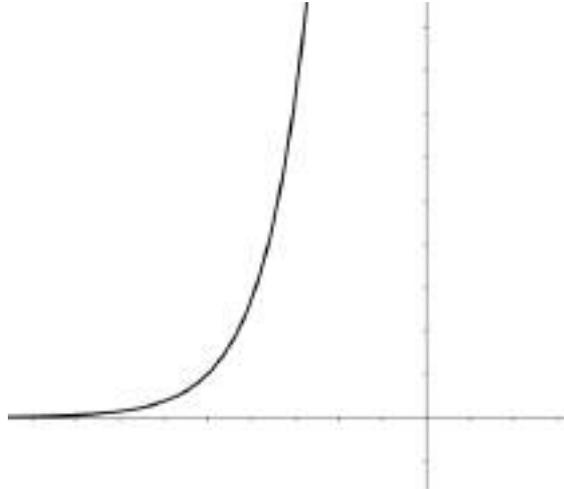
1. a) Introducimos en la pantalla que aparece después de pulsar la tecla la expresión:

$$-X^2 + 12 \cdot X - 36$$

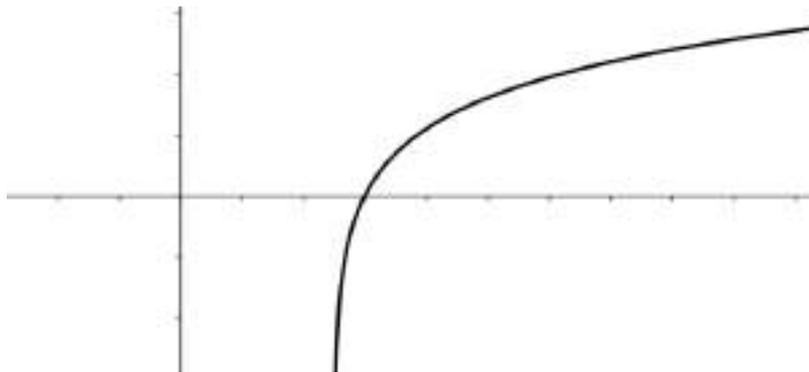
Pulsamos la tecla  para representar la función, y  modificamos las opciones de la pantalla con la tecla. Obtenemos la gráfica del dibujo.



b) Procediendo como en el apartado anterior y tecleando $e^{(X+5)}$, obtenemos:



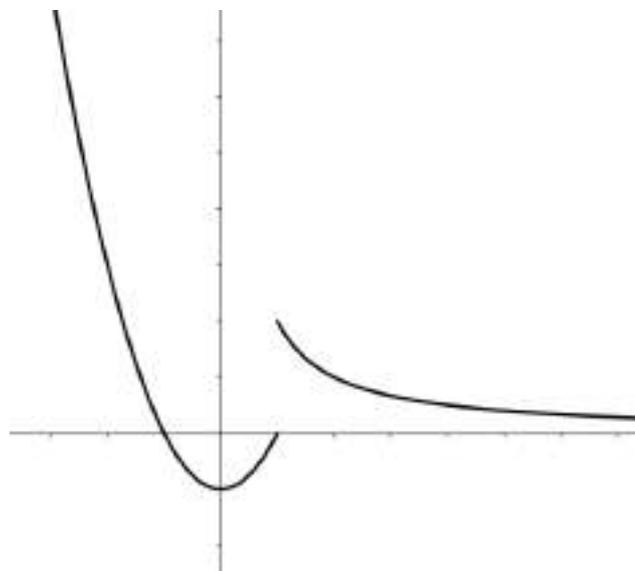
c) Procediendo como en los apartados anteriores y tecleando $\ln(2 \cdot X - 5)$, obtenemos:



2. a) Escribimos en Y_1 la expresión:

$$(X^2 - 1) * (X < 1) + (2/X) * (X \geq 1)$$

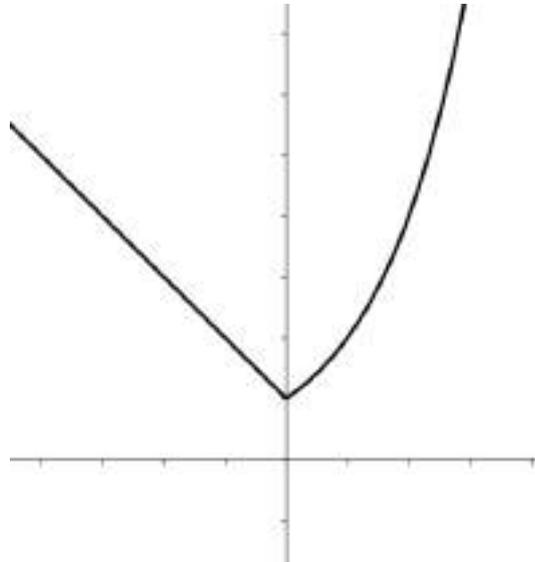
y obtenemos la gráfica:



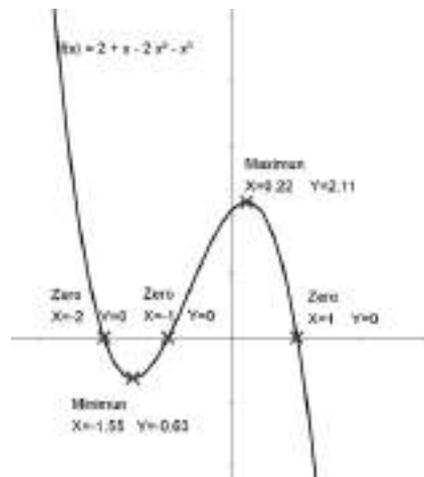
b) Escribimos en $Y_1=$ la expresión:

$$(-X + 1) * (X \leq 0) + (2^X) * (X > 0)$$

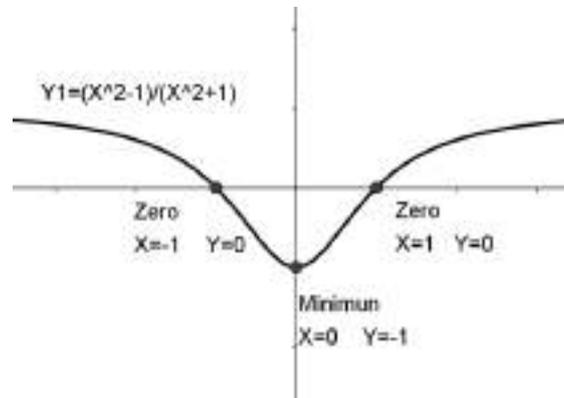
y obtenemos la gráfica:



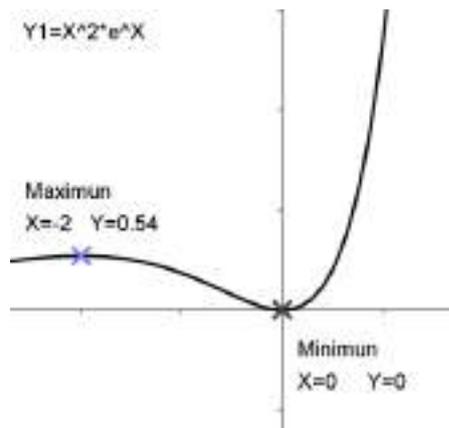
3. a) Representamos la función $f(x) = 2 + x - 2x^2 - x^3$ y con las opciones del menú que ofrece la tecla  obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene tres cortes con OX en los puntos $(-2, 0)$; $(-1, 0)$ y $(1, 0)$; un máximo relativo en $(0,22; 2,11)$ y un mínimo relativo en $(-1,55; -0,63)$.



b) Para la función $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ procedemos como en el apartado anterior y obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene dos cortes con OX en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y un mínimo relativo en $(0, -1)$.

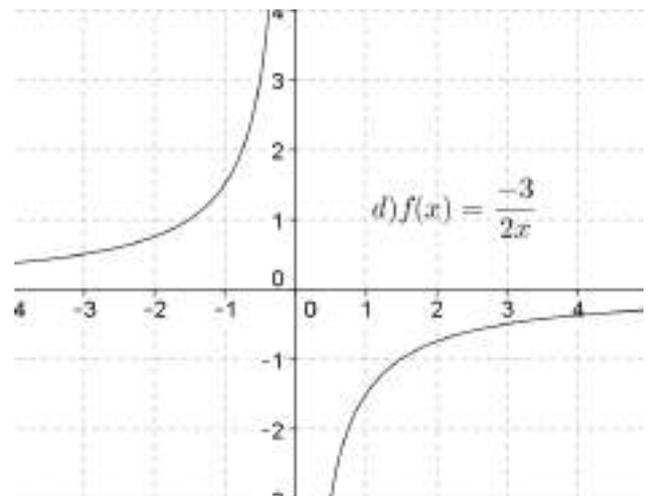
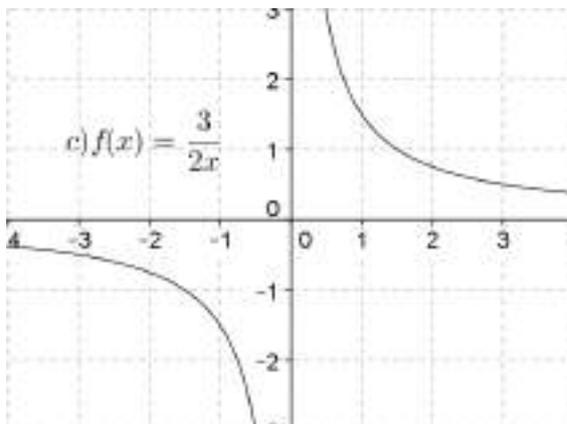
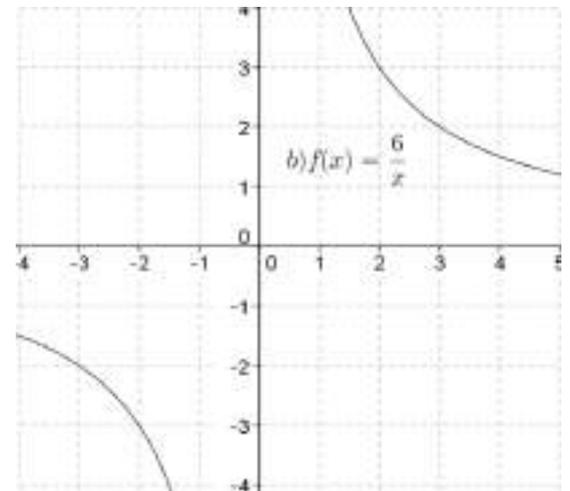
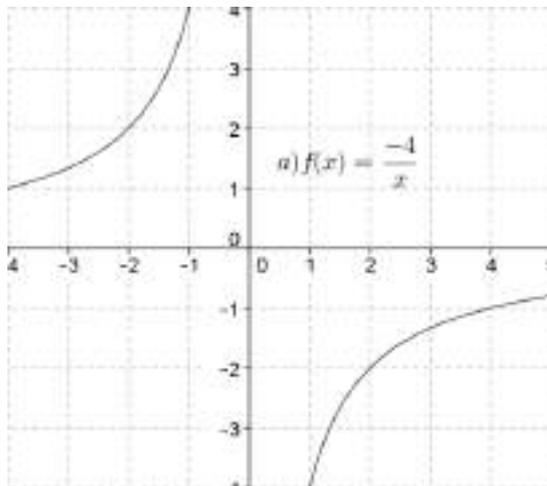


c) Para la función $h(x) = x^2 \cdot e^x$ procedemos como en los apartados anteriores y obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene un corte con OX en el punto $(0, 0)$; un máximo relativo en $(-2; 0,54)$ y un mínimo relativo en $(0, 0)$.



ACTIVIDADES-PÁG. 180

1. Las representaciones quedan:



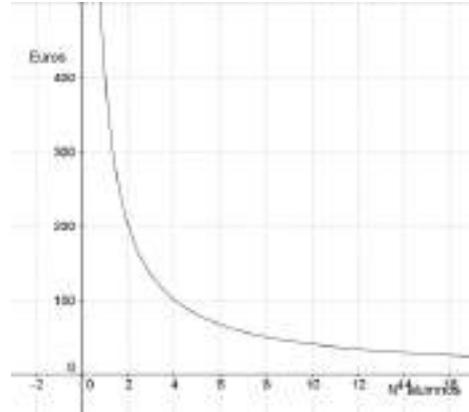
2. En cada uno de los casos son:

a) $y = -\frac{1}{2x}$

b) $y = \frac{5}{2x}$

c) $y = \frac{-5}{2x}$

3. La función es $f(x) = \frac{400}{x}$. Es una función de proporcionalidad inversa. La parte negativa de la gráfica no tiene sentido en el contexto del problema. La gráfica correspondiente viene dada por:

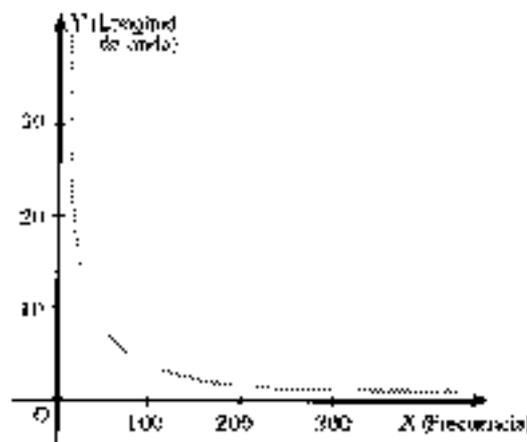


4. La solución de cada apartado es:

a) La tabla completa es:

Frecuencia (ciclos/segundo)	6	60	75	150	500	800	1200
Longitud de onda (metros)	50	5	4	2	0,6	0,375	0,25

b) La gráfica aparece en el dibujo:



c) La fórmula pedida es: $y = \frac{300}{x}$.

5. Llamando n al número de pintores y t al número de días, se obtiene la función $t = \frac{96}{n}$.

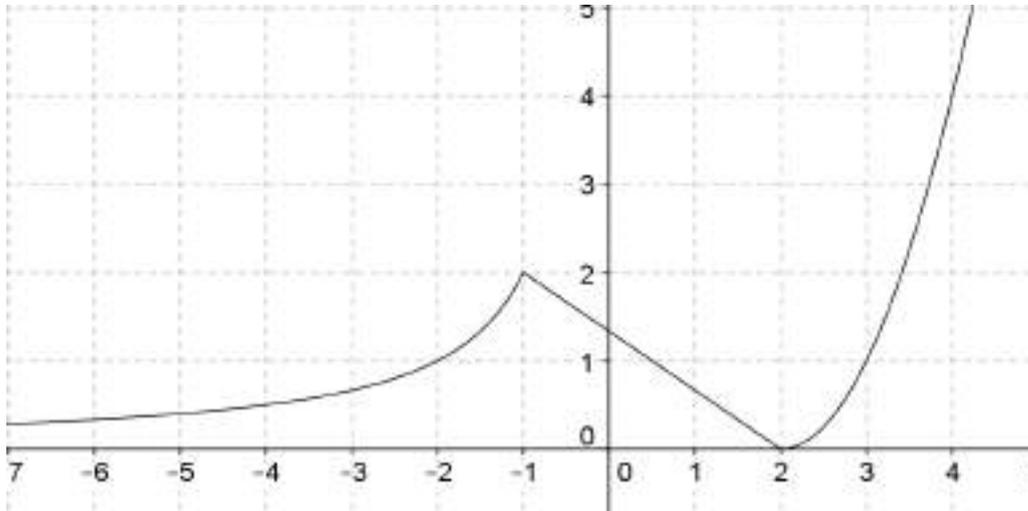
La tabla correspondiente viene dada por:

Nº pintores (n)	4	6	8	10	12
Tiempo (días)	24	16	12	9,6	8

6. Para $x \in (10^4, 10^5)$

ACTIVIDADES-PÁG. 181

7. La gráfica es:

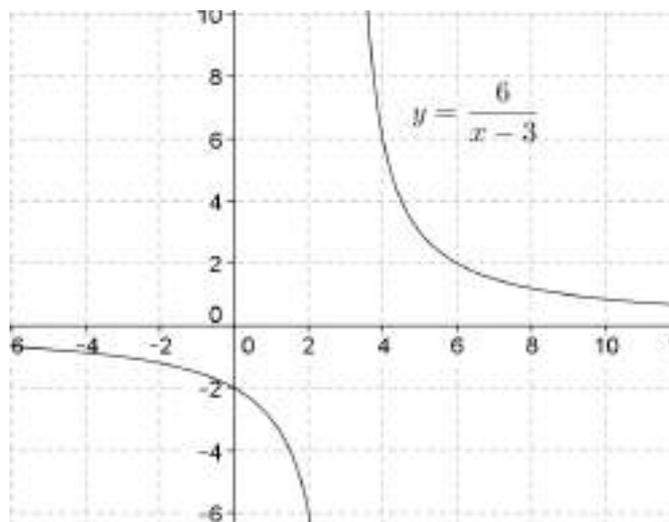


Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = [0, +\infty)$

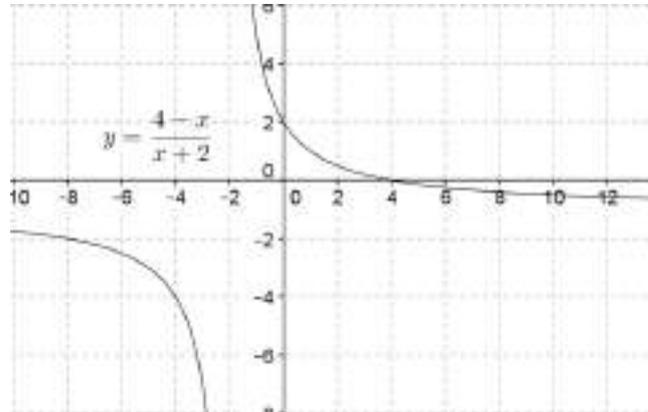
Creciente $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ y decreciente $(-1, 2)$

8. En cada uno de los casos:

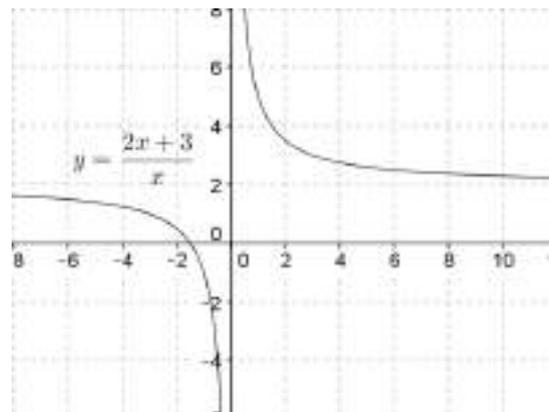
a) La función $y = \frac{6}{x-3}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones $x = 3$ e $y = 0$.



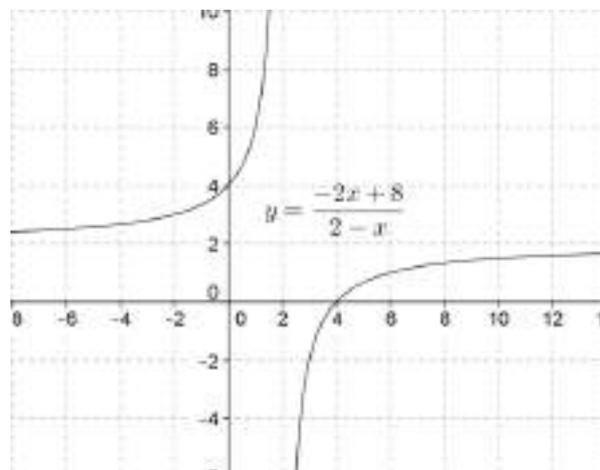
b) La función $y = \frac{4-x}{x+2}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones $x = -2$ e $y = -1$.



c) La función $y = \frac{2x+3}{x}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones: $x = 0$ e $y = 2$.



d) La función $y = \frac{-2x+8}{2-x}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones $x = 2$ e $y = 2$.



9. Los dominios son:

a) $\text{Dom } f = [3, +\infty)$

c) $\text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = [-2, 2]$

10. Las asociaciones son:

a) con $g(x) = -\sqrt{4+x}$

b) con $h(x) = \sqrt[3]{x+1}$

c) con $f(x) = \sqrt{4-x}$

11. Las respuestas son:

a) La gráfica de la función $y = \frac{3}{x} - 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \frac{3}{x}$ según el vector $\vec{v}(0, -2)$

b) La gráfica de la función $y = \frac{3}{x} + 1$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \frac{3}{x}$ según el vector $\vec{v}(0, 1)$

c) La gráfica de la función $y = \frac{3}{x-3} + 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \frac{3}{x}$ según el vector $\vec{v}(3, 2)$

12. Las soluciones son:

a) La gráfica de la función $y = x^2 - 4$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}(0, -4)$

b) La gráfica de la función $y = (x-2)^2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}(2, 0)$

c) La gráfica de la función $y = (x-1)^2 + 4$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}(1, 4)$

d) La gráfica de la función $y = x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}(-3, -4)$

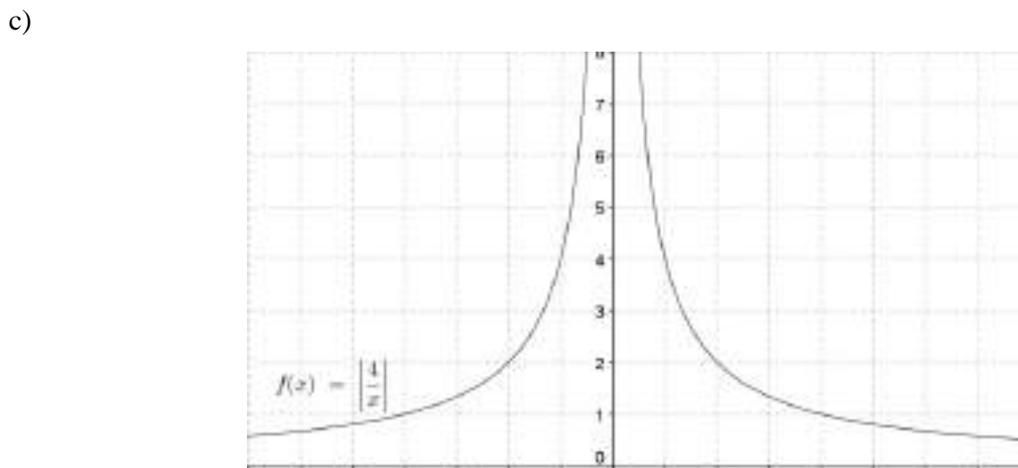
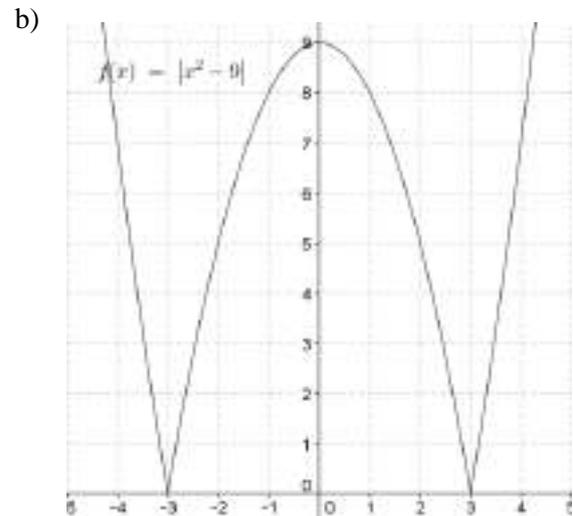
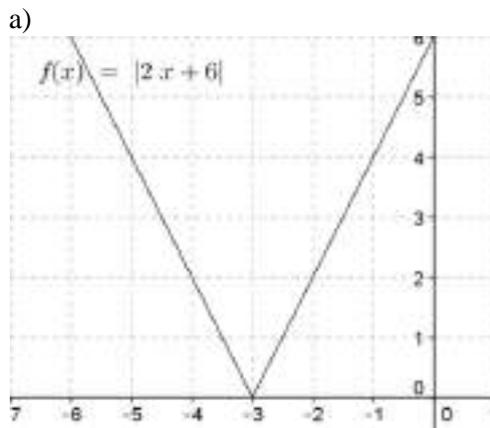
13. Las respuestas son:

a) La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x} + 3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}(0, 3)$

b) La gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x + 2}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}(-2, 0)$

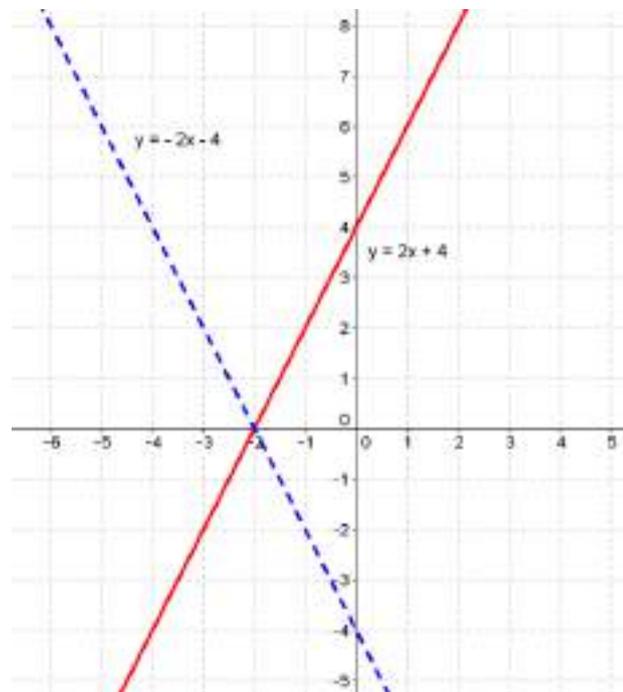
c) La gráfica de la función $h(x) = 4 - \sqrt{x - 1}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}(1, -4)$ y a esta aplicarle una simetría horizontal de eje OX.

14. Las gráficas son:

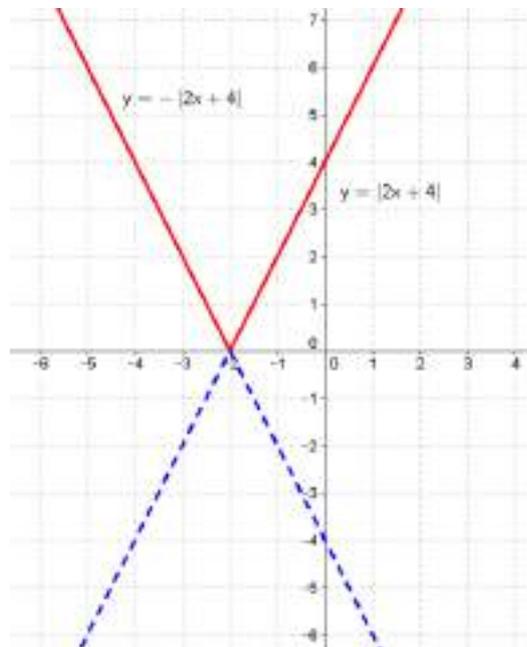


15. Las gráficas de las funciones se han dibujado en trazo continuo de color rojo y las gráficas de sus funciones opuestas están dibujadas en trazo discontinuo de color azul.

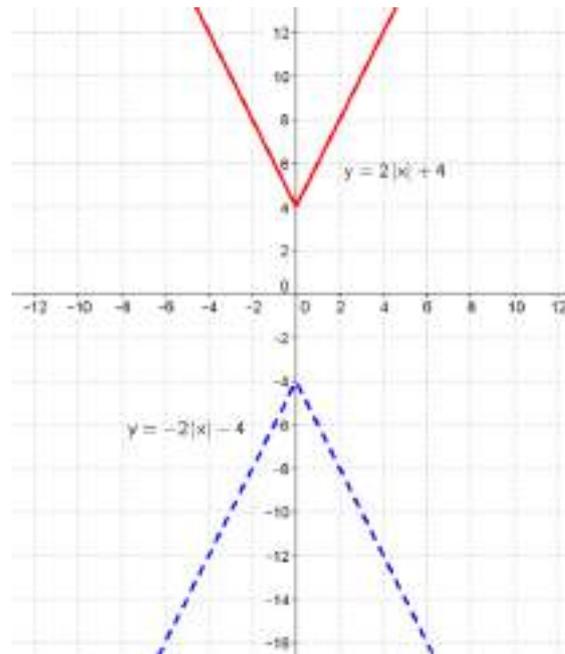
a)



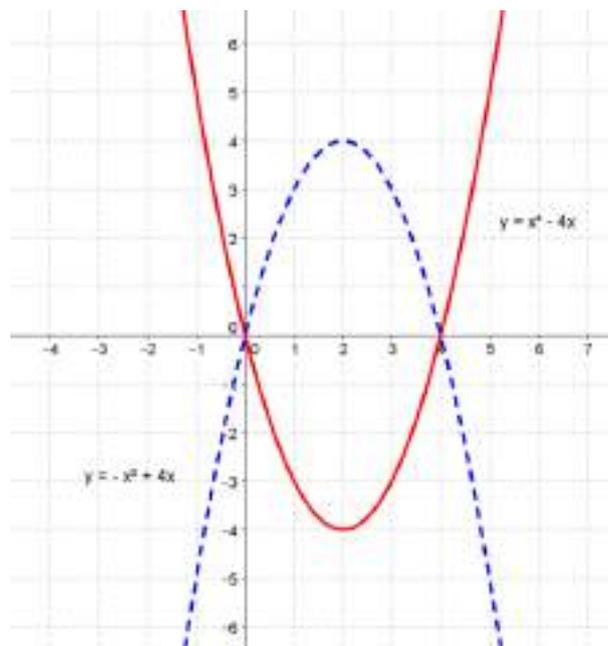
b)



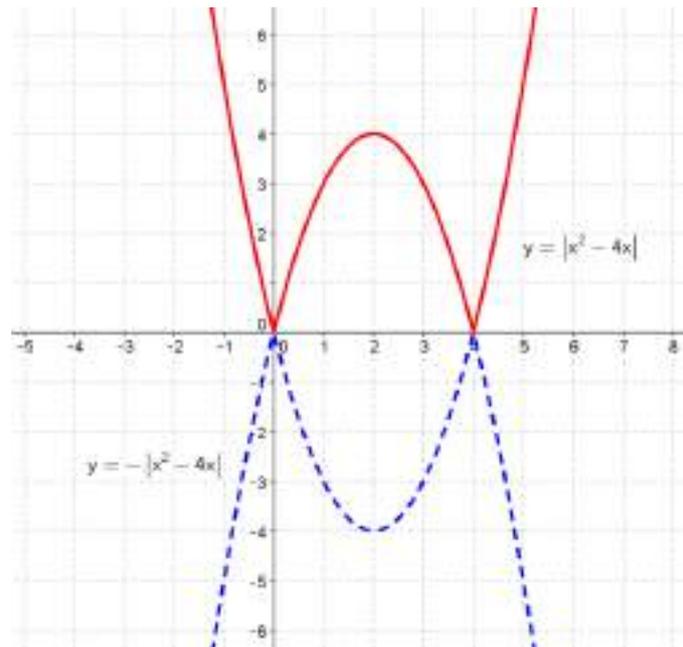
c)



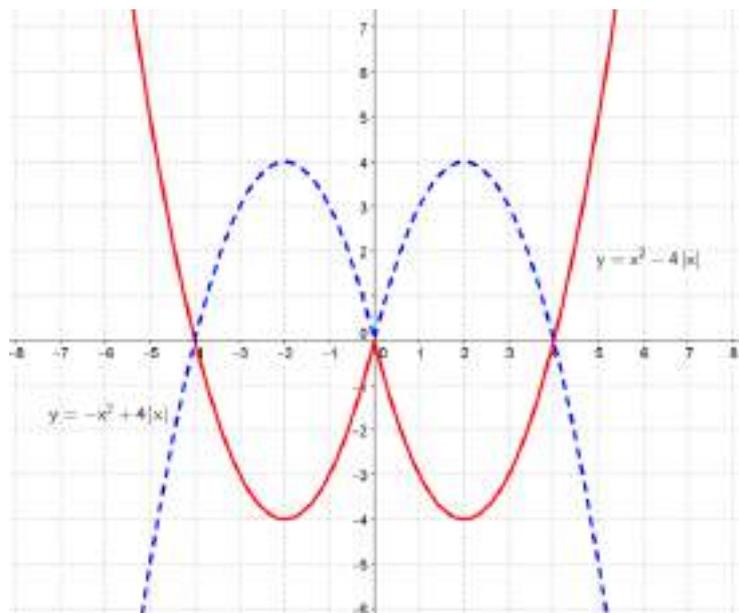
d)



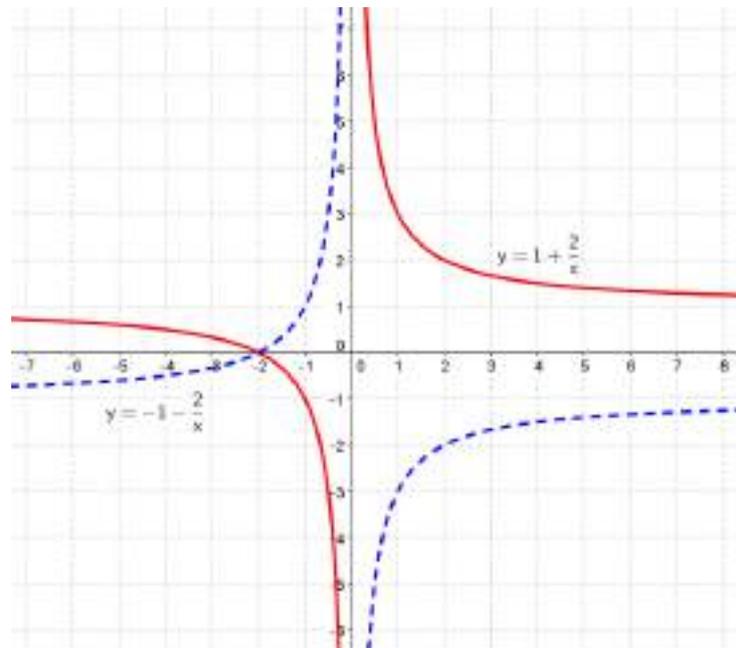
e)



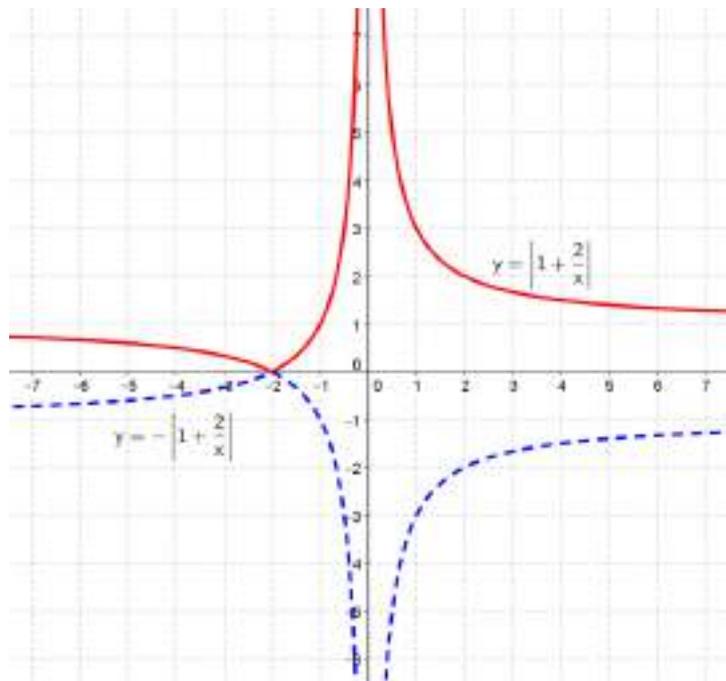
f)



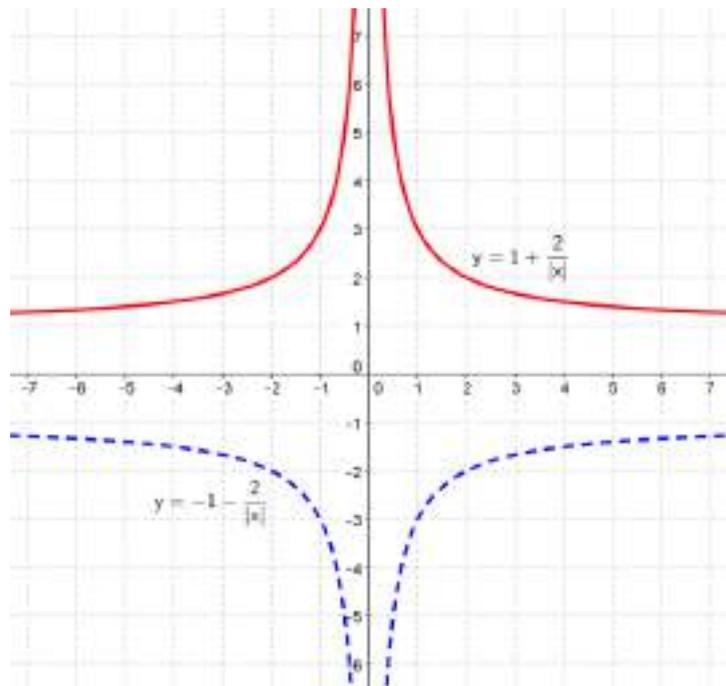
g)



h)



i)



ACTIVIDADES-PÁG. 182

16. a) El tamaño inicial de la población es 40 000 animales.

b) En el año 3 había unos 170 000 animales, aproximadamente, y en el año 6 había unos 184000 animales, es decir ha ido aumentando a razón de unos 4670 animales por año.

c) Si se estabilizaría en 200 000 animales.

17. Las respuestas son:

a) La gráfica de la función $y = x^4 - 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = x^4$ según el vector $\vec{v}(0, -2)$.

b) La gráfica de la función $y = \sqrt{x - 9}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}(9, 0)$.

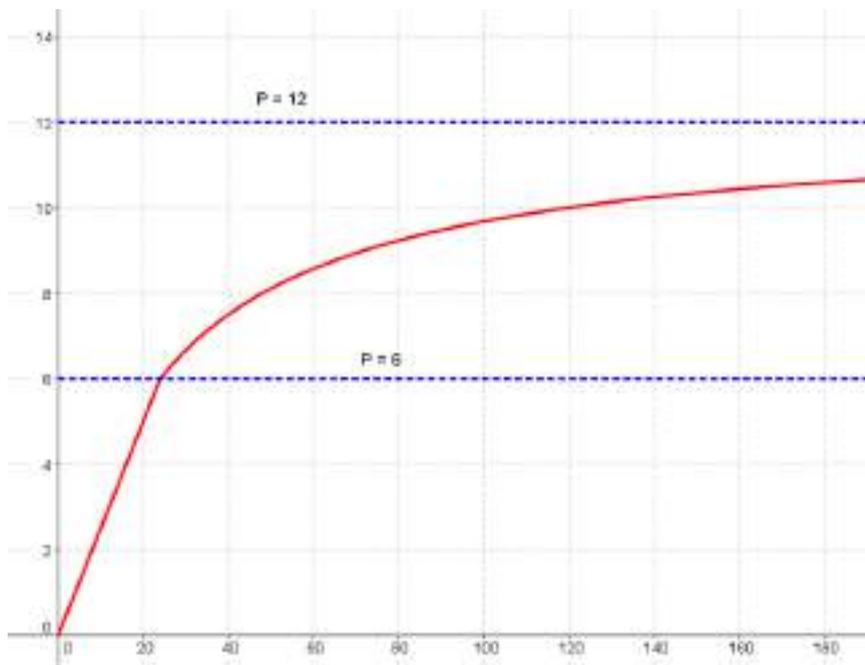
c) La gráfica de la función $y = -x^2 + 8x - 12 = 4 - (x - 4)^2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = x^2$ según el vector $\vec{v}(4, -4)$ y a esta función aplicarle una simetría de eje OX.

d) La gráfica de la función $y = (x - 2)^3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^3$ según el vector $\vec{v}(2, 0)$.

e) La gráfica de la función $y = \frac{1}{(x+1)^4}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \frac{1}{x^4}$ según el vector $\vec{v}(-1, 0)$.

e) La gráfica de la función $y = \frac{1}{x+2} - 3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ según el vector $\vec{v}(-2, -3)$.

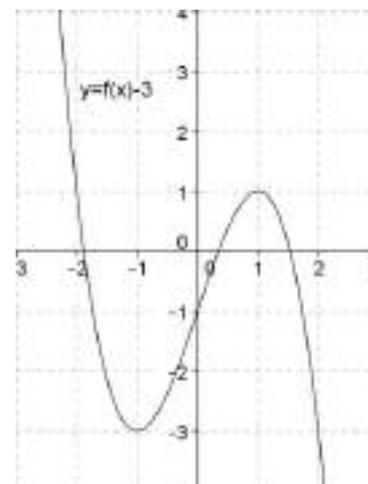
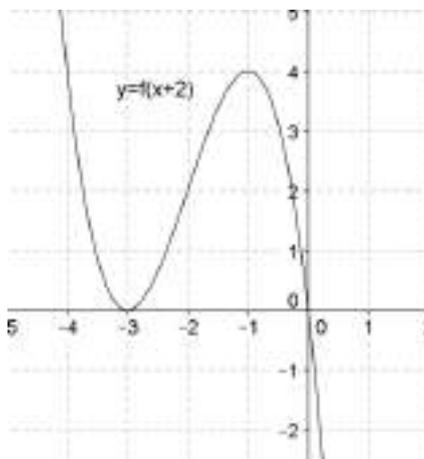
18. La gráfica de la función aparece en el dibujo:

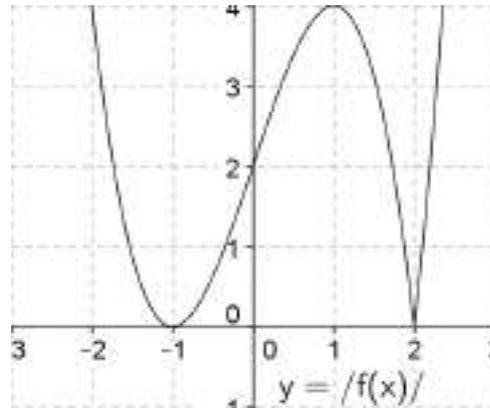
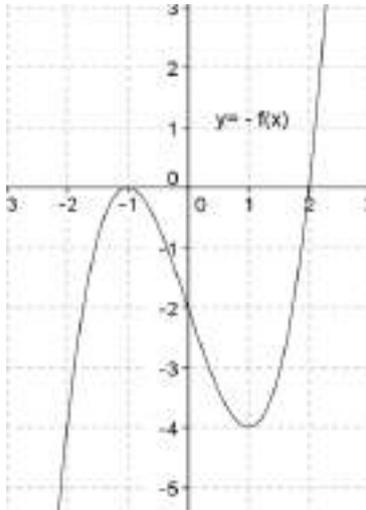


No aprobará el examen si dedica menos de 24 horas.

La nota máxima que puede alcanzar en este examen es de 12 puntos.

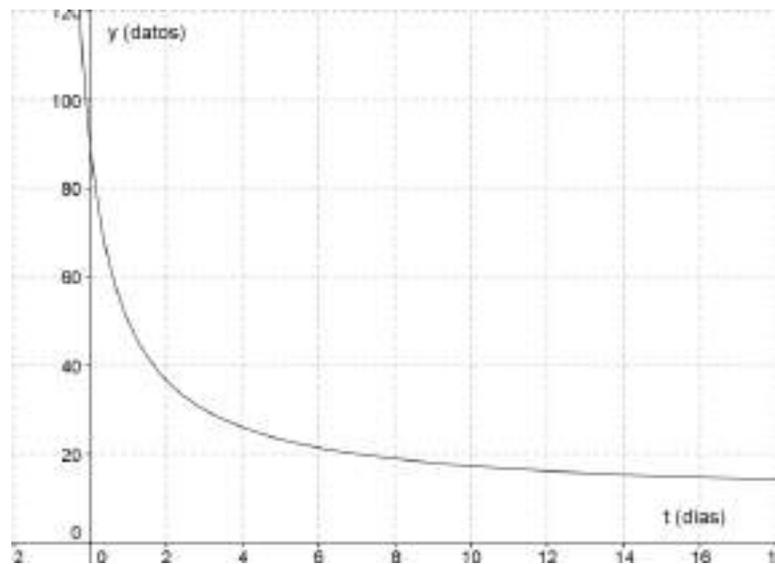
19. Las gráficas quedan:





20. a) La tabla y la gráfica quedan:

t	y
0	90
1	50
3	30
4	26
9	18
10	17,27
100	10,8
1000	10,07



Esta función presenta asíntota vertical en la recta $t = -1$ y asíntota horizontal $y = 10$. La parte negativa no tiene sentido en el contexto del problema.

b) Al cabo de 10 días recuerda $\frac{10 \cdot 10 + 90}{10 + 1} = 17,27$ datos.

Al cabo de 18 días recuerda $\frac{10 \cdot 18 + 90}{18 + 1} = 14,21$ datos.

c) El mayor número de datos que retiene es de 90 y el menor es 10 datos.

ACTIVIDADES-PÁG. 183

a) Las funciones $y = \frac{2}{x^n}$ con n par son: $y = \frac{2}{x^2}$, $y = \frac{2}{x^4}$, $y = \frac{2}{x^6}$...

Sus principales características son:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Recorrido: $(0, +\infty)$
- Simetría respecto eje OY, ya que $f(-x) = \frac{2}{(-x)^n} = \frac{2}{x^n} = f(x)$

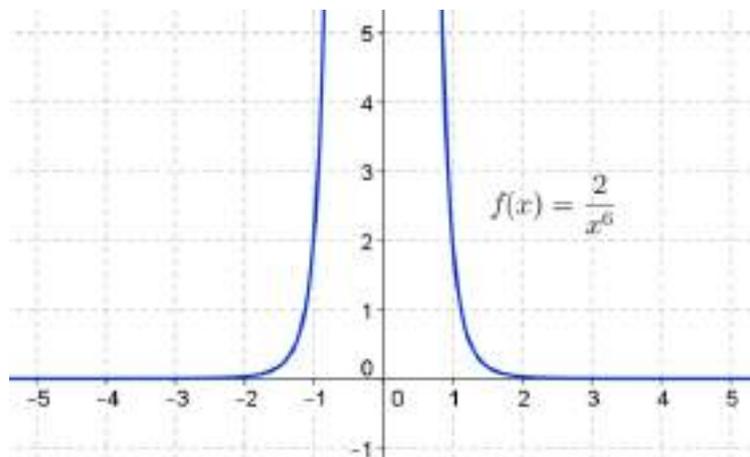
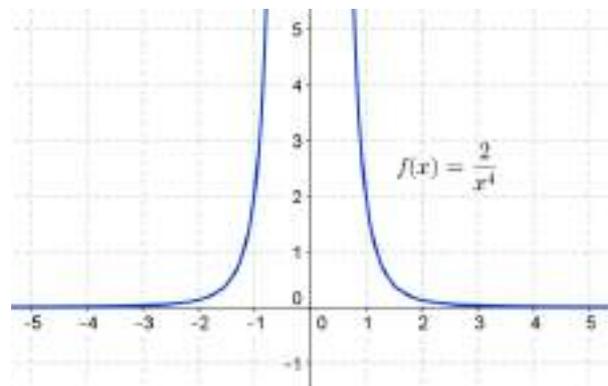
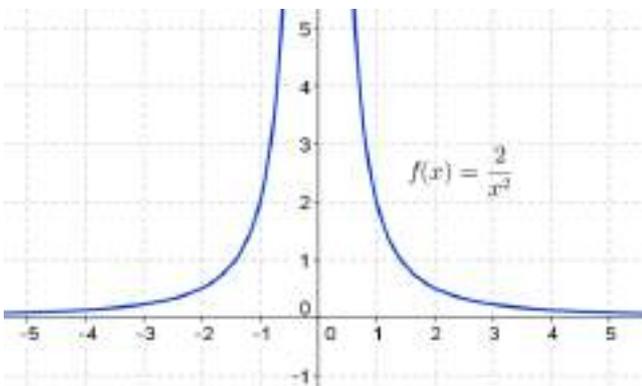
• Asíntotas: $x = 0$ e $y = 0$, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^n} = 0$$

• Creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$. La primera derivada es $y' = \frac{-2n}{x^{n+1}}$

• Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en $\mathbb{R} - \{0\}$. La segunda derivada es $y'' = \frac{2n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:



Las funciones $y = \frac{2}{x^n}$ con n impar son: $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{2}{x^3}$, $y = \frac{2}{x^5}$...

Sus principales características son:

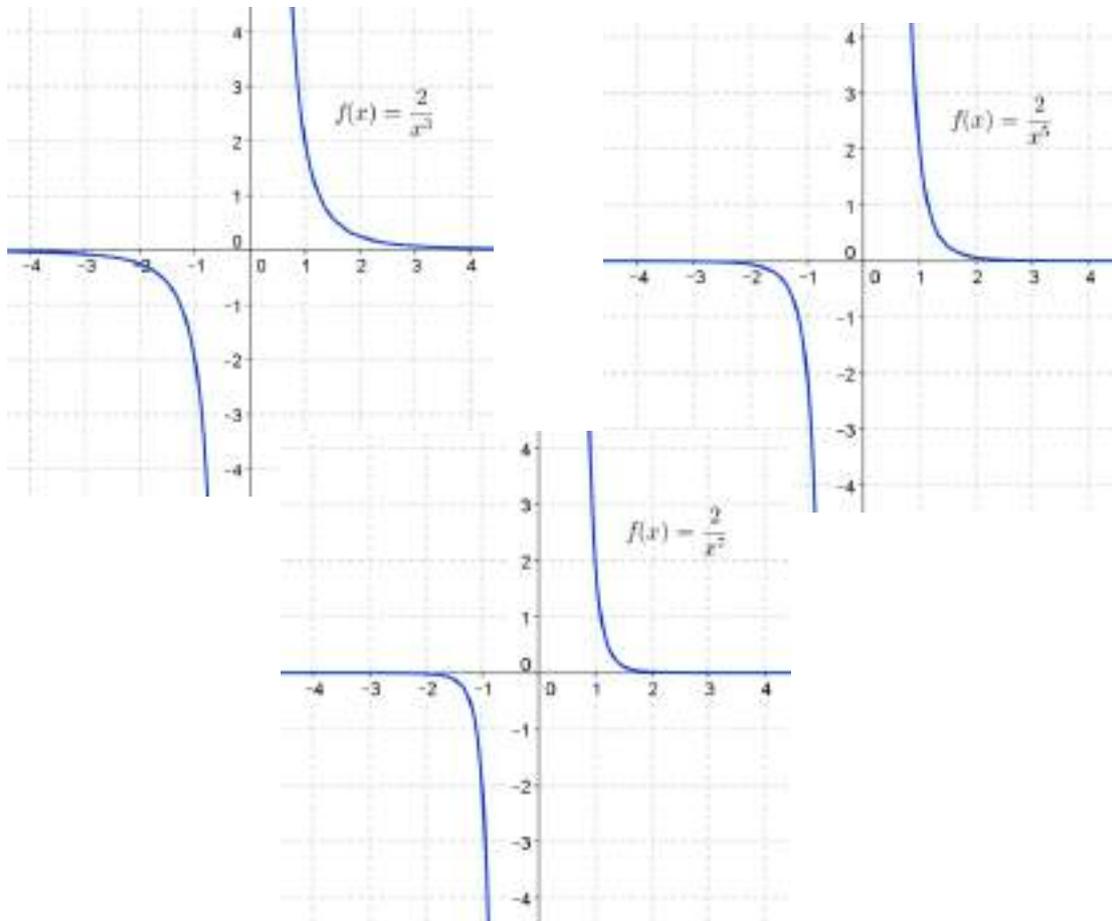
- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Recorrido: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Simetría respecto del origen de coordenadas, ya que $f(-x) = \frac{2}{(-x)^n} = -\frac{2}{x^n} = -f(x)$

- Asíntotas: $x = 0$ e $y = 0$, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^n} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^n} = 0$$

- Decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$. La primera derivada es $y' = \frac{-2n}{x^{n+1}}$
- Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en $(-\infty, 0)$ Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en $(0, +\infty)$. La segunda derivada es $y'' = \frac{2n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:



b) Estudiamos las principales características de las funciones $y = \frac{k}{x^n}$, siendo k un valor cualquiera.

b₁) En el caso $k = 0$, la función $y = \frac{0}{x^n} = 0$ es una función constante y no comparte las características de la familia de funciones.

b₂) En el caso $k > 0$ las características de las funciones coinciden con las descritas en el apartado anterior.

b₃) En el caso $k < 0$, por ejemplo $k = -3$, tenemos dos opciones distintas:

(I) Las funciones $y = \frac{-3}{x^n}$ con n par son: $y = \frac{-3}{x^2}$, $y = \frac{-3}{x^4}$, $y = \frac{-3}{x^6}$...

Sus principales características son:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$.

- Recorrido: $(-\infty, 0)$

- Simetría respecto eje OY, ya que $f(-x) = \frac{-3}{(-x)^n} = \frac{-3}{x^n} = f(x)$

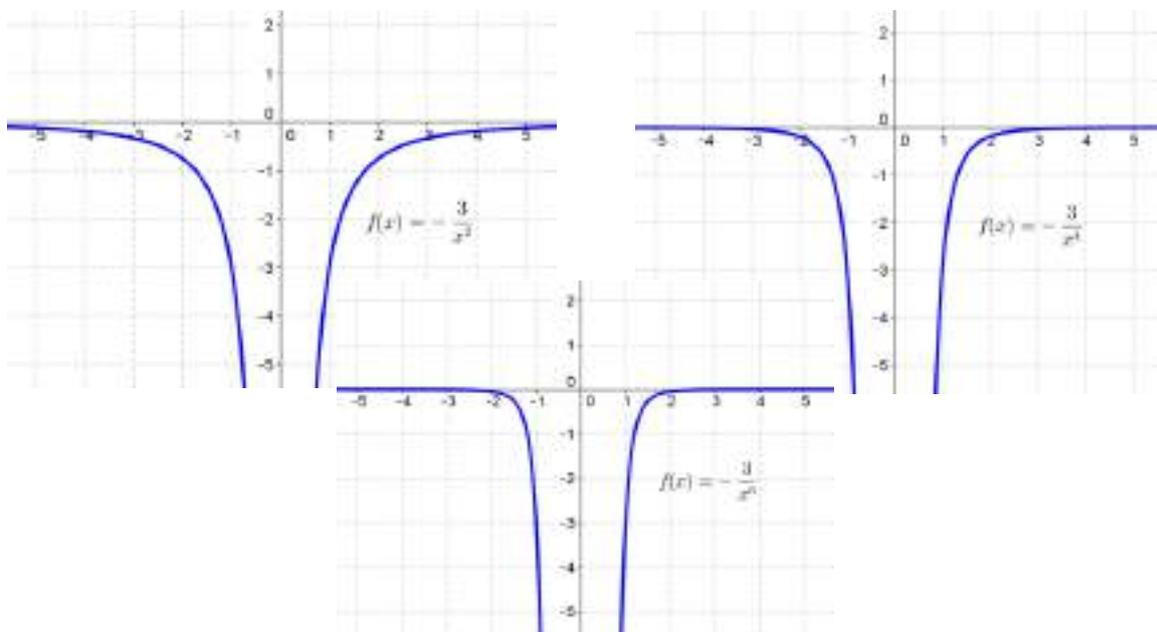
- Asíntotas: $x = 0$ e $y = 0$, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3}{x^n} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3}{x^n} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^n} = 0$$

- Decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. La primera derivada es $y' = \frac{3n}{x^{n+1}}$

- Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en $\mathbb{R} - \{0\}$. La segunda derivada es $y'' = -\frac{3n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:



(II) Las funciones $y = \frac{-3}{x^n}$ con n impar son: $y = \frac{-3}{x}$, $y = \frac{-3}{x^3}$, $y = \frac{-3}{x^5}$...

Sus principales características son:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$.

- Recorrido: $\mathbb{R} - \{0\}$

- Simetría respecto del origen de coordenadas, ya que $f(-x) = \frac{-3}{(-x)^n} = \frac{3}{x^n} = -f(x)$

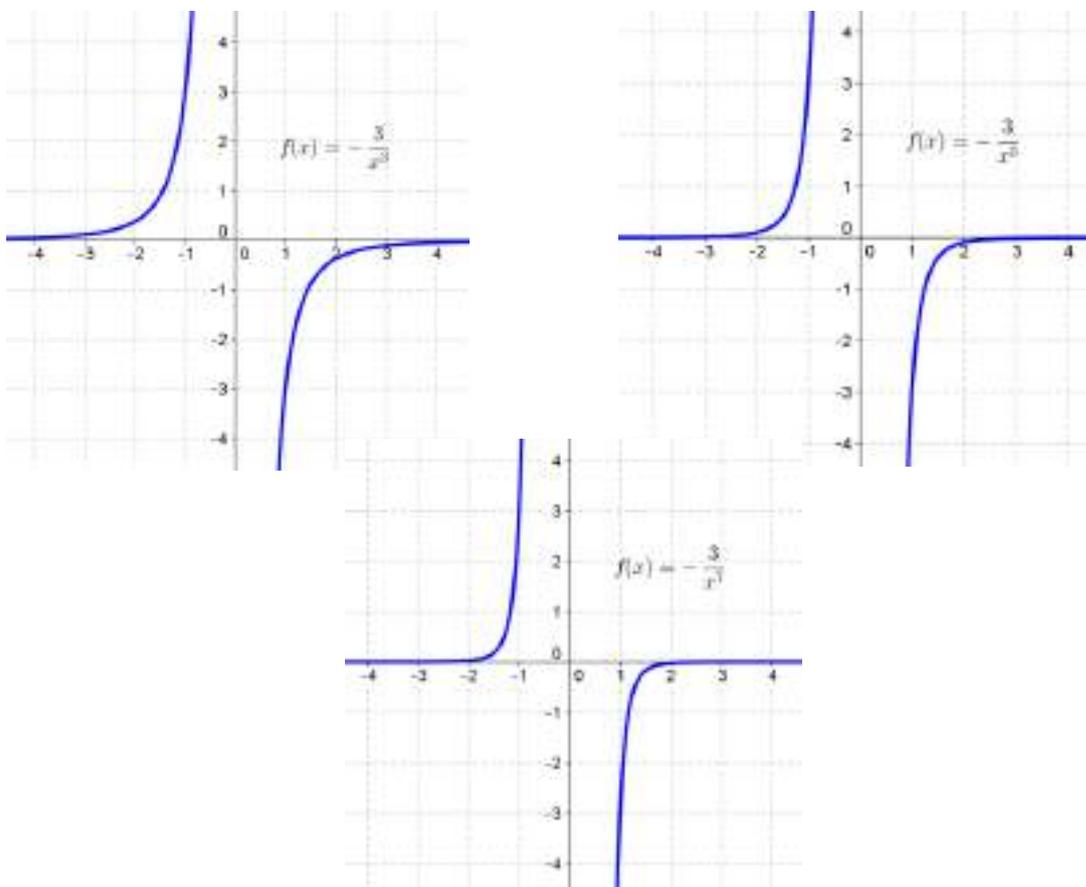
- Asíntotas: $x = 0$ e $y = 0$, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3}{x^n} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x^n} = 0$$

- Creciente en $\mathbb{R} - \{0\}$. La primera derivada es $y' = \frac{3n}{x^{n+1}}$

- Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en $(-\infty, 0)$. Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en $(0, +\infty)$. La segunda derivada es $y'' = \frac{-3n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:



c) Las respuestas a los apartados aparecen a continuación:

c1) La derivada de la función $y = \frac{k}{x^n}$ es $y' = -\frac{kn}{x^{n+1}}$. Sea $P\left(a, \frac{k}{a^n}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{a^n} = -\frac{kn}{a^{n+1}}(x - a) \quad \Rightarrow \quad knx + a^{n+1}y = k(n+1)a$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A: \begin{cases} knx + a^{n+1}y = k(n+1)a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{n+1}{n}a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{n+1}{n}a, 0\right)$$

$$B: \begin{cases} x = 0 \\ knx + a^{n+1}y = k(n+1)a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{k(n+1)}{a^n} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0, \frac{k(n+1)}{a^n}\right)$$

Sea M el punto medio del segmento de extremos A y B; sus coordenadas son:

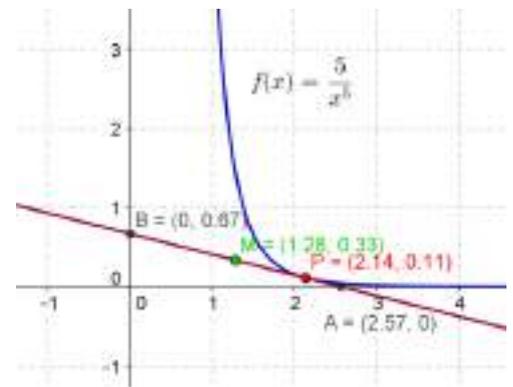
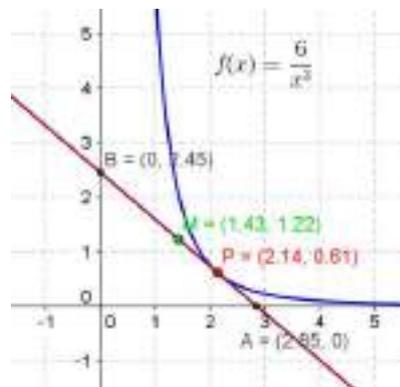
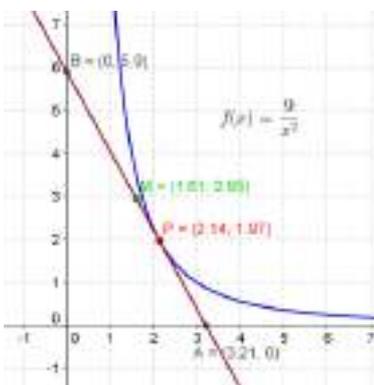
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{n+1}{n}a + 0}{2} = \frac{n+1}{2n}a \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{k(n+1)}{a^n}}{2} = \frac{k(n+1)}{2a^n}$$

Para que el punto M coincida con el punto P debe cumplirse:

$$x_M = x_P \Rightarrow \frac{n+1}{2n}a = a \Rightarrow \frac{n+1}{2n} = 1 \Rightarrow n+1 = 2n \Rightarrow n = 1$$

$$y_M = y_P \Rightarrow \frac{k(n+1)}{2a^n} = \frac{k}{a^n} \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 1 \Rightarrow n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

Como n debe ser mayor o igual que 2, el punto medio, M (en color verde), del segmento de extremos A y B no es el punto P (en color rojo). Esto puede observarse en los dibujos que siguen.



c2) El área del triángulo OAB es:

$$\text{Área} = \frac{OA \cdot OB}{2} \Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} a \right) \cdot \frac{k(n+1)}{a^n} \Rightarrow \text{Área} = \frac{k(n+1)^2}{2na^{n-1}}$$

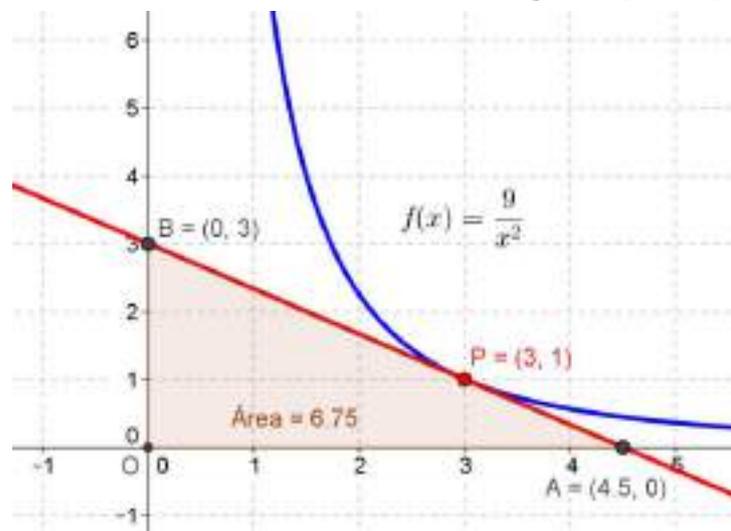
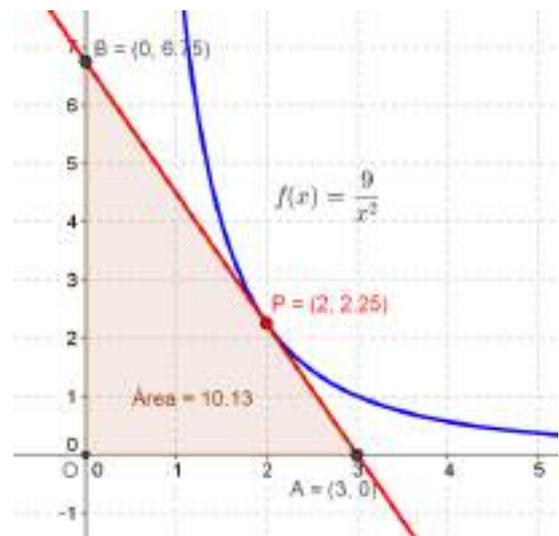
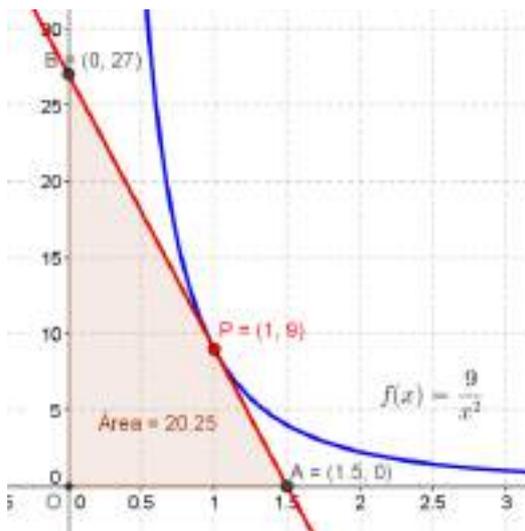
Observamos que el área del triángulo depende de los parámetros k y n que definen la función y de la variable a que nos da la posición del punto P sobre la gráfica de la función.

En las imágenes pueden verse las áreas de los triángulos OAB para la función $f(x) = \frac{9}{x^2}$ en los puntos de abscisas $a = 1$, $a = 2$ y $a = 3$.

Si $k = 9$, $n = 2$ y $a = 1$, obtenemos: $\text{Área} = \frac{9(2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 1^{2-1}} = \frac{81}{4} = 20,25 \text{ u}^2$.

Si $k = 9$, $n = 2$ y $a = 2$, obtenemos: $\text{Área} = \frac{9(2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2^{2-1}} = \frac{81}{8} = 10,125 \text{ u}^2$.

Si $k = 9$, $n = 2$ y $a = 3$, obtenemos: $\text{Área} = \frac{9(2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 3^{2-1}} = \frac{81}{12} = 6,75 \text{ u}^2$.



d) Las respuestas a los apartados aparecen a continuación:

d1) La derivada de la función $y = \frac{k}{nx^n}$ es $y' = -\frac{k}{x^{n+1}}$. Sea $P\left(a, \frac{k}{na^n}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{na^n} = -\frac{k}{a^{n+1}}(x - a) \Rightarrow knx + na^{n+1}y = k(n+1)a$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A: \begin{cases} knx + na^{n+1}y = k(n+1)a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{n+1}{n}a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{n+1}{n}a, 0\right)$$

$$B: \begin{cases} x = 0 \\ knx + na^{n+1}y = k(n+1)a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{k(n+1)}{na^n} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0, \frac{k(n+1)}{na^n}\right)$$

Sea M el punto medio del segmento de extremos A y B; sus coordenadas son:

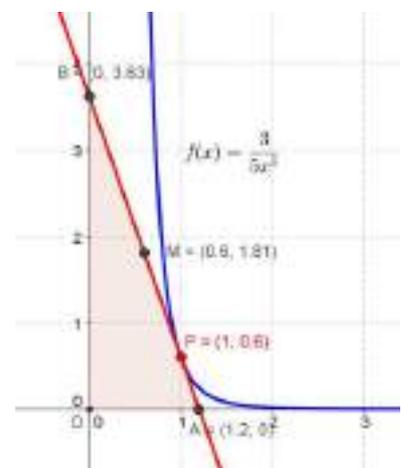
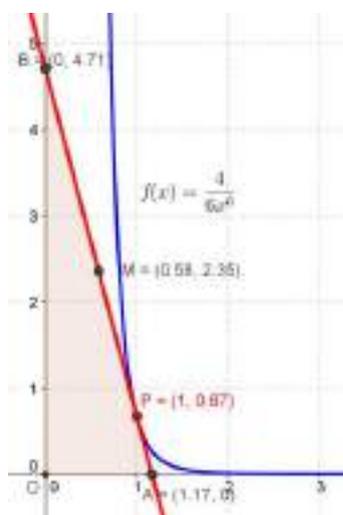
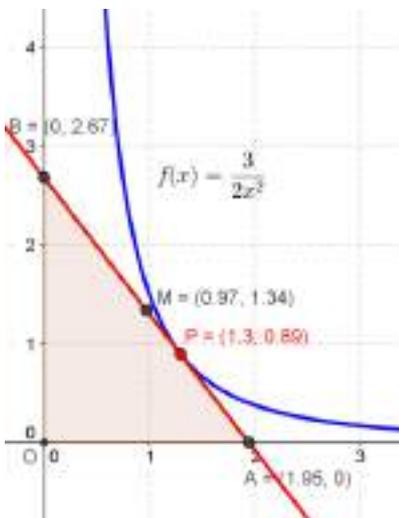
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{n+1}{n}a + 0}{2} = \frac{n+1}{2n}a \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{k(n+1)}{na^n}}{2} = \frac{k(n+1)}{2na^n}$$

Para que el punto M coincida con el punto P debe cumplirse:

$$x_M = x_P \Rightarrow \frac{n+1}{2n}a = a \Rightarrow \frac{n+1}{2n} = 1 \Rightarrow n+1 = 2n \Rightarrow n = 1$$

$$y_M = y_P \Rightarrow \frac{k(n+1)}{2na^n} = \frac{k}{na^n} \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 1 \Rightarrow n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

Como n debe ser mayor o igual que 2, el punto medio, M, del segmento de extremos A y B nunca coincide con el punto P. Esto puede observarse en los dibujos que siguen.



d2) El área del triángulo OAB es:

$$\text{Área} = \frac{OA \cdot OB}{2} \Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} a \right) \cdot \frac{k(n+1)}{na^n} \Rightarrow \text{Área} = \frac{k(n+1)^2}{2n^2 a^{n-1}}$$

Observamos que el área del triángulo depende de los parámetros k y n que definen la función y de la variable a que nos da la posición del punto P sobre la gráfica de la función.

En las imágenes pueden verse las áreas de los triángulos OAB para la función $f(x) = \frac{5}{2x^2}$ en los puntos de abscisas $a = 1$, $a = 2$ y $a = 3$.

Si $k = 5$, $n = 2$ y $a = 1$, obtenemos: $\text{Área} = \frac{5(2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 1^{2-1}} = \frac{45}{8} = 5,625 u^2$.

Si $k = 5$, $n = 2$ y $a = 2$, obtenemos: $\text{Área} = \frac{5(2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 2^{2-1}} = \frac{45}{16} = 2,81 u^2$.

Si $k = 5$, $n = 2$ y $a = 3$, obtenemos: $\text{Área} = \frac{5(2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 3^{2-1}} = \frac{45}{24} = 1,875 u^2$.

