UNIDAD 12: Probabilidad

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 292

1. Un test consta de cuatro preguntas a las que hay que contestar verdadero (V) o falso (F). Si una persona contesta al azar, escribe todas las posibles respuestas que puede obtener.

Utilizando la notación: verdadero (V) o falso (F), las posibles respuestas son:

{(VVVV), (VVVF), (VVFV), (VFVV), (FVVV), (VVFF), (VFVF), (FVFV), (VFFV), (FVVF), (FFVV), (VFFF), (FVFF), (FFVF), (FFFV), (FFFF)}

2. Lanzamos dos dados al aire y anotamos la suma de los puntos de sus caras superiores. ¿Qué es más probable obtener suma 7 u obtener suma 8?

Los sucesos asociados a suma 7 son {(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)} y los asociados a suma 8 son {(2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2)}.

Por tanto, es más probable sacar suma 7.

3. La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara y cruz al lanzar dos monedas?

La probabilidad de obtener cara y cruz es 1/2 · 1/2 · 2 = 1/2

4. Una urna tiene 12 bolas blancas y 8 negras. Sacamos dos bolas, una detrás de otra y devolviendo la primera a la urna, halla la probabilidad de sacar una bola de cada color.

La probabilidad de obtener una bola de cada color es $\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{20}\cdot 2=\frac{12}{25}$

5. En un conservatorio de música el 60% de los alumnos estudian piano, el 50% violín y el 30% ninguno de estos instrumentos. ¿Qué probabilidad hay de elegir un alumno que estudie piano y violín a la vez?

El 70% estudian alguno de estos instrumentos. Por tanto hay un 40% que estudian ambos a la vez.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 307

1. Número irracional. Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

La solución queda:

Supongamos que $\sqrt{3}$ no es irracional, por tanto $\sqrt{3}$ será racional, con lo que se puede poner en forma de fracción de este modo:

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b}, \text{ con a, b } \in \text{ Z y primos entre sí.}$$

De esta igualdad obtenemos: $a=b\sqrt{3}$.

Elevando ambos miembros al cuadrado nos queda: $a^2 = 3b^2$.

De aquí deducimos que a^2 es múltiplo de 3. Si a^2 es múltiplo de 3 entonces a también lo es.

Podemos escribir a = 3m con $m \in Z$ y sustituyendo en la igualdad $a^2 = 3b^2$ obtenemos:

$(3m)^2 = 3b^2 \quad \Rightarrow \quad 9m^2 = 3b^2 \quad \Rightarrow \quad 3m^2 = b^2$

Como b^2 es múltiplo de 3 y, por tanto, b también los es.

Con esto hemos llegado a que a y b son múltiplos de 3. Este resultado contradice el hecho de que a y b son primos entre si. Por tanto, hemos llegado a una contradicción o absurdo, por lo que concluimos afirmando que $\sqrt{3}$ no es un número racional, es decir, es un número irracional.

2. Implicación lógica. Demuestra que si P $\Rightarrow$ Q, entonces no Q $\Rightarrow$ no P.

Tiene que ser no P, pues si fuera P entonces sería Q, y como dice no Q, no puede ser P.

Veamos que las tablas de verdad de ambas proposiciones coinciden:

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	no Q	no P	no Q $\Rightarrow$ no P
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Es una ley lógica $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (no\ Q \Rightarrow no\ P)$, denominada "contraposición".

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 309

1. Una caja tiene 12 bombones, de los cuales 2 son de chocolate blanco y el resto de chocolate negro. Si se cogen 4 bombones al azar y sin reemplazamiento, calcula la probabilidad de que los cuatro sean de chocolate negro.

Si llamamos N a obtener un bombón de chocolate negro, la probabilidad buscada es:

$$P(NNNN) = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{56}{132} = 0{,}4242.$$

2. Una caja contiene 94 tornillos bien construidos y 6 defectuosos. Si se escogen al azar cinco tornillos de la caja, ¿cuáles son las probabilidades de que (i) ninguno sea defectuoso, (ii) todos sean defectuosos e (iii) por lo menos uno sea defectuoso? Da dos grupos de respuestas, uno para extracciones con reemplazamiento y otro para extracciones sin reemplazamiento.

En los casos de las extracciones con reemplazamiento, las probabilidades pedidas son:

$$\text{(i) } P(ninguno\ defectuoso) = \left(\frac{94}{100}\right)^5 = 0{,}7339.$$

(ii) $P(todos\ defectuosos) = \left(\dfrac{6}{100}\right)^5 = 0{,}000\ 000\ 778.$

(iii) $P(por\ lo\ menos\ uno\ sea\ defectuoso) = 1 - \left(\dfrac{94}{100}\right)^5 = 0{,}2661.$

En los casos de las extracciones sin reemplazamiento, las probabilidades pedidas son:

(i) $P\ (ninguno\ defectuoso) = \dfrac{\binom{94}{5}}{\binom{100}{5}} = \dfrac{54\ 891\ 018}{75\ 287\ 520} = 0{,}7291\,.$

(ii) $P\ (todos\ defectuosos) = \dfrac{\binom{6}{5}}{\binom{100}{5}} = \dfrac{6}{75\ 287\ 520} = 0{,}000\ 000\ 0797\,.$

(iii) $P(por\ lo\ menos\ uno\ sea\ defectuoso) = 1 - \dfrac{\binom{94}{5}}{\binom{100}{5}} = 1 - 0{,}7291 = 0{,}2709.$

3. Diez amigas están paseando por el parque y encuentran un lugar donde pueden sentarse 4 de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que dos amigas, por ejemplo Ángela y Berta se sienten juntas?

Los casos posibles son $V_{10,\,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Los casos favorables son $6 \cdot V_{8,\,2} = 6 \cdot 8 \cdot 7 = 336$

La probabilidad de que Ángela y Berta se sienten juntas es: $\dfrac{6 \cdot V_{8,\,2}}{V_{10,\,4}} = \dfrac{336}{5040} = \dfrac{1}{15} = 0{,}0667.$

4. Escribimos, al azar, códigos de 6 signos utilizando rayas y puntos como lo hace el alfabeto Morse. ¿Cuál es la probabilidad de escribir un código con 3 rayas y 3 puntos?

Los casos posibles son $VR_{2,\,6} = 2^6 = 64$.

Los casos favorables son $PR_6^{3,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$

La probabilidad de escribir un código con 3 rayas y 3 puntos es: $\dfrac{PR_6^{3,\,3}}{VR_{2,\,6}} = \dfrac{20}{64} = 0{,}3125.$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 312

1. Encuentra el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:

a) Distribución por sexo de los hijos en familias de tres hijos.

b) Suma de los puntos obtenidos al extraer una ficha de un domino.

c) Extracción de dos Cds de una caja que contiene siete en buen estado y tres defectuosos.

Los espacios muestrales pedidos son:

a) E = {(vvv), (vvm), (vmv), (mvv), (vmm), (mvm), (mmv), (mmm)}, siendo v, varón y m, mujer.

b) E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

c) E = {DD, DB, BD, BB} siendo D, defectuoso y B en buen estado.

2. Consideremos el experimento aleatorio de tirar dos dados cúbicos al aire y anotar la suma de los puntos de sus caras superiores. Sean los sucesos: A = "obtener suma múltiplo de 5"; B = "obtener suma mayor que 8" y C = "obtener por suma un número primo". Halla:

a) $A \cap B$ **b)** $A \cap B \cap C$ **c)** $A \cup B$ **d)** $\overline{A} \cap C$

Los sucesos pedidos tienen por elementos los siguientes:

a) $A \cap B$ = "obtener suma múltiplo de 5 y mayor de 8" = {(4, 6), (6, 4), (5, 5)}.

b) $A \cap B \cap C$ = "obtener suma múltiplo de 5 y mayor de 8 y suma número primo" = {φ}.

c) $A \cup B$ = "obtener suma múltiplo de 5 o mayor de 8" = {(1,4), (2,3), (3,2), (3,6), (4,1), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}.

d) $\overline{A} \cap C$ = "obtener suma no múltiplo de 5 y número primo" =

= {(1,1), (1,2), (1,6), (2,1), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (5,6), (6,1), (6,5)}.

3. En el espacio muestral E = {A, B, C}. ¿Cuál de las siguientes funciones es una probabilidad?

a) P (A) = $\frac{1}{3}$ **, P (B) =** $\frac{1}{2}$ **, P (C) =** $\frac{1}{6}$

c) P (A) = $\frac{1}{4}$ **, P (B) =** $\frac{1}{2}$ **, P (C) =** $\frac{5}{8}$

b) P (A) = 1, P (B) = $-\frac{1}{5}$ **, P (C) =** $\frac{1}{5}$

a) Es una probabilidad porque verifica los 3 axiomas.

b) No es una probabilidad pues falla el 2º axioma ya que P (B) = $-\frac{1}{5} < 0$

c) No es una probabilidad pues falla el 1º axioma ya que P (A) + P (B) + P (C) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8} = \frac{11}{8} \neq 1$.

4. En la prueba final de una carrera de atletismo participan cuatro atletas que denotamos por M, C, R y S y solo uno de ellos puede ser el ganador. La probabilidad de que gane M es doble de la de que gane C, la probabilidad de que gane C es triple de la de que gane R y la probabilidad de que gane S es la misma que la de que gane R. ¿Cuál es la probabilidad de ganar C?

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

P (M) = 2 · P (C); P (C) = 3 · P (R) y P (S) = P (R).

Como P (M) + P (C) + P (R) + P (S) = 1, entonces: 6 · P (R) + 3 · P (R) + P (R) + P (R) = 1 y se obtiene:

$$P(R) = \frac{1}{11} = 0{,}0909$$

Por lo tanto, P (C) = $\frac{3}{11} = 0{,}2727$.

5. Un dado tetraédrico esta trucado de modo que la probabilidad de obtener cualquier número es la misma excepto la de obtener un 4 que es doble de cualquiera de las demás. Halla la probabilidad de obtener un cuatro.

Como P (1) + P (2) + P (3) + P (4) = 1 y haciendo P (1) = x, obtenemos:

$$x + x + x + 2x = 1, \text{ es decir, } x = \frac{1}{5}.$$

Por tanto, P (4) = $\frac{2}{5} = 0{,}4$.

6. En las familias de cuatro hijos, atendiendo al sexo de estos, halla las siguientes probabilidades:

a) Encontrar una familia con dos varones y dos mujeres.

b) Tener una familia con al menos dos varones.

c) Encontrar una familia con una mujer como máximo.

a) P (2 varones y 2 mujeres) = $\frac{6}{16}$ = 0,375

b) P (al menos 2 varones) = $\frac{11}{16}$ = 0,6875

c) P (como máximo 1mujer) = $\frac{5}{16}$ = 0,3125

7. Sean A y B dos sucesos tales que P (A) = $\frac{1}{4}$, P (B) = $\frac{1}{3}$ y $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$. Halla:

a) $P(A \cap B)$ **b)** $P(\overline{A \cap B})$ **c)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ **d)** $P(A \cap \overline{B})$

a) $P\left(A \cap B\right)$ = P (A) + P (B) - $P\left(A \cup B\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}$

b) $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = \frac{5}{6}$

c) $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) = \frac{7}{12}$

d) $P\left(A \cap \overline{B}\right)$ = P (A) - $P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{12}$

8. Lanzamos tres monedas al aire. Halla la probabilidad de no obtener ninguna cara y la de obtener dos caras y una cruz.

El espacio muestral asociado al experimento de lanzar tres monedas al aire es:

E = {(ccc), (ccx), (cxc), (xcc),(cxx), (xcx), (xxc), (xxx)} siendo c = cara y x = cruz.

Las probabilidades pedidas son:

P (no obtener ninguna cara) = P (tres cruces) = $\frac{1}{8}$.

P (obtener 2 caras y 1 cruz) = $\frac{3}{8}$.

9. Se consideran dos sucesos incompatibles X e Y asociados a un determinado experimento aleatorio y tal que P (X) = $\frac{2}{5}$ y P (Y) = $\frac{1}{2}$. Halla:

a) $P\left(X \cup Y\right)$ **b)** $P\left(X \cup \overline{Y}\right)$ **c)** $P\left(\overline{X} \cup \overline{Y}\right)$ **d)** $P\left(\overline{X \cup Y}\right)$

Como los sucesos son incompatibles se verifica que $P\left(X \cap Y\right) = 0$. Utilizando las propiedades de la probabilidad y las leyes de Morgan obtenemos:

a) $P\left(X \cup Y\right)$ = P (X) + P (Y) - $P\left(X \cap Y\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

b) $P\left(X \cup \overline{Y}\right) = P(X) + P(\overline{Y}) - P\left(X \cap \overline{Y}\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - P(X) = \frac{1}{2}$

c) $P\left(\overline{X} \cup \overline{Y}\right) = P\left(\overline{X \cap Y}\right) = 1$

d) $P\left(\overline{X \cup Y}\right) = 1 - P\left(X \cup Y\right) = \frac{1}{10}$

10. El 75% de los alumnos de un instituto practican algún deporte, el 30% tocan un instrumento musical y el 15% hacen deporte y tocan un instrumento musical. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un alumno que no realiza ninguna de estas actividades? ¿Cuál es la probabilidad de elegir un alumno que practique algún deporte y no toque ningún instrumento musical?

Llamamos D a hacer deporte y M a instrumento musical. Las condiciones del enunciado son:

P (D) = 0,75; P (M) = 0,30 y $P\left(D \cap M\right) = 0{,}15$

Utilizando las propiedades de la probabilidad obtenemos:

La probabilidad de elegir un alumno que no realiza ninguna de estas actividades, es:

$$P\left(\overline{D} \cap \overline{M}\right) = P(\overline{D \cup M}) = 1 - (0{,}75 + 0{,}30 - 0{,}15) = 0{,}10$$

La probabilidad de elegir un alumno que practique algún deporte y no toque ningún instrumento musical, es:

$$P\left(D \cap \overline{M}\right) = P\,(D) - P\,(D \cap M) = 0{,}75 - 0{,}15 = 0{,}60$$

11. Una urna tiene 12 monedas de oro, 8 de plata y 5 de cobre. Halla la probabilidad de que al extraer dos monedas, una detrás de la otra y sin devolver la primera a la urna, salgan del mismo material.

P (dos de igual material) = P (dos oro) + P (dos plata) + P (dos cobre) =

$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \frac{208}{600} = \frac{26}{75} = 0{,}347$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 313

12. De una baraja española de 40 cartas sacamos 3 cartas una detrás de la otra y sin reintegrar las cartas al mazo. Halla las siguientes probabilidades:

a) De sacar tres bastos.

b) De sacar dos bastos y una espada.

c) De sacar una carta de cada palo.

a) P (tres bastos) = $\dfrac{V_{10,3}}{V_{40,3}} = \dfrac{720}{59280} = 0{,}012$

b) P (dos bastos y una espada) = $\dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} \cdot \dfrac{10}{38} \cdot 3 = \dfrac{2700}{59280} = 0{,}046$

c) P (una de cada palo) = $\dfrac{V_{10,1} \cdot V_{10,1} \cdot V_{10,1}}{V_{40,3}} \cdot V_{4,3} = \dfrac{12000}{59280} = 0{,}2024$

13. Una bolsa tiene 8 bolas blancas, 6 rojas y 12 negras. Extraemos dos bolas al azar, una detrás de la otra y devolviendo la primera a la bolsa, halla la probabilidad de que:

a) Ambas sean blancas.

c) Ambas sean del mismo color.

b) Una sea blanca y la otra negra. **d) Ambas sean de distinto color.**

a) $P\text{ (dos bolas blancas)} = \frac{8}{26} \cdot \frac{8}{26} = \frac{16}{169} = 0{,}0947$

b) $P\text{ (una blanca y una negra)} = \frac{8}{26} \cdot \frac{12}{26} \cdot 2 = \frac{48}{169} = 0{,}2840$

c) $P\text{ (dos bolas de distinto color)} = \frac{8}{26} \cdot \frac{8}{26} + \frac{6}{26} \cdot \frac{6}{26} + \frac{12}{26} \cdot \frac{12}{26} = \frac{61}{169} = 0{,}3609$

d) $P\text{ (dos bolas blancas de distinto color)} = \frac{8}{26} \cdot \frac{6}{26} \cdot 2 + \frac{8}{26} \cdot \frac{12}{26} \cdot 2 + \frac{6}{26} \cdot \frac{12}{26} \cdot 2 = \frac{108}{169} = 0{,}6391$

14. Una urna de elecciones tiene 40 papeletas en blanco, 75 nulas y 60 válidas. Extraemos tres papeletas sin reintegrar las primeras a la urna. Halla la probabilidad:

a) De sacar tres papeletas válidas.

b) De sacar una papeleta de cada tipo.

a) P (tres papeletas válidas) = $\frac{60}{175} \cdot \frac{59}{174} \cdot \frac{58}{173} = \frac{236}{6055} = 0{,}0390$

b) P (una de cada tipo) = $\frac{40}{175} \cdot \frac{75}{174} \cdot \frac{60}{173} \cdot 6 = 0{,}2050$

15. Lanzamos un dado en forma de icosaedro. ¿Son independientes los sucesos obtener múltiplo de cinco y sacar múltiplo de cuatro?

Las probabilidades pedidas son:

P (múltiplo de 5) = 1/5; P (múltiplo de 4) = 1/4 y P (múltiplo de 5 y de 4) = 1/20

Por lo tanto, esos sucesos son independientes pues:

P (múltiplo de 5 y de 4) = P (múltiplo de 5) · P (múltiplo de 4)

16. Determina si los sucesos A y B son dependientes o independientes, compatibles o incompatibles, siendo:

a) P (A) = $\frac{2}{5}$, P (B) = $\frac{3}{4}$ y $P(A \cup B) = \frac{17}{20}$ **b) P (A) = $\frac{1}{3}$, P (B) = $\frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$.**

a) $P(A \cap B)$ = P (A) + P (B) - $P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{17}{20} = \frac{3}{10}$ y como $P(A \cap B)$ = P (A) · P (B), estos sucesos son compatibles e independientes.

b) $P\left(A \cap B\right)$ = P (A) + P (B) - $P\left(A \cup B\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = 0$ y como $P\left(A \cap B\right)$ $\neq$ P (A) · (B), estos sucesos son incompatibles y dependientes.

17. Disponemos de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas rojas y 3 azules; la urna B contiene 3 bolas rojas y 5 azules. Lanzamos el dado al aire y si el número obtenido es mayor que 4 sacamos bola de la urna A y en caso contrario de la B. ¿Cuál es la probabilidad de sacar bola azul?

La probabilidad es P (bola azul) = $\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{8} = 0{,}5417$

18. Un cofre metálico tiene 9 monedas de 1 € y 12 de 2 €; otro de madera tiene 6 monedas de 2 € y 8 de 1 €. Se elige un cofre y se sacan sucesivamente dos monedas. Halla:

a) La probabilidad de sacar dos monedas de 2 €.

b) La probabilidad de sacar dos monedas del mismo valor.

c) La probabilidad de sacar dos monedas de distinto valor.

a) P (2 monedas de 2€) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{21} \cdot \frac{11}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = 0{,}2396$

b) P (2 monedas igual valor) = P (2 monedas de 1 €) + P (2 monedas de 2 €) =

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{8}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{21} \cdot \frac{11}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = 0{,}4759$$

c) P (2 monedas distinto valor) = 2 · (1 moneda de 2 € y 1 moneda de 1 €) =

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{12}{20} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{13} = 0{,}5209$$

Otra forma de hacer este apartado es: P (2 monedas distinto valor) = 1 – P (2 monedas igual valor).

19. Dos amigos juegan a obtener la puntuación más alta lanzando cada uno su dado, el uno es blanco y el otro es verde. El dado blanco tiene cuatro caras con la puntuación 4 y dos caras con la puntuación 6. El dado verde tiene dos caras con la puntuación 4, tres caras con puntuación 6 y la otra con puntuación 2. ¿Qué amigo crees que tiene más probabilidad de ganar?

P (ganar el del dado blanco) = P (4 blanco y 2 verde) + P (6 blanco y 4 verde o 2 verde) =

$$= \frac{4}{6} \quad \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{10}{36} = 0{,}2778$$

P (ganar el del dado verde) = P (4 blanco y 6 verde) = $\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = 0{,}3333$

Tiene más posibilidades de ganar el del dado verde.

20. La probabilidad de que un tirador haga blanco en una diana es 2/3 y que su amigo haga blanco en la misma diana es 4/5. Lanzan los dos un dardo cada uno sobre la diana, halla la probabilidad de que ambos hagan blanco ¿Y de que solo haga blanco uno de ellos?

Las probabilidades pedidas son:

a) $P\ (ambos\ acierten) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} = 0{,}5333$.

b) $P\ (uno\ solo\ nbos\ acierte) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{15} = 0{,}4$

21. Un banco tiene dos sistemas de alarma. La probabilidad de que funcione la primera es 0,4, de que funcione la segunda es 0,3 y de que se funcionen ambas es 0,15. ¿Cuál es la probabilidad de que alguna de las dos funcione? ¿Y de que no funcione ninguna de las dos? ¿Y de que solo funcione una de ellas?

Llamamos A y B a los sistemas de alarma. Tenemos que P (A) = 0,4; P (B) = 0, 3 y P (A $\cap$ B) = 0,15.

Las probabilidades pedidas son:

P (alguna funcione) = $P\left(A \cup B\right) = P\ (A) + P\ (B) - P\left(A \cap B\right) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}15 = 0{,}55$

P (no funcione ninguna) = $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$

P (solo funcione una) =

$$= P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\ (A) + P\ (B) - 2 \cdot P\left(A \cap B\right) = 0{,}4 + 0{,}3 - 2 \cdot 0{,}15 = 0{,}4$$

22. Una persona se presenta a una prueba de selección para obtener un trabajo en una auditoria. La prueba consiste en responder a un tema elegido entre 4 temas. Esta persona se sabe 50 de los 80 temas que le piden, ¿qué probabilidad tiene de conseguir el puesto?

La probabilidad pedida es:

$$P\left(conseguir\ el\ puesto\right) = \frac{\binom{50}{4}}{\binom{80}{4}} = 0{,}1456$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 314

1. Un cartero reparte 3 cartas aleatoriamente entre sus 3 destinatarios. Calcula la probabilidad de que al menos una de las 3 cartas llegue a su destino correcto.

La probabilidad es P (al menos una de las tres) = 2/3.

2. Los dos sucesos de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad, 0,5. La probabilidad de que ocurran los dos a la vez es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos?

La probabilidad pedida es:

$$P\left(\overline{X}\cap\overline{Y}\right)=P\left(\overline{X\cup Y}\right)=1-P\left(X\cup Y\right)=1-\left[P\left(X\right)+P\left(Y\right)-P\left(X\cap Y\right)\right]=0{,}3$$

3. Se presentan tres partidos políticos (A, B y C) a unas elecciones con un único partido ganador. La probabilidad de que gane B es el doble de la probabilidad de que gane A, mientras que la probabilidad de que gane C es el triple de la probabilidad de que gane B, ¿Qué probabilidad tiene C de ganar las elecciones?

Tenemos que P (B) = 2 · P (A); P(C) = 3 · P (B) = 6 · P (A).

Como sabemos que P (A) + P (B) + P (C) = 1; entonces P (A) = 1/9 de modo que P (C) = 2/3.

4. En una localidad hay solamente dos supermercados, A y B. El 58% de los habitantes compra en el A, el 35% en el B y el 12% compra en ambos. Se elige un ciudadano al azar, halla la probabilidad de que:

a) Compre en alguno de estos supermercados.

b) No compre en ninguno de estos supermercados.

c) Compre solamente en uno de estos supermercados.

a) La probabilidad de que compre en alguno de estos supermercados es:

$$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)=0{,}81$$

b) La probabilidad de que no compre en ninguno de estos supermercados es:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-0{,}81=0{,}19$$

c) La probabilidad de que compre solo en uno de estos supermercados es:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-2\,P\left(A\cap B\right)=0{,}69$$

5. La probabilidad de que un alumno de Bachillerato apruebe Matemáticas es 0,5, de que apruebe Inglés es 0,375 y de que no apruebe ninguna es 0,25.

a) Halla la probabilidad de que apruebe al menos una de las dos asignaturas.

b) Calcula la probabilidad de que apruebe las dos asignaturas.

Tenemos que $P\left(\overline{M}\cap\overline{I}\right)=P\left(\overline{M\cup I}\right)=0{,}25$. Las probabilidades pedidas son:

a) P (al menos una de las dos) = $P\left(M\cup I\right)=0{,}75$

b) P (apruebe ambas) = $P\left(M\cap I\right)=P\left(M\right)+P\left(I\right)-P\left(M\cup I\right)=0{,}125$

6. A tres amigos les toca en un sorteo una sola entrada para un espectáculo musical. Para decidir quién se queda con la entrada la ponen en una bolsa con dos tarjetas en blanco y los tres van sacando, uno detrás de otro, un papel de la bolsa. ¿Quién tiene ventaja, el primero que saca, el segundo o el tercero?

Las probabilidades de cada uno son:

P (1º) = 1/3; P (2º) = 2/3 · 1/2 = 1/3 y P (3º) = 2/3 · 1/2 · 1 = 1/3. Ninguno tiene ventaja.

7. Disponemos de dos llaveros uno de metal con 8 llaves grandes y 4 llaves pequeñas y otro de plástico con 6 llaves grandes y 2 pequeñas. Sacamos una llave, al azar, del llavero de metal y sin mirarla la metemos en el de plástico. Después sacamos una llave del llavero de plástico. Halla la probabilidad de sacar una llave grande.

La probabilidad es P (llave grande del llavero de plástico) = $\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{9}+\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{9}=0,7407$

8. Una urna tiene 6 bolas blancas y n bolas negras. Extraemos dos bolas de la urna, una detrás de la otra y sin devolver la primera a la urna. Halla el número de bolas negras si sabemos que la probabilidad de extraer dos bolas blancas es 1/3.

Llamamos n a las bolas negras que hay en la urna. Sabemos que $\frac{6}{6+n}\cdot\frac{5}{5+n}=\frac{1}{3}$; resolviendo esta ecuación obtenemos que n = 4. La urna tiene 4 bolas negras.

9. Andrés va andando al Instituto. La probabilidad de que un día determinado llueva es 1/5. Si no llueve, la probabilidad de que no llegue puntual a clase es 2/9 y si llueve la probabilidad de que no llegue puntual es 2/7. Halla la probabilidad de que un día determinado no llegue puntual a clase.

La probabilidad es P (no puntual) = $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{9}=0,2730$

10. En una determinada Universidad el 60% de los estudiantes de la facultad de Económicas son chicas y el 55% de los estudiantes de la facultad de Derecho son chicos. Se elige, al azar, un estudiante de cada facultad para que representen a las mismas ante el rectorado de la universidad. Halla el porcentaje de que:

a) Ambos sean chicas.

b) Sean un chico y una chica.

Los porcentajes pedidos son:

a) P (ambas chicas) = 0,60 · 0,45 = 0,27; luego en el 27% de los casos son las dos chicas.

b) P (un chico y una chica) = 0,40 · 0,45 + 0,60 · 0,55 = 0,51; luego en el 51% de los casos son un chico y una chica.

11. Sean A y B dos sucesos independientes. Sea P (A) = $\frac{3}{7}$ y $P\left(A\cup B\right)=\frac{5}{7}$. Halla P (B) y $P\left(\overline{A}\cap B\right)$.

Como A y B son independientes entonces $P\left(A\cap B\right)=P\,(A)\cdot P\,(B)=\frac{3}{7}\cdot P\,(B)$ y además:

$$P\left(A \cup B\right) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B) \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{3}{7} + P\,(B) - \frac{3}{7} \cdot P\,(B) \Rightarrow P\,(B) = \frac{1}{2}$$

y $P\left(\overline{A} \cap B\right)$ = P (B) - $P\left(A \cap B\right) = \frac{2}{7}$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 315

La paradoja del cumpleaños

Una *paradoja* es un enunciado que tiene apariencia verdadera pero que, analizándolo en detalle, lleva a una situación que contradice el sentido común. La teoría de la probabilidad es un campo de las matemáticas extremadamente rico en paradojas. Algunas paradojas reciben el nombre de su creador: Bertarnd, Blyth, Yule-Simpson, Monty Hall, etc. y otras el del tema al que hacen referencia.

Entre estas últimas una de las paradojas más conocidas y curiosas es la paradoja del cumpleaños, aunque en sentido estricto no es una paradoja ya que no presenta contradicción lógica, pero si es una paradoja en el sentido de que es una verdad matemática que contradice la intuición común.

Su enunciado puede ser uno de los siguientes:

● ***¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de n personal al menos dos de ellas cumplan años el mismo día?***

● ***¿Cuál es el número mínimo de personas que tiene que haber para que el porcentaje de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día sea mayor del 50%?***

Si se plantean estas preguntas a un grupo de personas piensan que la probabilidad es pequeñísima a no ser que hubiera en el grupo al menos 360/2 = 180 personas y así la posibilidad de encontrar al menos dos que cumplan años el mismo día será un número mayor que el 50%. Pero en la realidad con menos personas ya se cumple el enunciado, esta es la razón de que se considere una paradoja que contradice lo que la intuición nos indica.

Investiga sobre esta paradoja y haz un estudio matemático de la misma.

Consideramos el año de 365 días, no tenemos en cuenta los años bisiestos ni las personas que son mellizas. Estos serían otros problemas.

a) Vamos a solucionar el primer enunciado:

Llamamos A al suceso "al menos dos cumplen los años el mismo día" y vamos a considerar el suceso contrario $\overline{A}$ es decir el suceso "no existen dos personas que cumplan años el mismo día"

Vamos a simplificar el problema para verlo mejor:

● Supongamos que tenemos n = 1 persona. P (A) = 0

● Supongamos que tenemos n = 2 personas. P ($\overline{A}$) = $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} = \frac{V_{365,\,2}}{VR_{365,\,2}}$; P (A) = 1 - $\frac{V_{365,\,2}}{VR_{365,\,2}}$

● Supongamos que tenemos n = 3 personas. P ($\overline{A}$) = $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = \frac{V_{365,\,3}}{VR_{365,\,3}}$; P (A) = 1 - $\frac{V_{365,\,3}}{VR_{365,\,3}}$

● Supongamos que tenemos n = 5 personas. P ($\overline{A}$) = $\frac{V_{365,\,5}}{VR_{365,\,5}}$; P (A) = 1 - $\frac{V_{365,\,5}}{VR_{365,\,5}}$

● Para n personas: P ($\overline{A}$) = $\frac{V_{365,n}}{VR_{365,n}}$; P (A) = 1 - $\frac{V_{365,\,n}}{VR_{365,\,n}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$

Esta es la fórmula que nos da la probabilidad de que en un grupo de n personas al menos dos de ellas cumplan años el mismo día.

b) A partir de la fórmula anterior mediante un programa de ordenador construimos la siguiente tabla:

Personas	5	10	15	20	23	25	27	30	40	50	80
Probabilidad	0,027	0,117	0,25	0,411	0,507	0,569	0,627	0,814	0,891	0,97	0,999

Y la gráfica que se ajusta a ella es:

Por lo cual el número mínimo de personas que tiene que haber para que la probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día es sea mayor del 50% es de 23 personas.