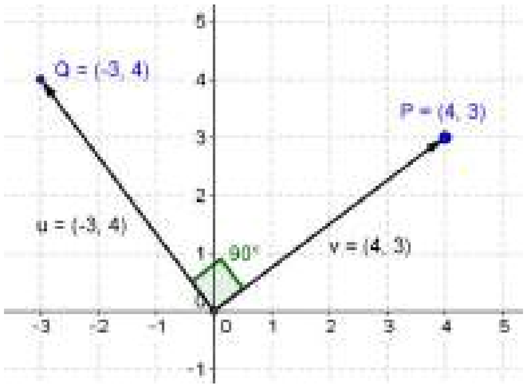
ACTIVIDADES-PÁG. 132

1. Las soluciones de las ecuaciones dadas son:

a) $x^2 – 4x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 + i \text{ y } x_2 = 2 - i$

b) $2x^3 + 32x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \; x_2 = 4i \text{ y } x_3 = -4i$

2. El vector resultante de girar 90º el vector $\vec{v}\,(4, 3)$ es el vector $\vec{u}\,(-3, 4)$. Puede verse en el dibujo.



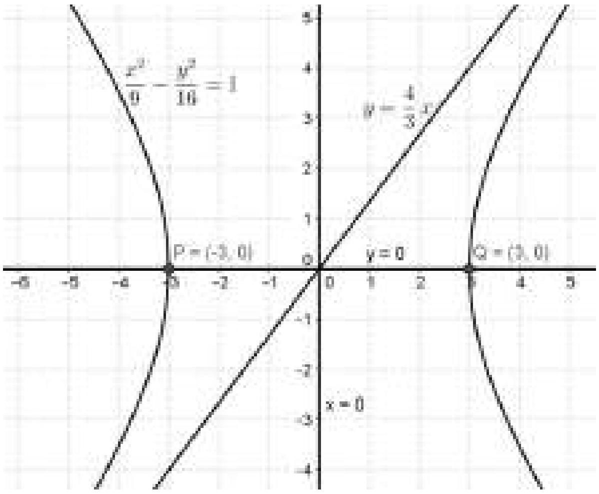
3. Los puntos de intersección de la hipérbola con las rectas vienen dados por los sistemas que siguen:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \textit{No tiene soluciones}.$$ Por tanto, no hay puntos de corte.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -3; \; y_1 = 0 \\ x_2 = 3; \; y_2 = 0 \end{cases}$$. Los puntos de corte son P (- 3, 0) y Q (3, 0).

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ y = \dfrac{4}{3}x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \textit{No tiene soluciones}.$$ Por tanto, no hay puntos de corte.

Todo lo anterior pude verse en el dibujo.

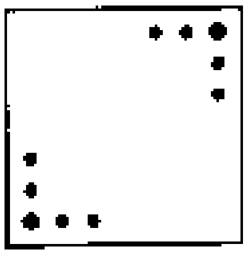


4. El radio del hexágono mide $2\sqrt{2}$, su apotema mide $\sqrt{6}$ y el área será:

$$\frac{6\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2}=12\sqrt{3}\,u^2.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 147

1. Si cada punto representa una lámpara, la solución quedaría del siguiente modo:



2. Si hay n calles, el número máximo de cruces es $C_{n,\,2}=\frac{n^2-n}{2}$.

Luego si hay 66 farolas habrá 66 cruces y se cumplirá:

$$\frac{n^2-n}{2}=66 \;\Rightarrow\; n^2-n-132=0 \;\Rightarrow\; n=12$$

El pueblo tenía 12 calles como mínimo.

3. Ésta es una de las disposiciones en que quedó la cava.

1		20
20		1

Cómo máximo pudo robar:

60 – 42 = 18 botellas.

La disposición de 42 botellas admite muchas formas diferentes,

ACTIVIDADES-PÁG. 148

1. Los resultados en cada uno de los apartados son:

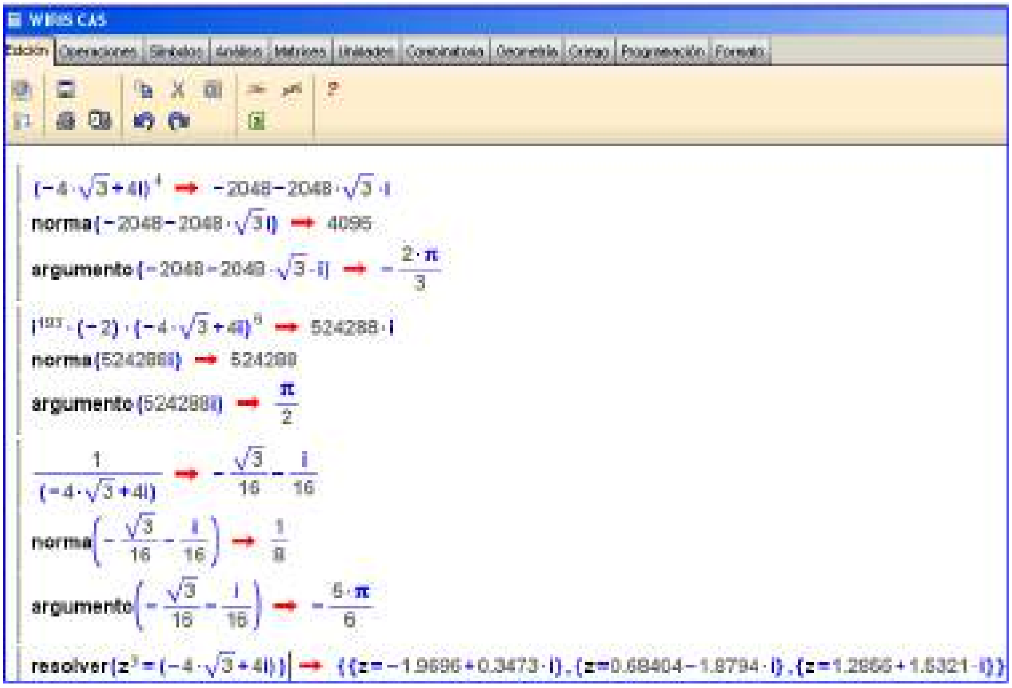
a) $z^4 = (-4\sqrt{3} + 4i)^4 = -2048 - 2048\sqrt{3}\ i = 4096_{\frac{-2\pi}{3}}$

b) $i^{193} \cdot (-2)(-4\sqrt{3} + 4i)^6 = 524288\ i = 524288_{\frac{\pi}{2}}$

c) inverso de $z = \dfrac{1}{\left(-4\cdot\sqrt{3} + 4i\right)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{16} - \dfrac{i}{16} = \left(\dfrac{1}{8}\right)_{\frac{-5\pi}{6}}$

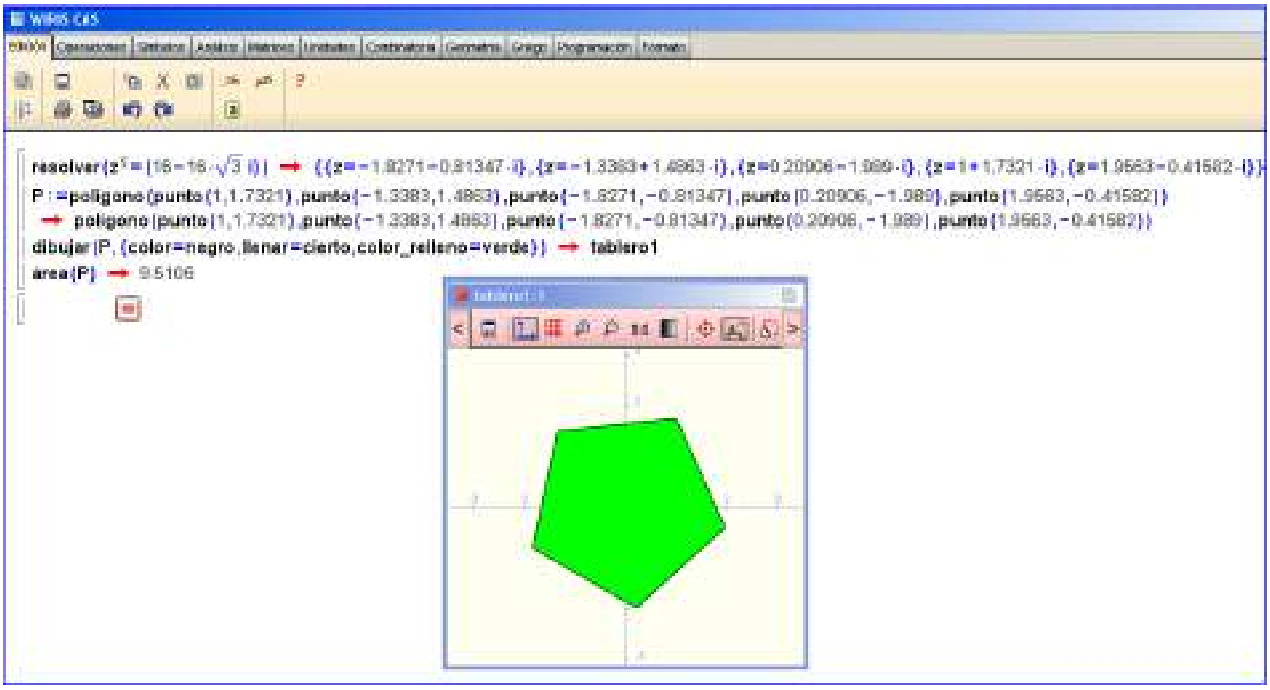
d) Para hallar $\sqrt[3]{z}$ resolvemos la ecuación $z^3 = -4\sqrt{3} + 4i$ y obtenemos las tres soluciones de esta ecuación como vemos en la imagen.

En la imagen tenemos la resolución, con Wiris, de esta actividad.



2. Con Wiris resolvemos la ecuación y como vemos en la imagen obtenemos las cinco soluciones de la misma.

Sus afijos son los vértices de un pentágono regular cuyo dibujo tenemos en la misma imagen y cuya área se calcula con el comando **área(polígono)** y en este caso vale 9,5106 unidades cuadradas.



ACTIVIDADES-PÁG. 149

1. Los resultados de las operaciones son:

a) $5z_1 - \sqrt{3}\, z_2 = -5{,}20 - 4i$

b) $z_1^3 \cdot z_2^4 = -997.66 - 3384i$

c) el inverso de $(z_1 \cdot z_2) = -\,0{,}08 + 0.07i$

2. El complejo $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ en forma polar es $4_{-\frac{\pi}{4}}$ y el complejo $5_{\frac{4\pi}{3}}$ en forma binómica es $\dfrac{-5}{2} - \dfrac{5\sqrt{3}}{2}i$

ACTIVIDADES-PÁG. 150

1. Las soluciones de las operaciones son:

a) (- 3 + 2i) + (4 - 3i) = 1 - i

c) (- 2 +3 i) – (3 - 4i) = - 5 + 7i

e) 3i – (- 6 + 2i) = 6 + i

b) $(1 + 5i) + (2 - 2i) = 3 + 3i$ d) $(3 - 7i) - (-2 + 2i) = 5 - 9i$ f) $5 + (-2 + i) = 3 + i$

2. Las soluciones de las operaciones son:

a) $(3 + 2i) \cdot (-2 + 4i) = -14 + 8i$ c) $(2 + i) \cdot (-2 - i) = -3 - 4i$ e) $(1 - 3i) \cdot (1 + 3i) = 10$

b) $\frac{2+5i}{3-4i} = -\frac{14}{25} + \frac{23}{25}i$ d) $\frac{1-3i}{1+3i} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ f) $\frac{-1+5i}{-3+i} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$

3. La tabla completa:

Complejo	Opuesto	Conjugado	Inverso
5 + i	- 5 – i	5 – i	$\frac{5}{26} - \frac{1}{26}i$
- 1 + i	1 – i	- 1 – i	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
2 + 2i	- 2 – 2i	2 – 2i	$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$
1 – 3i	- 1 + 3i	1 – 3i	$\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$

4. Las soluciones de las operaciones son:

a) $u^2 = -7 - 24i$ c) $(u - v)^2 = 8 - 6i$

b) $w^3 = -2 - 2i$ d) $\frac{(u+v)^3}{w^2} = -77 - 207i$

5. El valor de las expresiones es:

a) $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{20} = 0$ d) $\frac{(3+2i)\cdot i^{17}}{i^{243}\cdot(1-i^7)} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$

b) $\frac{i^{298}}{i^{481} - i^{275}} = \frac{1}{2}i$ e) $i^{-1} + i^{-2} + i^{-3} \ldots + i^{-40} = 0$

c) $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2000} = 1$ f) $\frac{(2-i)\cdot(3+2i)^2}{(1+i^{12})\cdot i^{120}} = 11 + \frac{19}{2}i$

6. Las respuestas a las cuestiones son:

a) Operamos $(2 + bi)^2 = (4 - b^2) + 4bi$. Como tiene que ser real se cumplirá:

$$4b = 0, \text{ entonces } b = 0.$$

b) Operamos $(3 + 2i) \cdot (-5 + bi) = (-15 - 2b) + (3b - 10)i$. Como el afijo tiene que estar en la bisectriz del primero y tercer cuadrante se cumplirá:

$$-15 - 2b = 3b - 10 \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

c) Operamos y obtenemos:

$$(a + 3i) \cdot (2 - bi) = 23 - 14i \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2a + 3b = 23 \\ 6 - ab = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 23 \\ ab = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4,\ b_1 = 5 \\ a_2 = \dfrac{15}{2},\ b_2 = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Hay dos soluciones, los complejos $4 + 5\,i \;\; y \;\; \dfrac{15}{2} + \dfrac{8}{3} i$.

d) Operamos $\dfrac{4 + 2ai}{3a + i} = \dfrac{(4 + 2ai)\,(3a - i)}{(3a + i)\,(3a - i)} = \dfrac{14a}{9a^2 + 1} + \dfrac{6a^2 - 4}{9a^2 + 1} i$. Como tiene que ser un número imaginario puro se cumplirá:

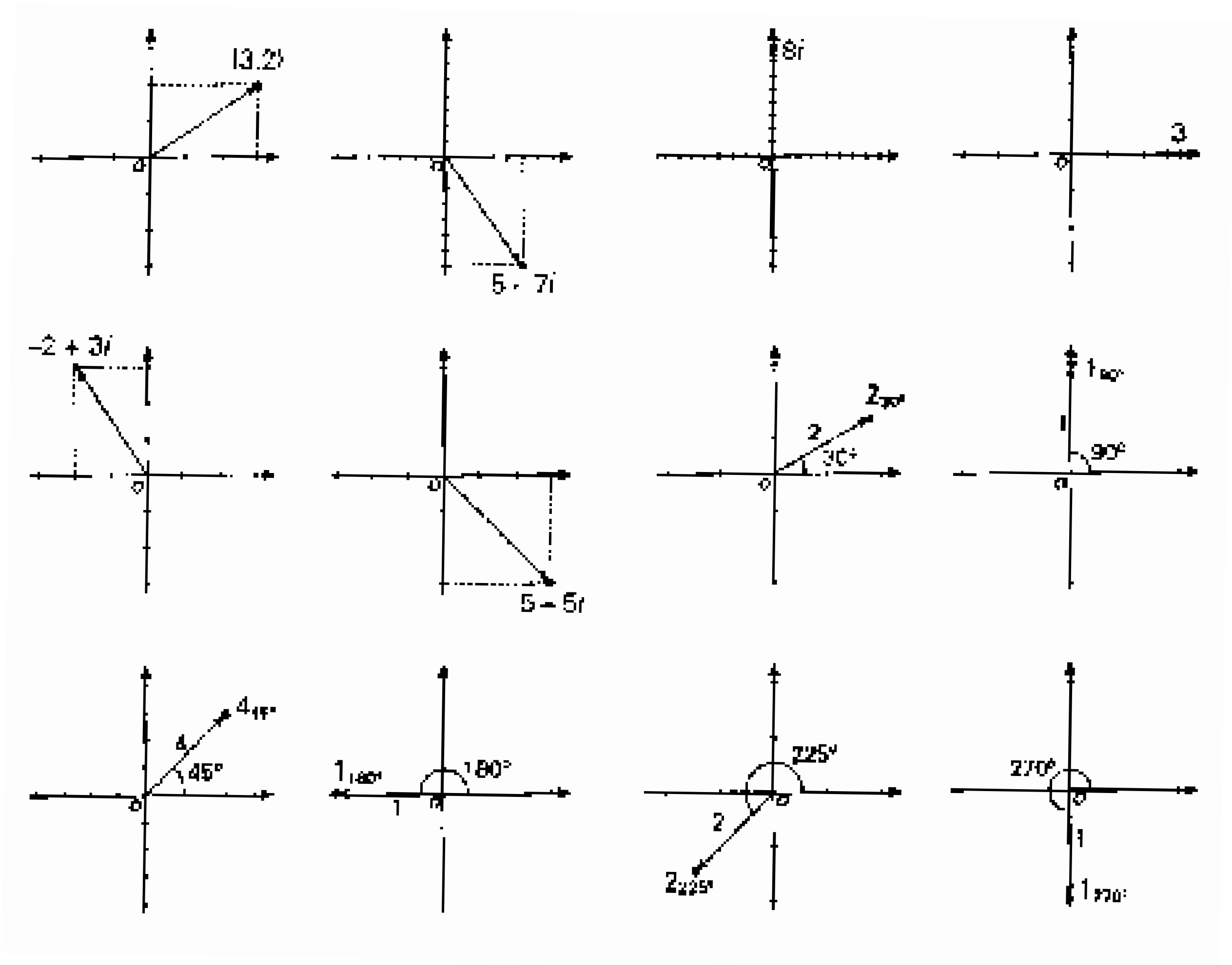
$$\frac{14a}{9a^2 + 1} = 0, \text{ entonces } a = 0.$$

7. La tabla queda del siguiente modo:

Afijo	**Forma binómica**	**Forma polar**	**Forma trigonométrica**
(2, 2)	2 + 2i	$\left(2\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$	$2\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\ sen\ 45^\circ)$
(1, - 1)	1 – i	$\sqrt{2}_{\,315^\circ}$	$\sqrt{2}\,(\cos 315^\circ + i\ sen\ 315^\circ)$
$\left(2\sqrt{3},\, 2\right)$	$2\sqrt{3} + 2i$	4_{30°	4 (cos 30º + i sen 30º)
$\left(-\sqrt{2},\, -\sqrt{2}\right)$	$-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$	2_{225°	2 (cos 225º + i sen 225º)

ACTIVIDADES-PÁG. 151

8. Las representaciones gráficas pueden verse a continuación:



9. Las soluciones son:

a) $2_{25^\circ} \cdot 3_{20^\circ} = 6_{45^\circ} = 6 \cdot (\cos 45^\circ + i\ sen\ 45^\circ) = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i$

b) $16_{76^\circ} : 4_{46^\circ} = 4_{30^\circ} = 4 \cdot (\cos 30^\circ + i\ sen\ 30^\circ) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\ \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$

c) $12_{93^\circ} : 3_{33^\circ} = 4_{60^\circ} = 4 \cdot (\cos 60^\circ + i\ sen\ 60^\circ) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

d) $\left(1_{30^\circ}\right)^3 = 1_{90^\circ} = 1 \cdot (\cos 90^\circ + i\ sen\ 90^\circ) = 1 \cdot (0 + i) = i$

e) $\left(4_{225^\circ}\right)^2 = 16_{90^\circ} = 16 \cdot (\cos 90^\circ + i\ sen\ 90^\circ) = 16 \cdot (0 + i) = 16i$

f) [6(cos 130º + i sen 130º)] · [3 (cos 80º + i sen 80º)] = $18 \cdot (\cos 210^{o} + i\ sen\ 210^{o}) =$

$$= 18 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2} \right) = -9\sqrt{3} - 9i$$

g) $[4 (\cos 20^{o} + i \operatorname{sen} 20^{o})]^3 = 4^3 \cdot (\cos 60^{o} + i\ sen\ 60^{o}) = 64 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 32 + 32\sqrt{3}i$

h) $\dfrac{4\ (\cos 330^{o} + i\ sen\ 330^{o})}{2\ (\cos 30^{o} + i\ sen\ 30^{o})} = 2 \cdot (\cos 300^{o} + i\ sen\ 300^{o}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - \sqrt{3}i$

10. Expresando los complejos a forma polar y operando, obtenemos:

a) $(-1-i)^7 \cdot (-2+2i)^5 = \left(\sqrt{2}_{225^{o}}\right)^7 \cdot \left(\sqrt{8}_{135^{o}}\right)^5 = 2^{11}_{7 \cdot 225^{o} + 5 \cdot 135^{o}} = 2^{11}_{2250^{o}} = 2048_{90^{o}}$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{20} = \left(1_{330^{o}}\right)^{20} = 1_{20 \cdot 330^{o}} = 1_{6600^{o}} = 1_{120^{o}}$

c) $\left(i^8 + i^5\right) : \sqrt{2}\,i = \dfrac{i^8 + i^5}{\sqrt{2}\,i} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}\,i} = \dfrac{\sqrt{2}_{45^{o}}}{\sqrt{2}_{90^{o}}} = 1_{315^{o}}$

d) $\left(\dfrac{4 - 4\sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} \right)^6 = \left(\dfrac{8_{300^{o}}}{2_{30^{o}}} \right)^6 = \left(4_{270^{o}}\right)^6 = 4^6_{6 \cdot 270^{o}} = 4096_{180^{o}}$

e) $i^{39} \cdot \left(-4 - 4\sqrt{3}i\right)^7 = 1_{270^{o}} \cdot \left(8_{240^{o}}\right)^7 = 8^7_{1950^{o}} = 8^7_{150^{o}}$

f) $i^{-73} \cdot \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i \right) = 1_{270^{o}} \cdot 3_{330^{o}} = 3_{600^{o}} = 3_{240^{o}}$

11. En el cálculo de las raíces obtenemos:

a) $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1_{90^{o}}} = 1_{\frac{90^{o} + 360^{o} \cdot k}{3}} = 1_{30^{o} + 120^{o} \cdot k}$; $con\ k = 0;\ 1\ y\ 2.$ Las raíces son: $1_{30^{o}}$; $1_{150^{o}}$ y $1_{270^{o}}$.

b) $\sqrt{\dfrac{9}{2} + \dfrac{9\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt{9_{60^{o}}} = 3_{\frac{60^{o} + 360^{o} \cdot k}{2}} = 3_{30^{o} + 180^{o} \cdot k}$; con k = 0 y 1. Las raíces son $3_{30^{o}}$ y $3_{210^{o}}$.

c) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^{o}}} = 3_{\frac{180^{o} + 360^{o} \cdot k}{3}} = 3_{60^{o} + 120^{o} \cdot k}$; con k = 0; 1 y 2. Las raíces son $3_{60^{o}}$; $3_{180^{o}}$ y $3_{300^{o}}$

d) $\sqrt[5]{\dfrac{-32}{i}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32_{90^\circ}} = 2_{\frac{90^\circ + 360^\circ \cdot k}{5}} = 2_{18^\circ + 72^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0; 1; 2; 3\ y\ 4.$

Las raíces son: 2_{18°; 2_{90°; 2_{162°; 2_{234° y 3_{306°

e) $\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{315^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{315^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = \sqrt[6]{2}_{105^\circ + 120^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0; 1\ y\ 2$

Las raíces son: $\sqrt[6]{2}_{105^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{225^\circ}$ y $\sqrt[6]{2}_{345^\circ}$.

f) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{\frac{270^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = 1_{90^\circ + 120^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0; 1\ y\ 2$

Las raíces son: 1_{90°; 1_{210° y 1_{330°

g) $\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \sqrt[8]{2}_{\frac{45^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}} = \sqrt[8]{2}_{11^\circ 15' + 90^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0; 1; 2\ y\ 3.$

Las raíces son: $\sqrt[8]{2}_{11^\circ 15'}$; $\sqrt[8]{2}_{101^\circ 15'}$; $\sqrt[8]{2}_{191^\circ 15'}$ y $\sqrt[8]{2}_{281^\circ 15'}$.

h) $\sqrt[4]{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \sqrt[4]{1_{150^\circ}} = 1_{\frac{150^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}}$ $;con k = 0;1;2\,y\,3.$

Las raíces son: $1_{37,5^\circ}$; $1_{127,5^\circ}$; $1_{217,5^\circ}$; y $1_{307,5^\circ}$

i) $\sqrt[6]{i} = \sqrt[6]{1_{90^\circ}} = 1_{\frac{90^\circ + 360^\circ \cdot k}{6}} = 1_{15^\circ + 60^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0; 1; 2; 3; 4\ y\ 5.$

Las raíces son: 1_{15°; 1_{75°; 1_{135°; 1_{195°; 1_{255° y 1_{315°

j) $\sqrt[3]{\dfrac{i^5 - i^{-5}}{2i}} = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1_{0^\circ}} = 1_{\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = 1_{120^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0; 1\ y\ 2.$

Las raíces son: 1_{0°; 1_{120° y 1_{240°.

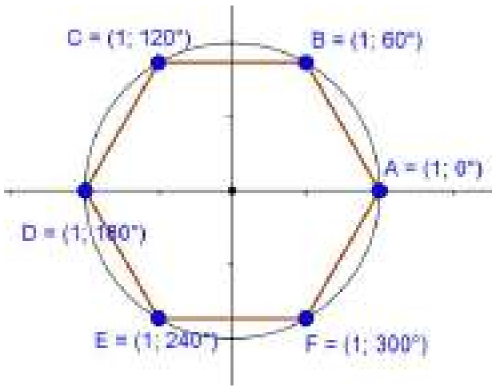
12. El cálculo de las raíces se describe a continuación y la representación gráfica puede verse en los dibujos.

a)

$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0^\circ}} = 1_{\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot k}{6}} = 1_{60^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0; 1; 2; 3; 4\ y\ 5.$

Las soluciones son: 1_{0°; 1_{60°; 1_{120°; 1_{180°; 1_{240° y 1_{300°

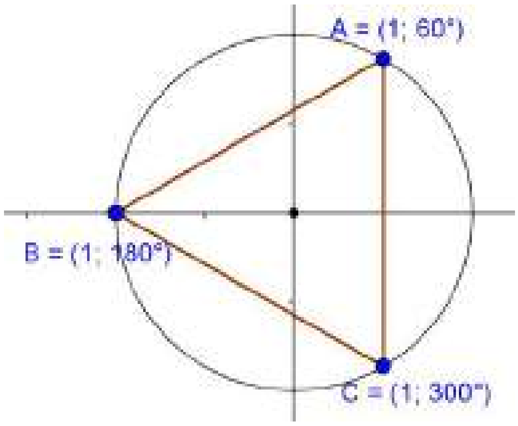
Gráficamente obtenemos los vértices de un hexágono regular centrado en el origen de coordenadas.



b) $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180^o}} = 1_{\frac{180^o + 360^o \cdot k}{3}} = 1_{60^o + 120^o \cdot k}$; $con\ k = 0; 1\ y\ 2$.

Las soluciones son: 1_{60^o}; 1_{180^o} y 1_{300^o}.

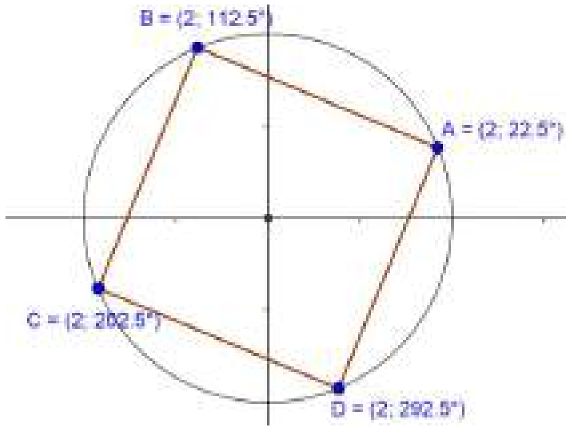
Gráficamente obtenemos los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen de coordenadas.



c) $\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16_{90^o}} = 2_{\frac{90^o + 360^o \cdot k}{4}} = 2_{22,5^o + 90^o \cdot k}$; $con\ k = 0; 1; 2\ y\ 3$.

Las soluciones son: $2_{22,5^o}$; $2_{112,5^o}$; $2_{202,5^o}$ y $2_{292,5^o}$

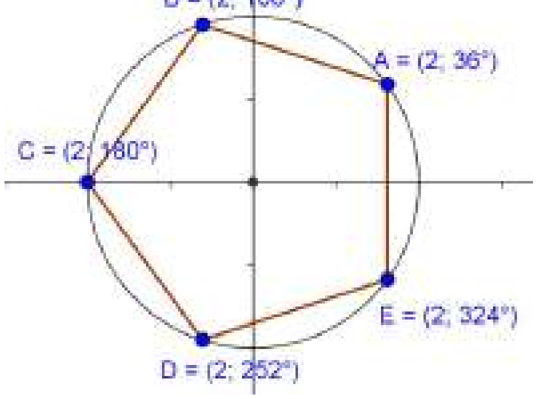
Gráficamente obtenemos los vértices de un cuadrado centrado en el origen de coordenadas.



d) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180^o}} = 2_{\frac{180^o + 360^o \cdot k}{5}} = 2_{22,5^o + 90^o \cdot k}$; $con\ k = 0; 1; 2; 3\ y\ 4$.

Las soluciones son: 2_{36^o}; 2_{108^o}; 2_{180^o}; 2_{252^o} y 2_{324^o}

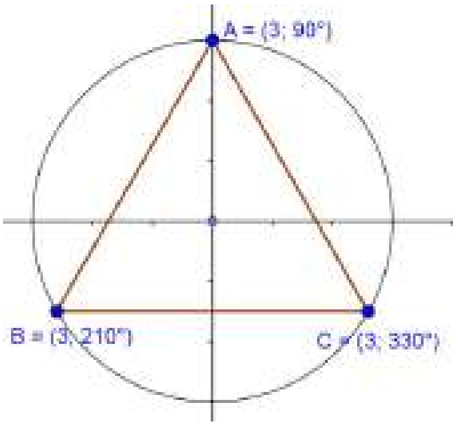
Gráficamente obtenemos los vértices de un pentágono regular centrado en el origen de coordenadas.



e) $\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = 3_{\frac{270^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = 1_{90^\circ + 120^\circ \cdot k}$; $con\ k = 0; 1\ y\ 2.$

Las soluciones son: 3_{90°; 3_{210° y 3_{330°.

Gráficamente obtenemos los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen de coordenadas.



13. Sustituyendo en la ecuación original cada una de las raíces, operamos y obtenemos:

a) $(2 + 3i)^2 - 8 \cdot (2 + 3i) + 13 = (-5 + 12i) - (8 + 12i) + 13 = (-5 - 8 + 13) + (12 - 12)i = 0$

$(2 - 3i)^2 - 8 \cdot (2 - 3i) + 13 = (-5 - 12i) - (8 - 12i) + 13 = (-5 - 8 + 13) + (-12 + 12)i = 0$

b) $(2 + 3i)^3 - 3 \cdot (2 + 3i)^2 + 9 \cdot (2 + 3i) + 13 = (-46 + 9i) - (-15 + 36i) + (18 + 27i) + 13 =$

$= (-46 + 15 + 18 + 13) + (9 - 36 + 27)i = 0$

$(2 - 3i)^3 - 3 \cdot (2 +-3i)^2 + 9 \cdot (2 - 3i) + 13 = (-46 - 9i) - (-15 - 36i) + (18 - 27i) + 13 =$

$= (-46 + 15 + 18 + 13) + (-9 + 36 - 27)i = 0$

14. Toda ecuación de segundo grado se puede construir del siguiente modo a partir de sus soluciones:

$$z^2 - S \cdot z + P = 0$$

siendo S la suma de sus soluciones y P el producto.

a) $\begin{cases} S = i + (-i) = 0 \\ P = i \cdot (-i) = -i^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow z^2 + 1 = 0$

b) $\begin{cases} S = (2 + 2i) + (2 - 2i) = 4 \\ P = (2 + 2i) \cdot (2 - 2i) = 8 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 4z + 8 = 0$

c) $\begin{cases} S = (2 + 3i) + (2 - 3i) = 4 \\ P = (2 + 3i) \cdot (2 - 3i) = 13 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 4z + 13 = 0$

d) $\begin{cases} 2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ 2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 2\sqrt{2} \\ P = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) = 4 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

15. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

b) $z^3 - 6z^2 + 10z - 8 = 0 \Rightarrow (z-4) \cdot (z^2 - 2z + 2) = 0 \Rightarrow z_0 = 4;\ z_1 = 1 + i\ y\ z_2 = 1 - i$

c) $z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180^\circ}} = 1_{\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}} = 1_{45^\circ + 90^\circ \cdot k}$ *con* $k = 0; 1; 2\ y\ 3.$

Dando valores a k, obtenemos: $z_0 = 1_{45^\circ}$; $z_1 = 1_{135^\circ}$; $z_2 = 1_{225^\circ}$ y $z_3 = 1_{315^\circ}$.

d) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (z+1) \cdot (z^4 + z^2 + 1) = 0 \Rightarrow z = -1;\ z^2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \equiv 1_{120^\circ};\ z^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \equiv 1_{240^\circ}$

Resolviendo las ecuaciones de segundo grado, obtenemos:

$z_0 = 1_{180^\circ}$; $z_1 = 1_{60^\circ}$; $z_2 = 1_{240^\circ}$; $z_3 = 1_{120^\circ}$ y $z_4 = 1_{300^\circ}$.

e) $z^6 - 64 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0^\circ}} = 2_{\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot k}{6}} = 2_{60^\circ \cdot k}$ *con* $k = 0; 1; 2; 3; 4\ y\ 5.$

Dando valores a k, obtenemos: $z_0 = 2_{0^\circ}$; $z_1 = 2_{60^\circ}$; $z_2 = 2_{120^\circ}$; $z_3 = 2_{240^\circ}$ y $z_5 = 2_{300^\circ}$.

f) $z^4 + 81 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}} = 3_{45^\circ + 90^\circ \cdot k}$ *con* $k = 0; 1; 2\ y\ 3.$

Dando valores a k, obtenemos: $z_0 = 3_{45^\circ}$; $z_1 = 3_{135^\circ}$; $z_2 = 3_{225^\circ}$ y $z_3 = 3_{315^\circ}$.

16. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{120^\circ} \\ z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{240^\circ} \end{cases}$

b) $z^2 - \sqrt{12}\,z + 4 = 0 \;\Rightarrow\; z = \dfrac{\sqrt{12} \pm \sqrt{12-16}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i \;\Rightarrow\; \begin{cases} z_1 = \sqrt{3} + i = 2_{30^\circ} \\ z_2 = \sqrt{3} - i = 2_{330^\circ} \end{cases}$

c) $z^2 + iz + 2 = 0 \;\Rightarrow\; z = \dfrac{-i \pm \sqrt{i^2 - 8}}{2} = \dfrac{-i \pm \sqrt{-9}}{2} = \dfrac{-i \pm 3i}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} z_1 = i = 1_{90^\circ} \\ z_2 = -2i = 2_{270^\circ} \end{cases}$

d) $z^6 - 28z^3 + 27 = 0 \;\Rightarrow\; z^3 = \dfrac{28 \pm \sqrt{784 - 108}}{2} = \dfrac{28 \pm 26}{2} = \begin{cases} z_1^3 = 27 \\ z_2^3 = 1 \end{cases}$

Para cada una de las soluciones anteriores:

- $z^3 = 27 \;\Rightarrow\; z = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27_{0^\circ}} = 3_{120^\circ \cdot k} \;\Rightarrow\; z_0 = 3_{0^\circ};\; z_1 = 3_{120^\circ} \;y\; z_2 = 3_{240^\circ}$
- $z^3 = 1 \;\Rightarrow\; z = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1_{0^\circ}} = 1_{120^\circ \cdot k} \;\Rightarrow\; z_0 = 1_{0^\circ};\; z_1 = 1_{120^\circ} \;y\; z_2 = 1_{240^\circ}$

e) $z^3 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = 1_{60^\circ + 120^\circ \cdot k} \;\Rightarrow\; z_0 = 1_{60^\circ};\; z_1 = 1_{180^\circ} \;y\; z_2 = 1_{300^\circ}$

f) $z^3 - 64i = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \sqrt[3]{64i} = \sqrt[3]{64_{90^\circ}} = 4_{\frac{90^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} = 4_{30^\circ + 120^\circ \cdot k} \;\Rightarrow\; z_0 = 4_{30^\circ};\; z_1 = 4_{150^\circ} \;y\; z_2 = 4_{270^\circ}$

17. Las demostraciones quedan:

- $(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^2 = (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) + (2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)\,i = \cos 2\alpha + i\,\text{sen}\,2\alpha \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\,\alpha \\ sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

- $(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^4 = (\cos^4\alpha + \text{sen}^4\alpha - 6\cos^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha) + (4\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha - 4\text{sen}^3\alpha \cdot \cos\alpha)\,i =$

$$= \cos 4\alpha + i\,sen\,4\alpha \;\Rightarrow\; \begin{cases} \cos 4\alpha = \cos^4\alpha + sen^4\,\alpha - 6\cos^2\alpha \cdot sen^2\,\alpha \\ sen\,4\alpha = 4\,sen\,\alpha \cdot \cos^3\alpha - 4\,sen^3\,\alpha \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

18. Las soluciones de las cuestiones son:

a) $$\begin{cases} (a+bi) + (c+di) = 5 - 3i \\ \dfrac{a+bi}{c-di}\ imaginario\ puro \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 5 \\ b + d = -3 \\ bd + 4c = 0 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases} \;o\; \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = -4 \end{cases}$$

Los números complejos son: 4 – 4i y 1 + i o bien 4 + i y 1 – 4i.

b) Sea z el número complejo buscado. Se cumple: $\frac{1}{z} = -z$

De aquí obtenemos que $z^2 = -1$; $z = \pm i$.

c) Sea z = a + b i $\neq 0$. Se cumple: $z^2 = \bar{z}$.

De aquí obtenemos:

$$(a+bi)^2 = a-bi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos los números complejos:

$$z_1=1;\ z_2= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ z_3= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ACTIVIDADES-PÁG. 152

19. Queda:

$$\sqrt[3]{z} = 5i \quad \Rightarrow \quad z = 125i^3 \quad \Rightarrow \quad z = -125i$$

Las otras raíces son:

$$\sqrt[3]{-125i} = \sqrt[3]{125_{270^\circ}} = 5_{90^\circ + 120^\circ k} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z_0 = 5_{90^\circ} = 5i; \quad z_1 = 5_{210^\circ} = \frac{-5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i; \quad z_2 = 5_{330^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$$

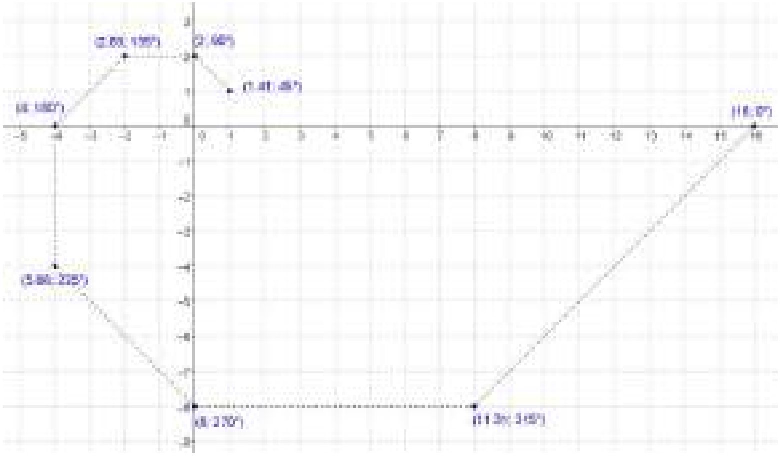
20. a) Las potencias sucesivas son:

$z = 1 + i = (\sqrt{2})_{45^\circ}$ $\qquad z^2 = (1+i)^2 = 2i = 2_{90^\circ}$ $\qquad z^3 = (1+i)^3 = (2\sqrt{2})_{135^\circ}$

$z^4 = (1+i)^4 = 4_{180^\circ}$ $\qquad z^5 = (1+i)^5 = (4\sqrt{2})_{225^\circ}$ $\qquad z^6 = (1+i)^6 = 8_{270^\circ}$

$z^7 = (1+i)^7 = (8\sqrt{2})_{315^\circ}$ $\qquad z^8 = (1+i)^8 = 16_{360^\circ}$

Los afijos se encuentran en una espiral que se aleja del origen de coordenadas.



b) Las primeras potencias del complejo $u = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$ son:

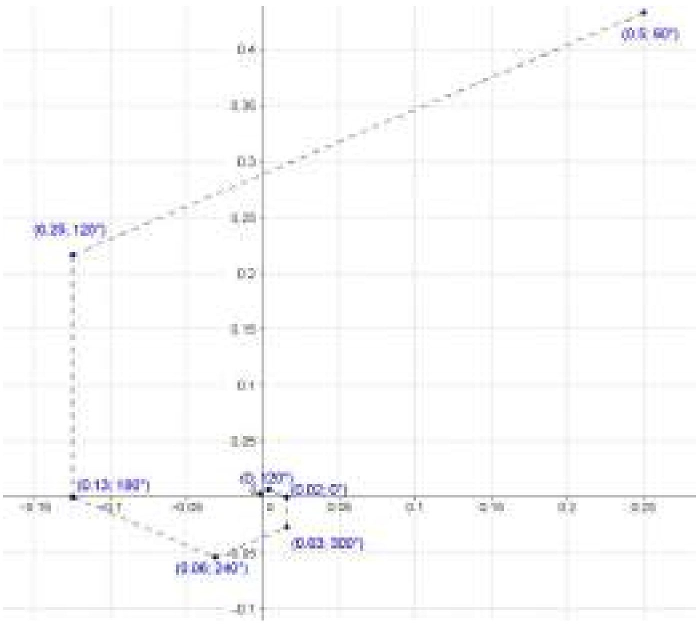
$$u = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i = \left(\frac{1}{2}\right)_{60^o} \qquad u^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)_{120^o}$$

$$u^3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)_{180^o} \qquad u^4 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^4 = \left(\frac{1}{16}\right)_{240^o}$$

$$u^5 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^5 = \left(\frac{1}{32}\right)_{300^o} \qquad u^6 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^6 = \left(\frac{1}{64}\right)_{360^o}$$

$$u^7 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^7 = \left(\frac{1}{128}\right)_{420^o} \qquad u^8 = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right)^{68} = \left(\frac{1}{256}\right)_{480^o}$$

Los afijos se encuentran en una espiral que se acerca del origen de coordenadas.



c) Las primeras potencias del complejo $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ son:

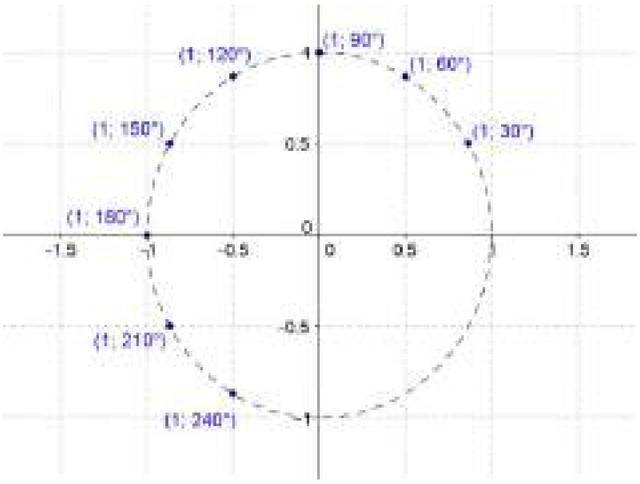
$$w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1_{30^\circ} \qquad w^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = 1_{60^\circ}$$

$$w^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3 = 1_{90^\circ} \qquad w^4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^4 = 1_{120^\circ}$$

$$w^5 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^5 = 1_{150^\circ} \qquad w^6 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^6 = 1_{180^\circ}$$

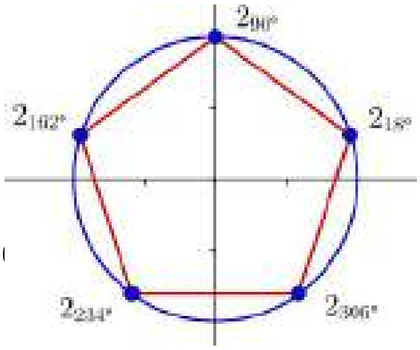
$$w^7 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^7 = 1_{210^\circ} \qquad w^8 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^8 = 1_{240^\circ}$$

Los afijos se encuentran sobre una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 1.



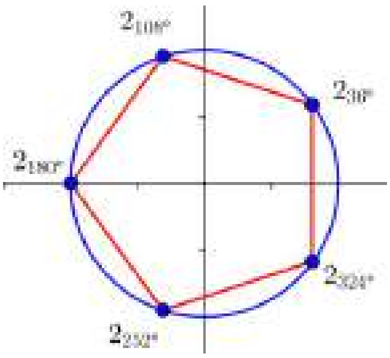
21. Los vértices del primer pentágono regular son:

$$2_{18^\circ};\ 2_{90^\circ};\ 2_{162^\circ};\ 2_{234^\circ};\ 2_{306^\circ}$$



Las coordenadas cartesianas de los vértices son:

$$(1{,}90;\ 0{,}62);\ (0,\ 2);\ (-1{,}90;\ 0{,}62);\ (-1{,}18;\ -1{,}62);\ (1{,}18;\ -1{,}$$



Los vértices del segundo pentágono regular son:

$$2_{36^\circ};\ 2_{108^\circ};\ 2_{180^\circ};\ 2_{252^\circ};\ 2_{324^\circ}$$

Las coordenadas cartesianas de los vértices son:

$$(1{,}62;\ 1{,}18);\ (-0{,}62;\ 1{,}90);\ (-2,\ 0);\ (-0{,}62;\ -1{,}90);\ (1{,}62;\ -1{,}18).$$

22. Los vértices del cuadrado son:

$$2_{90^\circ};\ 2_{180^\circ};\ 2_{270^\circ};\ 2_{0^\circ}.$$

Las coordenadas de los vértices son;

$$(0,\ 2);\ (-\ 2,\ 0);\ (0,\ -\ 2);\ (2,\ 0).$$

23. La solución queda:

● Se obtiene el número complejo girado 90º, es decir, si el número complejo tiene como afijo (a, b) obtenemos, al multiplicar por i, el número complejo de afijo (- b, a).

● Al dividir por el número complejo i, se obtiene el mismo número complejo girado 270º.

$$\frac{a+bi}{i} = b - ai\text{ . Su afijo es (b, a).}$$

24. Los vértices del cuadrado son: (3, 4); (- 4, 3); (- 3, - 4) y (4, - 3).

25. Quedaría del siguiente modo:

Sea el complejo z = a + b i.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Su\ módulo\ es\ \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{1}{|z|} \\ Su\ \arg umento\ tg\ \alpha = \dfrac{-b}{a}\ (es\ el\ opuesto\ del\ \arg umento\ de\ z) \end{cases}$$

Gráficamente el inverso de z se obtiene por una homotecia de razón $k = \dfrac{1}{|z|}$ y ángulo (- arg z).

26. Los vértices de la figura se obtienen de la siguiente expresión:

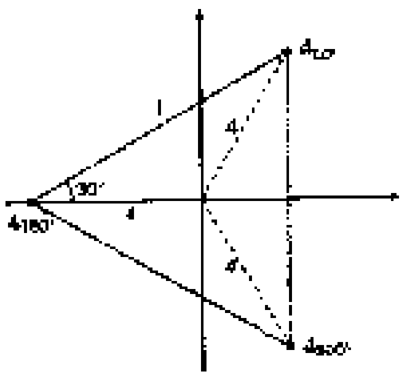
$$\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{64_{180^\circ}} = 4_{\frac{180^\circ + 360^\circ K}{3}} = 4_{60^\circ + 120^\circ K} \quad \Rightarrow \quad 4_{60^\circ};\ 4_{180^\circ};\ 4_{300^\circ}$$

Calculamos el lado L mediante el teorema del coseno:

$L^2 = 4^2$ `$+ 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ \quad \Rightarrow \quad L = 6{,}93$ u.

El perímetro mide $3 \cdot L = 20{,}78$ u.

El área es $A = \dfrac{L \cdot \dfrac{L\cdot\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}L^2 = 20{,}78\ u^2$.

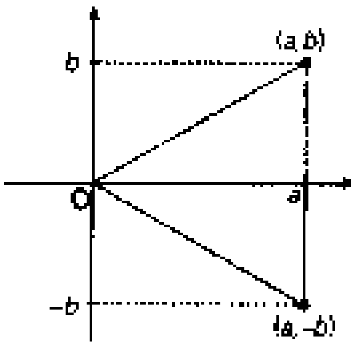


27. La solución queda:

$$z^4 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4_{180^\circ}} = \sqrt{2}_{\frac{180^\circ + 360^\circ K}{4}} = \sqrt{2}_{45^\circ + 90^\circ K}$$

Los vértices son: $\sqrt{2}_{45^\circ} = 1 + i$; $\quad \sqrt{2}_{135^\circ} = -1 + i$; $\quad \sqrt{2}_{225^\circ} = -1 - i$; $\quad \sqrt{2}_{315^\circ} = 1 - i$

28. Sean los complejo (a + b i) y (a – b i). El triángulo que se forma es el de la figura.



Para que sea equilátero se debe cumplir que $\sqrt{a^2 + b^2} = 2b$.

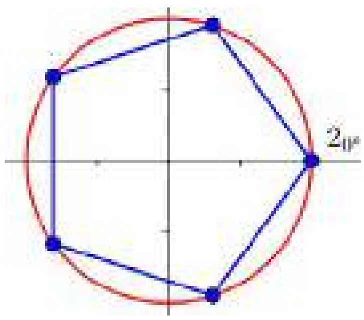
Para que su área sea $2\sqrt{3}$ se debe cumplir $\dfrac{2b \cdot a}{2} = 2\sqrt{3}$.

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 2b \\ ab = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3b^2 \\ ab = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{6} \\ b = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Los complejos son: $\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\, i\right)\, y \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\, i\right) \quad o \quad \left(-\sqrt{6} - \sqrt{2}\, i\right) y \left(-\sqrt{6} + \sqrt{2}\, i\right)$.

29. a) Calculamos el lado L del pentágono mediante el teorema del coseno:



$$L^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 72^\circ \quad \Rightarrow \quad L = 2{,}35 \text{ u.}$$

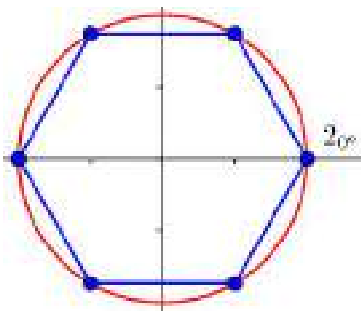
El perímetro mide 5 · L = 11,76 u.

Calculamos la apotema:

$$\cos 36^\circ = \frac{ap}{2} \quad \Rightarrow \quad ap = 2 \cdot \cos 36^\circ = 1{,}62\ u.$$

El área es $A = \dfrac{11{,}76 \cdot 1{,}62}{2} = 9{,}53\ u^2$

b) Calculamos el lado L del hexágono mediante el teorema del coseno:



$$L^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad L = 2 \text{ u.}$$

El perímetro mide 6 · L = 12 u.

Calculamos la apotema:

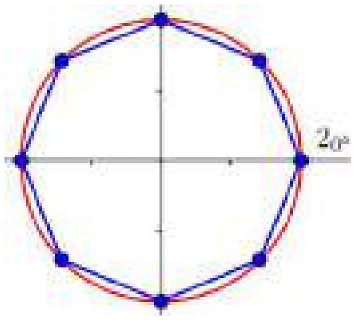
$$\cos\ 30^{o} = \frac{ap}{2} \quad \Rightarrow \quad ap = 2 \cdot \cos 30^{o} = 1{,}73\ u.$$

El área es $A = \dfrac{12 \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38\ u^2$

c) Calculamos el lado L del octógono mediante el teorema del coseno:

$L^2 = 2^2$ `$+ 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 45^{o} \quad \Rightarrow \quad L = 1{,}53$ u.

El perímetro mide $8 \cdot L = 12{,}25$ u.



Calculamos la apotema:

$$\cos\ 22{,}5^{o} = \frac{ap}{2} \quad \Rightarrow \quad ap = 2 \cdot \cos 22{,}5^{o} = 1{,}85\ u.$$

El área es $A = \dfrac{12{,}24 \cdot 1{,}85}{2} = 11{,}32\ u^2$

ACTIVIDADES-PÁG. 153

a) Las soluciones de la ecuación $z^7 = 1$ son:

$$z^7 = 1 \ \Rightarrow\ z = \sqrt[7]{1_0} \ \Rightarrow\ z = 1_{\frac{0\,+\,2k\pi}{7}} \ \ con\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ y\ 6$$

Las siete soluciones son: $z_0 = 1_0,\ z_1 = 1_{\frac{2\pi}{7}},\ z_2 = 1_{\frac{4\pi}{7}},\ z_3 = 1_{\frac{6\pi}{7}},\ z_4 = 1_{\frac{8\pi}{7}},\ z_5 = 1_{\frac{10\pi}{7}},\ z_6 = 1_{\frac{12\pi}{7}}$.

b) Hallamos las raíces del polinomio $z^2 - 2z\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + 1$, es decir, las soluciones de la ecuación $z^2 - 2z\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + 1 = 0$.

Las soluciones son:

$$z = \frac{2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \pm \sqrt{4\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 4}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \pm i\,sen\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\ sen\left(\frac{2\pi}{7}\right) = 1_{\frac{2\pi}{7}} = z_1 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - i\ sen\left(\frac{2\pi}{7}\right) = 1_{\frac{12\pi}{7}} = z_6 \end{cases}$$

Observamos que coinciden con las soluciones z_1 y z_6 de la ecuación $z^7 = 1$.

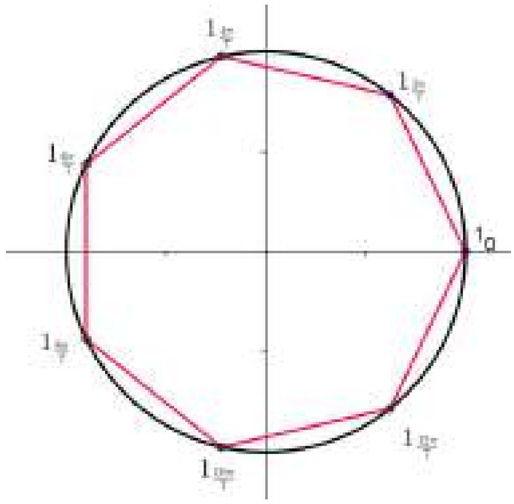
Los otros factores cuadráticos con coeficientes reales son:

$(z - z_2) \cdot (z - z_5) = z^2 - (z_2 + z_5)\, z + z_2 \cdot z_5 = z^2 - 2z\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 1$

$(z - z_3) \cdot (z - z_4) = z^2 - (z_3 + z_3)\, z + z_3 \cdot z_4 = z^2 - 2z\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + 1$

c) La factorización buscada es:

$$P_7(z) = z^7 - 1 = (z-1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+1\right)\cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)+1\right)$$



Las siete raíces del polinomio $P_7(z) = z^7 - 1$ están situadas sobre la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio unidad, y son los vértices de un heptágono regular.

Todo lo anterior puede verse en el dibujo.

d) Las factorizaciones de los polinomios $P_n(z) = z^n - 1$ con n impar son:

$P_3(z) = z^3 - 1 = (z-1)\cdot(z^2 + z + 1)$

$$P_5(z) = z^5 - 1 = (z-1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+1\right)$$

$$P_7(z) = z^7 - 1 = (z-1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)+1\right)$$

…

$$P_n(z) = z^n - 1 = (z-1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)+1\right)$$

Las factorizaciones de los polinomios $P_n(z) = z^n - 1$ con n par son:

$P_2(z) = z^2 - 1 = (z-1)\cdot(z+1)$

$P_4(z) = z^4 - 1 = (z-1)\cdot(z+1)\cdot(z^2+1)$

$$P_6(z) = z^6 - 1 = (z-1)\cdot(z+1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+1\right)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+1\right)$$

$$P_8(z) = z^8 - 1 = (z-1)\cdot(z+1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1\right)\cdot(z^2+1)\cdot\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+1\right)$$

…

$P_n(z) = z^n - 1 = (z - 1) \cdot (z + 1) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right) + 1\right)$

e) Las factorizaciones de los polinomios $Q_n(z) = z^n + 1$ con n impar son:

$Q_3(z) = z^3 + 1 = (z + 1) \cdot (z^2 - z + 1)$

$Q_5(z) = z^5 + 1 = (z + 1) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 1\right)$

$Q_7(z) = z^7 + 1 = (z + 1) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + 1\right)$

…

$Q_n(z) = z^n + 1 = (z + 1)\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1\right)\ldots\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right) + 1\right)$

Las factorizaciones de los polinomios $Q_n(z) = z^n + 1$ con n par son:

$Q_2(z) = z^2 + 1$

$Q_4(z) = z^4 + 1 = \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1\right)$

$Q_6(z) = z^6 + 1 = \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 1\right)$

$Q_8(z) = z^8 + 1 = \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + 1\right) \cdot$

$\cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + 1\right)$

…

$Q_n(z) = z^n + 1 = \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{3\pi}{n}\right) + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) + 1\right)$

f) Las raíces de los polinomios $P_n(z) = z^n - 1$ y $Q_n = z^n + 1$ están situadas sobre la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio unidad, y son los vértices de polígonos regulares.

En los dibujos pueden verse las raíces de los polinomios $P_6 = z^6 - 1$ y $Q_6 = z^6 + 1$, respectivamente.