

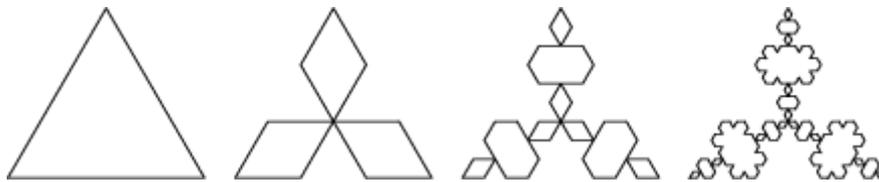
Como vemos en la tabla la sucesión de los perímetros es una sucesión geométrica de razón  $4/3$ . Por lo que su

longitud es infinita pues  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{n-2}} a = +\infty$ . La sucesión de las áreas es una sucesión geométrica de

razón  $4/9$ . Su superficie es finita pues:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{4}{9} \right)^{n-1} \right] = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

La propiedad que tienen estas curvas es que siendo su longitud infinita encierran una superficie finita.

La curva “Anticopo de nieve” es la que vemos en el dibujo:



Es la configuración opuesta al copo de nieve. Se forma del mismo modo pero metiendo los triángulos hacia adentro.

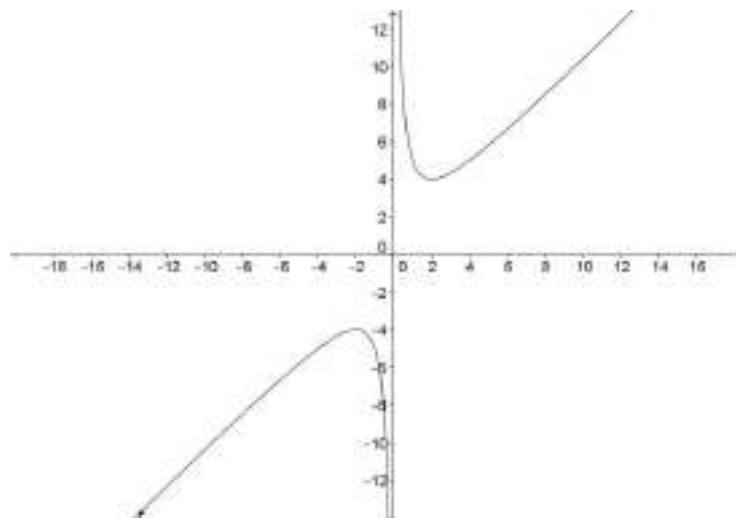
Se obtienen los mismos resultados que en la anterior y tienen la misma propiedad.

## UNIDAD 10: Propiedades globales de las funciones

### ACTIVIDADES-PÁG. 226

1. El día 31 de julio ocupará una superficie de  $1 \cdot 1,08^{31} = 10,87 \text{ cm}^2$

2. La gráfica buscada podría ser la siguiente:



3. Las características de las funciones aparecen en la tabla.

Características	a)	b)	c)
<b>Dominio</b>	R	R	R
<b>Recorrido</b>	$[0, +\infty)$	$[-1, 1]$	R
<b>Simetría</b>	Eje OY	Origen de coordenadas	No tiene
<b>Acotación</b>	Acotada inferiormente	Acotada	No acotada
<b>Extremos relativos</b>	Mínimos en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ Máximo en $(0, 4)$	Máximos en $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 1\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$ Mínimos en $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi, -1\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$	Mínimo en $(0, -1)$ Máximo en $(2, 3)$
<b>Periodicidad</b>	No tiene	Periodo $T = \pi$	No tiene
<b>Tendencias</b>	$Si\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$ $Si\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$	No tiene	$Si\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$ $Si\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

**ACTIVIDADES-PÁG. 241**

1. Designamos los colores por: rojo (R), verde (V), azul (Z) y amarillo (A); y las cuatro formas por: cuadrada (C), circular (O), triangular (T) y pentagonal (P).

Por ensayo y error las colocamos en un tablero 4 x 4, cumpliendo las condiciones que marca el enunciado.

Una solución es:

RC	VO	ZT	AP
ZP	AT	RO	VC
AO	ZC	VP	RT
VT	RP	AC	ZO

Podemos encontrar hasta 72 soluciones distintas.

2. El número total de amanitas ha de ser múltiplo de 9 menos 1, es decir, 8 amanitas. Haciendo el problema mediante ecuaciones:

$$\frac{8}{9}x + \frac{8}{9} = x \quad \Rightarrow \quad x = 8 \text{ amanitas}$$

3. El enunciado del problema nos muestra que el número de cajitas de zumo debe ser un número impar. Por ensayo y error dirigido obtenemos:

Hay 7 cajitas de zumo.

El 1º amigo se bebe  $7/2 + 0,5 = 4$  cajitas. Quedan 3 cajitas.

El 2º amigo se bebe  $3/2 + 0,5 = 2$  cajitas. Queda 1 cajita.

El dueño de la casa se bebe  $1/2 + 0,5 = 1$  cajita.

Luego, efectivamente, había inicialmente 7 cajitas de zumo.

Este problema se puede resolver también por medio de ecuaciones.

4. Sea  $n$  un número real.

Veamos si  $n^2(n^2 - 1) = 12$

$$n^2(n^2 - 1) = n \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1)$$

Si  $n = 3$ , entonces  $n - 1 = 2$  y también  $n + 1$ ; por lo que  $n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1)$  es múltiplo de 12.

Si  $n - 1 = 3$ , entonces  $n = 2$ ; por lo que  $n \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$  es múltiplo de 12.

Si  $n + 1 = 3$ , entonces  $n = 2$ ; por lo que  $n \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$  es múltiplo de 12.

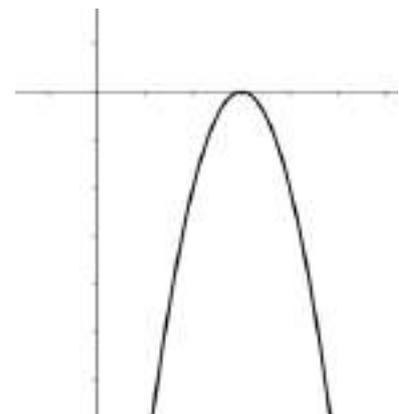
Por tanto en todos los casos se cumple  $n^2(n^2 - 1) =$  múltiplo de 12.

### ACTIVIDADES-PÁG. 243

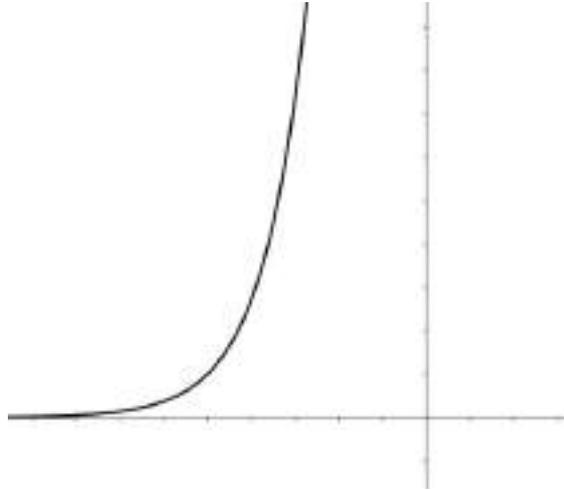
1. a) Introducimos en la pantalla que aparece, después de pulsar la tecla, la expresión:

$$-X^2 + 12 * X - 36$$

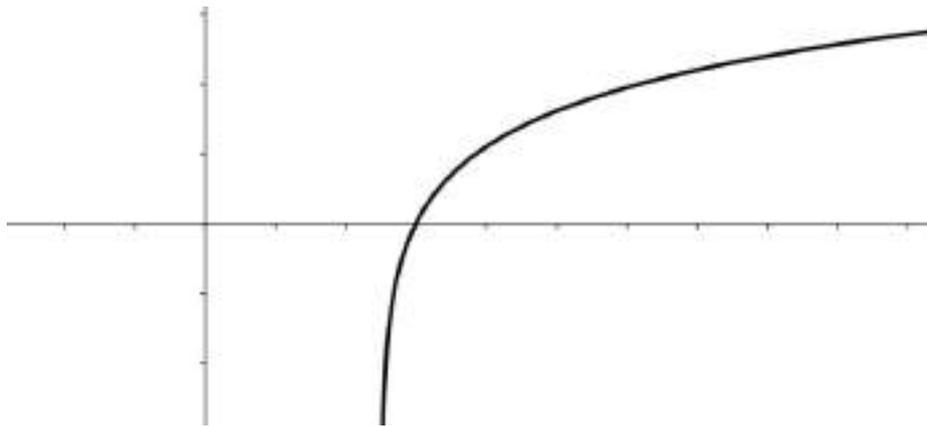
Pulsamos la tecla  para representar la función, y modificamos las opciones de la pantalla con la  tecla. Obtenemos la gráfica del dibujo.



b) Procediendo como en el apartado anterior y tecleando  $e^{(X+5)}$ , obtenemos:



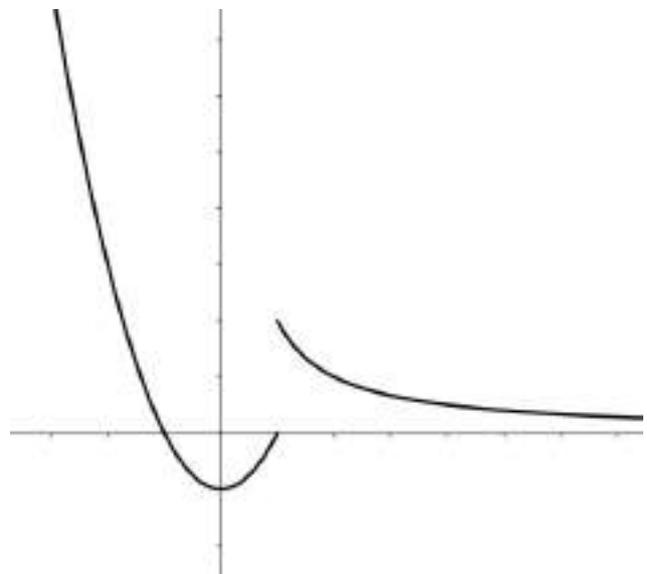
c) Procediendo como en los apartados anteriores y tecleando  $\ln(2 \cdot X - 5)$ , obtenemos:



2. a) Escribimos en  $Y_1=$  la expresión:

$$(X^2 - 1) * (X < 1) + (2/X) * (X \geq 1)$$

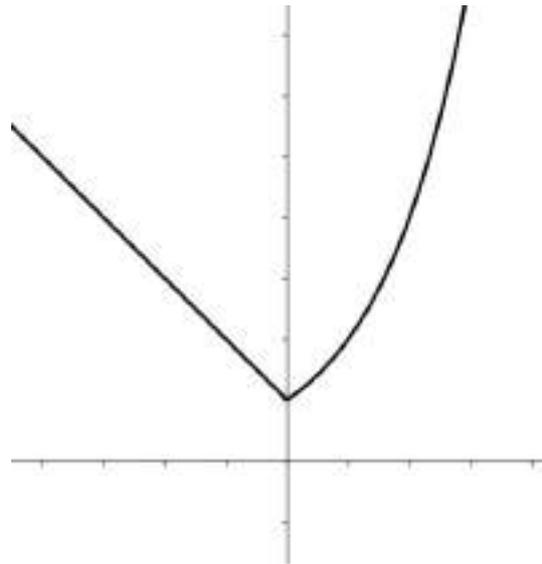
y obtenemos la gráfica:

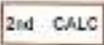


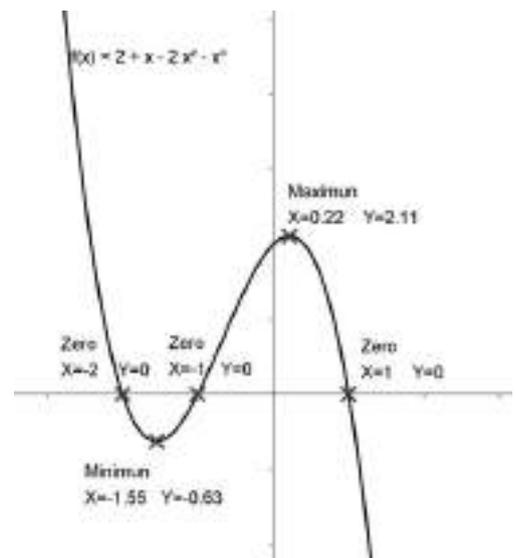
b) Escribimos en  $Y_1=$  la expresión:

$$(-X + 1) * (X \leq 0) + (2^X) * (X > 0)$$

y obtenemos la gráfica:

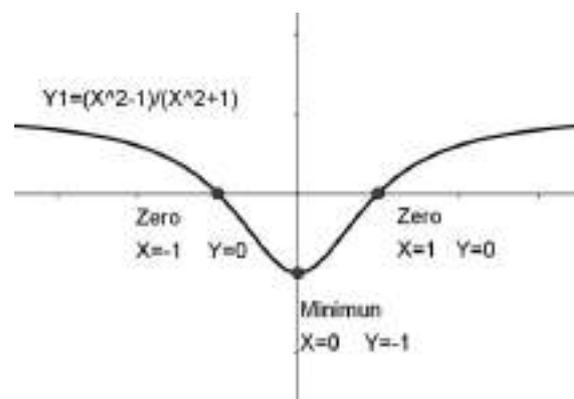


3. a) Representamos la función  $f(x) = 2 + x - 2x^2 - x^3$  y con las opciones del menú que ofrece la  tecla obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene tres cortes con OX en los puntos  $(-2, 0)$ ;  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$ ; un máximo relativo en  $(0,22; 2,11)$  y un mínimo relativo en  $(-1,55; -0,63)$ .

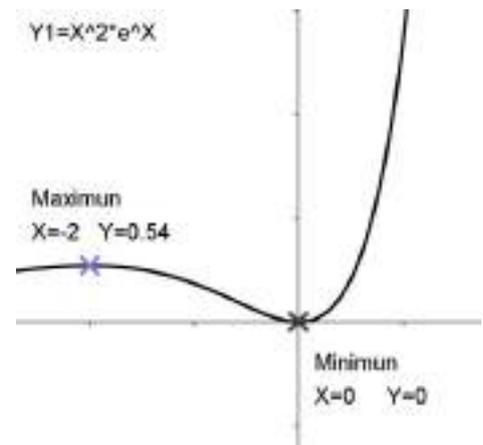


b) Para la función  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  procedemos como en el apartado anterior y obtenemos, como

vemos en la imagen, que la función tiene dos cortes con OX en los puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$  y un mínimo relativo en  $(0, -1)$ .



c) Para la función  $h(x) = x^2 \cdot e^x$  procedemos como en los apartados anteriores y obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene un corte con OX en el punto  $(0, 0)$ ; un máximo relativo en  $(-2; 0,54)$  y un mínimo relativo en  $(0, 0)$ .



ACTIVIDADES-PÁG. 244

1. En la tabla aparecen los resultados.

Valores	a) $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$	b) $g(x) = \sqrt{x+1}$	c) $h(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x}}$
-2	Si	No	Si
-1/2	Si	Si	Si
0	No	Si	Si
1/3	Si	Si	Si
1	Si	Si	No
$\sqrt{3}$	Si	Si	No
2	Si	Si	No

2. Las respuestas son:

a)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{ Im } f = (-\infty, 0]$

b)  $\text{Dom } f = [-2, 5]; \text{ Im } f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

c)  $\text{Dom } f = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty); \text{ Im } f = (0, +\infty)$

3. Los dominios de las funciones son:

a)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

f)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b)  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, -2\}$

g)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

c)  $\text{Dom } f = [-2, 2]$

h)  $\text{Dom } f = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

d)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

i)  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z}\}$

e)  $\text{Dom } f = (-2, +\infty)$

4. a) Siempre se verifica que  $-1 \leq \cos 2x \leq 1$  por tanto si sumamos 2 en todos los miembros se mantiene la desigualdad  $-1 + 2 \leq 2 + \cos 2x \leq 1 + 2$ , de donde,  $1 \leq 2 + \cos 2x \leq 3$ , por lo que la función dada esta acotada entre 1 y 3

b) Por un lado  $\frac{6}{x^2 + 3} > 0$  siempre, pues esta función racional siempre es positiva.

Por otro lado vamos a ver que  $\frac{6}{x^2 + 3} \leq 2$ ;  $\frac{6}{x^2 + 3} - 2 = \frac{-2x^2}{x^2 + 3} \leq 0$  siempre.

Por tanto  $0 < \frac{6}{x^2 + 3} \leq 2$  es decir esta acotada por 0 y 2.

5. a) Dom  $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ; Im  $f = \mathbb{R}$ .

Estrictamente creciente en  $(-\infty, -3,46) \cup (3,46; +\infty)$ .

Estrictamente decreciente en  $(-3,46; 3,46) - \{-2, 2\}$ .

Tiene un máximo relativo en  $(-3,46; -5,2)$  y mínimo relativo en  $(3,46; 5,2)$ .

b) Dom  $f = \mathbb{R}$ ; Im  $f = (-\infty, 0]$

Estrictamente creciente en  $(-\infty, 0)$ .

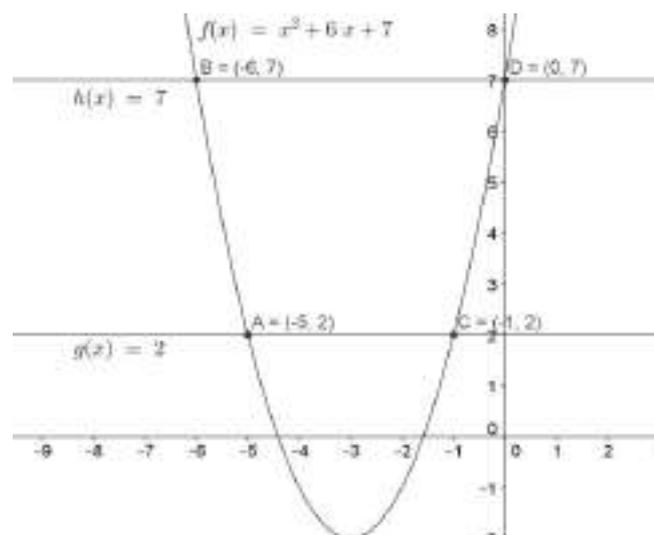
Estrictamente decreciente en  $(0, +\infty)$ .

Máximo relativo  $(0, 0)$ .

6. a) Se han de verificar las siguientes inecuaciones:  $2 \leq x^2 + 6x + 7 \leq 7$ .

Las soluciones son todos los valores de  $x$  pertenecientes a  $[-6, -5] \cup [-1, 0]$ .

En el dibujo vemos también la solución:



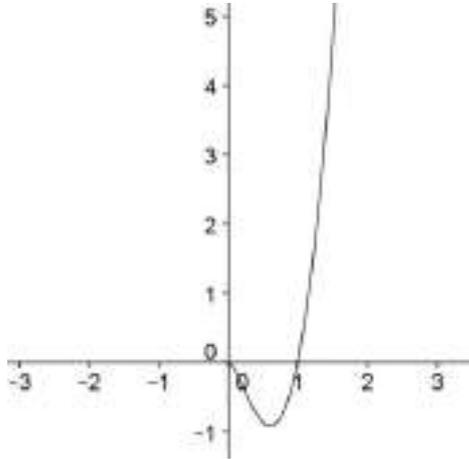
b) Se ha de verificar que  $(x + 2)^2 + 6(x + 2) + 7 > x^2 + 6x + 7$ .

De donde obtenemos  $x > -4$ .

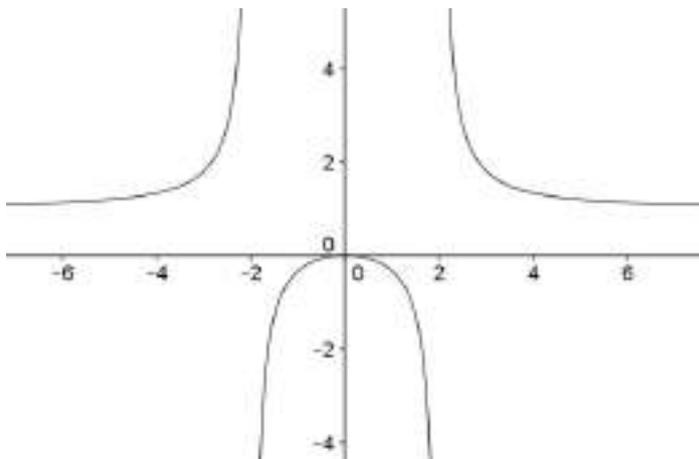
ACTIVIDADES-PÁG. 245

7. Las gráficas pueden ser como las que aparecen en los gráficos que sigue.

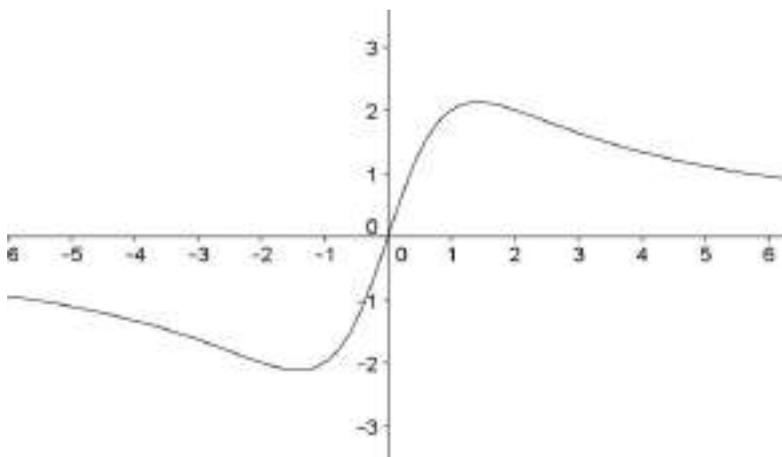
a)



b)



c)



8. Las características de las funciones aparecen en la tabla.

Características	a) $y = f(x)$	b) $y = g(x)$
<b>Dominio</b>	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
<b>Recorrido</b>	$[0, +\infty)$	$[-1, 1]$
<b>Acotación</b>	Acotada inferiormente	Acotada
<b>Monotonía</b>	Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ Creciente en $(0, 2)$	Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ Creciente en $(-1, 1)$
<b>Extremos relativos</b>	Mínimo en $(0, 0)$ Máximo en $(2; 0,54)$	Mínimo en $(-1, -1)$ Máximo en $(1, 1)$
<b>Simetría</b>	No tiene	Respecto del origen de coordenadas

9. Las respuestas son:

- Simétrica respecto al origen de coordenadas.
- Simétrica respecto al eje de ordenadas.
- Simétrica respecto al eje de ordenadas.
- Simétrica respecto al eje de ordenadas.
- Simétrica respecto al origen de coordenadas.
- Carece de simetría.

10. Ambas funciones son periódicas, entendiendo que continúan de igual forma a izquierda y derecha. La función  $y = f(x)$  tiene de periodo  $T = 2$  y la función  $y = g(x)$  tiene de periodo  $T = 5$ .

11. Las respuestas aparecen a continuación.

a) $(f + h)(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4}$	$\text{Dom}(f + g) = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$
b) $(f \cdot h)(x) = \frac{-4}{(x-2)^2}$	$\text{Dom}(f \cdot h) = \mathbb{R} - \{+2\}$
c) $(f : g)(x) = \frac{x+2}{(x-2) \cdot e^{2x}}$	$\text{Dom}(f : g) = \mathbb{R} - \{+2\}$
d) $f^{-1}(x) = \frac{2x+2}{x-1}$	$\text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{+1\}$
e) $((f - h) \cdot g)(x) = \frac{(x^2 + 4x + 8)e^{2x}}{x^2 - 4}$	$\text{Dom}((f - h) \cdot g) = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$
f) $(g + h)(x) = e^{2x} - \frac{4}{x^2 - 4}$	$\text{Dom}(g + h) = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$

$$g) g^{-1}(x) = \ln(\sqrt{x})$$

$$\text{Dom } g^{-1} = (0, +\infty)$$

12. Las funciones y valores pedidos son.

$$a) (f \circ g)(x) = \frac{2x+11}{(x+4)^2}$$

$$c) (h \circ h \circ h)(x) = x$$

$$b) (g \circ g)(-4) = 2$$

$$d) (h \circ f)(1) = 4/5$$

### ACTIVIDADES-PÁG. 246

13. a) El parámetro vale  $a = -3$ .

b) El parámetro vale  $a = -3$

14. Las funciones inversas pedidas son:

$$a) f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - 6$$

$$b) f^{-1}(x) = \frac{3}{1-2x}$$

$$c) f^{-1}(x) = \log_2(x-3)$$

$$d) f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-2}{3}$$

$$e) f^{-1}(x) = \frac{x^2-2}{3}$$

$$f) f^{-1}(x) = \frac{x^3+3}{2}$$

15. Resolvemos la ecuación  $\left| \frac{2-x}{x} \right| = \frac{2}{x+1}$  y obtenemos  $x = 1$ ;  $x = -2$ ;  $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

16. a) Llamando  $x$  a la longitud de la base, la función que nos permite hallar el área es  $A(x) = x(20-x)$ .

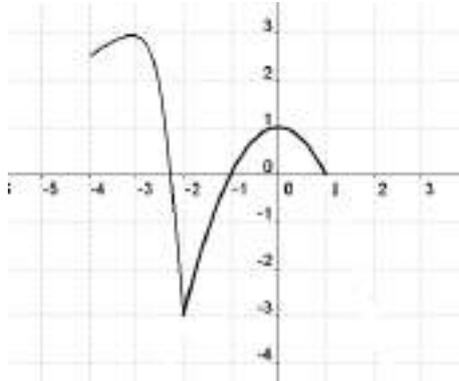
El dominio de esta función es  $(0, 20)$  y el recorrido  $(0, 100]$

b) Llamando  $x$  al número de estudiantes que van al museo la función que da el precio a pagar por cada uno de ellos es:  $P(x) = 600/x$ .

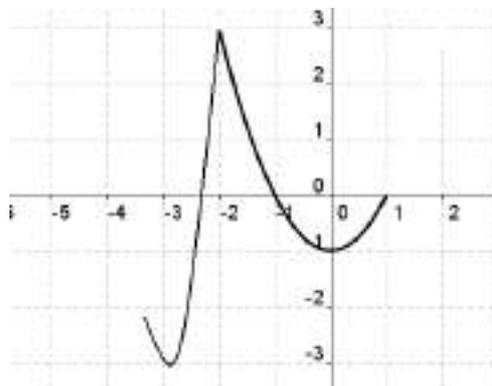
El dominio de esta función es  $[1, 50]$  y el recorrido es  $[12, 600]$

17. La función buscada es  $f(r) = 450r - (\pi + 4)r^2$

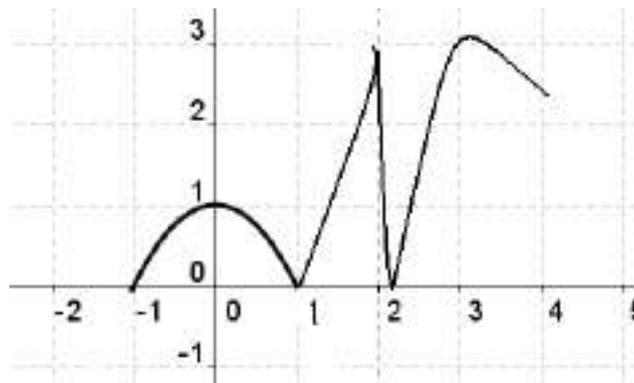
18. a) La simétrica respecto a OY quedaría:



b) La simétrica respecto del origen sería:



c) La gráfica de la función  $y = |f(x)|$  sería:



19. La función buscada es  $f(x) = \begin{cases} 400 & \text{si } 0 < x < 30 \\ 12x & \text{si } 30 \leq x \leq 60 \\ 50 + 8x & \text{si } x > 60 \end{cases}$

20. Las respuestas a los apartados son:

a) El beneficio es de 338,56 €.

b) La función beneficio es  $B(x) = \frac{104}{9}x - \frac{7}{100}x^2 - \frac{35}{3}$

c) El beneficio es nulo si vende aproximadamente 1 kg o 164 kg.

#### ACTIVIDADES-PÁG. 247

Ofrecemos bibliografía sobre la relación entre matemáticas y deporte.

BOLT, B. y HOBBS, D. (1991). *101 proyectos matemáticos*. Labor. Barcelona.

CORBALÁN, Fernando. (2007) *Matemáticas en la vida misma*. Graó. Barcelona.

CORBALÁN, Fernando. (201) *Matemáticas de cerca*. Graó. Barcelona.

ORTEGA, Tomás. (2005). *Conexiones matemáticas*. Graó. Barcelona.

SORANDO MUZÁS, J. M. (2012) *Matemáticas y deporte. Sugerencias para el aula*. Revista Números. Volumen 80.

SORANDO MUZÁS, J. M. [http://catedu.es/matematicas\\_mundo/](http://catedu.es/matematicas_mundo/)

VV. AA. (2013). *Matemáticas y deporte*. Revista UNO. Graó. Barcelona.