Ecuaciones e inecuaciones

2

ACTIVIDADES

1. Escribe un polinomio de grado 3 y con término independiente −1. Determina sus términos y su valor numérico para $x = 2$ y $x = -2$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$P(x) = 2x^3 + 3x - 1 \rightarrow \begin{cases} P(2) = 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2 - 1 = 21 \\ P(-2) = 2\cdot(-2)^3 + 3\cdot(-2) - 1 = -23 \end{cases}$$

2. Efectúa la siguiente operación de polinomios.

$$(-2x^3 + x^2 + x - 1)(x - 2) + (3x + 1)(x + 3)$$

$$(-2x^3 + x^2 + x - 1)(x - 2) + (3x + 1)(x + 3) = -2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 7x + 5$$

3. Dados los siguientes polinomios, calcula.

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad Q(x) = 3x^2 - 2x - 2$$

a) $P(1) + P(-1)$

b) $P(0) - 2Q(0)$

c) $P(3) + Q(2)$

d) $P(-2) \cdot Q(-2)$

e) $P(-1) - 3Q(-1)$

f) $Q(-4) + 4Q(1)$

a) $P(1) + P(-1) = -1 - 3 = -4$

b) $P(0) - 2Q(0) = 1 + 4 = 5$

c) $P(3) + Q(2) = 1 + 6 = 7$

d) $P(-2)\cdot Q(-2) = (-19)\cdot 14 = -266$

e) $P(-1) - 3Q(-1) = -3 - 9 = -12$

f) $Q(-4) + 4Q(1) = 54 - 4 = 50$

4. Realiza estas divisiones de polinomios.

a) $(10x^4 - 3x^2 + 1) : (x^2 - 1)$

b) $(6x^3 + 5x) : (2x^2)$

a) $(10x^4 - 3x^2 + 1) : (x^2 - 1) = 10x^2 + 7$ y el resto es 8.

b) $(6x^3 + 5x) : (2x^2) = 3xy$ y el resto es $5x$.

5. Divide estos polinomios utilizando la regla de Ruffini.

a) $(x^3 + 3) : (x + 1)$

b) $(4x^5 - 12x^3 - 20x + 2) : (x + 2)$

a) $(x^3 + 3) : (x + 1) = x^2 - x + 1$ y el resto es 2.

	1	0	0	3
−1		−1	1	−1
	1	−1	1	2

b) $(4x^5 - 12x^3 - 20x + 2) : (x + 2) = 4x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 8x - 4$ y el resto es 10.

	4	0	−12	0	−20	2
−2		−8	16	−8	16	8
	4	−8	4	−8	−4	10

6. **Comprueba si los siguientes números son raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.**

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = -4$

a) $P(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 8 = 0$

Por tanto, $x = 1$ es una raíz del polinomio.

b) $P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = 36$

c) $P(-1) = (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 8 = -18$

d) $P(-4) = (-4)^4 + 3 \cdot (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 8 = 0$

Por tanto, $x = -4$ es una raíz del polinomio.

7. **Calcula las raíces enteras de los polinomios que aparecen a continuación.**

a) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2$ b) $x^3 - 5x^2 - 29x + 105$

a) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(x^3 + 4x^2 + x - 6) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$

	1	4	1	−6
1		1	5	6
	1	5	6	0
−2		−2	−6	
	1	3	0	
−3		−3		
	1	0		

Las raíces enteras son {−3, −2, 0, 1}.

b) Se aplica Ruffini directamente:

	1	−5	−29	105
7		7	14	−105
	1	2	−15	0
−5		−5	15	
	1	−3	0	
3		3		
	1	0		

Las raíces enteras son {−5, 3, 7}.

8. **Factoriza estos polinomios.**

a) $2x^4 - 2x^2$ b) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4x$

a) $2x^4 - 2x^2 = 2x^2(x-1)(x+1)$

b) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2(x^2+1)$

9. **Encuentra las raíces enteras de estos polinomios.**

a) $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 18x$ b) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$

a) $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 18x = x\left(2x^3 - 13x^2 + 27x - 18\right) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18 = 0 \end{cases}$

	2	−13	27	−18
2		4	−18	18
	2	−9	9	0
3		6	−9	
	2	−3	0	

La última raíz no es entera: $2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$ Entonces, las raíces enteras son {0, 2, 3}.

b) Se aplica Ruffini directamente:

	3	−7	−7	3
−1		−3	10	−3
	3	−10	3	0
3		9	−3	
	3	−1	0	

La última raíz no es entera: $3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$ Entonces, las raíces enteras son {−1, 3}.

10. **Simplifica estas fracciones algebraicas.**

a) $\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$ b) $\frac{2x^2 + 2x - 12}{4x + 12}$

a) $\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$ b) $\frac{2x^2 + 2x - 12}{4x + 12} = \frac{2(x-2)(x+3)}{4(x+3)} = \frac{x-2}{2}$

11. **Reduce a común denominador estas fracciones.**

$$\frac{5}{x^2 + 2x - 3} \qquad \frac{3x}{x^2 - 1} \qquad \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

m.c.m. $(x^2 + 2x - 3,\ x^2 - 1,\ x^2 + 2x + 1) = (x+1)^2(x+3)(x-1)$

$\frac{5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{5(x+1)^2}{(x+1)^2(x+3)(x-1)}$ $\frac{3x}{x^2 - 1} = \frac{3x(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-1)}$ $\frac{x-1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x-1)^2(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-1)}$

12. **Opera y simplifica.**

$$\frac{3}{3x^2 + 6x} + \frac{1}{x} - \frac{2 - x}{6x + 12}$$

$\frac{3}{3x^2 + 6x} + \frac{1}{x} - \frac{2 - x}{6x + 12} = \frac{x^2 + 4x + 18}{6x(x + 2)}$

13. **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\frac{5}{x^2 + 2x - 3} \cdot \frac{x^2 - 1}{3x}$ b) $\frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1} : \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

a) $\frac{5}{x^2 + 2x - 3} \cdot \frac{x^2 - 1}{3x} = \frac{5(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1) \cdot 3x} = \frac{5x + 5}{3x^2 + 9x}$

b) $\frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1} : \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$

14. **Clasifica y resuelve estas ecuaciones de segundo grado.**

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$

b) $3x^2 + 20x + 12 = 0$

c) $3x^2 + 9x - 4 = 0$

d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

e) $3x^2 - 18x = 0$

f) $4x^2 - 36 = 0$

g) $-8x^2 + 40 = 0$

h) $-5x^2 + 30x = 0$

a) Ecuación completa:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \to x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1}$$

$$\to x = \frac{10 \pm 4}{2} \to \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) Ecuación completa:

$$3x^2 + 20x + 12 = 0 \to x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3}$$

$$\to x = \frac{-20 \pm 16}{6} \to \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3} \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

c) Ecuación completa:

$$3x^2 + 9x - 4 = 0 \to x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3}$$

$$\to x = \frac{-9 \pm \sqrt{129}}{6} \to \begin{cases} x_1 = \dfrac{-9 + \sqrt{129}}{6} = 0{,}39 \\ x_2 = \dfrac{-9 - \sqrt{129}}{6} = -3{,}39 \end{cases}$$

d) Ecuación completa:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \to x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4}$$

$$\to x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

e) Ecuación incompleta:

$3x^2 - 18x = 0 \to 3x(x - 6) = 0 \to x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$

f) Ecuación incompleta:

$4x^2 - 36 = 0 \to x = \sqrt{9} \to x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

g) Ecuación incompleta:

$-8x^2 + 40 = 0 \to x = \sqrt{5}$

h) Ecuación incompleta:

$-5x^2 + 30x = 0 \to 5x(-x + 6) = 0 \to x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$

15. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $x^2 + 2x = 15$

b) $2x^2 = 7x + 2$

c) $3x^2 - 3 = 20 - 2(x - 5)$

d) $8x^2 + (2 - x)(5x + 1) = 15x + (3 + x)(x - 1) - 3$

a) $x^2 + 2x = 15 \to x^2 + 2x - 15 = 0 \qquad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} \to x = \dfrac{-2 \pm 8}{2} \to \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

b) $2x^2 = 7x + 2 \to 2x^2 - 7x - 2 = 0 \qquad x = \dfrac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \to x = \dfrac{7 \pm \sqrt{65}}{4} \to \begin{cases} x_1 = \dfrac{7 - \sqrt{65}}{4} = -0{,}27 \\ x_2 = \dfrac{7 + \sqrt{65}}{4} = 3{,}77 \end{cases}$

c) $3x^2-3=20-2(x-5)\rightarrow 3x^2+2x-33=0$ $\qquad x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot3\cdot(-33)}}{2\cdot3}\rightarrow x=\dfrac{-2\pm20}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{11}{3}\\ x_2=3\end{cases}$

d) $8x^2+(2-x)(5x+1)=15x+(3+x)(x-1)-3\rightarrow 2x^2-8x+8=0$ $\qquad x=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot2\cdot8}}{2\cdot2}\rightarrow x=\dfrac{8\pm0}{4}\rightarrow x=2$

16. Determina el número de soluciones que tiene cada ecuación sin resolverla.

a) $-2x^2+5x-8=0$
b) $9x^2+30x+25=0$
c) $-5x^2+9x-6=0$
d) $2x^2-x-3=0$
e) $-x^2+9x-2=0$
f) $0{,}34x^2+0{,}5x-1=0$

Calculamos el discriminante:

a) $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\cdot(-2)\cdot(-8)=-39<0$. No tiene solución real.
b) $\Delta=b^2-4ac=30^2-4\cdot9\cdot25=0$. Tiene una solución.
c) $\Delta=b^2-4ac=9^2-4\cdot(-5)\cdot(-6)=-39<0$. No tiene solución real.
d) $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-3)=25>0$. Tiene dos soluciones.
e) $\Delta=b^2-4ac=9^2-4\cdot(-1)\cdot(-2)=73>0$. Tiene dos soluciones.
f) $\Delta=b^2-4ac=0{,}5^2-4\cdot0{,}34\cdot(-1)=1{,}61>0$. Tiene dos soluciones.

17. Resuelve las ecuaciones bicuadradas que aparecen a continuación.

a) $x^4+5x^2-36=0$
b) $x^4-x^2+2=16x^2-14$
c) $11(x^4+1)-7=25x^2(1-x^2)$

a) $x^4+5x^2-36=0\rightarrow z^2+5z-36=0$ $\qquad z=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot(-36)}}{2\cdot1}\rightarrow z=\dfrac{-5\pm13}{2}\rightarrow\begin{cases}z_1=-9\\ z_2=4\end{cases}$

$z_1=-9\rightarrow x^2=-9\rightarrow$ No tiene solución real. $\qquad z_2=4\rightarrow x_1=-2\quad x_2=2$

b) $x^4-x^2+2=16x^2-14\rightarrow x^4-17x^2+16=0\rightarrow z^2-17z+16=0$

$$z=\frac{17\pm\sqrt{(-17)^2-4\cdot1\cdot16}}{2\cdot1}\rightarrow z=\frac{17\pm15}{2}\rightarrow\begin{cases}z_1=1\\ z_2=16\end{cases}$$

$z_1=1\rightarrow x_1=-1\quad x_2=1$ $\qquad z_2=16\rightarrow x_3=-4\quad x_4=4$

c) $11(x^4+1)-7=25x^2(1-x^2)\rightarrow 36x^4-25x^2+4=0\rightarrow 36z^2-25z+4=0$

$$z=\frac{25\pm\sqrt{(-25)^2-4\cdot4\cdot36}}{2\cdot36}\rightarrow z=\frac{25\pm7}{72}\rightarrow\begin{cases}z_1=\dfrac{1}{4}\\ z_2=\dfrac{4}{9}\end{cases}$$

$z_1=\dfrac{1}{4}\rightarrow x_1=-\dfrac{1}{2}\quad x_2=\dfrac{1}{2}$ $\qquad z_2=\dfrac{4}{9}\rightarrow x_3=-\dfrac{2}{3}\quad x_4=\dfrac{2}{3}$

18. Resuelve estas ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ b) $\dfrac{2x^4+4}{x^4}=\dfrac{x^2-3}{x^2}+2$

a) $\frac{x+1}{x-1}-1=\frac{1}{x}\to\frac{x(x+1)}{x(x-1)}-\frac{x(x-1)}{x(x-1)}=\frac{x-1}{x(x-1)}\to x=-1$

b) $\frac{2x^4+4}{x^4}=\frac{x^2-3}{x^2}+2\to\frac{2x^4+4}{x^4}=\frac{x^2(x^2-3)}{x^4}+\frac{2x^4}{x^4}\to x^4-3x^2-4=0$

$x^4-3x^2-4=0\to z^2-3z-4=0$

$z=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}\to z=\frac{3\pm5}{2}\to\begin{cases}z_1=-1\\ z_2=4\end{cases}$

$z_1=-1\to x^2=-1\to$ No tiene solución real.

$z_2=4\to x_1=-2\quad x_2=2$

19. **Resuelve estas ecuaciones con radicales.**

a) $x-41=2\sqrt{x+1}$

b) $1+2\sqrt{x+1}=3\sqrt{4x-3}-4$

a) $x-41=2\sqrt{x+1}\to x^2-82x+1681=4(x+1)\to x^2-86x+1677=0$

$x=\frac{86\pm\sqrt{(-86)^2-4\cdot1\cdot1677}}{2\cdot1}\to x=\frac{86\pm\sqrt{688}}{2}\to\begin{cases}x_1=43-2\sqrt{43}\\ x_2=43+2\sqrt{43}\end{cases}$

Tras la comprobación, se obtiene que $x_1=43+2\sqrt{43}$ es la única solución válida.

b) $1+2\sqrt{x+1}=3\sqrt{4x-3}-4\to4(x+1)=36x-30\sqrt{4x-3}-2\to$

$\to900(4x-3)=1024x^2-384x+36\to64x^2-249x+171=0$

$x=\frac{249\pm\sqrt{(-249)^2-4\cdot64\cdot171}}{2\cdot64}\to x=\frac{249\pm135}{128}\to\begin{cases}x_1=\frac{57}{64}\\ x_2=3\end{cases}$

Tras la comprobación, se obtiene que $x_2=3$ es la única solución válida.

20. **Resuelve las siguientes ecuaciones que se encuentran en forma factorizada.**

a) $2(x-3)(x+5)(x-1)=0$

b) $x^2(x+4)(x-4)(x-9)=0$

c) $(3x-1)(2x+3)(x+2)=0$

d) $3x(x+5)^3(3x-1)=0$

e) $(x^2+x-2)(x^2-9)=0$

a) $x_1=-5\quad x_2=1\quad x_3=3$

b) $x_1=-4\quad x_2=0\quad x_3=0\quad x_4=4\quad x_5=9$

c) $x_1=-2\quad x_2=-\frac{3}{2}\quad x_3=\frac{1}{3}$

d) $x_1=-5\quad x_2=-5\quad x_3=-5\quad x_4=0\quad x_5=\frac{1}{3}$

e) $x_1=-3\quad x_2=-2\quad x_3=1\quad x_4=3$

21. **Factoriza las ecuaciones y resuélvelas.**

a) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$

b) $x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

c) $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 16 = 0$

a) $(x-1)(x-2)(x-3)(x+4) = 0 \rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -4$

b) $x(x-3)^2(x^2+1) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

c) $(x+4)^2(x^2+1) = 0 \rightarrow x = -4$

22. **Escribe una ecuación que tenga como soluciones 2, 3 y 7. ¿Cuál es el mínimo grado que puede tener?**

Respuesta abierta, por ejemplo:

$(x-2)(x-3)(x-7) = 0 \rightarrow$ El mínimo grado que puede tener es 3.

23. **Resuelve de estas ecuaciones logarítmicas.**

a) $\log(x-2) + \log(2x-1) = \log(3x-4)$

b) $\log(x+3) = \log(7x-27) - \log(x-4)$

a) $\log(x-2) + \log(2x-1) = \log(3x-4) \rightarrow (x-2)(2x-1) = 3x-4 \rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

b) $\log(x+3) = \log(7x-27) - \log(x-4) \rightarrow (x+3)(x-4) = 7x-27 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x_1 = 5 \quad x_2 = 3$

24. **Soluciona las siguientes ecuaciones.**

a) $\log_3(2x-1) = 1$

b) $\log_2(3x-2) = 2$

c) $\log_x 2 + \log_x 5 = 1$

d) $\log_x 12 + \log_x 18 = 3$

a) $\log_3(2x-1) = 1 \rightarrow 3 = 2x-1 \rightarrow x = 2$

b) $\log_2(3x-2) = 2 \rightarrow 4 = 3x-2 \rightarrow x = 2$

c) $\log_x 2 + \log_x 5 = 1 \rightarrow \log_x 10 = 1 \rightarrow x = 10$

d) $\log_x 12 + \log_x 18 = 3 \rightarrow \log_x 216 = 3 \rightarrow x^3 = 216 \rightarrow x = 6$

25. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $5^{3x+1} = 625$

b) $2^{\frac{3x+1}{4}} = \dfrac{1}{32}$

c) $3^{x^2-7x+12} = 729$

d) $5^{\frac{x-1}{x+2}} = 25$

e) $4^{x^3-7x^2+12x+3} = 64$

f) $4^{x-6} = 32$

g) $3^{\frac{x-2}{3}} = \dfrac{1}{3}$

h) $6^{2x^2+\frac{3}{5}} = 6^{\frac{23x}{10}}$

i) $17^{\frac{x-3}{3x-2}} = 289$

j) $3^{x^4+13x^2+4} = 3^{6x^3-12x}$

a) $5^{3x+1}=625 \rightarrow 3x+1=4 \rightarrow x=1$

b) $2^{\frac{3x+1}{4}}=\frac{1}{32} \rightarrow \frac{3x+1}{4}=-5 \rightarrow x=-7$

c) $3^{x^2-7x+12}=729 \rightarrow x^2-7x+12=6 \rightarrow x^2-7x+6=0 \rightarrow x_1=-6 \quad x_2=-1$

d) $5^{\frac{x-1}{x+2}}=25 \rightarrow \frac{x-1}{x+2}=2 \rightarrow x=-5$

e) $4^{x^3-7x^2+12x+3}=64 \rightarrow x^3-7x^2+12x+3=3 \rightarrow x\left(x^2-7x+12\right)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=3 \quad x_3=4$

f) $4^{x-6}=32 \rightarrow 2(x-6)=5 \rightarrow x=\frac{17}{2}$

g) $3^{\frac{x-2}{3}}=\frac{1}{3} \rightarrow \frac{x-2}{3}=-1 \rightarrow x=-1$

h) $6^{2x^2+\frac{3}{5}}=6^{\frac{23}{10}} \rightarrow 2x^2+\frac{3}{5}=\frac{23}{10} \rightarrow 20x^2+6=23 \rightarrow 20x^2=17 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{17}{20}}$

i) $17^{\frac{x-3}{3x-2}}=289 \rightarrow \frac{x-3}{3x-2}=2 \rightarrow 5x=1 \rightarrow x=\frac{1}{5}$

j) $3^{x^4+13x^2+4}=3^{6x^3-12x} \rightarrow x^4-6x^3+13x^2+12x+4=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-\sqrt{2} \\ x_2=\sqrt{2} \end{cases}$

26. Halla el valor de *x* en las siguientes ecuaciones.

a) $4^x = 2^{x-6}$

b) $3^{\frac{7x-3}{4}} = 9^{x-2}$

c) $49^x = 7^{3-x^2}$

d) $5^{x^4+4} = 25^{\frac{5x^2}{2}}$

a) $4^x=2^{x-6} \rightarrow 2x=x-6 \rightarrow x=-6$

b) $3^{\frac{7x-3}{4}}=9^{x-2} \rightarrow \frac{7x-3}{4}=2(x-2) \rightarrow x=12$

c) $49^x=7^{3-x^2} \rightarrow 2x=3-x^2 \rightarrow x^2+2x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-4 \\ x_2=1 \end{cases}$

d) $5^{x^4+4}=25^{\frac{5x^2}{2}} \rightarrow x^4+4=5x^2 \rightarrow \begin{cases} x_1=2 \text{ y } x_2=-2 \\ x_3=1 \text{ y } x_4=-1 \end{cases}$

27. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3^{2x-1} - 2^x = 0$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} + 3^{2-x} = 0$

c) $5^{3x+2} = 3^{5x+2}$

d) $\sqrt[3]{3^{x^2}} = 9^{x-1}$

a) $3^{2x-1}=2^x \rightarrow (2x-1)\log 3=x\log 2 \rightarrow x(2\log 3-\log 2)=\log 3 \rightarrow x=\frac{\log 3}{2\log 3-\log 2}\approx 0{,}7304$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}+3^{2-x}=0 \rightarrow (3-x)\log\left(\frac{1}{2}\right)=(2-x)\log(-3)$

No existen logaritmos de números mayores o iguales que 0. La ecuación no tiene solución real.

c) $5^{3x+2}=3^{5x+2} \rightarrow (3x+2)\log 5=(5x+2)\log 3 \rightarrow x(3\log 5-5\log 3)=2\log 3-2\log 5 \rightarrow x=\frac{2\log 3-2\log 5}{3\log 5-5\log 3}\approx 1{,}5369$

d) $\sqrt[3]{3^{x^2}}=9^{x-1} \rightarrow 3^{\frac{x^2}{3}}=3^{2(x-1)} \rightarrow x^2-6x+6=0 \rightarrow x_1=3+\sqrt{3} \quad x_2=3-\sqrt{3}$

28. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $3x - 5 < 4x - 7$
b) $2x - 30 \leq 5x + 3$
c) $5 - (2 - 3x) \geq 2(3x - 5) + x$
d) $2(2 - x) > x - 5$

a) $3x-5<4x-7 \rightarrow x>2 \rightarrow 2<x<+\infty \rightarrow (2,+\infty)$

b) $2x-30 \leq 5x+3 \rightarrow x \geq -11 \rightarrow -11 \leq x<+\infty \rightarrow [-11,+\infty)$

c) $5-(2-3x) \geq 2(3x-5)+x \rightarrow x \leq \frac{13}{4} \rightarrow -\infty<x \leq \frac{13}{4} \rightarrow \left(-\infty, \frac{13}{4}\right]$

d) $2(2-x)>x-5 \rightarrow x<3 \rightarrow -\infty<x<3 \rightarrow (-\infty, 3)$

29. Resuelve las inecuaciones que aparecen a continuación.

a) $1 - \frac{3 - 2x}{3} \leq \frac{x}{4}$
b) $\frac{2x - 5}{3} - \frac{1 - 3x}{6} > 1 - \frac{x}{4}$

a) $1-\frac{3-2x}{3} \leq \frac{x}{4} \rightarrow x \leq 0 \rightarrow -\infty<x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0]$

b) $\frac{2x-5}{3}-\frac{1-3x}{6}>1-\frac{x}{4} \rightarrow x>2 \rightarrow 2<x<+\infty \rightarrow (2,+\infty)$

30. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado con una incógnita.

a) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$
b) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
c) $x^2 - 9x > 0$
d) $x^2 - 9 < 0$
e) $x^2 + 2 \leq 0$
f) $(x - 3)(x + 4) \geq 0$
g) $(x + 3)x < 4$
h) $x^2 - 30 > x$
i) $x^2 + x + 3 < 0$
j) $4x^2 - 4x + 1 < 0$

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = 0 \qquad x = 1{,}5 \qquad x = 3$

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 > 0 \rightarrow (-\infty, 1)$ no es solución de la inecuación.
Si $x = 1{,}5 \rightarrow 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 2 < 0 \rightarrow (1, 2)$ es solución de la inecuación.
Si $x = 3 \rightarrow 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 > 0 \rightarrow (2, +\infty)$ no es solución de la inecuación.
Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.
Por tanto, la solución es $[1, 2]$.

b) Se deduce del apartado anterior que las soluciones de la inecuación son:

$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

c) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -1 \qquad x = 1 \qquad x = 10$

Si $x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 9 \cdot (-1) > 0 \rightarrow (-\infty, 0)$ es solución de la inecuación.
Si $x = 1 \rightarrow 1^2 - 9 \cdot 1 < 0 \rightarrow (0, 9)$ no es solución de la inecuación.
Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 \cdot 10 > 0 \rightarrow (9, +\infty)$ es solución de la inecuación.
Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.
Por tanto, la solución es $(-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$.

d) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 9 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 9 < 0 \rightarrow (-3, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-3, 3)$.

e) El primer miembro de la inecuación siempre será positivo.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

f) Resolvemos la ecuación: $(x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 - 3)(-10 + 4) > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3)(0 + 4) < 0 \rightarrow (-4, 3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3)(10 + 4) > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$.

g) Resolvemos la ecuación: $(x + 3)x = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 + 3) \cdot (-10) - 4 > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3) \cdot 0 - 4 < 0 \rightarrow (-4, 1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3) \cdot 10 + 4 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-4, 1)$.

h) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 30 < 0 \rightarrow (-5, 6)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (6, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-5, 6)$.

i) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

j) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

31. Resuelve estas inecuaciones de grado superior, siguiendo el método utilizado para las inecuaciones de segundo grado.

a) $(x - 2)(x - 3)(x^2 - 2) \geq 0$

b) $x(x - 4)(x + 1)(x^3 - 1) \leq 0$

c) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 < 0$

d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 > 0$

a) Resolvemos la ecuación: $(x-2)(x-3)(x^2-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=0 \qquad x=1{,}5 \qquad x=2{,}5 \qquad x=10$

Si $x=-10 \rightarrow (-10-2)(-10-3)((-10)^2-2)>0 \rightarrow \left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ es solución

Si $x=0 \rightarrow (0-2)(0-3)(0^2-2)<0 \rightarrow \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ no es solución.

Si $x=1{,}5 \rightarrow (1{,}5-2)(1{,}5-3)(1{,}5^2-2)>0 \rightarrow \left(\sqrt{2}, 2\right)$ es solución.

Si $x=2{,}5 \rightarrow (2{,}5-2)(2{,}5-3)(2{,}5^2-2)<0 \rightarrow (2, 3)$ no es solución.

Si $x=10 \rightarrow (10-2)(10-3)(10^2-2)>0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right] \cup [3, +\infty)$.

b) Resolvemos la ecuación: $x(x-4)(x+1)(x^3-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 4 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=-0{,}5 \qquad x=0{,}5 \qquad x=2 \qquad x=10$

Si $x=-10 \rightarrow -10\cdot(-10-4)(-10+1)((-10)^3-1)>0 \rightarrow (-\infty, -1)$ no es solución.

Si $x=-0{,}5 \rightarrow -0{,}5\cdot(-0{,}5-4)(-0{,}5+1)((-0{,}5)^3-1)<0 \rightarrow (-1, 0)$ es solución.

Si $x=0{,}5 \rightarrow 0{,}5\cdot(0{,}5-4)(0{,}5+1)(0{,}5^3-1)>0 \rightarrow (0, 1)$ no es solución.

Si $x=2 \rightarrow 2\cdot(2-4)(2+1)(2^3-1)<0 \rightarrow (1, 4)$ es solución.

Si $x=10 \rightarrow 10\cdot(10-4)(10+1)(10^3-1)>0 \rightarrow (4, +\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[-1, 0] \cup [1, 4]$.

c) Resolvemos la ecuación: $x^3+2x^2+3x-6=0 \rightarrow x=1$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=0 \qquad x=10$

Si $x=0 \rightarrow 0^3+2\cdot 0^2+3\cdot 0-6<0 \rightarrow (-\infty, 1)$ es solución.

Si $x=10 \rightarrow 10^3+2\cdot 10^2+3\cdot 10-6>0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 1)$.

d) Resolvemos la ecuación: $x^4-5x^3+4x^2+9x-9=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=0 \qquad x=2 \qquad x=2{,}5 \qquad x=10$

Si $x = -10 \to (-10)^4 - 5\cdot(-10)^3 + 4\cdot(-10)^2 + 9\cdot(-10) - 9 > 0$

$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$ es solución.

Si $x = 0 \to 0^4 - 5\cdot 0^3 + 4\cdot 0^2 + 9\cdot 0 - 9 < 0 \to \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 1\right)$ no es solución.

Si $x = 2 \to 2^4 - 5\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2 + 9\cdot 2 - 9 > 0 \to \left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ es solución.

Si $x = 2{,}5 \to 2{,}5^4 - 5\cdot 2{,}5^3 + 4\cdot 2{,}5^2 + 9\cdot 2{,}5 - 9 < 0 \to \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 3\right)$ no es solución.

Si $x = 10 \to 10^4 - 5\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 9\cdot 10 - 9 > 0 \to (3, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

SABER HACER

32. Determina el valor de *k* en cada uno de los siguientes casos.

a) $3x^2 - 6x + k = 0$ tenga 2 soluciones.
b) $3x^2 - 6x + k = 0$ tenga 1 solución.
c) $3x^2 - 6x + k = 0$ no tenga solución.
d) $x^2 + kx + 25 = 0$ tenga 2 soluciones.
e) $x^2 + kx + 25 = 0$ tenga 1 solución.
f) $x^2 + kx + 25 = 0$ no tenga solución.

a) $(-6)^2 - 4\cdot 3\cdot k > 0 \to 36 - 12k > 0 \to k < 3 \to k \in (-\infty, 3)$

b) $(-6)^2 - 4\cdot 3\cdot k = 0 \to 36 - 12k = 0 \to k = 3$

c) $(-6)^2 - 4\cdot 3\cdot k < 0 \to 36 - 12k < 0 \to k > 3 \to k \in (3, +\infty)$

d) $k^2 - 4\cdot 25\cdot 1 > 0 \to k^2 - 100 > 0 \to k \in (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$

e) $k^2 - 4\cdot 25\cdot 1 = 0 \to k^2 - 100 = 0 \to k_1 = -10 \quad k_2 = 10$

f) $k^2 - 4\cdot 25\cdot 1 < 0 \to k^2 - 100 < 0 \to k \in (-10, 10)$

33. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$
c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
d) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$
e) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$
f) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \to z^2 - 9z + 8 = 0$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1} \to z = \frac{9 \pm 7}{2} \to \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 8 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \to x^3 = 1 \to x_1 = 1$ $\qquad$ $z_2 = 8 \to x^3 = 8 \to x_2 = 2$

b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \to z^2 + 7z - 8 = 0$

$$z = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1} \to z = \frac{-7 \pm 9}{2} \to \begin{cases} z_1 = -8 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

$z_1 = -8 \to x^3 = -8 \to x_1 = -2$ $\qquad$ $z_2 = 1 \to x^3 = 1 \to x_2 = 1$

c) $x^6-7x^3-8=0 \rightarrow z^2-7z-8=0$

$$z=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1} \rightarrow z=\frac{7\pm 9}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=-1 \\ z_2=8 \end{cases}$$

$z_1=-1 \rightarrow x^3=-1 \rightarrow x_1=-1$ $\quad$ $z_2=8 \rightarrow x^3=8 \rightarrow x_2=2$

d) $x^6+9x^3+8=0 \rightarrow z^2+9z+8=0$

$$z=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1} \rightarrow z=\frac{-9\pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=-8 \\ z_2=-1 \end{cases}$$

$z_1=-8 \rightarrow x^3=-8 \rightarrow x_1=-2$ $\quad$ $z_2=-1 \rightarrow x^3=-1 \rightarrow x_2=-1$

e) $x^8-15x^4-16=0 \rightarrow z^2-15z-16=0$

$$z=\frac{15\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot 1\cdot(-16)}}{2\cdot 1} \rightarrow z=\frac{15\pm 17}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=-1 \\ z_2=16 \end{cases}$$

$z_1=-1 \rightarrow x^4=-1 \rightarrow$ No tiene solución real. $\quad$ $z_2=16 \rightarrow x^4=16 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=2$

f) $x^8-17x^4+16=0 \rightarrow z^2-17z+16=0$

$$z=\frac{17\pm\sqrt{(-17)^2-4\cdot 1\cdot 16}}{2\cdot 1} \rightarrow z=\frac{17\pm 15}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=1 \\ z_2=16 \end{cases}$$

$z_1=1 \rightarrow x^4=1 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$ $\quad$ $z_2=16 \rightarrow x^4=16 \rightarrow x_3=-2 \quad x_4=2$

34. Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{2x^3-x^2-2x+25}{x^2-1}=2x$ $\quad$ b) $\dfrac{x^3+x^2+7x+2}{x^2+2x+4}=x-2$ $\quad$ c) $\dfrac{x^3+5x^2-5x-21}{x^2+x-6}=x+3$

a) $\dfrac{2x^3-x^2-2x+25}{x^2-1}=2x \rightarrow x^2-25=0 \rightarrow x_1=-5 \quad x_2=5$

b) $\dfrac{x^3+x^2+7x+2}{x^2+2x+4}=x-2 \rightarrow x^2+7x+10=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=-5$

c) $\dfrac{x^3+5x^2-5x-21}{x^2+x-6}=x+3 \rightarrow x^2-2x-3=0 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=3$

35. Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2-x}{3x+1}=\dfrac{-x}{2x-1}$ $\quad$ c) $\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{x-2}{x-4}$

b) $\dfrac{x}{x+6}=\dfrac{x-5}{x-3}$ $\quad$ d) $\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{x-4}{x-2}$

a) $\dfrac{x^2-x}{3x+1}=\dfrac{-x}{2x-1} \rightarrow 2x^3+2x=0 \rightarrow x=0$

b) $\dfrac{x}{x+6}=\dfrac{x-5}{x-3} \rightarrow 4x-30=0 \rightarrow x=\dfrac{15}{2}$

c) $\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{x-2}{x-4} \rightarrow 2=0 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{x-4}{x-2} \rightarrow \rightarrow 2=0 \rightarrow$ No tiene solución.

36. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\sqrt{x^2 - 3} = 1$

b) $x = \sqrt{x + 6}$

c) $\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{x}{2} + 6}$

d) $\sqrt{3x + 19} = x + 3$

a) $\sqrt{x^2-3}=1 \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=2$

b) $x=\sqrt{x+6} \rightarrow x^2-x-6=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=3$

c) $\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{x}{2}+6} \rightarrow x^2-2x-24=0 \rightarrow x_1=-4 \quad x_2=6$

d) $\sqrt{3x+19}=x+3 \rightarrow x^2+3x-10=0 \rightarrow x_1=2 \quad x_2=-5$

Tras sustituir las soluciones obtenidas en su correspondiente ecuación, se verifica que todas son válidas.

37. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $\sqrt{2x + 8} - \sqrt{x} = 2$

b) $\sqrt{x^2 - 5} + \sqrt{x - 2} = 3$

c) $\sqrt{2x} + \sqrt{4x - 7} = x + 1$

d) $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x^2 + 3x + 9} = 2x + 1$

a) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x}=2 \rightarrow x^2-8x+16=0 \rightarrow x=4$

b) $\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-2}=3 \rightarrow x^4-2x^3-23x^2-12x+216=0 \rightarrow x=3$

c) $\sqrt{2x}+\sqrt{4x-7}=x+1 \rightarrow x^4-8x^3-8x+64=0 \rightarrow x=2 \quad x=8$

d) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+3x+9}=2x+1 \rightarrow 9x^4-24x^3-90x^2-84x+45=0 \rightarrow x=5$

38. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

b) $3x^5 - 13x^4 + 16x^3 - 4x^2 = 0$

c) $4x^5 - 12x^4 + 9x^3 - 2x^2 = 0$

d) $x^4 - 1 = 0$

a) $x^3-3x^2+2x=0 \rightarrow x(x-1)(x-2)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=1 \quad x_3=2$

b) $3x^5-13x^4+16x^3-4x^2=0 \rightarrow x^2(3x-1)(x-2)^2=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=\dfrac{1}{3} \quad x_3=2$

c) $4x^5-12x^4+9x^3-2x^2=0 \rightarrow x^2(2x-1)^2(x-2)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=\dfrac{1}{2} \quad x_3=2$

d) $x^4-1=0 \rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1)=0 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$

39. **Calcula el valor de *x* en los logaritmos que aparecen a continuación.**

a) $\log_5 x = 4$

b) $\log (x - 1) = 2$

c) $\log_3 (7x - 1) = 3$

d) $\log (x^2 + 36) = 2$

a) $\log_5 x=4 \rightarrow x=5^4=625$

b) $\log(x-1)=2 \rightarrow x-1=100 \rightarrow x=101$

c) $\log_3(7x-1)=3 \rightarrow 7x-1=27 \rightarrow x=4$

d) $\log(x^2+36)=2 \rightarrow x^2+36=100 \rightarrow x^2=64 \rightarrow x_1=8 \quad x_2=-8$

40. **Calcula el valor de *x* en las expresiones que aparecen a continuación.**

a) $\log_x 32 = 5$

b) $\log_x 0{,}1 = -1$

c) $\log_{x^2} 64 = 3$

d) $\log_{(x-2)} 27 = 3$

a) $\log_x 32=5 \rightarrow x^5=2^5 \rightarrow x=2$

b) $\log_x 0{,}1=-1 \rightarrow x^{-1}=10^{-1} \rightarrow x=10$

c) $\log_{x^2} 64=3 \rightarrow x^6=2^6 \rightarrow x=2$

d) $\log_{(x-2)} 27=3 \rightarrow (x-2)^3=3^3 \rightarrow x-2=3 \rightarrow x=5$

41. **Resuelve la inecuación $\dfrac{x^2-2x+4}{x-4}\geq x$.**

$$\frac{x^2-2x+4}{x-4}\geq x \rightarrow \frac{2(x+2)}{x-4}\geq 0 \rightarrow \begin{cases} 2(x+2)=0 \rightarrow x=-2 \\ x-4=0 \rightarrow x=4 \end{cases}$$

Se forman tres intervalos:

$x=-10\in(-\infty,-2) \rightarrow \dfrac{2(-10+2)}{-10-4}=\dfrac{-16}{-14}=\dfrac{8}{7}\geq 0 \rightarrow$ Es intervalo solución.

$x=0\in(-2,4) \rightarrow \dfrac{2(0+2)}{0-4}=\dfrac{4}{-4}=-1<0 \rightarrow$ No es intervalo solución.

$x=10\in(4,+\infty) \rightarrow \dfrac{2(10+2)}{10-4}=\dfrac{24}{6}=4\geq 0 \rightarrow$ Es intervalo solución.

A continuación se comprueba si los extremos de los intervalos son soluciones:

$x=-2 \rightarrow \dfrac{2(-2+2)}{-2-4}=\dfrac{0}{-6}=0\geq 0 \rightarrow$ Es solución.

$x=4 \rightarrow \dfrac{2(4+2)}{4-4}=\dfrac{12}{0} \rightarrow$ No es solución.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-2]\cup(4,+\infty)$.

ACTIVIDADES FINALES

42. **Escribe en cada caso un polinomio como se indica y halla su valor para $x=3$ y $x=-1$.**

a) De grado 4 y sin término independiente.
b) De grado 3 y sin términos de grado 2 ni 1.
c) De grado 2 y la suma de sus coeficientes sea 10.
d) Que sea un binomio de grado 3 con término independiente.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $P(x)=x^4+x \rightarrow \begin{cases} P(3)=3^4+3=84 \\ P(-1)=(-1)^4-1=0 \end{cases}$

b) $P(x)=4x^3+2 \rightarrow \begin{cases} P(3)=4\cdot 3^3+2=110 \\ P(-1)=4\cdot(-1)^3+2=-2 \end{cases}$

c) $P(x)=2x^2+5x+3 \rightarrow \begin{cases} P(3)=2\cdot 3^2+5\cdot 3+3=36 \\ P(-1)=2\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)+3=0 \end{cases}$

d) $P(x)=x^3-1 \rightarrow \begin{cases} P(3)=3^3-1=26 \\ P(-1)=(-1)^3-1=-2 \end{cases}$

43. **Efectúa las siguientes operaciones de polinomios.**

a) $(3x^2-2x+5)+(x^3-5x^2+2x-1)-(x^4+1)$

b) $\left(-2x^3+\dfrac{5}{2}x-1\right)\cdot\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$

c) $(5+3x^2)\left[\left(9-\dfrac{x^3}{3}\right)-\left(x^4+\dfrac{1}{5}x^2+5\right)\right]$

d) $(3x-2)\cdot(2x-3)-\left[\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}\right)\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)\right]$

a) $(3x^2-2x+5)+(x^3-5x^2+2x-1)-(x^4+1)=-x^4-2x^2+3$

b) $\left(-2x^3+\frac{5}{2}x-1\right)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)=-2x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$

c) $(5+3x^2)\left[\left(9-\frac{x^3}{3}\right)-\left(x^4+\frac{1}{5}x^2+5\right)\right]=-3x^6-x^5-\frac{28}{5}x^4-\frac{5}{3}x^3+11x^2+20$

d) $(3x-2)\cdot(2x-3)-\left[\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right]=6x^2-9x-4x+6-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{6}+\frac{x^5}{4}-\frac{x^6}{8}=$

$=-\frac{x^6}{8}+\frac{5}{12}x^5-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^3+6x^2-13x+6$

44. Halla el valor numérico del polinomio para los siguientes valores de *x*.

$$P(x) = 6x^4 - 61x^3 + 185x^2 - 158x + 40$$

a) $x=-5$ c) $x=4$ e) $x=-\frac{1}{2}$ g) $x=-\frac{2}{3}$

b) $x=5$ d) $x=-4$ f) $x=\frac{1}{2}$ h) $x=\frac{2}{3}$

a) $P(-5)=6\cdot(-5)^4-61\cdot(-5)^3+185\cdot(-5)^2-158\cdot(-5)+40=16\,830$

b) $P(5)=6\cdot 5^4-61\cdot 5^3+185\cdot 5^2-158\cdot 5+40=0$

c) $P(4)=6\cdot 4^4-61\cdot 4^3+185\cdot 4^2-158\cdot 4+40=0$

d) $P(-4)=6\cdot(-4)^4-61\cdot(-4)^3+185\cdot(-4)^2-158\cdot(-4)+40=1264$

e) $P\left(-\frac{1}{2}\right)=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4-61\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3+185\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-158\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+40=\frac{693}{4}$

f) $P\left(\frac{1}{2}\right)=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4-61\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+185\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-158\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+40=0$

g) $P\left(-\frac{2}{3}\right)=6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^4-61\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3+185\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-158\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+40=\frac{6664}{27}$

h) $P\left(\frac{2}{3}\right)=6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4-61\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+185\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-158\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+40=0$

45. Realiza las siguientes divisiones de polinomios y di cuál es el polinomio cociente y el resto en cada caso.

a) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) : (x^2 - 3)$
b) $(5x^2 - 3x + 2) : (2x - 3)$
c) $(3x^6 + 5x^3 - x + 3) : (x^3 - 2x + 1)$
d) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) : (x^3 - x + 1)$

a) $(x^5+x^4+x^3+x^2+1):(x^2-3)=x^3+x^2+4x+4$ con resto $-12x-11$

b) $(5x^2-3x+2):(2x-3)=\frac{5}{2}x+\frac{9}{4}$ con resto $\frac{35}{4}$

c) $(3x^6+5x^3-x+3):(x^3-2x+1)=3x^3+6x+2$ con resto $12x^2-3x+1$

d) $(x^8-x^6+x^4-x^2+1):(x^3-x+1)=x^5-x^2+x-1$ con resto x^2-2x+2

46. **Divide los siguientes polinomios utilizando la regla de Ruffini.**

a) $(2x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 1) : (x - 1)$
b) $(4x^2 - x + 1) : (x + 1)$
c) $(3x^6 + 5x^3 - x + 3) : (x + 3)$
d) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) : (x - 2)$

a)

	2	3	7	−11	0	−1
1		2	5	12	1	1
	2	5	12	1	1	0

Cociente: $2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + x + 1$ Resto: 0

b)

	4	−1	1
−1		−4	5
	4	−5	6

Cociente: $4x - 5$ Resto: 6

c)

	3	0	0	5	0	−1	3
−3		−9	27	−81	228	−684	2 055
	3	−9	27	−76	228	−685	2 058

Cociente: $3x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 76x^2 + 228x - 685$ Resto: 2058

d)

	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1
2		2	4	6	12	26	52	102	204
	1	2	3	6	13	26	51	102	205

Cociente: $x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 26x^2 + 51x + 102$ Resto: 205

47. **Comprueba si los valores $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ son raíces de estos polinomios.**

a) $x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x$
b) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 10$
c) $x^5 - 1$
d) $x^5 - x^4 - \frac{13}{4}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - 3x + 3$

	$P(x)$	$P(-1)$	$P(0)$	$P(1)$	Raíces
a)	$x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x$	0	0	0	$x_1 = -1$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$
b)	$x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 10$	0	−10	−24	$x = -1$
c)	$x^5 - 1$	−2	−1	0	$x = 1$
d)	$x^5 - x^4 - \frac{13}{4}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - 3x + 3$	$\frac{21}{2}$	3	0	$x = 1$

48. **Señala cuáles de los siguientes polinomios tienen entre sus raíces los valores $x = -2$ y $x = 1$.**

a) $4x^3 + 3x^2 - 9x + 2$
b) $x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 27x^2 - 18x$
c) $x^5 - 2x^4 - 22x^3 + 8x^2 + 117x + 90$
d) $x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 64x^2 - 27x - 90$

	$P(x)$	$P(-2)$	$P(1)$	Raíces
a)	$4x^3 + 3x^2 - 9x + 2$	0	0	$x = -2$ $x = 1$
b)	$x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 27x^2 - 18x$	120	0	$x = 1$
c)	$x^5 - 2x^4 - 22x^3 + 8x^2 - 117x + 90$	468	−43	Ninguna es raíz
d)	$x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 64x^2 - 27x - 90$	140	−64	Ninguna es raíz

49. **Comprueba si $M(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 4$ es divisible entre $x - 2$ y, en caso afirmativo, encuentra un polinomio $N(x)$ que permita escribir $M(x)$ de la forma $M(x) = (x - 2) \cdot N(x)$.**

Dividimos el polinomio entre $x - 2$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & & 4 & -2 & 4 \\ \hline & 2 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio $N(x)$ es el cociente:

$$N(x) = 2x^2 - x + 2$$

50. **Determina las raíces de los siguientes polinomios.**

a) $(x - 3)(x + 5)(x - 2)$
b) $x(x - 2)^2(2x + 1)$
c) $(2x - 1)(3x + 2)(x + 3)^2$
d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$
e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$
f) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8$
g) $2x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4$
h) $x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64$

a) $x_1 = -5 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 3$

b) $x_1 = -\dfrac{1}{2} \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 2$

c) $x_1 = -3 \qquad x_2 = -\dfrac{2}{3} \qquad x_3 = \dfrac{1}{2}$

d)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ 1 & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & \\ 4 & & 4 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 4$

e)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 8 & 17 & 10 \\ -1 & & -1 & -7 & -10 \\ \hline & 1 & 7 & 10 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -10 & \\ \hline & 1 & 5 & \boxed{0} & \\ -5 & & -5 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1 = -5 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = -1$

f)

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 7 & -22 & -8 \\ 2 & & 6 & 26 & 8 \\ \hline & 3 & 13 & 4 & \boxed{0} \\ -4 & & -12 & -4 & \\ \hline & 3 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$3x + 1 = 0 \qquad x = -\dfrac{1}{3}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -\dfrac{1}{3} \qquad x_3 = 2$

g)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -11 & 21 & -16 & 4 \\ 1 & & 2 & -9 & 12 & -4 \\ \hline & 2 & -9 & 12 & -4 & \boxed{0} \\ 2 & & 4 & -10 & 4 & \\ \hline & 2 & -5 & 2 & \boxed{0} & \\ 2 & & 4 & -2 & & \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$2x - 1 = 0 \qquad x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2} \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2$

h)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & -12 & 32 & 64 \\ -2 & & -2 & 12 & 0 & -64 \\ \hline & 1 & -6 & 0 & 32 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & 16 & -32 & \\ \hline & 1 & -8 & 16 & \boxed{0} & \\ 4 & & 4 & -16 & & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & & \\ 4 & & 4 & & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & & \end{array}$$

51. Halla las raíces de estos polinomios.

a) $(x+2)(x-5)(x-1)$
b) $x^2(x+2)(3x-1)$
c) $(x^2-4)(x^2-9)$
d) $6x^4+13x^3-18x^2-7x+6$

a) $x_1=-2 \qquad x_2=1 \qquad x_3=5$

b) $x_1=-2 \qquad x_2=0 \qquad x_3=\frac{1}{3}$

c) $x_1=-3 \qquad x_2=-2 \qquad x_3=2 \qquad x_4=3$

d) $x_1=-3 \qquad x_2=-\frac{2}{3} \qquad x_3=\frac{1}{2} \qquad x_4=1$

52. Escribe un polinomio de segundo grado, $Q(x)$, que tenga las raíces 1 y 3, y tal que $Q(0)=6$.

$Q(x)=c\cdot(x-1)(x-3)=cx^2-4cx+3c$

$Q(0)=3c=6 \rightarrow c=2 \rightarrow Q(x)=2x^2-8x+6$

53. Obtén el valor de m para que el polinomio $P(x)=mx^3-6x^2-4x+8$ tenga 2 por raíz.

$P(2)=8m-24-8+8=0 \rightarrow 8m-24=0 \rightarrow m=3$

54. Halla q para que el polinomio x^3-2x^2+qx+5 sea divisible entre el polinomio $x+1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & q & 5 \\ -1 & & -1 & 3 & -3-q \\ \hline & 1 & -3 & 3+q & \boxed{2-q} \end{array} \rightarrow 2-q=0 \rightarrow q=2$$

55. ¿Qué valor debe tomar a para que el resto de dividir x^3+ax^2-3x-a entre $x-4$ sea 67?

Dividimos el polinomio entre $x-4$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & -3 & -a \\ 4 & & 4 & 16+4a & 52+16a \\ \hline & 1 & 4+a & 13+4a & \boxed{52+15a} \end{array}$$

Igualamos el resto a 67:

$52+15a=67 \rightarrow a=1$

56. Halla a y b para que el polinomio x^3+ax^2+bx-6 sea divisible entre $x-2$ y entre $x+3$.

Dividimos el polinomio entre $x-2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ 2 & & 2 & 4+2a & 8+4a+2b \\ \hline & 1 & 2+a & 4+2a+b & \boxed{2+4a+2b} \end{array}$$

Dividimos el polinomio entre $x+3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ -3 & & -3 & 9-3a & -27+9a-3b \\ \hline & 1 & -3+a & 9-3a+b & \boxed{-33+9a-3b} \end{array}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2+4a+2b=0 \\ -33+9a-3b=0 \end{array}\right\} \rightarrow a=2 \qquad b=-5$$

57. **Escribe dos polinomios de segundo grado cuyas raíces sean 2 y −3.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$P(x) = x^2 + x - 6 \qquad Q(x) = 2x^2 + 2x - 12$

58. **Escribe un polinomio de tercer grado cuya única raíz sea −1.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

59. **Encuentra un polinomio *P*(*x*) de segundo grado cuyas raíces sean 1 y −2, y tal que *P*(3) = 30.**

$P(x) = c \cdot (x-1)(x+2) = cx^2 + cx - 2c$

$P(3) = 9c + 3c - 2c = 30 \rightarrow c = 3 \rightarrow P(x) = 3x^2 + 3x - 6$

60. **Escribe un polinomio *Q*(*x*) de tercer grado cuyas raíces sean 1, −1 y −2, y tal que *Q*(0) = −6.**

$Q(x) = c \cdot (x-1)(x+1)(x+2) = cx^3 + 2cx^2 - cx - 2c$

$Q(0) = -2c = -6 \rightarrow c = 3 \rightarrow Q(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$

61. **Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{y^2}{x} + \dfrac{x^3}{y^2} - \dfrac{3}{x^2}$

b) $\dfrac{5}{x} + \dfrac{3x-2}{x+1}$

c) $\dfrac{3x^2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{5x}{x+2}$

d) $\dfrac{1-x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$

a) $\dfrac{y^2}{x} + \dfrac{x^3}{y^2} - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{xy^4}{x^2y^2} + \dfrac{x^5}{x^2y^2} - \dfrac{3y^2}{x^2y^2} = \dfrac{x^5 + xy^4 - 3y^2}{x^2y^2}$

b) $\dfrac{5}{x} + \dfrac{3x-2}{x+1} = \dfrac{5x+5}{x(x+1)} + \dfrac{3x^2-2x}{x(x+1)} = \dfrac{3x^2+3x+5}{x^2+x}$

c) $\dfrac{3x^2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{5x}{x+2} = \dfrac{3x^2}{x^2-4} + \dfrac{2x+4}{x^2-4} + \dfrac{5x^2-10x}{x^2-4} = \dfrac{8x^2-8x+4}{x^2-4}$

d) $\dfrac{1-x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{-x^2+2x-1}{x^2-1} + \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{4x-2}{x^2-1}$

62. **Realiza las operaciones y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{3x-1}{4x+12} - \dfrac{x+2}{4x-12}$

b) $\dfrac{2-x}{x^2-3x} - \dfrac{1}{4x-12} + \dfrac{5}{6x-18}$

c) $\dfrac{4}{a+b} - \dfrac{5}{a-b}$

d) $\dfrac{4-x^2}{x+2} + \dfrac{9-x^2}{x+3}$

a) $\dfrac{3x-1}{4x+12} - \dfrac{x+2}{4x-12} = \dfrac{2x^2-15x-3}{4(x+3)(x-3)}$

b) $\dfrac{2-x}{x^2-3x} - \dfrac{1}{4x-12} + \dfrac{5}{6x-18} = \dfrac{5x-24}{12x(3-x)}$

c) $\dfrac{4}{a+b} - \dfrac{5}{a-b} = \dfrac{a+9b}{(a+b)(b-a)}$

d) $\dfrac{4-x^2}{x+2} + \dfrac{9-x^2}{x+3} = 5-2x$

63. Comprueba si el número indicado en cada apartado es solución de la ecuación.

a) $2(x^2 - x - 2) + 6(3 - x) - 2(x - 3) - 8 = 0$
$x = -2$

b) $2(-x - 2)(1 - x) - 2(x + 1) = 0$
$x = \sqrt{3}$

c) $(2 + x)5x - (3x - 4) + 3(x - 1) - x^2 + 2(x + 4) = 0$
$x = -\dfrac{3}{2}$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) + 11 = 0$
$x = \dfrac{1}{2}$

a) No, las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.
b) Sí, las soluciones son $x_1 = -\sqrt{3}$ y $x_2 = \sqrt{3}$.
c) Sí, la solución es $x = -\dfrac{3}{2}$.
d) No, esta ecuación no tiene solución real.

64. Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $3x^2 - 48 = 0$
b) $3x^2 - 48x = 0$
c) $3x^2 + 48 = 0$
d) $x^2 + 3x + 9 = 0$
e) $x^2 - 3x + 9 = 0$
f) $-3x^2 + 18x - 3 = 0$
g) $-3x^2 - 18x + 3 = 0$
h) $x^2 + x - 18 = 0$

a) $3x^2 - 48 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x_1 = -4 \quad x_2 = 4$

b) $3x^2 - 48x = 0 \rightarrow x(3x - 48) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 16$

c) $3x^2 + 48 = 0 \rightarrow x^2 = -16 \rightarrow$ No tiene solución real.

d) $x^2 + 3x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} \rightarrow$ No tiene solución real.

e) $x^2 - 3x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} \rightarrow$ No tiene solución real.

f) $-3x^2 + 18x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-3)}}{2\cdot(-3)} \rightarrow x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{288}}{-6} \rightarrow x_1 = 3 - 2\sqrt{2} \quad x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$

g) $-3x^2 - 18x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4\cdot(-3)\cdot 3}}{2\cdot(-3)} \rightarrow x = \dfrac{18 \pm \sqrt{360}}{-6} \rightarrow x_1 = -3 - \sqrt{10} \quad x_2 = -3 + \sqrt{10}$

h) $x^2 + x - 18 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-18)}}{2\cdot 1} \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{73}}{2} \rightarrow x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{73}}{2} \quad x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{73}}{2}$

65. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores.

a) $\dfrac{3x^2 - 1}{2} + \dfrac{x^2 - x}{3} - x^2 = 0$

b) $\dfrac{x - 2}{2} + 1 = \dfrac{3x^2 - 2x + 3}{3} + \dfrac{19x}{6}$

c) $\dfrac{x(x + 1) - 10}{5} = \dfrac{x^2 + 2x}{2} - 2$

d) $x^2 + \dfrac{11x - 5}{6} = \dfrac{2x^2 - 1}{3} + x$

a) $\dfrac{3x^2-1}{2}+\dfrac{x^2-x}{3}-x^2=0 \rightarrow 5x^2-2x-3=0 \rightarrow x_1=-\dfrac{3}{5} \quad x_2=1$

b) $\dfrac{x-2}{2}+1=\dfrac{3x^2-2x+3}{3}+\dfrac{19x}{6} \rightarrow x^2+2x+1=0 \rightarrow x=-1$

c) $\dfrac{x(x+1)-10}{5}=\dfrac{x^2+2x}{2}-2 \rightarrow 3x^2+8x=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=-\dfrac{8}{3}$

d) $x^2+\dfrac{11x-5}{6}=\dfrac{2x^2-1}{3}+x \rightarrow 2x^2+5x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

66. La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es 4 y su producto es −21.

a) Escribe la ecuación correspondiente.

b) Determina dichas soluciones.

a) $x(4-x)=-21$

b) $-x^2+4x+21=0 \rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot 21}}{2\cdot(-1)} \rightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=7 \end{cases}$

Las soluciones son −3 y 7.

67. Indica el número de soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2-4x+5=0$

b) $12-2x^2+3x=0$

c) $-x+x^2-3=0$

d) $6x-x^2+9=0$

a) $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 3\cdot 5=-44<0 \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

b) $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\cdot(-2)\cdot 12=105>0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

c) $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=13>0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

d) $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\cdot(-1)\cdot 9=72>0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

68. Resuelve la ecuación general de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ utilizando las igualdades notables. Relaciona el resultado obtenido con el número de soluciones que tiene la ecuación de segundo grado.

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a} \rightarrow x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Si $\sqrt{b^2-4ac}<0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\sqrt{b^2-4ac}=0 \rightarrow$ Tiene una solución.

Si $\sqrt{b^2-4ac}>0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

69. Halla el valor de k para que esta ecuación tenga por solución $x = 7$.

$$x^2 - 13x + k = 0$$

Para este valor de k, ¿cuál es la otra solución?

$$7^2 - 13\cdot 7 + k = 0 \rightarrow k = 42$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4\cdot 1\cdot 42}}{2\cdot 1} = \frac{13 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = 7$$

70. ¿Cuáles son los valores que deben tomar a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 30 = 0$ tenga las soluciones, $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$?

Sustituimos las dos soluciones en la ecuación y formamos un sistema donde las incógnitas son a y b:

$$\left.\begin{array}{l} 25a + 5b - 30 = 0 \\ 9a - 3b - 30 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot 3} 75a + 15b = 90 \\ \xrightarrow{\cdot 5} 45a - 15b = 150 \end{array}\left.\right\} \rightarrow 120a = 240 \rightarrow a = 2 \rightarrow b = -4$$

71. Di, sin resolverlas, cuál es la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones, y luego calcúlalas para comprobarlo.

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $6x^2 + 13x - 5 = 0$

d) $9x^2 + 9x - 10 = 0$

e) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

f) $10x^2 + 3x - 1 = 0$

Partimos de una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son a y b:

$(x - a)(x - b)$

Después, multiplicamos: $x^2 - ax - bx + ab = 0 \rightarrow x^2 - (a + b)x + ab = 0$

Por tanto, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

a) El producto de las raíces es –14 y la suma es –1. Las raíces son $x_1 = -7$ y $x_2 = 2$.

b) El producto de las raíces es 0 y la suma es –5. Las raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$.

c) El producto de las raíces es $-\frac{5}{6}$ y la suma es $-\frac{13}{6}$. Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{3}$.

d) El producto de las raíces es $-\frac{10}{9}$ y la suma es –1. Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$.

e) El producto de las raíces es $\frac{1}{4}$ y la suma es 1. La raíz es $x = \frac{1}{2}$.

f) El producto de las raíces es $-\frac{1}{10}$ y la suma es $-\frac{3}{10}$. Las raíces son $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{5}$.

72. Escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean las siguientes.

a) $x_1 = 2, x_2 = -5$

b) $x_1 = -4, x_2 = 4$

c) $x_1 = 0, x_2 = -2$

d) $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$

a) $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$

b) $(x-4)(x+4) = x^2 - 16$

c) $x(x+2) = x^2 + 2x$

d) $9\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = 9x^2 + 9x + 2$

73. Resuelve las ecuaciones bicuadradas que aparecen a continuación.

a) $25x^4 - 101x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

c) $3x^4 - 30x^2 + 27 = 0$

a) $25x^4 - 101x^2 + 4 = 0 \rightarrow 25z^2 - 101z + 4 = 0$ $\quad z = \frac{101 \pm \sqrt{(-101)^2 - 4\cdot 25\cdot 4}}{2\cdot 25} \rightarrow z = \frac{101 \pm 99}{50} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{25} \\ z_2 = 4 \end{cases}$

$z_1 = \frac{1}{25} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{5} \quad x_2 = \frac{1}{5}$ $\qquad z_2 = 4 \rightarrow x_3 = -2 \quad x_4 = 2$

b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \rightarrow z^2 - 25z + 144 = 0$ $\quad z = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4\cdot 1\cdot 144}}{2\cdot 1} \rightarrow z = \frac{25 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 16 \end{cases}$

$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 3$ $\qquad z_2 = 16 \rightarrow x_3 = -4 \quad x_4 = 4$

c) $3x^4 - 30x^2 + 27 = 0 \rightarrow 3z^2 - 30z + 27 = 0$ $\quad z = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4\cdot 3\cdot 27}}{2\cdot 3} \rightarrow z = \frac{30 \pm 24}{6} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 9 \end{cases}$

$z_1 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$ $\qquad z_2 = 9 \rightarrow x_3 = -3 \quad x_4 = 3$

74. Encuentra las soluciones de las ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $\frac{x^3 - x}{x^2 - 1} - \frac{1}{4x} = 0$

b) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0$

c) $1 - \frac{18}{x^2} + \frac{81}{x^4} = 0$

a) $\frac{x^3 - x}{x^2 - 1} - \frac{1}{4x} = 0 \rightarrow 4x(x^3 - x) - (x^2 - 1) = 0 \rightarrow 4x^4 - 5x^2 + 1 \rightarrow$ Es una ecuación bicuadrada:

$z = x^2 \rightarrow 4z^2 - 5z + 1 \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\qquad z_1 = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ $\qquad z_2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

b) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0 \rightarrow -9x^4 + 80x^2 + 9 = 0 \rightarrow$ Es una ecuación bicuadrada:

$z = x^2 \rightarrow -9z^2 + 80z + 9 \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = -\frac{1}{9} \end{cases}$ $\qquad z_1 = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$ $\qquad z_2 = -\frac{1}{9} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1}{3} \\ x_4 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

c) $1 - \frac{18}{x^2} + \frac{18}{x^4} = 0 \rightarrow x^4 - 18x^2 + 81 = 0 \rightarrow$ Es una ecuación bicuadrada:

$z = x^2 \rightarrow z^2 - 18z + 81 \rightarrow z = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

75. Resuelve las ecuaciones bicuadradas que aparecen a continuación.

a) $x^8 + 3x^4 - 4 = 0$

b) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$

c) $x^{12} + 7x^6 + 12 = 0$

d) $36x^{10} + x^5 - 6 = 0$

a) $x^8 + 3x^4 - 4 = 0 \rightarrow z^2 + 3z - 4 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{-3 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -4 \\ z_2 = 1 \end{cases} \quad z_1 = -4 \rightarrow x^4 = -4 \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$z_2 = 1 \rightarrow x^4 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$

b) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0 \rightarrow z^2 - 19z - 216 = 0$

$$z = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-216)}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{19 \pm \sqrt{1225}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{19 - 35}{2} = -8 \\ z_2 = \dfrac{19 + 35}{2} = 27 \end{cases}$$

$z_1 = -8 \rightarrow x^3 = -8 \rightarrow x = -2 \qquad z_2 = 27 \rightarrow x^3 = 27 \rightarrow x = 3$

c) $x^{12} + 7x^6 + 12 = 0 \rightarrow z^2 + 7z + 12 = 0$

$$z = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{-7 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -4 \\ z_2 = -3 \end{cases}$$

$z_1 = -4 \rightarrow x^6 = -4 \rightarrow$ No tiene solución real. $\qquad z_2 = -3 \rightarrow x^6 = -3 \rightarrow$ No tiene solución real.

d) $36x^{10} + x^5 - 6 = 0 \rightarrow 36z^2 + z - 6 = 0$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 36 \cdot (-6)}}{2 \cdot 36} \rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{865}}{72} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{865}}{72} \simeq -0{,}42 \\ z_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{865}}{72} \simeq 0{,}39 \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{865}}{72} \rightarrow x^5 = \frac{-1 - \sqrt{865}}{72} \rightarrow x_1 = \sqrt[5]{\frac{-1 - \sqrt{865}}{72}} \simeq -0{,}84$$

$$z_2 = \frac{-1 + \sqrt{865}}{72} \rightarrow x^5 = \frac{-1 + \sqrt{865}}{72} \rightarrow x_2 = \sqrt[5]{\frac{-1 + \sqrt{865}}{72}} \simeq 0{,}83$$

76. Busca las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas y comprueba, al menos, una de las soluciones.

a) $\dfrac{1 - x^2}{x} + \dfrac{3x + 1}{4} + \dfrac{1}{6} = 0$

b) $\dfrac{x^2 + 4}{x} + \dfrac{1 - 4x}{3} + \dfrac{8}{15} = 0$

c) $\dfrac{2 - x}{2x} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{3x^2 - 2x}{3x}$

a) $\frac{1-x^2}{x}+\frac{3x+1}{4}+\frac{1}{6}=0 \rightarrow 12-12x^2+9x^2+3x+2x=0 \rightarrow -3x^2+5x+12=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-3)\cdot 12}}{2\cdot(-3)} \rightarrow x=\frac{-5\pm 13}{-6} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{4}{3} \\ x_2=3 \end{cases}$$

$$\frac{1-3^2}{3}+\frac{3\cdot 3+1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{-8}{3}+\frac{10}{4}+\frac{1}{6}=0$$

b) $\frac{x^2+4}{x}+\frac{1-4x}{3}+\frac{8}{15}=0 \rightarrow 15x^2+60+5x-20x^2+8x=0$

$$\rightarrow -5x^2+13x+60=0$$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot(-5)\cdot 60}}{2\cdot(-5)} \rightarrow x=\frac{-13\pm 37}{-10} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{12}{5} \\ x_2=5 \end{cases}$$

$$\frac{5^2+4}{5}+\frac{1-4\cdot 5}{3}+\frac{8}{15}=\frac{29}{5}-\frac{19}{3}+\frac{8}{15}=0$$

c) $\frac{2-x}{2x}=\frac{5}{6}-\frac{3x^2-2x}{3x} \rightarrow 6-3x=5x-6x^2+4x \rightarrow x^2-2x+1=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \rightarrow x=1$$

$$\frac{2-1}{2\cdot 1}-\frac{5}{6}+\frac{3\cdot 1^2-2\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=0$$

77. Resuelve las ecuaciones con fracciones algebraicas que aparecen a continuación.

a) $\frac{x^2+1}{x}-x=\frac{7x^2-7-6x}{6x^2-6}$

b) $\frac{x+4}{4x+7}=\frac{x-3}{x^2-x-6}$

c) $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{7}{4x^2-1}=\frac{x}{2x+1}$

d) $\frac{4}{x^2-1}+1=\frac{x}{x+1}$

e) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x^2-9}$

a) $\frac{x^2+1}{x}-x=\frac{7x^2-7-6x}{6x^2-6} \rightarrow \frac{6x^4-6}{6x(x^2-1)}-\frac{6x^4-6x^2}{6x(x^2-1)}=\frac{7x^3-6x^2-7x}{6x(x^2-1)} \rightarrow$

$$\rightarrow 7x^3-12x^2-7x+6=0 \rightarrow x_1=2 \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{22}}{7} \quad x_3=\frac{-1+\sqrt{22}}{7}$$

b) $\frac{x+4}{4x+7}=\frac{x-3}{x^2-x-6} \rightarrow (x+4)(x^2-x-6)=(4x+7)(x-3) \rightarrow x^3-x^2-5x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{cases}$

La única solución válida es $x=-1$, pues $x=3$ se descarta por hacer 0 el segundo denominador.

c) $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{7}{4x^2-1}=\frac{x}{2x+1} \rightarrow \frac{2x^2+3x+1}{4x^2-1}-\frac{7}{4x^2-1}=\frac{2x^2-x}{4x^2-1} \rightarrow 4x-6=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

d) $\frac{4}{x^2-1}+1=\frac{x}{x+1} \rightarrow \frac{4}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x^2-1}=\frac{x^2-x}{x^2-1} \rightarrow 3+x=0 \rightarrow x=-3$

e) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x^2-9} \rightarrow \frac{x-3}{x^2-9}-\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{1}{x^2-9} \rightarrow -7=0 \rightarrow$ No tiene solución real.

78. Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\frac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12}=6$

b) $3x^2(x^2-2)=\frac{x^2-2}{3}$

c) $8x+\frac{12}{x}=\frac{20}{x^3}$

d) $\frac{9x}{2x^2}=1-3x^2$

a) $\frac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12}=6\rightarrow x^4-13x^2+36=0\xrightarrow{z=x^2}z^2-13z+36=0$

$$z=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 1\cdot 36}}{2\cdot 1}=\frac{13\pm 5}{2}\rightarrow\begin{cases}z_1=9\\ z_2=4\end{cases}$$

$z_1=9\rightarrow x_1=-3\qquad x_2=3$

$z_2=4\rightarrow x_3=-2\qquad x_4=2$

b) $3x^2(x^2-2)=\frac{x^2-2}{3}\rightarrow 9x^4-19x^2+2=0\xrightarrow{z=x^2}9z^2-19z+2=0$

$$z=\frac{-(-19)\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot 9\cdot 2}}{2\cdot 9}=\frac{19\pm 17}{18}\rightarrow\begin{cases}z_1=2\\ z_2=\frac{1}{9}\end{cases}$$

$z_1=2\rightarrow x_1=-\sqrt{2}\qquad x_2=\sqrt{2}$

$z_2=\frac{1}{9}\rightarrow x_3=-\frac{1}{3}\qquad x_4=\frac{1}{3}$

c) $8x+\frac{12}{x}=\frac{20}{x^3}\rightarrow 2x^4+3x^2-5=0\xrightarrow{z=x^2}2z^2+3z-5=0$

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 7}{4}\rightarrow\begin{cases}z_1=1\\ z_2=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

$z_1=1\rightarrow x_1=-1\qquad x_2=1$

$z_2=-\frac{5}{2}\rightarrow$ No tiene solución real.

d) $\frac{9}{2x^2}=1-3x^2\rightarrow 6x^4-2x^2+9=0\xrightarrow{z=x^2}6z^2-2z+9=0$

$$z=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 6\cdot 9}}{2\cdot 6}=\frac{2\pm\sqrt{-212}}{12}$$

No tiene solución real.

79. Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\frac{4}{x+3}=\frac{1}{2x+1}$

b) $\frac{x+2}{2-x}+\frac{3x}{2x-1}=0$

c) $\frac{3}{x-3}-\frac{2}{3x+5}=0$

d) $\frac{x}{x-1}=\frac{x-3}{x-2}$

a) $\frac{4}{x+3}=\frac{1}{2x+1}\rightarrow 8x+4=x+3\rightarrow 7x=-1\rightarrow x=-\frac{1}{7}$

b) $\frac{x+2}{2-x}+\frac{3x}{2x-1}=0\rightarrow\frac{x+2}{2-x}=\frac{3x}{1-2x}\rightarrow x^2-9x+2=0\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{9+\sqrt{73}}{2}\\ x_2=\frac{9-\sqrt{73}}{2}\end{cases}$

c) $\frac{3}{x-3}-\frac{2}{3x+5}=0\rightarrow\frac{3}{x-3}=\frac{2}{3x+5}\rightarrow 9x+15=2x-6\rightarrow x=-3$

d) $\frac{x}{x-1}=\frac{x-3}{x-2}\rightarrow x^2-2x=x^2-4x+3\rightarrow -2x=-4x+3\rightarrow x=\frac{3}{2}$

80. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{2x}$

b) $x^2-3x-4+\dfrac{12}{x}=0$

c) $\dfrac{x^2+x-6}{x}+3=0$

d) $\dfrac{2x}{3x-4}-\dfrac{x}{x-1}=0$

a) $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{2x}\rightarrow\dfrac{2(x+1)(x-1)}{2x^2(x+1)}=\dfrac{4x^2+x(x+1)}{2x^2(x+1)}\rightarrow 2x^2-2=4x^2+x^2+1\rightarrow x^2=-1\rightarrow$ No existe solución real.

b) $x^2-3x-4+\dfrac{12}{x}=0\rightarrow x^3-3x^2-4x+12=0\rightarrow x_1=2\quad x_2=-2\quad x_3=3$

c) $\dfrac{x^2+x-6}{x}+3=0\rightarrow x^2+x-6+3x=0\rightarrow x^2+4x-6=0\rightarrow x_1=-2+\sqrt{10}\quad x_2=-2-\sqrt{10}$

d) $\dfrac{2x}{3x-4}-\dfrac{x}{x-1}=0\rightarrow 2x(x-1)=(3x-4)x\rightarrow x^2-2x=0\rightarrow x(x-2)=0\rightarrow x_1=0\quad x_2=2$

81. Halla el valor de *x* en las siguientes ecuaciones.

a) $1+\dfrac{5}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}=0$

b) $\dfrac{10x+1}{2(x+1)}-\dfrac{4x^2+3x-4}{2(x+1)^2}=3$

c) $\dfrac{2x-1}{x-4}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x+3}{x}=1$

d) $\dfrac{1}{x-1}+1=\dfrac{x^2}{x^2+3x-4}$

e) $\dfrac{x^2-5x+2}{2x-5}+\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{2x-5}{x-1}=-1+\dfrac{-3x}{4}$

f) $\dfrac{x^2-4}{x^2+x+1}-\dfrac{x+1}{x-2}+2x+\dfrac{1}{7}=0$

g) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x}{x^3-1}+\dfrac{2x}{x^2+x+1}=0$

a) $1+\dfrac{5}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}=0\rightarrow 1-x^2+5(1-x)+x(1+x)=0\rightarrow 6=4x\rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{10x+1}{2(x+1)}-\dfrac{4x^2+3x-4}{2(x+1)^2}=3\rightarrow(10x+1)(x+1)-(4x^2+3x-4)=6(x+1)^2\rightarrow$

$\rightarrow 10x^2+x+10x+1-4x^2-3x+4=6x^2+12x+6\rightarrow -4x-1=0\rightarrow x=-\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{2x-1}{x-4}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x+3}{x}=1\rightarrow(2x-1)(x-1)x+x^2(x-4)-(2x+3)(x-4)(x-1)=x(x-4)(x-1)\rightarrow$

$\rightarrow 5x^2+4x-12=0\rightarrow x_1=-2\quad x_2=\dfrac{6}{5}$

d) $\dfrac{1}{x-1}+1=\dfrac{x^2}{x^2+3x-4}\rightarrow\dfrac{1}{x-1}+1=\dfrac{x^2}{(x+4)(x-1)}\rightarrow(x+4)+(x^2+3x-4)=x^2\rightarrow 4x=0\rightarrow x=0$

e) $\dfrac{x^2-5x+2}{2x-5}+\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{2x-5}{x-1}=-1+\dfrac{-3x}{4}\rightarrow$

$\rightarrow 4(x^2-5x+2)(x^2-1)+4(x-2)(2x-5)(x-1)+4(2x-5)^2(x+1)=-4(2x-5)(x^2-1)-3x(2x-5)(x^2-1)\rightarrow$

$\rightarrow 10x^4-3x^3-130x^2+123x+72=0\rightarrow x_1=3\quad x_2=-3{,}8186\quad x_3=-0{,}41092\quad x_4=1{,}5295$

La única solución que se puede obtener con los métodos vistos en el curso es $x=3$.

f) $\dfrac{x^2-4}{x^2+x+1}-\dfrac{x+1}{x-2}+2x+\dfrac{1}{7}=0\rightarrow$

$\rightarrow 7(x^2-4)(x-2)-7(x+1)(x^2+x+1)+14x(x^2+x+1)(x-2)+(x^2+x+1)(x-2)=0\rightarrow$

$14x^4+43x^3+13x^2-15x+47=0\rightarrow$ No tiene solución real.

g) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x}{x^3-1}+\dfrac{2x}{x^2+x+1}=0\rightarrow\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}+\dfrac{2x}{x^2+x+1}=0\rightarrow$

$x(x^2+x+1)+x(x+1)+2x(x+1)(x-1)=0\rightarrow 3x^3+2x^2=0\rightarrow x^2(3x+2)=0\rightarrow x_1=0\quad x_2=-\dfrac{2}{3}$

82. **Completa las siguientes ecuaciones escribiendo un número en el segundo miembro, de manera que tengan la solución indicada.**

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = ■$
$x = 2$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}} = ■ - \dfrac{1}{\sqrt{4x}}$
$x = 4$

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = -3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{13}{12} - \dfrac{1}{\sqrt{4x}}$

83. **Halla la solución de las ecuaciones con radicales.**

a) $\sqrt{6x-2} = 4$

b) $\sqrt{6x-8} = x$

c) $\sqrt{x^2+9} - 1 = x$

d) $\sqrt{2x^2+7x-1} = x+1$

a) $\sqrt{6x-2} = 4 \rightarrow 6x-2=16 \rightarrow 6x-18=0 \rightarrow x=3$

b) $\sqrt{6x-8} = x \rightarrow 6x-8=x^2 \rightarrow x^2-6x+8=0 \rightarrow x_1=2 \quad x_2=4$

c) $\sqrt{x^2+9}-1=x \rightarrow x^2+9=x^2+2x+1 \rightarrow 2x-8=0 \rightarrow x=4$

d) $\sqrt{2x^2+7x-1}=x+1 \rightarrow 2x^2+7x-1=x^2+2x+1 \rightarrow x^2+5x-2=0 \rightarrow x_1=\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2} \quad x_2=\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}$

84. **Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.**

a) $\sqrt[3]{x+9} = 4$

b) $\sqrt[3]{x^2-7x} = 2$

a) $\sqrt[3]{x+9}=4 \rightarrow x+9=64 \rightarrow x-55=0 \rightarrow x=55$

b) $\sqrt[3]{x^2-7x}=2 \rightarrow x^2-7x=8 \rightarrow x^2-7x-8=0 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=8$

85. **Resuelve estas ecuaciones con radicales.**

a) $\sqrt{2x-10} = 5\sqrt{x-10}$

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} = 5$

c) $\sqrt{4x-11} = 7\sqrt{2x-29}$

d) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1} = 3$

a) $\sqrt{2x-10}=5\sqrt{x-10} \rightarrow 2x-10=25(x-10) \rightarrow 23x-240=0 \rightarrow x=\dfrac{240}{23}$

b) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}=5 \rightarrow x+2=x+10\sqrt{x+3}+28 \rightarrow x-\dfrac{94}{25}=0 \rightarrow x=\dfrac{94}{25}$

Al comprobar el resultado se observa que no es solución.

c) $\sqrt{4x-11}=7\sqrt{2x-29} \rightarrow 4x-11=49(2x-29) \rightarrow 94x-1410=0 \rightarrow x=15$

d) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}=3 \rightarrow x+3=x+6\sqrt{x+1}+10 \rightarrow x-\dfrac{13}{36}=0 \rightarrow x=\dfrac{13}{36}$

Al comprobar el resultado se observa que no es solución.

86. **Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.**

a) $\sqrt{3x^2-4x+5}+3x+5=\frac{x^2}{5}$

b) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x+3}=5$

c) $\sqrt{x^2+x+\frac{5}{9}}=4-\sqrt{3x+8}$

d) $\sqrt{5-8x}+\sqrt{x^2-6x+\frac{3}{4}}=-10x$

a) $\sqrt{3x^2-4x+5}+3x+5=\frac{x^2}{5}\rightarrow\left(\sqrt{3x^2-4x+5}\right)^2=\left(\frac{x^2}{5}-3x-5\right)^2\rightarrow$

$$\rightarrow 3x^2-4x+5=\frac{x^4}{25}-\frac{6x^3}{5}+7x^2+30x+25\rightarrow-\frac{x^4}{25}+\frac{6x^3}{5}-4x^2-34x-20=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-3{,}3205\\x_2=24{,}456\\x_3=-0{,}64731\\x_4=9{,}5122\end{cases}$$

Tras la comprobación, las únicas soluciones válidas son x_1 y x_2.

Ninguna de estas dos soluciones se puede obtener con los métodos vistos en el curso.

b) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x+3}=5\rightarrow\left(\sqrt{x^2+4x+4}\right)^2=\left(5-\sqrt{x+3}\right)^2\rightarrow$

$$\rightarrow x^2+4x+4=x+28-10\sqrt{x+3}\rightarrow\left(x^2+3x-24\right)^2=\left(-10\sqrt{x+3}\right)^2\rightarrow$$

$$\rightarrow x^4+6x^3-39x^2-244x+276=0\rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=6\end{cases}$$

Tras la comprobación, se observa que la única solución válida es $x_1=1$.

c) $\sqrt{x^2+x+\frac{5}{9}}=4-\sqrt{3x+8}\rightarrow\left(\sqrt{x^2+x+\frac{5}{9}}\right)^2=\left(4-\sqrt{3x+8}\right)^2\rightarrow$

$$\rightarrow x^2+x+\frac{5}{9}=16+3x+8-8\sqrt{3x+8}\rightarrow\left(x^2-2x-\frac{211}{9}\right)^2=\left(-8\sqrt{3x+8}\right)^2\rightarrow$$

$$\rightarrow x^4-4x^3-\frac{386}{9}x^2-\frac{884}{9}x=+\frac{3049}{81}=0\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}\\x_2=9{,}535\end{cases}$$

Tras la comprobación, la única solución válida es $x_1=\frac{1}{3}$.

d) $\sqrt{5-8x}+\sqrt{x^2-6x+\frac{3}{4}}=-10x\rightarrow\left(\sqrt{5-8x}\right)^2=\left(-10x-\sqrt{x^2-6x+\frac{3}{4}}\right)^2\rightarrow$

$$5-8x=101x^2-6x+\frac{3}{4}+10x\sqrt{4x^2-24x+3}\rightarrow\left(101x^2-2x+\frac{17}{4}\right)^2=100x^2(4x^2-24x+3)\rightarrow$$

$$\rightarrow 9801x^4+2804x^3-\frac{2309x^2}{2}-17x+\frac{289}{16}=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}\\x_2=-0{,}1221\end{cases}$$

La única solución que se puede obtener con los métodos vistos en el curso es $x_1=-\frac{1}{2}$.

87. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+2} = 0$

b) $\sqrt{x - \sqrt{1-x}} + \sqrt{x} = 1$

a) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}=0 \rightarrow 2x+2\sqrt{x+7}\sqrt{x-1}+6=4x+8 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{x+7}\sqrt{x-1}=x+1 \rightarrow x^2+6x-7=x^2+2x+1 \rightarrow 4x-8=0 \rightarrow x=2$

b) $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}+\sqrt{x}=1 \rightarrow x-\sqrt{1-x}=x-2\sqrt{x}+1 \rightarrow$

$\rightarrow 2\sqrt{x}=1+\sqrt{1-x} \rightarrow 4x=-x+2\sqrt{1-x}+2 \rightarrow 5x-2=2\sqrt{1-x} \rightarrow$

$$\rightarrow 25x^2-20x+4=4-4x \rightarrow 25x^2-16x=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\dfrac{16}{25} \end{cases}$$

Al comprobar el resultado vemos que la única solución válida es $x_2=\dfrac{16}{25}$.

88. Calcula la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) = 0$

b) $(x^2 - x)(x^2 + 16) = 0$

c) $(x - 1)(x^2 + 4)(x^2 - 9) = 0$

d) $(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 2x - 8) = 0$

a) $(x^2-4)(x^2-3x+2)=0 \rightarrow (x-1)(x+2)(x-2)^2=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=1 \quad x_3=2$

b) $(x^2-x)(x^2+16)=0 \rightarrow x(x-1)(x^2+16)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=1$

c) $(x-1)(x^2+4)(x^2-9)=0 \rightarrow (x-1)(x-3)(x+3)(x^2+4)=0 \rightarrow x_1=-3 \quad x_2=1 \quad x_3=3$

d) $(x^2-4x-5)(x^2-2x-8)=0 \rightarrow (x+1)(x+2)(x-5)(x-4)=0 \rightarrow \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=-1 \quad x_3=4 \quad x_4=5$

89. Halla la solución de las ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

b) $x^2(x + 6) = 32$

c) $x^2(x^2 + 1) + 2x^3 + 36 = 12x(x + 1)$

d) $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8 = 0$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 4 & 1 & -6 \\
1 & & 1 & 5 & 6 \\
\hline
 & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -6 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 1$

b) $x^2(x+6) = 32 \rightarrow x^3 + 6x^2 - 32 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 6 & 0 & -32 \\
2 & & 2 & 16 & 32 \\
\hline
 & 1 & 8 & 16 & \boxed{0} \\
-4 & & -4 & -16 & \\
\hline
 & 1 & 4 & \boxed{0} & \\
-4 & & -4 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = 2$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1) \rightarrow x^4+2x^3-11x^2-12x+36=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -11 & -12 & 36 \\
2 & & 2 & 8 & -6 & -36 \\
\hline
 & 1 & 4 & -3 & -18 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & 12 & 18 & \\
\hline
 & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & -9 & & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & & \\
-3 & & -3 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x_1=-3 \qquad x_2=2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & -14 & 8 \\
-2 & & -4 & 18 & -8 \\
\hline
 & 2 & -9 & 4 & \boxed{0} \\
4 & & 8 & -4 & \\
\hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$2x-1=0$

$x=\frac{1}{2}$

$x_1=\frac{1}{2} \qquad x_2=-2 \qquad x_3=4$

90. **Halla las soluciones de estas ecuaciones.**

a) $6x^3-7x^2-x+2=0$

b) $4x^3(x-3)+2x^2+30(x+1)=23x(x-1)$

c) $x^4+3x^3-11x^2+2x=0$

d) $x^2(x^2-x-6)=3(x^2-3x)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & -7 & -1 & 2 \\
1 & & 6 & -1 & -2 \\
\hline
 & 6 & -1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

Resolvemos la ecuación $6x^2-x-2=0$:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6}=\frac{1\pm 7}{12} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$x_1=-\frac{1}{2} \qquad x_2=\frac{2}{3} \qquad x_3=1$

b) $4x^3(x-3)+2x^2+30(x+1)=23x(x-1) \rightarrow 4x^4-12x^3-21x^2+53x+30=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & -12 & -21 & 53 & 30 \\
-2 & & -8 & 40 & -38 & -30 \\
\hline
 & 4 & -20 & 19 & 15 & \boxed{0} \\
3 & & 12 & -24 & -15 & \\
\hline
 & 4 & -8 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Resolvemos la ecuación $4x^2-8x-5=0$:

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 4\cdot(-5)}}{2\cdot 4}=\frac{8\pm 12}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$x_1=-\frac{1}{2} \qquad x_2=-2 \qquad x_3=\frac{5}{2} \qquad x_4=3$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x^3 + 3x^2 - 11x + 2) = 0$

	1	3	−11	2
2		2	10	−2
	1	5	−1	0

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 1 = 0$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 2$$

d) $x^2(x^2 - x - 6) = 3(x^2 - 3x) \rightarrow x^2(x-3)(x+2) - 3x(x-3) = 0 \rightarrow x(x-3)[x(x+2) - 3] \rightarrow$

$\rightarrow x(x-3)(x^2 + 2x - 3) = 0 \rightarrow x(x-3)(x+3)(x-1) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = -3 \qquad x_4 = 1$

91. Halla la solución de las ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

c) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$

d) $x^3 - 7x^2 + 4x - 28 = 0$

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0
2		2	−6	
	1	−3	0	
3		3		
	1	0		

Las raíces enteras son {1, 2, 3}.

b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

	1	−3	−13	15
1		1	−2	−15
	1	−2	−15	0
5		5	15	
	1	3	0	
−3		−3		
	1	0		

Las raíces enteras son {3, 1, 5}.

c) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$

	1	1	−5	−5	4	4
1		1	2	−3	−8	−4
	1	2	−3	−8	−4	0
−1		−1	−1	4	4	
	1	1	−4	−4	0	
2		2	6	4		
	1	3	2	0		
−2		−2	−2			
	1	1	0			
−1		−1				
	1	0				

Las raíces enteras son {−2, −1, 1, 2}.

d) $x^3 - 7x^2 + 4x - 28 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 4 & -28 \\ 7 & & 7 & 0 & 28 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + 4 = 0$ no tiene soluciones reales, por tanto, la única raíz entera es $x = 7$.

92. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{x^3 + x^2}{3} + x \cdot \dfrac{x+1}{6} = x + 1$

b) $3x^2\left(4 + \dfrac{7}{x}\right) = \dfrac{6(17x - 4)}{x}$

c) $\dfrac{x^2}{16}(x + 7) + x + 1 = 0$

d) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$

e) $\dfrac{2x^2(x - 2) + 4x}{x^2 + 1} = 3$

a) $\dfrac{x^3 + x^2}{3} + x\dfrac{x+1}{6} = x + 1 \rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & \boxed{0} \\ -2 & & -4 & 6 & \\ \hline & 2 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = \dfrac{3}{2}$

b) $3x^2\left(4 + \dfrac{7}{x}\right) = \dfrac{6(17x - 4)}{x} \rightarrow 4x^3 + 7x^2 - 34x + 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 7 & -34 & 8 \\ 2 & & 8 & 30 & -8 \\ \hline & 4 & 15 & -4 & \boxed{0} \\ -4 & & -16 & 4 & \\ \hline & 4 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$4x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{4}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = \dfrac{1}{4} \qquad x_3 = 2$

c) $\dfrac{x^2}{16}(x + 7) + x + 1 = 0 \rightarrow x^3 + 7x^2 + 16x + 16 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 16 & 16 \\ -4 & & -4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 3x + 4 = 0$:

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} \rightarrow$ No tiene solución real.

$x = -4$

d) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}\rightarrow -5x^3+8x^2+3x+2=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -5 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & & -10 & -4 & -2 \\ \hline & -5 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $-5x^2-2x-1=0$:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-5)\cdot(-1)}}{2\cdot(-5)}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{-10}\rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=2$

e) $\dfrac{2x^2(x-2)+4x}{x^2+1}=3\rightarrow 2x^3-7x^2+4x-3=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 4 & -3 \\ 3 & & 6 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $2x^2-x+1=0$:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{4}\rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=3$

93. Escribe alguna ecuación que tenga las siguientes características.

a) Los valores $x=1$, $x=2$ y $x=3$ son soluciones de la ecuación.

b) Es una ecuación de grado 3 con una sola solución real que es $x=\dfrac{1}{2}$.

c) Una ecuación de grado 3 con dos soluciones reales que sean una opuesta de la otra.

d) Una ecuación de grado 2 con coeficientes enteros y cuyas soluciones sean $x=-\dfrac{1}{3}$ y $x=\dfrac{2}{5}$.

e) Una ecuación de grado 3 con coeficientes enteros y los valores $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $x=-3$ son dos de sus soluciones.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $7(x-1)(x-2)(x-3)=0\rightarrow 7x^3-42x^2+77x-42=0$

b) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3=0\rightarrow x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{8}=0\rightarrow 8x^3-12x^2+6x-1=0$

c) Si dos de las soluciones son reales, entonces la tercera solución también será real.

$(x-1)(x+1)x=0\rightarrow x^3-x=0$

d) $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{2}{5}\right)=0\rightarrow x^2-\dfrac{x}{15}-\dfrac{2}{15}=0\rightarrow 15x^2-x-2=0$

e) Tomando como tercera solución $x_3=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x+3)=0\rightarrow 2x^3+6x^2-x-3=0$$

94. **Halla cuánto vale *x* en las siguientes expresiones.**

a) $\log_x 3 = -1$

b) $\log_x 5 = 2$

c) $\log_x 3 = -2$

d) $\log_x 2 = 5$

a) $\log_x 3 = -1 \to x^{-1} = 3 \to x = \frac{1}{3}$

b) $\log_x 5 = 2 \to x^2 = 5 \to x_1 = \sqrt{5} \quad x_2 = -\sqrt{5}$

La única solución válida es $x_1 = \sqrt{5}$.

c) $\log_x 3 = -2 \to x^{-2} = 3 \to x^2 = \frac{1}{3} \to x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

La única solución válida es $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\log_x 2 = 5 \to x^5 = 2 \to x = \sqrt[5]{2}$

95. **Calcula el valor de *x* en las siguientes expresiones.**

a) $\log_x 8 = 4$

b) $\log_x \frac{1}{4} = -4$

c) $\log_x 3 = 5$

d) $\log_x \frac{4}{9} = -2$

e) $\log_x 343 = 3$

f) $\log_x 2 = 4$

g) $\log_x \left(-\frac{125}{8}\right) = -3$

h) $\log_x 49 = 6$

a) $\log_x 8 = 4 \to x^4 = 8 \to x = \sqrt[4]{8}$

b) $\log_x \frac{1}{4} = -4 \to x^{-4} = \frac{1}{4} \to x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

c) $\log_x 3 = 5 \to x^5 = 3 \to x = \sqrt[5]{3}$

d) $\log_x \frac{4}{9} = -2 \to x^{-2} = \frac{4}{9} \to x^2 = \frac{9}{4} \to x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = -\frac{3}{2}$

La única solución válida es $x_1 = \frac{3}{2}$.

e) $\log_x 343 = 3 \to x^3 = 343 \to x = 7$

f) $\log_x 2 = 4 \to x^4 = 2 \to x = \sqrt[4]{2}$

g) $\log_x \left(-\frac{125}{8}\right) = -3 \to x^{-3} = -\frac{125}{8} \to x = -\frac{2}{5}$

h) $\log_x 49 = 6 \to x^6 = 49 \to x = \sqrt[6]{49} = \sqrt[3]{7}$

96. **Calcula el valor de *x* en las expresiones que aparecen a continuación.**

a) $\log_3 9^x = 2$

b) $\log 2^x = \frac{3}{2}$

c) $\ln 3^x = -1$

d) $\log_2 4^{x+4} = -2$

e) $\log_3 9^{x+3} = 3$

f) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}$

g) $\ln 3^{x+6} = 3$

h) $\log_3 27^{3x+4} = -2$

a) $\log_3 9^x = 2 \to 3^2 = 9^x \to x = 1$

b) $\log 2^x = \frac{3}{2} \to x \log 2 = \frac{3}{2} \to x = \frac{3}{2 \log 2} \approx 4{,}983$

c) $\ln 3^x = -1 \to x \ln 3 = -1 \to x = -\frac{1}{\ln 3} \approx -0{,}91$

d) $\log_2 4^{x+4} = -2 \to 2^{-2} = 4^{x+4} \to 4^{-1} = 4^{x+4} \to -1 = x + 4 \to x = -5$

e) $\log_3 9^{x+3} = 3 \to 3^3 = 9^{x+3} \to 3^3 = 3^{2x+6} \to 3 = 2x + 6 \to x = -\frac{3}{2}$

f) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \to \frac{x}{2} \log 2 = \frac{3}{2} \to x = \frac{3}{\log 2} \approx 9{,}966$

g) $\ln 3^{x+6} = 3 \to (x+6)\ln 3 = 3 \to x = \frac{3}{\ln 3} - 6 \approx -3{,}269$

h) $\log_3 27^{3x+4} = -2 \to (3x+4)\log_3 27 = -2 \to 3\cdot(3x+4) = -2 \to x = -\frac{14}{9}$

97. Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.

a) $\log x = -1 + \log 5$

b) $\log_5 x = 2 + \log_5 7$

c) $\log_2 x = 3 + \log_2 9$

a) $\log x = -1 + \log 5 \rightarrow \log \frac{x}{5} = -1 \rightarrow \frac{x}{5} = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_5 x = 2 + \log_5 7 \rightarrow \log_5 \frac{x}{7} = 2 \rightarrow \frac{x}{7} = 25 \rightarrow x = 175$

c) $\log_2 x = 3 + \log_2 9 \rightarrow \log_2 \frac{x}{9} = 3 \rightarrow \frac{x}{9} = 8 \rightarrow x = 72$

98. Resuelve las ecuaciones logarítmicas que aparecen a continuación.

a) $\log_4 x = 2 + \log_4 \frac{1}{2}$

b) $\log (3x - 1) = -2 + \log 50$

c) $\log_2 \frac{3x-1}{4} = 2 + \log_2 \frac{1}{16}$

a) $\log_4 x = 2 + \log_4 \frac{1}{2} \rightarrow \log_4 2x = 2 \rightarrow 2x = 16 \rightarrow x = 8$

b) $\log (3x - 1) = -2 + \log 50 \rightarrow \log \frac{3x-1}{50} = -2 \rightarrow \frac{3x-1}{50} = \frac{1}{100} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log_2 \frac{3x-1}{4} = 2 + \log_2 \frac{1}{16} \rightarrow \log_2 \frac{16(3x-1)}{4} = 2 \rightarrow 12x - 4 = 4 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

99. Calcula el valor de *x* en las siguientes ecuaciones.

a) $\log_x 9 + \frac{1}{2}\log_x 16 = 2$

b) $\log_{x+1}(6x + 1) = 2$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 3) = 0$

d) $\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 4$

e) $\log_2 (x^2 + 4x - 1) = 2$

a) $\log_x 9 + \frac{1}{2}\log_x 16 = 2 \rightarrow \log_x \left(9 \cdot \sqrt{16}\right) = 2 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -6 \end{cases}$

La única solución válida es $x_1 = 6$.

b) $\log_{x+1}(6x + 1) = 2 \rightarrow (x + 1)^2 = 6x + 1 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

La única solución válida es $x_2 = 4$.

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 3) = 0 \rightarrow 1 = x^2 - 3x + 3 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

d) $\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 4 \rightarrow \log_2 x = 4 \rightarrow x = 16$

e) $\log_2(x^2 + 4x - 1) = 2 \rightarrow 4 = x^2 + 4x - 1 \rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

100. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\log(x-3)+\log(x+1)=1-\log(x-5)$

b) $\log_3(x^2+x+1)=27$

c) $\log_5\left(x+\frac{1}{2}\right)+\log_5\left(x+\frac{3}{4}\right)=1-\log_5\left(x+\frac{1}{3}\right)$

d) $\log\left(\frac{x-2}{2}\right)+\log\left(\frac{x-3}{2}\right)+\log\left(\frac{2x-1}{3}\right)=1$

a) $\log(x-3)+\log(x+1)=1-\log(x-5)\rightarrow\log[(x-3)(x+1)(x-5)]=1\rightarrow$

$$\rightarrow(x-3)(x+1)(x-5)=10\rightarrow x^3-7x^2+7x+5=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-0{,}47419\\x_2=1{,}8873\\x_3=5{,}5869\end{cases}$$

La única solución válida es $x_3=5{,}5869$.

b) $\log_3(x^2+x+1)=27\rightarrow x^2+x+1=3^{27}\rightarrow\begin{cases}x_1=-2{,}7614\cdot10^6\\x_2=2{,}7614\cdot10^6\end{cases}$

c) $\log_5\left(x+\frac{1}{2}\right)+\log_5\left(x+\frac{3}{4}\right)=1-\log_5\left(x+\frac{1}{3}\right)\rightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=5\rightarrow x^3+\frac{19}{12}x^2+\frac{19}{24}x-\frac{39}{8}=0\rightarrow x=1{,}1906$

d) $\log\left(\frac{x-2}{2}\right)+\log\left(\frac{x-3}{2}\right)+\log\left(\frac{2x-1}{3}\right)=1\rightarrow\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{2}\right)\left(\frac{2x-1}{3}\right)=10\rightarrow\frac{1}{6}x^3-\frac{11}{12}x^2+\frac{17}{12}x-\frac{21}{2}=0\rightarrow x=5{,}8775$

101. Halla el valor de *x* en las siguientes ecuaciones.

a) $\log_3\sqrt{x-5}+\log_3\sqrt{2x-3}=1$

b) $\log_2\sqrt{x}-\log_2\sqrt[3]{x}=\frac{2}{3}$

a) $\log_3\sqrt{x-5}+\log_3\sqrt{2x-3}=1\rightarrow\frac{1}{2}\log_3[(x-5)(2x-3)]=1\rightarrow(x-5)(2x-3)=9\rightarrow2x^2-13x+6=0\rightarrow\begin{cases}x_1=6\\x_2=\frac{1}{2}\end{cases}$

La única solución válida es $x_1=6$.

b) $\log_2\sqrt{x}-\log_2\sqrt[3]{x}=\frac{2}{3}\rightarrow\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=2^{\frac{2}{3}}\rightarrow x^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{2}{3}}\rightarrow x=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^6=16$

102. Resuelve las ecuaciones logarítmicas que aparecen a continuación.

a) $\log_5(x-1)+\log_5(x+1)=\log_5 3x$

b) $\log_2(x-3)-\log_2(2x+21)=1-\log_2(x-2)$

a) $\log_5(x-1)+\log_5(x+1)=\log_5 3x\rightarrow x^2-1=3x\rightarrow x^2-3x-1=0\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\approx3{,}303\\x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}\approx-0{,}303\end{cases}$

La única solución válida es $x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\approx3{,}303$.

b) $\log_2(x-3)-\log_2(2x+21)=1-\log_2(x-2)\rightarrow\frac{(x-3)(x-2)}{2x+21}=2\rightarrow$

$$\rightarrow x^2-9x-36=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-3\\x_2=12\end{cases}$$

La única solución válida es $x_2=12$.

103. **Calcula el valor de *x* en las siguientes ecuaciones exponenciales.**

a) $4^x = \frac{1}{64}$
b) $2^{x-5} = 32$
c) $3^{6-x} = 27^{x-2}$
d) $32^{x-2} = 2$
e) $16^{2x-4} = 1$
f) $2^{x+1} = 8$
g) $2^{x+1} = 16$
h) $2^{x+1} = 128$

a) $4^x = \frac{1}{64} \rightarrow 4^x = 4^{-3} \rightarrow x = -3$

b) $2^{x-5} = 32 \rightarrow x - 5 = 5 \rightarrow x = 10$

c) $3^{6-x} = 27^{x-2} \rightarrow 6 - x = 3x - 6 \rightarrow x = 3$

d) $32^{x-2} = 2 \rightarrow 5x - 10 = 1 \rightarrow x = \frac{11}{5}$

e) $16^{2x-4} = 1 \rightarrow 2^{4(2x-4)} = 2^0 \rightarrow 8x = 16 \rightarrow x = 2$

f) $2^{x+1} = 8 \rightarrow x + 1 = 3 \rightarrow x = 2$

g) $2^{x+1} = 16 \rightarrow x + 1 = 4 \rightarrow x = 3$

h) $2^{x+1} = 128 \rightarrow x + 1 = 7 \rightarrow x = 6$

104. **Resuelve las ecuaciones exponenciales que aparecen a continuación.**

a) $64^{2x-5} = 16^{x-2}$
b) $125^{x-3} = 25^{x-3}$
c) $5^{x-3} = 1$
d) $2^{x+1} = \frac{1}{8}$
e) $2^{x+1} = \frac{1}{16}$
f) $2^{x+1} = \frac{1}{128}$

a) $64^{2x-5} = 16^{x-2} \rightarrow 3(2x - 5) = 2(x - 2) \rightarrow 6x - 15 = 2x - 4 \rightarrow x = \frac{11}{4}$

b) $125^{x-3} = 25^{x-3} \rightarrow$ No existe solución real.

c) $5^{x-3} = 1 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

d) $2^{x+1} = \frac{1}{8} \rightarrow x + 1 = -3 \rightarrow x = -4$

e) $2^{x+1} = \frac{1}{16} \rightarrow x + 1 = -4 \rightarrow x = -5$

f) $2^{x+1} = \frac{1}{128} \rightarrow x + 1 = -7 \rightarrow x = -8$

105. **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.**

a) $3 \cdot 27^{x-2} = 9^x$
b) $5^{x+4} = 125^{x-4}$
c) $\frac{1}{81^{6-x}} = 3^{4-x}$
d) $32^{2x-3} = 2^{x+3}$
e) $125^{x+2} = 5^{2x}$
f) $256^x = 4 \cdot 4^{2x-3}$

a) $3 \cdot 27^{x-2} = 9^x \rightarrow 3^{3x-6+1} = 3^{2x} \rightarrow 3x - 5 = 2x \rightarrow x = 5$

b) $5^{x+4} = 125^{x-4} \rightarrow x + 4 = 3x - 12 \rightarrow x = 8$

c) $\frac{1}{81^{6-x}} = 3^{4-x} \rightarrow 3^{4(x-6)} = 3^{4-x} \rightarrow 4x - 24 = 4 - x \rightarrow x = \frac{28}{5}$

d) $32^{2x-3} = 2^{x+3} \rightarrow 10x - 15 = x + 3 \rightarrow x = 2$

e) $125^{x+2} = 5^{2x} \rightarrow 3x + 6 = 2x \rightarrow x = -6$

f) $256^x = 4 \cdot 4^{2x-3} \rightarrow 4^4 = 4^{2x-2} \rightarrow 6 = 2x \rightarrow x = 3$

106. **Opera con las potencias y calcula el valor de *x* en las siguientes ecuaciones exponenciales.**

a) $3^{x^3-\frac{x^2}{10}-\frac{4x}{5}+\frac{3}{10}}=1$

b) $\dfrac{2^{x^3-x^2-5x}}{8}=1$

a) $3^{x^3-\frac{x^2}{10}-\frac{4x}{5}+\frac{3}{10}}=1 \rightarrow 10x^3-x^2-8x+3=0 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=\dfrac{1}{2} \quad x_3=\dfrac{3}{5}$

b) $\dfrac{2^{x^3-x^2-5x}}{8}=1 \rightarrow 2^{x^3-x^2-5x-3}=2^0 \rightarrow x^3-x^2-5x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{cases}$

107. **Resuelve las ecuaciones exponenciales que aparecen a continuación.**

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^3-\frac{34x^2}{5}-\frac{48x}{5}}=1$

b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^3}=\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{3}(2x^2+16x)}$

c) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{5-x^3}\cdot\sqrt{7^{13x^2+13x}}=1$

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^3-\frac{34x^2}{5}-\frac{48x}{5}}=1 \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{5x^3-34x^2-48x}{5}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{0} \rightarrow 5x^3-34x^2-48x=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=-\dfrac{6}{5} \quad x_3=8$

b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^3}=\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{3}(2x^2+16x)} \rightarrow x^3=\dfrac{1}{3}(2x^2+16x) \rightarrow x^3-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{16}{3}x=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=\dfrac{8}{3} \quad x_3=-2$

c) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{5-x^3}\cdot\sqrt{7^{13x^2+13x}}=1 \rightarrow 7^{x^3-5}\cdot 7^{\frac{13x^2+13x}{2}}=7^0 \rightarrow 2x^3+13x^2+13x-10=0 \rightarrow x_1=-5 \quad x_2=\dfrac{1}{2} \quad x_3=-2$

108. **Halla el valor de la incógnita *x*, suponiendo que el resto de letras que aparecen son constantes.**

a) $a^{2x-1}=a^2$

b) $m^{x-3}=(m^2)^{2x}$

c) $(3a)^{2x-5}=9a^2$

d) $(p-3)^{5x}=p^2-6p+9$

e) $(a^2+2ab+b^2)^2=(a+b)^{2x}$

f) $(9-2x-x^2)^{x-3}=1$

g) $(x+1)^{x-1}=1$

a) $a^{2x-1}=a^2 \rightarrow 2x-1=2 \rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

b) $m^{x-3}=(m^2)^{2x} \rightarrow x-3=4x \rightarrow x=-1$

c) $(3a)^{2x-5}=9a^2 \rightarrow (3a)^{2x-5}=(3a)^2 \rightarrow 2x-5=2 \rightarrow x=\dfrac{7}{2}$

d) $(p-3)^{5x}=p^2-6p+9 \rightarrow (p-3)^{5x}=(p-3)^2 \rightarrow 5x=2 \rightarrow x=\dfrac{2}{5}$

e) $(a^2+2ab+b^2)^2=(a+b)^{2x} \rightarrow (a+b)^4=(a+b)^{2x} \rightarrow 4=2x \rightarrow x=2$

f) $(9-2x-x^2)^{x-3}=1 \rightarrow \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x_1=3 \\ 9-2x-x^2=1 \rightarrow \begin{cases} x_2=-4 \\ x_3=2 \end{cases} \end{cases}$

g) $(x+1)^{x-1}=1 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x_1=1 \\ x+1=1 \rightarrow x_2=0 \end{cases}$

109. Resuelve estas ecuaciones exponenciales ayudándote de un cambio de variable.

a) $9^{2x} - 3 \cdot 9^x + 2 = 0$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = 35$

c) $7^{4x} - 3 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 7^{2x} + 13 \cdot 7^x + 6 = 0$

d) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4x} - 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^x + 1 = 0$

a) $$9^{2x} - 3 \cdot 9^x + 2 = 0 \xrightarrow{9^x = t} t^2 - 3t + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow 9^x = 1 \rightarrow x = 0 \\ t_2 = 2 \rightarrow 9^x = 2 \rightarrow x = \dfrac{\log 2}{\log 9} \approx 0{,}3155 \end{cases}$$

b) $$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = 35 \xrightarrow{\left(\frac{2}{3}\right)^x = t} t^2 - 2t - 35 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = -5 \rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = -5 \rightarrow \text{Imposible} \\ t_2 = 7 \rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 7 \rightarrow x = \dfrac{\log 7}{\log \frac{2}{3}} \approx -4{,}8 \end{cases}$$

La solución obtenida se descarta, pues no verifica la ecuación. Por tanto, esta ecuación no tiene solución.

c) $$7^{4x} - 3 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 7^{2x} + 13 \cdot 7^x + 6 = 0 \xrightarrow{7^x = t} t^4 - 3t^3 - 5t^2 + 13t + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \rightarrow 7^x = -2 \rightarrow \text{Imposible} \\ t_2 = 3 \rightarrow 7^x = 3 \rightarrow x = \dfrac{\log 3}{\log 7} \approx 0{,}5646 \\ t_3 = 1 - \sqrt{2} \rightarrow 7^x = 1 - \sqrt{2} \rightarrow \text{Imposible} \\ t_4 = 1 + \sqrt{2} \rightarrow 7^x = 1 + \sqrt{2} \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

d) $$\left(\frac{5}{6}\right)^{4x} - 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^x + 1 = 0 \xrightarrow{\left(\frac{5}{6}\right)^x = t} t^4 - 2t + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow \left(\dfrac{5}{6}\right)^x = 1 \rightarrow x = 0 \\ t_2 = 0{,}54369 \rightarrow \left(\dfrac{5}{6}\right)^x = 0{,}54369 \rightarrow x = \dfrac{\log 0{,}54369}{\log \left(\frac{5}{6}\right)} \approx 3{,}3423 \end{cases}$$

110. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales con la ayuda de un cambio de variable.

a) $3^{3x} + 5 \cdot 3^{2x-1} - 11 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$

b) $4\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 9 \cdot 2^{-2x} - 2^{-x+1}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x+1} + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$

a) $$3^{3x} + 5 \cdot 3^{2x-1} - 11 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0 \xrightarrow{3^x = t} t^3 + \frac{5}{3}t^2 - \frac{11}{3}t + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow 3^x = 1 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = -3 \rightarrow 3^x = -3 \rightarrow \text{Imposible} \\ t_3 = \dfrac{1}{3} \rightarrow 3^x = \dfrac{1}{3} \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

b) $$4\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 9 \cdot 2^{-2x} - 2^{-x+1} \rightarrow 4 \cdot (2^x)^{-3} - 9 \cdot (2^x)^{-2} + 2 \cdot (2^x)^{-1} = 0 \xrightarrow{2^x = t} \frac{4}{t^3} - \frac{9}{t^2} + \frac{2}{t} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2t^2 - 9t + 4 = 0 \rightarrow 2^x = \begin{cases} t_1 = 4 \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x_1 = 2 \\ t_2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow 2^x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

c) $$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x+1} + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \xrightarrow{\left(\frac{3}{2}\right)^x = t} \frac{3}{2}t^3 - t^2 - \frac{3}{2}t + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 1 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = -1 \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = -1 \rightarrow \text{Imposible} \\ t_3 = \dfrac{2}{3} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{2}{3} \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

111. **Indica si $x = 2$ está entre las soluciones de las siguientes inecuaciones.**

a) $3(x - 2) > 1 - 3(2x - 3)$
b) $5(4 - 3x) + 3 \leq 1 + 3x$
c) $2(x - 3) - 4(3 - 2x) > 0$

a) $3(x-2) > 1-3(2x-3) \rightarrow 3(2-2) > 1-3(2\cdot 2-3) \rightarrow 0 > -2$
$x = 2$ es solución de la inecuación.

b) $5(4-3x)+3 \leq 1+3x \rightarrow 5(4-3\cdot 2)+3 \leq 1+3\cdot 2 \rightarrow -7 \leq 7$
$x = 2$ es solución de la inecuación.

c) $2(x-3)-4(3-2x) > 0 \rightarrow 2(2-3)-4(3-2\cdot 2) > 0 \rightarrow 2 > 0$
$x = 2$ es solución de la inecuación.

112. **Halla la solución de las inecuaciones siguientes.**

a) $2x - 30 \leq 5x + 3$
b) $2x - 6 < 5x + 18$
c) $11 - 3x \leq 23$
d) $3x + 2 \geq x + 10$
e) $6 - 5x > 2x + 3$
f) $-14x + 5 \leq x$

a) $2x-30 \leq 5x+3 \rightarrow -33 \leq 3x \rightarrow x \geq -11, \quad x \in [-11, +\infty)$

b) $2x-6 < 5x+18 \rightarrow -24 < 3x \rightarrow x > -8, \quad x \in (-8, +\infty)$

c) $11-3x \leq 23 \rightarrow -12 \leq 3x \rightarrow x \geq -4, \quad x \in [-4, +\infty)$

d) $3x+2 \geq x+10 \rightarrow 2x \geq 8 \rightarrow x \geq 4, \quad x \in [4, +\infty)$

e) $6-5x > 2x+3 \rightarrow 3 > 7x \rightarrow x < \frac{3}{7}, \quad x \in \left(-\infty, \frac{3}{7}\right)$

f) $-14x+5 \leq x \rightarrow 5 \leq 15x \rightarrow x \geq \frac{1}{3}, \quad x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

113. **Resuelve las inecuaciones que aparecen a continuación.**

a) $3(x - 5) + 4(x - 2) \leq 5$
b) $x - 2(x + 2) - 3(2 - 4x) \leq 9$
c) $4(10 - 2x) - 3(2x + 1) \geq -3(x + 1) - (2 - 3x)$

a) $3(x-5)+4(x-2) \leq 5 \rightarrow 7x \leq 28 \rightarrow x \leq 4, \quad x \in (-\infty, 4]$

b) $x-2(x+2)-3(2-4x) \leq 9 \rightarrow 11x \leq 19 \rightarrow x \leq \frac{19}{11}, \quad x \in \left(-\infty, \frac{19}{11}\right]$

c) $4(10-2x)-3(2x+1) \geq -3(x+1)-(2-3x) \rightarrow 42 \geq 14x \rightarrow x \leq 3, \quad x \in (-\infty, 3]$

114. **Encuentra la solución de las siguientes inecuaciones.**

a) $\frac{x}{3} + 1 < \frac{3x}{4} + 3$

b) $\frac{3(x - 1)}{2} + x \leq \frac{x}{3} + 8$

c) $\frac{x - 1}{10} < \frac{x + 2}{40} + \frac{x - 2}{30}$

a) $\frac{x}{3}+1 < \frac{3x}{4}+3 \rightarrow 4x+12 < 9x+36 \rightarrow -24 < 5x \rightarrow x > -\frac{24}{5}, \quad x \in \left(-\frac{24}{5}, +\infty\right)$

b) $\frac{3(x-1)}{2}+x \leq \frac{x}{3}+8 \rightarrow 9x-9+6x \leq 2x+48 \rightarrow 13x \leq 57 \rightarrow x \leq \frac{57}{13}, \quad x \in \left(-\infty, \frac{57}{13}\right]$

c) $\frac{x-1}{10} < \frac{x+2}{40}+\frac{x-2}{30} \rightarrow 12x-12 < 3x+6+4x-8 \rightarrow 5x < 10 \rightarrow x < 2, \quad x \in (-\infty, 2)$

115. **¿Cuál es la solución de estas inecuaciones?**

a) $x^2 - x - 6 < 0$
b) $-x^2 - 2x + 8 < 0$
c) $2x^2 + 5x + 6 < 0$
d) $-x^2 + 3x - 4 < 0$
e) $2x^2 + 5x - 3 > 0$
f) $6x^2 + 31x + 18 \leq 0$

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 10 - 6 > 0 \rightarrow (-\infty, -2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 6 < 0 \rightarrow (-2, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 6 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-2, 3)$.

b) Resolvemos la ecuación: $-x^2 - 2x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 2 \cdot (-10) + 8 < 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 2 \cdot 0 + 8 > 0 \rightarrow (-4, 2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 2 \cdot 10 + 8 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

c) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores positivos.

No tiene solución.

d) Resolvemos la ecuación: $-x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores negativos.

Es una identidad.

e) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 5 \cdot (-10) - 3 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 3 < 0 \rightarrow \left(-3, \dfrac{1}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 3 > 0 \rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -3) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

f) Resolvemos la ecuación: $6x^2 + 31x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{9}{2} \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -1 \qquad x = 0$

Si $x=-10 \rightarrow 6(-10)^2+31\cdot(-10)+18>0 \rightarrow \left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x=-1 \rightarrow 6\cdot(-1)^2+31\cdot(-1)+18<0 \rightarrow \left(-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{2}{3}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x=0 \rightarrow 6\cdot 0^2+31\cdot 0+18>0 \rightarrow \left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left[-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{2}{3}\right]$.

116. Halla la solución de las inecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^4-5x^2+4>0$ b) $x^4+8x^2-20\le 0$

a) $x^4-5x^2+4>0 \rightarrow z^2-5z+4>0 \rightarrow z_1=1 \quad z_2=4$

$z_1=1 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$

$z_2=4 \rightarrow x_3=-2 \quad x_4=2$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-2), (-2,-1), (-1,1), (1,2), (2,+\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \rightarrow (-10)^4-5(-10)^2+4=9504>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=-1{,}5 \rightarrow (-1{,}5)^4-5(-1{,}5)^2+4=-2{,}1875<0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=0 \rightarrow (0)^4-5(0)^2+4=4>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=1{,}5 \rightarrow (1{,}5)^4-5(1{,}5)^2+4=-2{,}1875<0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=10 \rightarrow (10)^4-5(10)^2+4=9504>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-2 \rightarrow (-2)^4-5(-2)^2+4=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=-1 \rightarrow (-1)^4-5(-1)^2+4=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=1 \rightarrow (1)^4-5(1)^2+4=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=2 \rightarrow (2)^4-5(2)^2+4=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$.

b) $x^4+8x^2-20\le 0 \rightarrow z^2+8z-20\le 0 \rightarrow z_1=-10 \quad z_2=2$

$z_1=-10 \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

$z_2=2 \rightarrow x_1=-\sqrt{2} \quad x_2=\sqrt{2}$

Nos quedan los intervalos $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \rightarrow (-10)^4+8(-10)^2-20=10\,780>0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=0 \rightarrow (0)^4+8(0)^2-20=-20\le 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=10 \rightarrow (10)^4+8(10)^2-20=10\,780>0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-\sqrt{2} \to \left(-\sqrt{2}\right)^4+8\left(-\sqrt{2}\right)^2-20=0\leq 0 \to$ Cumple la inecuación.

$x=\sqrt{2} \to \left(\sqrt{2}\right)^4+8\left(\sqrt{2}\right)^2-20=0\leq 0 \to$ Cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

117. Resuelve las inecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^2+6x-1<3x^2+3x-6$

b) $2x^2+25x>x(x-10)$

c) $x^2-(2x+1)(x-1)\leq 7$

d) $(x-1)^2<(2x+1)^2-10$

a) $x^2+6x-1<3x^2+3x-6 \to 2x^2-3x-5>0 \to x_1=-1 \quad x_2=\dfrac{5}{2}$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-1),\left(-1,\dfrac{5}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \to 2(-10)^2-3(-10)-5=225>0 \to$ Cumple la inecuación.

$x=0 \to 2(0)^2-3(0)-5=-5<0 \to$ No cumple la inecuación.

$x=10 \to 2(10)^2-3(10)-5=165>0 \to$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-1 \to 2(-1)^2-3(-1)-5=0 \to$ No cumple la inecuación.

$x=\dfrac{5}{2} \to 2\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-3\left(\dfrac{5}{2}\right)-5=0 \to$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

b) $2x^2+25x>x(x-10) \to x^2+35x>0 \to x_1=-35 \quad x_2=0$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-35),(-35,0)$ y $(0,+\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-100 \to (-100)^2+35(-100)=6500>0 \to$ Cumple la inecuación.

$x=-10 \to (-10)^2+35(-10)=-250<0 \to$ No cumple la inecuación.

$x=100 \to (100)^2+35(100)=13\,500>0 \to$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-35 \to (-35)^2+35(-35)=0 \to$ No cumple la inecuación.

$x=0 \to (0)^2+35(0)=0 \to$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-35)\cup(0,+\infty)$.

c) $x^2-(2x+1)\cdot(x-1)\leq 7 \to x^2-x+6\geq 0 \to$ No tiene soluciones reales.

Entonces, o todos los puntos cumplen la inecuación o ninguno de ellos lo hace.

Por ejemplo, tomemos $x=0 \to$ Cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es todo el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

d) $(x-1)^2 < (2x+1)^2 - 10 \rightarrow 3x^2 + 6x - 10 > 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{39}}{3} \quad x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}$

Nos quedan los intervalos $\left(-\infty, \dfrac{-3-\sqrt{39}}{3}\right), \left(\dfrac{-3-\sqrt{39}}{3}, \dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}, +\infty\right)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x = -10 \rightarrow 3(-10)^2 + 6(-10) - 10 = 230 > 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x = 0 \rightarrow 3(0)^2 + 6(0) - 10 = -10 < 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x = 10 \rightarrow 3(10)^2 + 6(10) - 10 = 350 > 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x = \dfrac{-3-\sqrt{39}}{3} \rightarrow 3\left(\dfrac{-3-\sqrt{39}}{3}\right)^2 + 6\left(\dfrac{-3-\sqrt{39}}{3}\right) - 10 = 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x = \dfrac{-3+\sqrt{39}}{3} \rightarrow 3\left(\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}\right)^2 + 6\left(\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}\right) - 10 = 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \dfrac{-3-\sqrt{39}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{-3+\sqrt{39}}{3}, +\infty\right)$.

118. Determina las soluciones de estas inecuaciones.

a) $\dfrac{x+2}{3} + \dfrac{x(x-1)}{5} > 0$

b) $\dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x-x^2}{3} + 1 < 0$

c) $x - \dfrac{1-2x}{3} - \dfrac{2x^2+1}{4} \geq 5$

d) $3 - \dfrac{2x-3}{2} + \dfrac{16x+x^2}{3} \geq 0$

e) $\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{12x-x^2}{3} \geq \dfrac{2x^2+1}{3} - x$

a) $\dfrac{x+2}{3} + \dfrac{x(x-1)}{5} > 0 \rightarrow 5x + 10 + 3x^2 - 3x > 0 \rightarrow 3x^2 + 2x + 10 > 0$

El primer miembro de la inecuación es siempre positivo, por lo que siempre se cumple. Es cierta para todos los números reales.

b) $\dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x-x^2}{3} + 1 < 0 \rightarrow 9x - 3 - 2x + 2x^2 + 6 < 0 \rightarrow 2x^2 + 7x + 3 < 0$

Resolvemos la ecuación:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -1 \qquad x = 0$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 7 \cdot (-10) + 3 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = -1 \rightarrow 2 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 3 < 0 \rightarrow \left(-3, -\dfrac{1}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 + 3 > 0 \rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$.

c) $x - \frac{1-2x}{3} - \frac{2x^2+1}{4} \geq 5 \rightarrow 12x - 4 + 8x - 6x^2 - 3 \geq 60 \rightarrow -6x^2 + 20x - 67 \geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$$-6x^2 + 20x - 67 = 0$$

No tiene solución real. Como el primer miembro de la ecuación toma siempre valores negativos, la inecuación no tiene solución.

d) $3 - \frac{2x-3}{2} + \frac{16x+x^2}{3} \geq 0 \rightarrow 18 - 6x + 9 + 32x + 2x^2 \geq 0$

$\rightarrow 2x^2 + 26x + 27 \geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$$2x^2 + 26x + 27 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-13-\sqrt{115}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-13+\sqrt{115}}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -5 \qquad x = 0$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 26 \cdot (-10) + 27 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{-13-\sqrt{115}}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = -5 \rightarrow \cdot 2 \cdot (-5)^2 + 26 \cdot (-5) + 27 < 0 \rightarrow \left(\frac{-13-\sqrt{115}}{2}, \frac{-13+\sqrt{115}}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow \cdot 2 \cdot 0^2 + 26 \cdot 0 + 27 > 0 \rightarrow \left(\frac{-13+\sqrt{115}}{2}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{-13-\sqrt{115}}{2}\right] \cup \left[\frac{-13+\sqrt{115}}{2}, +\infty\right)$.

e) $\frac{x-1}{4} - \frac{12x-x^2}{3} \geq \frac{2x^2+1}{3} - x \rightarrow 4x^2 + 33x + 7 \geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$$4x^2 + 33x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-33-\sqrt{977}}{8} \\ x_2 = \dfrac{-33+\sqrt{977}}{8} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -5 \qquad x = 0$

Si $x = -10 \rightarrow 4 \cdot (-10)^2 + 33 \cdot (-10) + 7 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = -5 \rightarrow 4 \cdot (-5)^2 + 33 \cdot (-5) + 7 < 0 \rightarrow \left(\frac{-33-\sqrt{977}}{8}, \frac{-33+\sqrt{977}}{8}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 4 \cdot 0^2 + 33 \cdot 0 + 7 > 0 \rightarrow \left(\frac{-33+\sqrt{977}}{8}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right] \cup \left[\frac{-33+\sqrt{977}}{8}, +\infty\right)$.

119. Resuelve estas inecuaciones que contienen fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0$

b) $\dfrac{2x-3}{x+3} < 0$

c) $\dfrac{-x+1}{2-3x} > 0$

d) $\dfrac{2-x}{2x+5} - 1 > 0$

a) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x+3>0 \\ x-5<0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x>-3 \\ x<5 \end{matrix}\right\}$

$(-3, 5)$

b) $\dfrac{2x-3}{x+3} < 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-3<0 \\ x+3>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x<\dfrac{3}{2} \\ x>-3 \end{matrix}\right\}$

$\left(-3, \dfrac{3}{2}\right)$

c) $\dfrac{-x+1}{2-3x} > 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} -x+1<0 \\ 2-3x>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x>1 \\ x<\dfrac{2}{3} \end{matrix}\right\}$

$\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

d) $\dfrac{2-x}{2x+5} - 1 > 0 \rightarrow \dfrac{-3x-3}{2x+5} > 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x<-1 \\ x>-\dfrac{5}{2} \end{matrix}\right\}$

$\left(-\dfrac{5}{2}, -1\right)$

120. Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones.

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1} \leq 0$

b) $\dfrac{-x^2+3}{2x-3} < 0$

c) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4} > 0$

d) $\dfrac{-x+3}{2x^2-18} \geq 0$

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1} \leq 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-1=0 \\ x+1=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-1 \quad x_2=1 \\ x_3=x_1=-1 \end{matrix}\right\}$

Nos quedan los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 1)$ y $(1, +\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \rightarrow \dfrac{(-10)^2-1}{(-10)+1} = \dfrac{99}{-9} = -11 < 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=0 \rightarrow \dfrac{(0)^2-1}{(0)+1} = \dfrac{-1}{1} = -1 < 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=10 \rightarrow \dfrac{(10)^2-1}{(10)+1} = \dfrac{99}{11} = 9 > 0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-1 \rightarrow \dfrac{(-1)^2-1}{(-1)+1} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ No existe solución.

$x=1 \rightarrow \dfrac{(1)^2-1}{(1)+1} = \dfrac{0}{2} = 0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -1) \cup (-1, 1]$.

b) $\dfrac{-x^2+3}{2x-3}<0 \rightarrow \left.\begin{array}{r}-x^2+3=0\\ 2x-3=0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{ll}x_1=-\sqrt{3} & x_2=\sqrt{3}\\ x=\dfrac{3}{2} & \end{array}\right\}$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-\sqrt{3}),\left(-\sqrt{3},\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}\right)$ y $(\sqrt{3},+\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \rightarrow \dfrac{-(-10)^2+3}{2(-10)-3}=\dfrac{-97}{-23}=\dfrac{97}{23}>0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=0 \rightarrow \dfrac{-(0)^2+3}{2(0)-3}=\dfrac{3}{-3}=-1<0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=1{,}6 \rightarrow \dfrac{-(1{,}6)^2+3}{2(1{,}6)-3}=\dfrac{0{,}44}{0{,}2}=\dfrac{11}{5}>0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=10 \rightarrow \dfrac{-(10)^2+3}{2(10)-3}=\dfrac{-97}{17}=-\dfrac{97}{17}<0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-\sqrt{3} \rightarrow \dfrac{-\left(-\sqrt{3}\right)^2+3}{2\left(-\sqrt{3}\right)-3}=\dfrac{0}{2\sqrt{3}+3}=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=\dfrac{3}{2} \rightarrow \dfrac{-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+3}{2\left(\dfrac{3}{2}\right)-3}=\dfrac{\dfrac{3}{4}}{0}=0 \rightarrow$ No existe solución.

$x=\sqrt{3} \rightarrow \dfrac{-\left(\sqrt{3}\right)^2+3}{2\left(\sqrt{3}\right)-3}=\dfrac{0}{2\sqrt{3}-3}=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\sqrt{3},\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

c) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}>0 \rightarrow \left.\begin{array}{r}x^2-3x=0\\ x^2-4=0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{ll}x_1=0 & x_2=3\\ x_3=-2 & x_4=2\end{array}\right\}$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-2),(-2,0),(0,2),(2,3)$ y $(3,+\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \rightarrow \dfrac{(-10)^2-3(-10)}{(-10)^2-4}=\dfrac{130}{96}=\dfrac{65}{48}>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=-1 \rightarrow \dfrac{(-1)^2-3(-1)}{(-1)^2-4}=\dfrac{4}{-3}=-\dfrac{4}{3}<0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=1 \rightarrow \dfrac{(1)^2-3(1)}{(1)^2-4}=\dfrac{-3}{-4}=\dfrac{3}{4}>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=2{,}5 \rightarrow \dfrac{(2{,}5)^2-3(2{,}5)}{(2{,}5)^2-4}=\dfrac{-1{,}25}{2{,}25}=-\dfrac{5}{9}<0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=10 \rightarrow \dfrac{(10)^2-3(10)}{(10)^2-4}=\dfrac{70}{96}=\dfrac{35}{48}>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-2 \rightarrow \frac{(-2)^2-3(-2)}{(-2)^2-4}=\frac{10}{0} \rightarrow$ No existe solución.

$x=0 \rightarrow \frac{(0)^2-3(0)}{(0)^2-4}=\frac{0}{-4}=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=2 \rightarrow \frac{(2)^2-3(2)}{(2)^2-4}=\frac{-2}{0} \rightarrow$ No existe solución.

$x=3 \rightarrow \frac{(3)^2-3(3)}{(3)^2-4}=\frac{0}{5}=0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-2)\cup(0,2)\cup(3,+\infty)$.

d) $\frac{-x+3}{2x^2-18}\geq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r}-x+3=0\\ 2x^2-18=0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x=3\\ x_1=-3 \quad x_2=3\end{array}\right\}$

Nos quedan los intervalos $(-\infty,-3),(-3,3)$ y $(3,+\infty)$, veamos cuáles cumplen la inecuación tomando un punto de cada uno y viendo si la satisfacen:

$x=-10 \rightarrow \frac{-(-10)+3}{2(-10)^2-18}=\frac{13}{182}=\frac{1}{14}>0 \rightarrow$ Cumple la inecuación.

$x=0 \rightarrow \frac{-(0)+3}{2(0)^2-18}=\frac{3}{-18}=-\frac{1}{6}<0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

$x=10 \rightarrow \frac{-(10)+3}{2(10)^2-18}=\frac{-7}{182}=-\frac{1}{26}<0 \rightarrow$ No cumple la inecuación.

Veamos también qué ocurre en los extremos de los intervalos:

$x=-3 \rightarrow \frac{-(-3)+3}{2(-3)^2-18}=\frac{6}{0} \rightarrow$ No existe solución.

$x=3 \rightarrow \frac{-(3)+3}{2(3)^2-18}=\frac{0}{0} \rightarrow$ No existe solución.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-3)$.

121. Determina para qué valores de *x* es posible realizar las operaciones indicadas.

a) $\sqrt{5-3x}$

b) $\sqrt{x-3}$

c) $\sqrt{4-3x-x^2}$

d) $\log(2-5x)$

e) $\log(6-x-x^2)$

f) $\log(x^2-2^x+1)$

a) $5-3x\geq 0 \rightarrow 5\geq 3x \rightarrow x\leq\frac{5}{3} \rightarrow$ Se puede realizar la operación para valores de $x\in\left(-\infty,\frac{5}{3}\right]$.

b) $x-3\geq 0 \rightarrow x\geq 3 \rightarrow$ Se puede realizar la operación para valores de $x\in[3,+\infty)$.

c) $4-3x-x^2\geq 0\to(x+4)(x-1)\geq 0\to$ La recta real queda dividida en tres intervalos: $(-\infty,-4)$, $(-4,1)$ y $(1,+\infty)$

Tomando un punto de cada uno de ellos se obtienen los intervalos que satisfacen la inecuación:

$x=-5\to(-5+4)(-5+1)=4\geq 0\to$ El intervalo $(-\infty,-4)$ sí satisface la inecuación.

$x=0\to(0+4)(0-1)=-4\leq 0\to$ El intervalo $(-4,1)$ no satisface la inecuación.

$x=2\to(2+4)(2-1)=6\geq 0\to$ El intervalo $(1,+\infty)$ sí satisface la inecuación.

Los puntos $x=-4$ y $x=1$ están incluidos, pues son los que hacen 0 la inecuación.

Por tanto, los valores de **x** para los que se puede realizar la operación son $x\in(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)$.

d) $2-5x>0\to 2>5x\to x<\frac{2}{5}\to$ Se puede realizar la operación para valores de $x\in\left(-\infty,\frac{2}{5}\right)$.

e) $6-x-x^2>0\to(x+3)(x-2)>0\to$ La recta real queda dividida en tres intervalos: $(-\infty,-3)$, $(-3,2)$ y $(2,\infty)$

Tomando un punto de cada uno de ellos, se obtienen los intervalos que satisfacen la inecuación:

$x=-4\to(-4+3)(-4-2)=6>0\to$ El intervalo $(-\infty,-3)$ sí satisface la inecuación.

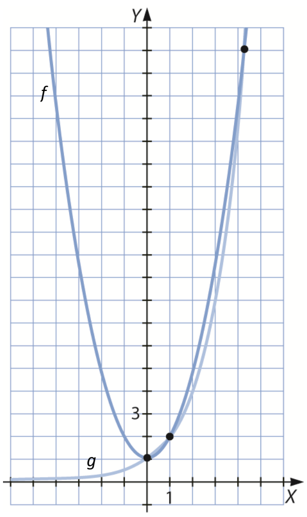
$x=0\to(0+3)(0-2)=-6<0\to$ El intervalo $(-3,2)$ no satisface la inecuación.

$x=3\to(3+3)(3-2)=6>0\to$ El intervalo $(2,+\infty)$ sí satisface la inecuación.

Los puntos $x=-3$ y $x=2$ no están incluidos, pues son los que hacen 0 la inecuación, y por definición, no existe log 0.

Por tanto, los valores de **x** para los que se puede realizar la operación son $x\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$.

f) $x^2-2^x+1>0\to$ Para resolver esta inecuación no se ha estudiado en el curso un método particular. Por ello, las raíces de la ecuación $x^2-2^x+1=0$ se obtendrán representando gráficamente $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=2^x$
Sus puntos de corte serán las raíces de la ecuación: $x^2+1=2^x$.



Observando la gráfica se ve que los puntos de corte son $x=0$, $x=1$ y aproximadamente $x=4{,}255$. Por tanto, la recta real queda dividida en cuatro intervalos: $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1;\ 4{,}255)$ y $(4{,}255;\ +\infty)$. Tomando un punto de cada uno de ellos, se obtienen los intervalos que satisfacen la inecuación:

$x=-1\to 1-\frac{1}{2}+1>0\to$ El intervalo $(-\infty,0)$ sí satisface la inecuación.

$x=\frac{1}{2}\to\frac{1}{4}-\sqrt{2}+1<0\to$ El intervalo $(0,1)$ no satisface la inecuación.

$x=3\to 9-8+1>0\to$ El intervalo $(1;4{,}255)$ sí satisface la inecuación.

$x=5\to 25-32+1<0\to$ El intervalo $(4{,}255;\ +\infty)$ no satisface la inecuación.

Los puntos $x=0$, $x=1$ y $x=4{,}255$ no están incluidos, pues son los que hacen 0 la inecuación y, por definición, no existe log 0.

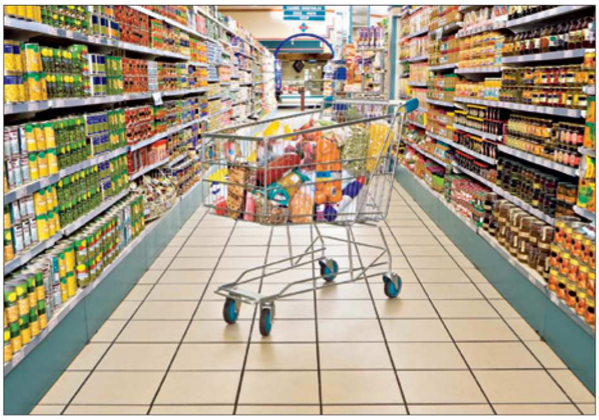
Por tanto, los valores de **x** para los que se puede realizar la operación son:

$x\in(-\infty,0)\cup(1;4{,}255)$

122. **El director de un supermercado ha observado que el número de clientes atendidos cada hora por un dependiente está relacionado con su experiencia. Ha estimado que ese número puede calcularse de forma aproximada con la función:**

$$C(d) = \frac{40d}{d+3}$$

donde *d* es el número de días que el dependiente lleva trabajando y *C* es el número de clientes atendidos en una hora.



a) ¿Cuántos clientes por hora atendería un dependiente que lleve trabajando dos días?

b) El director sabe que un dependiente empieza a ser rentable a la empresa cuando atiende a 32 clientes por hora. ¿Cuándo sucede eso?

c) Investiga lo que sucede con el número de clientes atendidos por dependientes que tienen mucha experiencia. ¿Puedes constatar alguna característica especial?

a) $C(2) = \frac{40 \cdot 2}{2+3} = 16 \rightarrow$ Un dependiente que lleve trabajando 2 días atenderá en una hora a 16 clientes.

b) $32 = \frac{40d}{d+3} \rightarrow 32d + 96 = 40d \rightarrow 8d = 96 \rightarrow d = 12 \rightarrow$ Un dependiente empieza a ser rentable a partir de 12 días trabajados.

c) Calculando el número de clientes atendidos por dependientes con mucha experiencia se observa que, como máximo, cada uno podrá atender a 40 clientes por hora:

$$C(100) = \frac{40 \cdot 100}{100+3} = 38{,}835\,,\; C(500) = \frac{40 \cdot 500}{500+3} = 39{,}761\,,\; C(10\,000) = \frac{40 \cdot 10\,000}{10\,000+3} = 39{,}988$$

123. **Determina la suma y el producto de las soluciones de esta ecuación.**

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

Encuentra las soluciones de la ecuación. ¿Puedes explicar lo que sucede?

El producto de las raíces es 4 y la suma es 9.

Las raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = 7$.

Si el coeficiente del término de segundo grado es 1, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

124. Estudia el valor de los coeficientes de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ para que tenga cuatro, tres, dos, una o ninguna solución.

Analizamos el número de raíces de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ a partir de las raíces obtenidas en la ecuación de segundo grado asociada, $az^2 + bz + c = 0$.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \rightarrow z = \frac{-b}{2a} \rightarrow$ Si $\frac{-b}{2a} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

$\rightarrow$ Si $\frac{-b}{2a} = 0$ $(b = 0, c = 0) \rightarrow$ Tiene una solución: $x = 0$.

$\rightarrow$ Si $\frac{-b}{2a} > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones opuestas.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \rightarrow$ La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

Si las dos soluciones son negativas, la ecuación bicuadrada no tiene solución.

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0 \text{ y } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

Si una solución es negativa y la otra es cero:

$$c = 0 \text{ y } \frac{-b}{a} < 0 \rightarrow \text{Tiene una solución: } x = 0.$$

Si una solución es positiva y la otra es cero:

$$c = 0 \text{ y } \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow \text{Tiene tres soluciones: } x = 0,\ x = \pm\sqrt{\frac{-b}{a}}.$$

Si las dos soluciones son positivas, la ecuación bicuadrada tiene cuatro soluciones.

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0 \text{ y } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0 \rightarrow \text{Tiene cuatro soluciones.}$$

$$x = \begin{cases} \pm\sqrt{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ \pm\sqrt{\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{cases}$$

125. Hace cuatro años un individuo tenía la mitad más la tercera parte de la edad que tiene ahora. ¿Cuál es su edad?

Llamamos x a la edad actual del individuo y planteamos la ecuación:

$$x - 4 = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} \rightarrow 6x - 24 = 3x + 2x \rightarrow x = 24$$

Actualmente tiene 24 años.

126. Una lancha recorre 50 metros por minuto al bajar un río y 20 metros por minuto al subirlo. ¿A qué distancia se puede bajar por el río si solo se dispone de 3 horas para la excursión teniendo que volver al punto de partida?

Llamamos x a la distancia que podemos recorrer en 3 horas, es decir, en 180 minutos. Para recorrer 50 metros hacia arriba y hacia abajo se necesitan 3 minutos y medio (uno para bajar y dos y medio para subir), por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} 50 \text{ m} \longrightarrow 3{,}5 \text{ min} \\ x \text{ m} \longrightarrow 180 \text{ min} \end{array}\right\} \rightarrow 9000 = \frac{7}{2}x \rightarrow x = \frac{18000}{7} = 2571{,}43 \text{ m}$$

Se pueden bajar hasta 2 571,43 metros del río.

127. Descompón el número 60 en dos partes de manera que dividiendo una entre la otra el cociente dé 3 y el resto 8.

Si x es uno de los sumandos, el otro será $60 - x$. Entonces, utilizando el algoritmo de la prueba de la división, se tiene la siguiente ecuación:

$x = 3(60 - x) + 8 \rightarrow x = 180 - 3x + 8 \rightarrow 4x = 188 \rightarrow x = 47$. Por tanto, el segundo sumando será 13.

128. Halla dos números consecutivos, sabiendo que la suma de la cuarta parte y la quinta parte del menor y la suma de la tercera parte y la séptima parte del mayor son también números consecutivos.

Llamando x al número menor, $x + 1$ es el número mayor consecutivo. Entonces:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 1 = \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{7} \rightarrow 105x + 84x + 420 = 140x + 140 + 60x + 60 \rightarrow 220 = 11x \rightarrow x = 20$$

Los números buscados son $x = 20,\ x + 1 = 21$.

129. Un comerciante compra melones a 40 céntimos/kg y los vende a 60 céntimos/kg. Halla cuántos kilogramos de melones compró si se le estropearon 10 kg y obtuvo 42 €.

Llamamos x al número de kilogramos de melones que compró:

$0{,}20(x - 10) = 42$

$x = 220$

El comerciante compró 220 kg de melones.

130. Entre dos cubos A y B de igual capacidad se distribuyen en partes desiguales 10 litros de agua. El cubo A se llenaría si se vertiesen los dos tercios del agua contenida en B. Este se llenaría si se le añadiese la mitad del agua de A. Se desea saber cuánta es el agua contenida en cada cubo y su capacidad lleno.

Si en el cubo A hay x litros de agua, entonces, el cubo B contendrá $10 - x$ litros.

La capacidad total del cubo A viene dada por $x + \frac{2}{3}(10 - x)$ y la capacidad del cubo B, por $(10 - x) + \frac{x}{2}$.

Como el volumen de ambos cubos es igual:

$$x + \frac{2}{3}(10 - x) = (10 - x) + \frac{x}{2} \rightarrow 6x + 40 - 4x = 60 - 6x + 3x \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$$

El cubo A contiene 4 litros de agua; y el cubo B, 6 litros.

La capacidad total de ambos cubos es de $10 - 4 + \frac{4}{2} = 8$ litros.

131. Una madre, para estimular a su hijo, le da un euro por cada ejercicio que haga bien. Si le sale mal, este debe darle 50 céntimos a su madre. Después de 20 ejercicios, el hijo lleva ganados 15,50 €. ¿Cuántos ejercicios hizo bien?

Sean x el número de ejercicios que ha realizado mal. Entonces, $20 - x$ será el número de ejercicios bien resueltos. Como lleva ganados 15,50 €, se plantea y se resuelve la siguiente ecuación:

$(20 - x) - 0{,}5x = 15{,}50 \rightarrow 20 - 1{,}5x = 15{,}5 \rightarrow x = 1{,}5x = 4{,}5 \rightarrow x = 3$

Es decir, ha realizado 3 ejercicios mal y 17 bien.

132. Si aumentáramos en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplicaría por 8. Halla la medida de la arista.

Sea x la longitud en cm de la arista del cubo pequeño. Entonces, la arista del cubo grande medirá

$x+4$ cm. Como el volumen del cubo grande es 8 veces el del cubo pequeño, se tiene la siguiente ecuación:

$8x^3=(x+4)^3 \rightarrow 8x^3=x^3+12x^2+48+64 \rightarrow 7x^3-12x^2-48-64=0 \rightarrow x=4$

Luego, las aristas miden 4 cm y 8 cm, respectivamente.

133. Si r y s son las soluciones de $ax^2+bx+c=0$, ¿cuáles son las soluciones de $cx^2-bx+a=0$?

Por ser r y s las raíces de $ax^2+bx+c=0$, se tiene que $ax^2+bx+c=k(x-r)(x-s)=kx^2+(-kr-ks)x+(krs)$, de donde se obtienen los valores de a, b y c en función de k, r y s:

$a=k \qquad b=-k(r+s) \qquad c=krs$

Ahora se sustituyen los valores en la nueva ecuación y se resuelve:

$cx^2-bx+a=0 \rightarrow krsx^2+k(r+s)x+k=0$

$$x=\frac{-k(r+s)\pm\sqrt{(k(r+s))^2-4\cdot krs\cdot k}}{2\cdot krs} \rightarrow x=\frac{-k(r+s)\pm\sqrt{k^2s^2+2k^2rs+k^2r^2-4rsk^2}}{2krs} \rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{-k(r+s)\pm\sqrt{k^2r^2-2rsk^2+k^2s^2}}{2krs} \rightarrow x=\frac{-k(r+s)\pm\sqrt{k^2(r-s)^2}}{2krs} \rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{-k(r+s)\pm k(r-s)}{2krs} \rightarrow x=\frac{-(r+s)\pm(r-s)}{2rs} \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-(r+s)-(r-s)}{2rs}=-\dfrac{1}{s} \\ x_2=\dfrac{-(r+s)+(r-s)}{2rs}=-\dfrac{1}{r} \end{cases}$$

Hay que contemplar el caso en el que r y s son cero. Para ello, se estudian varios casos y se despeja x de la ecuación $krsx^2+k(r+s)x+k=k\left(rsx^2+(r+s)x+1\right)=0.$

Se supone que $k\neq 0,$ pues así se evita llegar a $0=0$.

Caso 1: $r\neq 0$ y $s\neq 0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1=-\dfrac{1}{r}$ y $x_2=-\dfrac{1}{s}$

Caso 2: $r=0$ y $s\neq 0 \rightarrow sx+1=0 \rightarrow x=-\dfrac{1}{s}$

Caso 3: $r\neq 0$ y $s=0 \rightarrow rx+1=0 \rightarrow x=-\dfrac{1}{r}$

Caso 4: $r=0$ y $s=0 \rightarrow k=0 \rightarrow 1=0 \rightarrow$ No existe solución.

134. En una empresa que se dedica a la fabricación de recipientes de cristal se ha calculado que para fabricar un tipo de vaso de vidrio hay unos gastos fijos de 3 000 € y un gasto en materia prima de 1,50 € por vaso. ¿Cuántos vasos se podrán fabricar en dicha fábrica con un gasto máximo de 7 000 €?

Sea x el número máximo de vasos que se podrá fabricar. Entonces, como el gasto máximo permitido es de 7 000 €:

$3000+1{,}5x\leq 7000 \rightarrow 1{,}5x\leq 4000 \rightarrow x\leq 2666{,}667$

Por tanto, como máximo se podrán fabricar 2 666 vasos.

135. Doblando 8 m de alambre se quiere formar un rectángulo. ¿Entre qué valores estará el área de ese rectángulo?

Como el alambre tiene una longitud de 8 m, el semiperímetro del rectángulo será de 4 m.

Si x es la base del rectángulo, entonces $4 - x$ será su altura, con $x \in (0, 4)$.

El área del rectángulo viene determinada por la expresión $A = x(4 - x) = 4x - x^2$, que es una parábola, cuya imagen para $x \in (0, 4)$ es el intervalo $(0, 4]$.

Es decir, el área mínima es prácticamente nula, y el área máxima vale 4 m^2.

136. Una madre de 24 años acaba de tener a su hijo. ¿Cuándo estará su edad entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$ de la de su madre?

	Actualidad	Dentro de *x* años
Madre	24	$24 + x$
Hijo	0	x

$$\frac{1}{5}(24+x) \le x \le \frac{2}{5}(24+x) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \le \frac{2}{5}(24+x) \\ \frac{1}{5}(24+x) \le x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x \le 48 + 2x \\ 24 + x \le 5x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \le 16 \\ x \ge 6 \end{array}\right\}$$

Cuando el hijo tenga entre 6 y 16 años, su edad estará comprendida entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$ de la de su madre.

137. El triple de un número menos su mitad es siempre mayor que 3. ¿Qué números cumplen esta propiedad?

$$3x - \frac{x}{2} > 3 \rightarrow 6x - x > 6 \rightarrow x > \frac{6}{5}$$

Los números que cumplen esta propiedad son los números mayores que $\frac{6}{5}$, es decir $x \in \left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$.

138. De un número se sabe que si a su cuadrado le restamos su mitad, se obtiene un número menor que 1. ¿Qué número puede ser?

$$x^2 - \frac{x}{2} < 1 \rightarrow 2x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \approx 1{,}281 \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \approx -0{,}781 \end{cases}$$

La recta real queda dividida en tres tramos. Tomando un valor de cada uno de ellos comprobamos si se satisface la inecuación:

$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) \xrightarrow{x=-1} (-1)^2 - \frac{(-1)}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1 \rightarrow$ No se satisface la inecuación en este intervalo.

$\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \xrightarrow{x=0} 0^2 - \frac{0}{2} = 0 < 1 \rightarrow$ Sí se satisface la inecuación en este intervalo.

$\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right) \xrightarrow{x=2} 2^2 - \frac{2}{2} = 4 - 1 = 3 > 1 \rightarrow$ No se satisface la inecuación en este intervalo.

En $x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ y $x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$, se cumple que $x^2-\frac{x}{2}=1$, y por tanto no pueden formar parte del conjunto de números buscados.

Así, los números que satisfacen la propiedad dada son $x\in\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4},\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.

139. Una compañía eléctrica ofrece tres tarifas que tienen una parte fija y una parte proporcional al consumo.

- **Tarifa *A*: 6,70 € cantidad fija más 0,18 € por kilovatio hora de consumo.**
- **Tarifa *B*: 9,60 € cantidad fija más 0,13 € por kilovatio hora de consumo.**
- **Tarifa *C*: 14 € cantidad fija más 0,09 € por kilovatio hora de consumo.**

a) ¿A partir de qué cantidad de consumo la tarifa *B* es mejor que la *A*?
b) ¿A partir de qué cantidad de consumo es la *C* mejor tarifa que la *A*?
c) ¿A partir de qué cantidad de consumo la tarifa *C* es la mejor de todas?

Que una tarifa sea mejor que otra quiere decir que un cliente gaste menos con la primera tarifa que con la segunda.

Llamando *x* a los kilovatios hora consumidos, se tiene:

a) $6{,}70+0{,}18x>9{,}60+0{,}13x\rightarrow 5x>290\rightarrow x>58$

Cuando se consuman más de 58 kilovatios hora, la tarifa *B* será más rentable que la tarifa *A*.

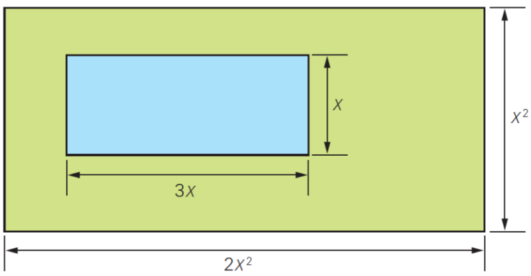
b) $6{,}70+0{,}18x>14+0{,}09x\rightarrow 9x>730\rightarrow x>\frac{730}{9}\rightarrow x>81{,}11$

Cuando se consuman más de 81,11 kilovatios hora, la tarifa *C* será más rentable que la tarifa *A*.

c) $\left.\begin{array}{l}6{,}70+0{,}18x>14+0{,}09x\\9{,}60+0{,}13x>14+0{,}09x\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}9x>730\\4x>440\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x>81{,}11\\x>110\end{array}\right\}\rightarrow x>110$

Cuando se consuman más de 110 kilovatios hora, la tarifa *C* será la más rentable de todas.

140. Se quiere construir una piscina rectangular en un jardín y para ello se dibuja un esquema con las dimensiones del jardín y de la piscina. ¿Cuáles son las dimensiones de la piscina, si la diferencia de áreas entre el jardín y la piscina es de 135 m²?



Llamando *x* al lado menor de la piscina, se tiene: $2x^4-3x^2=135\rightarrow 2x^4-3x^2-135=0\rightarrow 2z^2-3z-135=0$

$$z=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-135)}}{2\cdot2}\rightarrow z=\frac{3\pm33}{4}\rightarrow z_1=-\frac{15}{2}\quad z_2=9$$

$z_1=-\frac{15}{2}\rightarrow x^2=-\frac{15}{2}\rightarrow$ No tiene solución real. $\qquad z_2=9\rightarrow x_1=-3\quad x_2=3$

Se descarta $x_1=-3$ como solución, pues la longitud tiene que ser positiva. Por lo tanto, la piscina mide 9 metros de largo y 3 metros de ancho.

PARA PROFUNDIZAR

141. Elige la respuesta adecuada. **(Concurso de Primavera)**

Un granjero tiene ovejas y gallinas. Si la media del número de patas por animal es l, el cociente entre el número de ovejas y gallinas es:	$\frac{1}{3(4-l)}$	$\frac{l-2}{4-l}$	$\frac{3(l-2)}{l}$	$\frac{(l-2)^2}{16-l^2}$	$\frac{7(l^2-4)}{5(16-l^2)}$
Si $b>1$, $x>0$ y $(2x)^{\log_b 2}-(3x)^{\log_b 3}=0$, x es igual a:	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{6}$	1	6	No se puede determinar
¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\lvert x-\lvert 2x+1\rvert\rvert=3$?	0	1	2	3	4
¿Cuál es el producto de las soluciones de la ecuación $\sqrt{5\lvert x\rvert+8}=\sqrt{x^2-16}$?	-64	-24	-9	24	576
La edad de Juan, t años, es la suma de las edades de sus tres hijos. Si hace n años su edad era el doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿cuánto vale el cociente $\frac{t}{n}$?	2	$\frac{11}{3}$	4	$\frac{25}{6}$	5

- Sea x el número de ovejas e y el número de gallinas. Como cada oveja tiene 4 patas y cada gallina 2, hay en total $x+y$ animales y $4x+2y$ patas.

$$\frac{4x+2y}{x+y}=l\rightarrow 4x+2y=lx+ly\rightarrow(4-l)x=(l-2)y\rightarrow\frac{x}{y}=\frac{l-2}{4-l}$$

- $b>1,\quad x>0,\quad (2x)^{\log_b 2}-(3x)^{\log_b 3}=0$

Se toman logaritmos en la igualdad $(2x)^{\log_b 2}=(3x)^{\log_b 3}$, se aplican propiedades de los logaritmos, se simplifica y se despeja:

$$\log_b 2\cdot\log_b 2x=\log_b 3\cdot\log_b 3x$$

$$\log_b 2\cdot(\log_b 2+\log_b x)=\log_b 3\cdot(\log_b 3+\log_b x)$$

$$(\log_b 2)^2+\log_b 2\cdot\log_b x=(\log_b 3)^2+\log_b 3\cdot\log_b x$$

$$(\log_b 2)^2-(\log_b 3)^2=\log_b 3\cdot\log_b x-\log_b 2\cdot\log_b x$$

$$(\log_b 2)^2-(\log_b 3)^2=(\log_b 3-\log_b 2)\cdot\log_b x$$

$$(\log_b 2+\log_b 3)\cdot(\log_b 2-\log_b 3)=(-1)(\log_b 2-\log_b 3)\cdot\log_b x$$

$$(-1)\cdot(\log_b 2+\log_b 3)=\log_b x$$

$$-\log_b 2-\log_b 3=\log_b x\rightarrow\log_b\frac{1}{6}=\log_b x\rightarrow x=\frac{1}{6}$$

□ $|x-|2x+1||=3 \to \begin{cases} |x-2x-1|=3, & x \geq -\frac{1}{2} \\ |x+2x+1|=3, & x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x+1=3, & x \geq -\frac{1}{2}, & x \geq -1 \\ -x-1=3, & x \geq -\frac{1}{2}, & x \leq -1 \\ 3x+1=3, & x \leq -\frac{1}{2}, & x \geq -\frac{1}{3} \\ -3x-1=3, & x \leq -\frac{1}{2}, & x \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \to$

$$\to \begin{cases} x=2, & x \geq -\frac{1}{2}, & x \geq -1 & \to x=2 \\ x=-4, & x \geq -\frac{1}{2}, & x \leq -1 & \to \text{No tiene solución.} \\ x=\frac{2}{3}, & x \leq -\frac{1}{2}, & x \geq -\frac{1}{3} & \to \text{No tiene solución.} \\ x=-\frac{4}{3}, & x \leq -\frac{1}{2}, & x \leq -\frac{1}{3} & \to x=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones reales.

□ $\sqrt{5|x|+8}=\sqrt{x^2-16} \to 5|x|+8=x^2-16 \to \begin{cases} x^2-5x-24=0, & x \geq 0 \\ x^2+5x-24=0, & x \leq 0 \end{cases}$

$$x^2-5x-24=0 \to x=\frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2-4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} \to x=\frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} \to \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=8 \end{cases}$$

$$x^2+5x-24=0 \to x=\frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} \to x=\frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2} \to \begin{cases} x_1=-8 \\ x_2=3 \end{cases}$$

$\begin{cases} x^2-5x-24=0, & x \geq 0 \to x=8 \\ x^2+5x-24=0, & x \leq 0 \to x=-8 \end{cases} \to$ El producto de las soluciones es $8 \cdot (-8)=-64$.

□ Llamando x, y, z a las edades de sus hijos:

$$\left.\begin{array}{l} t=x+y+z \\ t-n=2(x-n+y-n+z-n) \end{array}\right\} \to t-n=2(t-3n) \to t-n=2t-6n \to 5n=t \to \frac{t}{n}=5$$

142. Halla la relación entre los coeficientes de la siguiente ecuación y la suma, el producto y la suma de los dobles productos de sus tres raíces.

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

Sean x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación dada. Entonces:

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=ax^3+bx^2+cx+d \to$

$\to x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=ax^3+bx^2+cx+d$

Comparando los términos se obtienen las relaciones pedidas:

$x_1+x_2+x_3=-b \qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=c \qquad x_1x_2x_3=-d$

143. Discute las soluciones de la siguiente ecuación según los valores de *m*.

$$x^2-2x+\log m=0$$

Por la definición de logaritmo, $m>0$: $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4 \cdot 1 \cdot \log m$

Para que la ecuación no tenga solución: $4-4\log m<0 \to (10, +\infty)$

Para que la ecuación tenga una solución: $4-4\log m=0 \to m=10$

Para que la ecuación tenga dos soluciones: $4-4\log m>0 \to (-\infty, 10)$

144. Si las soluciones de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son x_1 y x_2, escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) Los cuadrados de x_1 y x_2.
b) Los inversos de x_1 y x_2.
c) Los opuestos de x_1 y x_2.

a) $(x - x_1^2)(x - x_2^2) = 0 \rightarrow x^2 - (x_1^2 + x_2^2)x + x_1^2 \cdot x_2^2$

b) $\left(x - \frac{1}{x_1}\right)\left(x - \frac{1}{x_2}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 0$

c) $(x + x_1)(x + x_2) = 0 \rightarrow x^2 + (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0$

145. Juan y Luis suben en una escalera mecánica. Juan sube tres veces más rápido que su amigo, haciéndolo ambos de peldaño en peldaño.
Al terminar de subir, Juan contó 75 escalones y Luis contó 50 escalones. Con estos datos calcula los peldaños «visibles» de la escalera.

Mientras Juan sube un escalón, la escalera mecánica ha subido x escalones, y el número de escalones visibles es $75 + 75x$.

Luis sube 50 escalones. Como lo hace tres veces más despacio que Juan, mientras Luis sube un escalón, la escalera sube $3x$. El número de escalones visibles es $50 + 150x$.

$75 + 75x = 50 + 150x \rightarrow x = \frac{1}{3}$ Por tanto, el número de peldaños visibles es 100.

146. Calcula las soluciones reales de la ecuación

$$\sqrt[3]{1729 - x} + \sqrt[3]{x} = 19$$

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

$$\sqrt[3]{1729 - x} + \sqrt[3]{x} = 19 \rightarrow 1729 - x = \left(19 - \sqrt[3]{x}\right)^3 \rightarrow 1729 - x = 57\sqrt[3]{x^2} - x - 1083\sqrt[3]{x} + 6859 \rightarrow \sqrt[3]{x^2} - 19\sqrt[3]{x} + 90 = 0$$

Hacemos $z = \sqrt[3]{x}$ y resolvemos la ecuación de segundo grado resultante:

$$z^2 - 19z + 90 = 0 \rightarrow z = \frac{19 \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 90}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{19 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \rightarrow \sqrt[3]{x} = 9 \rightarrow x_1 = 729 \\ z_2 = 10 \rightarrow \sqrt[3]{x} = 10 \rightarrow x_2 = 1000 \end{cases}$$

147. Descompón el polinomio

$$P(x) = x^5 - 209x + 56$$

en producto de dos factores, sabiendo que se anula para dos valores, x_1 y x_2, inversos entre sí.

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

Sean r y $\frac{1}{r}$ las dos raíces inversas del polinomio $P(x)$.

El polinomio que tiene esas raíces es:

$$(x - r)\left(x - \frac{1}{r}\right) = x^2 - \frac{1 + r^2}{r}x + 1 = x^2 + mx + 1$$

Así, resulta que $P(x) = x^5 - 209x + 56 = (x^2 + mx + 1)(x^3 + bx^2 + cx + d)$.

148. Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

valen lo mismo.

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

Sea $ax^3 + bx^2 + cx + d$ la ecuación general de tercer grado. Entonces, en este caso se tiene que $a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3 \quad d = 4$.

Por otro lado, sean x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación dada. Usando las fórmulas obtenidas en la actividad 142:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -b = -2 \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c = 3 \qquad x_1x_2x_3 = -d = -4$$

- Suma de las primeras potencias de las raíces:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

- Suma de las segundas potencias de las raíces:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2 \rightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^2 = (-2)^2 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\cdot 3 = 4 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$$

- Suma de las terceras potencias de las raíces:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2 \rightarrow (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3) = -2\cdot(-2) \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(x_1 + x_3) + x_3^2(x_1 + x_2) = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1(x_1x_2 + x_1x_3) + x_2(x_1x_2 + x_2x_3) + x_3(x_1x_3 + x_2x_3) = 4 \xrightarrow{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3}$$

$$\rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1(3 - x_2x_3) + x_2(3 - x_1x_3) + x_3(3 - x_1x_2) = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1 + 4 + 3x_2 + 4 + 3x_3 + 4 = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1 + x_2 + x_3) + 12 = 4 \xrightarrow{x_1 + x_2 + x_3 = -2} = -2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(-2) + 12 = 4 \rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 4 - 12 + 6 \rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -2$$

149. Determina justificadamente todos los pares de números enteros (*x*, *y*) que verifican la ecuación $x^2 - y^4 = 2009$.

(Olimpiadas matemáticas. Fase Nacional)

$$x^2 - y^4 = 2009 \rightarrow (x - y^2)(x + y^2) = 2009.$$

Sea $a = x - y^2$ y $b = x + y^2$. Entonces se tiene que $ab = 2009$.

Por un lado, se busca una expresión para *x* y para y^2 en función de *a* y *b* $\rightarrow \begin{cases} a + b = 2x \rightarrow x = \dfrac{a+b}{2} \\ b - a = 2y^2 \rightarrow y^2 = \dfrac{b-a}{2} \end{cases}$

Por otro lado, se descompone 2 009 en factores primos y se estudian todos los productos posibles, teniendo en cuenta que *x* e *y* son números enteros, y por tanto, los dos factores polinómicos, $a = (x - y^2)$ y $b = (x + y^2)$ también lo son:

$$2009 = 7\cdot 7\cdot 41 = 49\cdot 41 = 7\cdot 287 = 1\cdot 2009$$

Ahora se estudian los casos posibles, teniendo en cuenta que $a < b$ y que para que *y* sea entero es necesario que $\dfrac{b-a}{2}$ sea un cuadrado perfecto:

- $2009 = 1\cdot 2009 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2\,009 \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{a+b}{2},\quad y^2=\frac{b-a}{2}} x = \dfrac{1+2009}{2} = 1500 \qquad y^2 = \dfrac{2009-1}{2} = 1004 \rightarrow$ No es cuadrado perfecto.
- $2009 = 7\cdot 287 \rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 287 \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{a+b}{2},\quad y^2=\frac{b-a}{2}} x = \dfrac{7+287}{2} = 147 \qquad y^2 = \dfrac{287-7}{2} = 140 \rightarrow$ No es cuadrado perfecto.
- $2009 = 49\cdot 41 \rightarrow \begin{cases} a = 41 \\ b = 49 \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{a+b}{2},\quad y^2=\frac{b-a}{2}} x = \dfrac{41+49}{2} = 45 \qquad y^2 = \dfrac{49-41}{2} = 4 \rightarrow y = \pm 2$

El tercer caso es el único que cumple todas las características, y como existe simetría par, los únicos pares enteros que resuelven la ecuación dada son $(45, 2), (45, -2), (-45, 2)$ y $(-45, -2)$.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. ¿Qué ventajas tiene el uso del teléfono móvil frente al del teléfono fijo?

La principal ventaja del teléfono móvil es su portabilidad, que permite:

- La comunicación (escrita y hablada) entre personas que estén en cualquier lugar del mundo.
- La conexión a internet instantánea, cuando sea requerida por el usuario.

2. Explica qué representan las variables *M* y *N* en la inecuación del texto.

N son las llamadas que puede realizar.

M son los minutos que puede hablar en cada llamada a partir del primero.

3. Plantea una inecuación similar a la del ejemplo para el plan *C* y un consumo máximo de 42 €.

$0{,}0968(N+M) + 0{,}1815N \le 42$

4. Paula llama una única vez al día a su familia. ¿Cuántos minutos puede hablar por término medio cada día para que su consumo no supere los 40 € si tiene la tarifa *B*? ¿Y si tiene la tarifa *E*?

- Inecuación para la tarifa B: $14{,}52 + 0{,}0726(N+M) + 0{,}1815N \le 40$

  Realiza 30 llamadas al mes, una por día. Así, $N = 30$: $\quad 14{,}52 + 0{,}0726(30+M) + 0{,}1815\cdot 30 \le 40 \rightarrow M \le 245{,}96$

  Además, dispone de 60 minutos gratuitos, que suponen realmente 305,96 minutos al mes para hablar. Esto equivale a 10,20 minutos cada día.
- Inecuación para la tarifa E: $29{,}50 + 0{,}2124(N+M) + 0{,}1815N \le 40$

  Realiza 30 llamadas al mes, una por día. Así, $N = 30$: $\quad 29{,}50 + 0{,}2124(30+M) + 0{,}1815\cdot 30 \le 40 \rightarrow M \le -1{,}317$

  Los minutos no pueden ser negativos, así que no puede pagar menos de 40 euros si realiza 30 llamadas. Por tanto, solo podría hablar los 300 minutos gratis, que son equivalentes a 10 minutos al día.

5. Detalla y compara tres ofertas de diversas compañías de telefonía móvil que estén en vigor en este momento.

Respuesta abierta, por ejemplo:

Plan	Cuota en €	Mínimo en €	Céntimos/minuto	Establecimiento de llamada en céntimos
1	4	0	2,70	15
2	14,90	0	8,50	0
3	9	0	3 desde el minuto 6	15