UNIDAD 13: Probabilidad condicionada

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 316

1. Lanzamos un dado al aire y observamos su cara superior. Si sabemos que ha salido número par, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido un 6?

La probabilidad es P (salga 6/ par) = 1/3.

2. Una caja de herramientas tiene 20 tacos de 6 mm, 21 de 8 mm y 12 de 9 mm. Sacamos sin mirar dos tacos y salen uno de 9 mm y otro de 8mm. Después se saca otro taco ¿es más probable que sea de 6, de 8 o de 9 mm?

Es igual de probable que salga un taco de 6 mm o uno de 8 mm, con probabilidad $\frac{20}{51} = 0{,}3922$ y esta probabilidad es mayor que la probabilidad de que salga de 9 mm, que es $\frac{11}{51} = 0{,}2157$.

3. Disponemos de dos barajas una española de 40 cartas y la otra francesa de 52 cartas. Elegimos una baraja al azar y sacamos una carta. Halla la probabilidad de sacar un rey.

La probabilidad es P (rey) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{40} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{52} = \frac{23}{260} = 0{,}0885$.

4. A un examen de acceso a la Universidad acuden 120 alumnos de un instituto y 80 alumnos de un colegio. La probabilidad de pasar el examen los alumnos del instituto es del 85% y los del colegio 80%. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que suspenda el examen?

4. La probabilidad es P (suspende) = $\frac{120}{200} \cdot \frac{15}{100} + \frac{80}{200} \cdot \frac{20}{100} = \frac{17}{100} = 0{,}17$.

5. Una urna tiene 8 bolas rojas y 6 bolas blancas. Se saca una bola al azar y se sustituye por tres del mismo color, después se saca otra bola, ¿cuál es la probabilidad de que esta última sea blanca?

La probabilidad es P (blanca) = P (1ª roja) · P (2ª blanca) + P (1ª blanca) · P (2ª blanca) =

$$= \frac{8}{14} \cdot \frac{6}{16} + \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{16} = \frac{3}{7} = 0{,}4286$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 327

1. Matrices. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestra que $A^n = 3^{n-1} \cdot A$.

Siguiendo el método de inducción y sabiendo que la igualdad es cierta para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostraremos que también lo es para el siguiente.

● Para n = 1 vemos que la igualdad es cierta, pues $A = 3^{0} \cdot A$.

● Para n = 2 calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot A$.

● Suponemos que es cierta para n = p: $A^p = 3^{p-1} \cdot A$, hemos de ver que también es cierta para n = p + 1, es decir, hemos de probar que $A^{p+1} = 3^p \cdot A$.

Para ello calculamos esta matriz $A^{p+1} = A^p \cdot A = 3^{p-1} \cdot A \cdot A = 3^{p-1} \cdot 3 \cdot A = 3^p \cdot A$, que es lo que queríamos demostrar.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para p + 1. Por tanto, podemos afirmar que es cierta para cualquier número natural.

2. Múltiplo de 5. Demuestra que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 para cualquier valor de n.

Siguiendo el método de inducción y sabiendo que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 es cierto para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostraremos que también lo es para el siguiente.

● Para n = 1 vemos que la igualdad es cierta, pues $1^5 - 1 = 0$ es múltiplo de 5.

● Para n = 2, tenemos $2^5 - 2 = 30$, que se múltiplo de 5.

● Suponemos que es cierta para n = p, $p^5 - p$ es múltiplo de 5.Hemos de ver que también es cierta para n = p + 1, es decir, hemos de probar que $(p + 1)^5 - (p + 1)$ es múltiplo de 5.

Para ello operamos y obtenemos:

$$(p + 1)^5 - (p + 1) = p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1 - p - 1 = (p^5 - p) + 5(p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p)$$

La última expresión es suma de dos múltiplo de 5, por tanto, es múltiplo de 5.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para p + 1. Por tanto, podemos afirmar que es cierta para cualquier número natural.

3. Suma de cubos. Demuestra que para cualquier número natural n se verifica: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

Siguiendo el método de inducción y sabiendo que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 es cierto para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostraremos que también lo es para el siguiente.

● Para n = 1 la igualdad es cierta: $1^3 = \frac{1^2\,(1+1)^2}{4}$.

● Para n = 2, la igualdad es cierta: $1^2 + 2^3 = \frac{2^2\,(2+1)^2}{4}$.

● Suponemos que es cierta para n = p, es decir:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 = \frac{p^2\,(p+1)^2}{4}$$

Hemos de ver que también es cierta para n = p + 1, hemos de probar que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{(p+1)^2\,(p+2)^2}{4}$$

Para ello, utilizamos lo anterior y obtenemos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{p^2\,(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 =$$

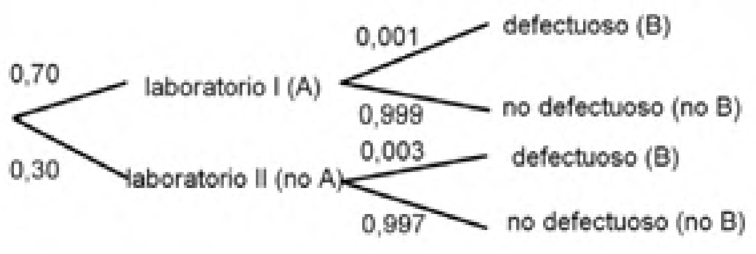
$$= (p+1)^2\left(\frac{p^2}{4} + p + 1\right) = \frac{(p+1)^2\,(p+2)^2}{4}$$

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para p + 1. Por tanto, podemos afirmar que es cierta para cualquier número natural.

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 329

1. Dos laboratorios I y II, que trabajan para una misma marca comercial, fabrican medicamentos que presentan algún defecto con probabilidades del 1 por mil y del 3 por mil respectivamente. Un hospital se abastece de medicamentos que provienen el 70% del laboratorio I y el 30% del laboratorio II. En una investigación realizada en el hospital se observa un medicamento y resultó ser defectuoso. ¿Qué probabilidad hay de que provenga del laboratorio I?

Con la información del enunciado podemos construir el diagrama de árbol:



Esta información puede colocarse en la tabla de contingencia:

	Laboratorio I	Laboratorio II
defectuoso	0,0007	0,0009
no defectuoso	0,6993	0,2991

La probabilidad pedida es:

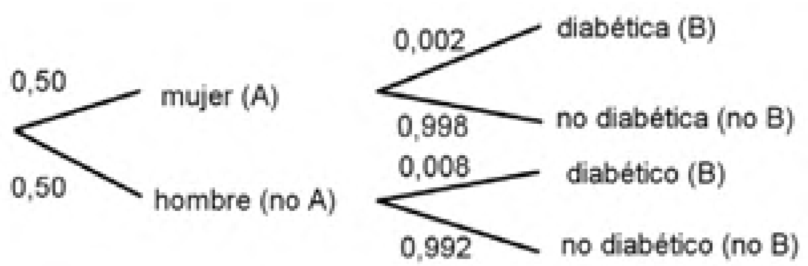
$$P(\textit{laboratorio I si defectuoso}) = \frac{0{,}0007}{0{,}0007 + 0{,}0009} = 0{,}4375$$

Esta probabilidad, y otras, pueden verse en la imagen que sigue.

	A	B	C	D	E	F	G
1	TABLA DE CONTINGENCIA					PROBABILIDADES TOTALES	
2		Lab I	Lab II	TOTAL		P(Lab I)=	0,7000
3	defectuoso	0,0007	0,0009	0,0016		P(Lab II)=	0,3000
4	no defectuoso	0,6993	0,2991	0,9984		P(defec)=	0,0016
5	TOTAL	0,7	0,3	1		P(no defec)=	0,9984
6							
7	PROBABILIDADES CONDICIONADAS						
8	P(Lab I si defec)=	0,4375		P(defec si Lab I)=	0,0010		
9	P(Lab II si defec)=	0,5625		P(no defec si Lab I)=	0,9990		
10	P(Lab I si no defec)=	0,7004		P(defec si Lab II)=	0,0030		
11	P(Lab II si no defec)=	0,2996		P(no defec si Lab II)=	0,9970		

2. En cierta región se ha hecho un estudio sobre la diabetes y se ha encontrado que 8 de cada mil hombres y una de cada 500 mujeres padece diabetes. Se elige una persona al azar y se sabe que presenta diabetes. ¿Qué probabilidad hay de que se trate de una mujer?, ¿y que se trate de un hombre?

Con la información del enunciado podemos construir el diagrama de árbol:



Esta información puede colocarse en la tabla de contingencia:

	mujer	hombre
diabético	0,001	0,004
no diabético	0,499	0,496

Las probabilidades pedidas son:

$$P(mujer\ \ si\ \ diabética) = \frac{0{,}001}{0{,}001 + 0{,}004} = 0{,}2$$

$$P(\text{hom}bre\ \ si\ \ diabético) = \frac{0{,}004}{0{,}001 + 0{,}004} = 0{,}8$$

Esta probabilidad, y otras, pueden verse en la imagen que sigue.

	A	B	C	D	E	F	G
1	TABLA DE CONTINGENCIA					PROBABILIDADES TOTALES	
2		mujer	hombre	TOTAL		P(mujer)=	0,5000
3	diabético	0,001	0,004	0,005		P(hombre)=	0,5000
4	no diabético	0,499	0,496	0,995		P(diabét)=	0,0050
5	TOTAL	0,5	0,5	1		P(no diabét)=	0,9950
6							
7	PROBABILIDADES CONDICIONADAS						
8	P(mujer si diabét)=	0,2000		P(diabét si mujer)=	0,0020		
9	P(hombre si diabét)=	0,8000		P(no diabét si mujer)=	0,9980		
10	P(mujer si no diabét)=	0,5015		P(diabét si hombre)=	0,0080		
11	P(hombre si no diabét)=	0,4985		P(no diabét si hombre)=	0,9920		

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 332

1. Sean los sucesos A y B tales que P (A) = $\frac{1}{5}$ **, P (B) =** $\frac{2}{3}$ **y** $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$**. Halla:**

a) $P(A/B)$ **b)** $P(\overline{A}/B)$ **c)** $P(B/\overline{A})$

Las probabilidades pedidas son:

a) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{5}$

b) $P(\overline{A}/B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{2}{3}-\frac{4}{15}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5}$

c) $P(B/\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{\frac{2}{3}-\frac{4}{15}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{2}$

2. Sean X e Y dos sucesos tales que P(X) = $\frac{4}{9}$**, P (Y / X) =** $\frac{1}{2}$ **y P(X** $\cup$ **Y) =** $\frac{13}{18}$**.**

a) Halla P (X ∩ Y).

b) Halla P (Y).

c) ¿Son dependientes o independientes los sucesos X e Y?

Las probabilidades son:

a) $P(Y/X) = \dfrac{P(Y \cap X)}{P(X)} \quad \Rightarrow \quad P(Y \cap X) = \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9}$

b) P (Y) = P (X $\cup$ Y) + P (X $\cap$ Y) – P(X) = $\frac{1}{2}$

c) Como P (X $\cap$ Y) = P (X) · P (Y), los sucesos X e Y son independientes.

3. Extraemos una ficha de un dominó y sumamos los puntos que aparecen en ella. Sabiendo que suman 6 puntos ¿cuál es la probabilidad de que aparezca un 2?

La probabilidad es P (un 2/ con suma 6) = $\frac{P\left(un\ 2\ y\ suma\ 6\right)}{P\left(suma\ 6\right)} = \frac{\frac{1}{28}}{\frac{4}{28}} = \frac{1}{4}$

4. De una baraja española de 52 cartas extraemos 3 cartas, una detrás de otra y sin devolver la anterior a la baraja. Halla la probabilidad de que salgan:

a) Dos oros y un basto.

b) Tres figuras.

c) Tres cartas de distinto palo.

Las probabilidades son:

a) P (2 oros y 1 basto) = $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{52} \cdot 3 = \frac{3}{68} = 0{,}0441$

b) P (3 figuras) = $\frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} \cdot \frac{10}{50} = \frac{11}{1105} = 0{,}0100$

c) P (3 cartas de distinto palo) = $\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{13}{50} \cdot 24 = \frac{169}{425} = 0{,}3976$

5. Lanzamos dos dados al aire y anotamos los números de sus caras superiores. Si se sabe que en uno de ellos salió un 5, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia de sus puntos, en valor absoluto, sea 2?

La probabilidad es P (diferencia 2/ ha salido un 5) = $\frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11} = 0{,}1818$

6. ¿Son independientes los sucesos sacar figura y sacar una copa al sacar una carta de una baraja española de 40 cartas?

Tenemos que P (sacar figura) = 12/40; P (sacar copa) = 10/40 y P (sacar figura $\cap$ copas) = 3/40.

Como P (sacar figura $\cap$ copas) = P (sacar figura) · P (sacar copa), entonces los sucesos son independientes.

7. En un parque de atracciones hay, un día determinado, doble número de mujeres que de hombres. Hay niños, jóvenes y adultos que se distribuyen según la siguiente tabla:

	NIÑOS	JÓVENES	ADULTOS	TOTAL
MUJERES	80		50	
HOMBRES		30		
TOTAL			70	300

a) Completa la tabla en tu cuaderno.

b) Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un niño o una niña?

c) Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un hombre adulto?

a) La tabla queda como sigue imponiendo las condiciones del problema:

	NIÑOS	JÓVENES	ADULTOS	TOTAL
MUJERES	80	70	50	200
HOMBRES	50	30	20	100
TOTAL	130	100	70	300

b) La probabilidad es P (niño) = 130/300 = 0,4333

c) La probabilidad es P (hombre adulto) = 20/300 = 0,0667

8. En la escuela de idiomas de cierto país hay una clase con 38 alumnos de los cuales 26 hablan español como primera lengua y de ellos 8 no son sudafricanos. El resto de alumnos hablan inglés como primera lengua y de ellos 10 no son sudafricanos. Se elige un alumno al azar y es sudafricano ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés como primera lengua?

Hacemos esta tabla con los datos del problema:

	Sudafricanos	No sudafricanos	TOTAL
Español	18	8	26
Inglés	2	10	12
TOTAL	20	18	38

La probabilidad es P (habla inglés/ sudafricano) = 2/20 = 0,1

9. En un club deportivo el 56% de los socios practican natación. Sabiendo que los 2/5 de los socios son mujeres y que de ellas nadan el 40%. Halla:

a) La probabilidad de elegir un socio que sea mujer y no nade.

b) La probabilidad de elegir una persona no nadadora.

c) Sabiendo que hemos elegido un hombre ¿cuál es la probabilidad de que sea nadador?

Hacemos esta tabla con los datos del problema:

	Natación	**No natación**	**Total**
Mujeres	16	24	40
Hombres	40	20	60
Total	56	44	100

Las probabilidades pedidas son:

a) P (mujer y no natación) = 24/100 = 0,24

b) P (persona no nadadora) = 44/100 = 0,44

c) P (nadador/ hombre) = 40/60 = 0,6667

10. Una empresa compra 120 ordenadores de los que 50 son Mac y el resto PC. Hay 12 que no funcionan de los que 3 son PC. Halla:

a) La probabilidad de elegir un ordenador que sea Mac y funcione.

b) La probabilidad de elegir un ordenador que funcione.

c) Sabiendo que hemos elegido un ordenador que funciona ¿cuál es la probabilidad de que sea PC?

Hacemos esta tabla con los datos del problema:

	Mac	**PC**	**Total**
Funcionan	41	67	108
No funcionan	9	3	12
Total	50	70	120

Las probabilidades son:

a) P (Mac y funcione) = 41/120 = 0,3417

b) P (funciona) = 108/120 = 0,9

c) P (PC/ funciona) = 67/108 = 0,6204

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 333

11. Tres fabricas A, B, C producen respectivamente el 45%, el 30% y el 25% del total de cierta pieza de automóvil. Los porcentajes de piezas defectuosas en la producción son del 4%, el 5% y el 6% respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que cierta pieza no sea defectuosa?

La probabilidad es P (no defectuosa) = 0,45 · 0,96 + 0,30 · 0,95 + 0,25 · 0,94 = 0,952.

12. En una universidad hay 3 facultades Medicina, Veterinaria y Químicas. En total hay 2000 alumnos matriculados de los que 900 son chicos. En la facultad de Medicina hay un 20% del total de los alumnos y de ellos 50 son chicos. En la de Veterinaria hay 500 chicas y 350 chicos. Se elige un alumno al azar.

a) Halla la probabilidad de que sea una chica que estudie Químicas.

b) ¿Qué porcentaje de chicas estudian en la facultad de Veterinaria?

c) Si hemos elegido un alumno de Medicina, ¿probabilidad que sea una chica?

Completamos la tabla con los datos del problema:

	Medicina	Veterinaria	Químicas	Total
Chicas	350	500	250	1100
Chicos	50	350	500	900
Total	400	850	750	2000

Las probabilidades pedidas son:

a) P (Chica de Químicas) = 250/2000 = 0,125.

b) P (En Veterinaria % de chicas) = 500/1100 = 0,4545; el 45,45% de las chicas estudian Veterinaria.

c) P (Chica/Medicina) = 350/400 = 0,875.

13. Un establecimiento comercial dispone en el almacén de 300 unidades del producto A, 600 del producto B y 100 del producto C. La probabilidad de que una unidad sea defectuosa sabiendo que es del producto A es 0,2, de que lo sea sabiendo que es del producto B es 0,15 y que seas defectuosa sabiendo que procede de C es 0,3. Sabiendo que hemos elegido una unidad defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que proceda de C?

La probabilidad es $P\left(C/Defec\right)=\dfrac{0{,}1\cdot 0{,}3}{0{,}1\cdot 0{,}3+0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}15}=0{,}1667$

14. En una Universidad hay 400 estudiantes de los que 100 son chicos. Hay 110 que hablan francés de los que 105 son chicas. Elegida una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que sea un chico que no hable francés? Si hemos elegido un estudiante que no habla francés ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Con los datos del problema completamos este cuadro:

	Chicos	Chicas	Total
Hablan francés	5	105	110
No hablan francés	95	185	290
Total	100	300	400

Las probabilidades son:

P (chico que no hable francés) = 95/400 = 0,2375.

P (chica/no francés) = 185/290 = 0,6379.

15. En una clase hay 7 calculadoras gráficas y 3 programables. La probabilidad de que en una sesión de trabajo se agoten las pilas en las primeras es 0,05 y en las segundas 0,02.

a) Elegida una calculadora al azar, halla la probabilidad de que se agoten las pilas.

b) Sabiendo que a una calculadora que no se le han agotado las pilas, ¿qué probabilidad hay de que fuera una calculadora gráfica?

Las probabilidades son:

a) P (se agoten las pilas) = $\frac{7}{10} \cdot 0,05 + \frac{3}{10} \cdot 0,02 = 0,041$

b) P (gráfica/no se han agotado las pilas) = $\frac{0,7 \cdot 0,95}{0,959} = 0,6934$

16. El Ayuntamiento de una ciudad ha inaugurado una nueva piscina cubierta. Se pasa una encuesta a 2000 personas sobre si las instalaciones de la piscina son o no adecuadas. A un 35 % de los encuestados no les parecen adecuadas. De los 2000 encuestados, 1600 viven habitualmente en la ciudad. Además, el porcentaje de los que viven en la ciudad y les han parecido adecuadas es del 60 %.

a) Si se elige una encuesta ¿cuál es la probabilidad de que le parezca adecuada la piscina y viva en la ciudad?

b) Si hemos elegido una encuesta de una persona que no vive habitualmente en la ciudad ¿cuál es la probabilidad de que no le parezcan adecuadas las instalaciones de la piscina?

Con los datos del enunciado completamos la siguiente tabla:

	Viven habitualmente	No viven habitualmente	Total
Adecuadas	960	340	1300
No adecuadas	640	60	700
Total	1600	400	2000

Las probabilidades pedidas son:

a) P (Adecuada y viva) = $\frac{960}{2000} = 0,48$

b) P (No adecuadas/ no vive) = $\frac{60}{400} = 0{,}15$

17. Un alumno va a clase el 85% de los días en autobús y el resto en coche con sus padres. Cuando va en autobús llega tarde a clase el 30% de los días. Cuando va con sus padres llega puntual 60% de los días. Halla:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un día llegue tarde?

b) Si un día llega puntual ¿cuál es la probabilidad de que haya ido en autobús?

Las probabilidades son:

a) P (llegue tarde) = 0,85 · 0,30 + 0,15 · 0,40 = 0,315.

b) P (autobús/ llega puntual) = $\frac{0{,}85 \cdot 0{,}70}{1 - 0{,}315} = 0{,}8686$.

18. Una moneda esta trucada de forma que la probabilidad de sacar cara es triple que la de cruz. Lanzamos la moneda y si sale cara sacamos una bola de una caja que contiene 10 bolas rojas y 6 blancas y si sale cruz sacamos una bola de otra urna que contiene 8 bolas rojas y 5 blancas. Lanzamos la moneda al aire, halla:

a) La probabilidad de sacar una bola blanca.

b) Sabiendo que hemos sacado una bola blanca, ¿cuál es la probabilidad de haber sacado cara al lanzar la moneda?

Con las condiciones del problema sabemos que P (cara) = 0,75 y P (cruz) = 0,25. Entonces:

a) P(sacar bola blanca) = $0{,}75 \cdot \frac{6}{16} + 0{,}25 \cdot \frac{5}{13} = 0{,}3774$

b) P (cara/ sacado bola blanca) = $\frac{0{,}75 \cdot \frac{6}{16}}{0{,}377} = 0{,}7452$

19. En un almacén de frutas hay tres contenedores que contienen piezas buenas y defectuosas. En el primero un 8% son defectuosas, en el segundo un 7% y en el tercero un 9%. La probabilidad de elegir una fruta del primer contenedor o del segundo es la misma y de elegirla del tercero es el doble de las anteriores. Elegida una fruta al azar resulta que esta buena, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del tercer contenedor?

19. Las probabilidades del enunciado son:

P (1º contenedor) = P (2º contenedor) = 1/4 y P (3º contenedor) = 2/4

La probabilidad pedida es:

$$P\left(3º \,/\, buena\right) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}91}{0{,}25 \cdot 0{,}92 + 0{,}25 \cdot 0{,}93 + 0{,}5 \cdot 0{,}91} = 0{,}4959$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 334

1. Se estima que el 8% de la población española padece diabetes. Una nueva prueba diagnostica correctamente el 95% de los pacientes que sufren esta enfermedad, pero produce un 3% de falsos positivos. Sabiendo que una persona ha dado positivo en dicha prueba, ¿qué probabilidad hay de que realmente sea diabético?

La probabilidad es P (Diabético/ +) = $\dfrac{0,08 \cdot 0,95}{0,08 \cdot 0,95 + 0,92 \cdot 0,03} = 0,7336$

2. Los dos sucesos de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad, 0,5. La probabilidad de que ocurra uno de ellos sabiendo que ha ocurrido el otro es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos?

2. Sean A y B los sucesos que verifican P (A) = P (B) = 0,5 y P(A/B) = 0,3. Entonces:

$$P\left(A \cap B\right) = P\left(A / B\right) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$$

La probabilidad pedida es:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [0,5 + 0,5 - 0,15] = 0,15$$

3. En una granja hay patos de dos tipos con pico rojo o con pico amarillo. Se observa que el 40% son machos con pico amarillo; el 20% de todos tienen el pico rojo mientras que el 35% de los que tienen el pico rojo son machos.

a) Elegido un pato al azar, halla la probabilidad de que sea macho.

b) Si el pato elegido es una hembra, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el pico rojo?

Con los datos del enunciado completamos la siguiente tabla:

	Pico rojo	**Pico amarillo**	**Total**
Machos	7	40	47
Hembras	13	40	53
Total	20	80	100

Las probabilidades son:

a) P (Macho) = $\dfrac{47}{100} = 0,47$

b) P (Pico rojo/ Hembra) = $\dfrac{13}{53} = 0,245$

4. Si el ocupante de un coche sufre un choque frontal a 80 km/h sin llevar puesto el cinturón de seguridad suele ser mortal en el 98% de los casos. Según datos de la Dirección General de Tráfico, el 88,3% de los

usuarios de coche utilizan cinturón, elemento que reduce a la mitad el riesgo de muerte en un accidente. Si una persona sufre un accidente que no le cuesta la vida a 80 km/h, ¿qué probabilidad hay de que llevara puesto el cinturón de seguridad?

La probabilidad es P (Cinturón/ no muere) = $\frac{0,883 \cdot 0,51}{0,883 \cdot 0,51 + 0,117 \cdot 0,02} = 0,9948$

5. Un test para detectar si una persona es portadora del virus VIH da positivo en el 94% de las personas que son portadoras del virus y en el 10% de las personas que no son portadoras. Sabemos que en la realidad el 0,5% de las personas son portadoras del virus. Si se elige al azar una persona y el resultado del test que se le ha aplicado ha sido positivo, ¿cuál es la probabilidad de que en la realidad esa persona sea portadora del virus?

La probabilidad pedida es P (portadora virus / positivo) = $\frac{0,005 \cdot 0,94}{0,005 \cdot 0,94 + 0,995 \cdot 0,10} = 0,0451$

6. Calcula $P\,(\overline{A}/B)$, sabiendo que $P\,(A) = \frac{1}{3}$, $P\,(B) = \frac{1}{4}$ y $P\,(A \cup B) = \frac{5}{12}$

Utilizando las propiedades de la probabilidad y la definición de probabilidad condicionada obtenemos:

$P\left(A \cap B\right)$ = P (A) + P (B) - $P\left(A \cup B\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}$

$$P\left(\overline{A}/B\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

7. En una empresa el 72,5% de los trabajadores tienen teléfono móvil. De estos el 70% tienen tablet. Por otro lado el 33,3% de los que no tienen teléfono móvil si tienen tablet.

a) ¿Qué tanto por ciento tienen ambos aparatos?

b) ¿Qué tanto por ciento tienen tablet?

c) Si un trabajador elegido al azar no dispone de tablet, ¿qué probabilidad hay de que tenga teléfono móvil?

Los porcentajes pedidos son:

a) Tienen ambos aparatos: 0,725 · 0,70 = 0,5075, es decir el 50,75%.

b) Tienen tablet: 0,725 · 0,7 + 0,275 · 0,333 = 0,5991, es decir el 59,91%.

c) La probabilidad pedida es P (Teléfono móvil/No tablet) = $\frac{0,725 \cdot 0,30}{1 - 0,5991} = 0,5425$. Por tanto, la probabilidad de que no teniendo tablet si tenga teléfono móvil es 0,5425.

8. Los miembros de una sociedad de Amigos del Camino de Santiago son el 30% españoles, el 60% franceses y el resto de otras nacionalidades. Los franceses de la sociedad son peregrinos en la proporción de uno de cada mil, los españoles en la proporción de uno de cada cien, mientras que el resto de los miembros de la sociedad es peregrino en la proporción de uno de cada diez mil. Se elige al azar un miembro de la sociedad

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea peregrino?

b) Si el miembro elegido resultó ser peregrino del Camino de Santiago, ¿qué es más probable que sea español o que sea francés o que pertenezca a otras nacinalidades?

Las probabilidades son:

a) P (peregrino) = 0,3 · 0,01 + 0,6 · 0,001 + 0,1 · 0,0001 = 0,00361.

b) Sabiendo que el miembro elegido es peregrino, las probabilidades de que sea español, francés o de otras nacionalidades son:

P (Español / peregrino) = $\frac{0,3 \cdot 0,01}{0,00361} = 0,8310$

P (Francés / peregrino) = $\frac{0,6 \cdot 0,001}{0,00361} = 0,16628310$

P (Otras nacionalidades / peregrino) = $\frac{0,1 \cdot 0,0001}{0,00361} = 0,0028$

Observamos que es más probable que sea español.

9. El pasado invierno una ciudad disponía de una vacuna para proteger a la población frente al virus de la gripe. Si una persona se ha vacunado, la probabilidad de que se infecte con el virus es de 0,1; sin la vacuna, dicha probabilidad es de 0,3. El 40% de la población se vacunó.

a) Halla la probabilidad de que una persona elegida al azar se infecte con el virus.

b) Si la persona elegida al azar se ha infectado con el virus ¿cuál es la probabilidad de que esté vacunada?

c) Si la persona elegida al azar no esta infectada con el virus, ¿cuál es la probabilidad de que no esté vacunada?

9. Las probabilidades pedidas son:

a) P (se infecte con el virus) = P (vacunado) · P (infecte con virus/ vacunado) + P (no vacunado) · P (infecte con virus/ no vacunado) = 0,40 · 0,1 + 0,60 · 0,3 = 0,22

b) P (vacunada / infectada con el virus) = $\frac{0,40 \cdot 0,1}{0,22} = 0,1818$

c) P (no vacunada / no infectada con el virus) = $\frac{0,60 \cdot 0,7}{0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,7} = 0,5383$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 335

El albinismo

El albinismo es un trastorno genético y hereditario, que produce una alteración en la producción y metabolismo de la melanina, lo que da lugar a una ausencia total o parcial de este pigmento que es el responsable del color de la piel, cabello y ojos.

El albinismo aparece en los seres humanos y en otros seres vivos tanto animales como vegetales. Uno de los animales albinos más conocido es el gorila "Copito de Nieve" que fue durante muchos años la estrella del zoo de Barcelona y murió en 2003 habiendo vivido unos 40 años. Hoy en día se ha visto que varios de sus bisnietos no son albinos.

El albinismo en los seres humanos es un carácter mendeliano simple. Designamos con a el gen albino y con n el no albino. El gen n es dominante, de modo que padres con genes n, no pueden tener un hijo albino, a menos que ambos sean (na).

Supongamos que en una gran población la proporción de genes no albinos, n, es p y la proporción de genes albinos, a, es q = 1 – p.

1. Suponiendo que el albinismo no es un factor en la selección matrimonial ni en el número de hijos, estudia qué proporción de individuos de la próxima generación serán albinos.

2. Si los albinos se casaran sólo con albinos, ¿qué probabilidad de individuos de la próxima generación serían albinos?

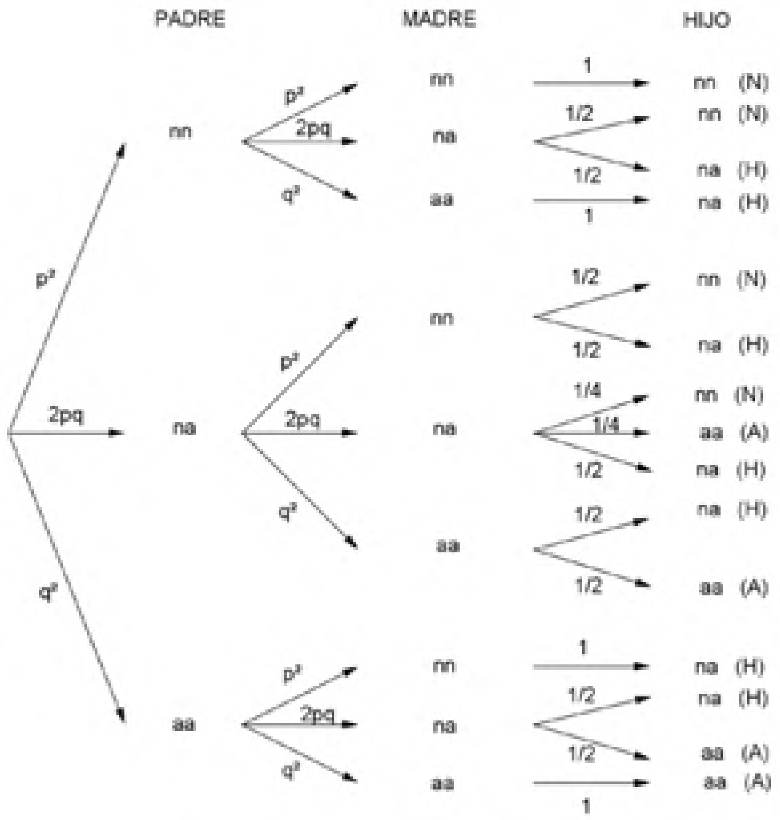
1.. Las personas podemos ser:

(n, n), que llamaremos "Normal" (N)
(n, a), que llamaremos "Híbrido" (H)
(a, a), que llamaremos "Albino" (A)

Del enunciado podemos interpretar que:

- La probabilidad de que una persona de la muestra sea (n, n) es p^2.
- La probabilidad de que una persona de la muestra sea (n, a) es 2pq.
- La probabilidad de que una persona de la muestra sea (a, a) es q^2.

Recogiendo en un diagrama de árbol toda la información, tenemos:



La probabilidad de que un individuo de la próxima generación sea Normal (N), Híbrido (H) o Albino (A), la obtenemos sumando los productos de las probabilidades de los caminos que terminan en N, H o A, respectivamente.

Por ejemplo, la probabilidad de que una persona sea albina es:

$$P\ (\text{Albina}) = 2pq \cdot 2pq \cdot \frac{1}{4} + 2pq \cdot q^2 \cdot \frac{1}{2} + q^2 \cdot 2pq \cdot \frac{1}{2} + q^2q^2 \cdot 1 = q^2 \cdot (p+q)^2 = q^2$$

que es la probabilidad pedida en el apartado 1º.

Si hacemos una tabla de contingencia y calculamos la probabilidad de que una persona de la próxima generación sea N, H o A, observaremos que la probabilidad es la misma que en la generación de la muestra.

	NORMAL	**HÍBRIDO**	**ALBINO**
nn,nn	p^4	0	0
nn,na	$2 \cdot 2p^3q\frac{1}{2}$	$2 \cdot 2p^3q\frac{1}{2}$	0
nn,aa	0	$2p^2q^2 \cdot 1$	0
na,na	$4p^2q^2\frac{1}{4}$	$4p^2q^2\frac{1}{2}$	$4p^2q^2\frac{1}{4}$ (*)
na,aa	0	$2 \cdot 2pq^3\frac{1}{2}$	$2 \cdot 2pq^3\frac{1}{2}$
aa,aa	0	0	$q^4 \cdot 1$

	p^2	$2pq$	q^2

En cada casilla de la tabla hemos puesto la probabilidad del suceso definido por la fila y la columna en la que se encuentra. Por ejemplo, en la casilla indicada con (*) tenemos la probabilidad de que los padres sean ambos na y el hijo Albino.

Debajo de cada columna hemos puesto la suma de los números de la misma, que es la probabilidad de que un individuo en la próxima generación sea Normal, Híbrido o Albino, respectivamente.

2. Suponemos ahora que los albinos se casan sólo con albinos.

Los matrimonios ahora pueden ser nn con nn, nn con na, na con na y aa con aa, y los albinos sólo pueden nacer de matrimonios como los dos últimos.

Un albino (aa) se casa con un (aa) con probabilidad 1. Como los (nn) y (na) sólo se casan entre ellos, veamos la probabilidad de cada uno de los matrimonios. Para ello determinemos la proporción de persona (n, a) y (n, n) entre la población de no albinos.

Si H es el número de personas de la muestra, tenemos:

p^2H es el número de personas de la muestra que son (n, n)

$2pqH$ es el número de personas de la muestra que son (n, a).

La suma $p^2H + 2pqH$ es el número de personas no albinas, luego:

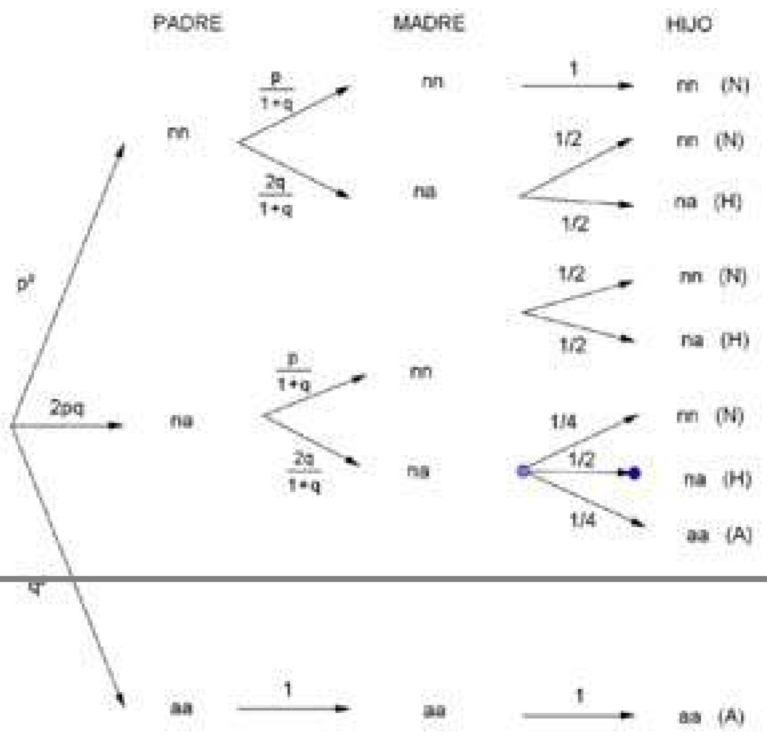
- La proporción de personas (n, n) entre la población no albina es:

$$\frac{p^2H}{p^2H + 2pqH} = \frac{p}{p + 2q} = \frac{p}{1 + q}$$

- Y la proporción de personas (n, a) entre la población no albina es:

$$\frac{2pqH}{p^2H + 2pqH} = \frac{2q}{1 + q}$$

Recogiendo la información en un diagrama de árbol, como anteriormente, tenemos:



Al igual que antes, la probabilidad de que un individuo de la próxima generación sea albino, la obtenemos sumando los productos de las probabilidades de los caminos que terminan en A.

$$P\ (Albino) = 2pq \cdot \frac{2q}{1+q} \cdot \frac{1}{4} + q^2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2q^2}{1+q}$$

Podemos hacer también una tabla de contingencia que nos proporcione las probabilidades de que un elemento de la próxima generación sea N, H o A.

	NORMAL	**HÍBRIDO**	**ALBINO**
nn,nn	$\frac{p^3}{1+q}$	0	0
nn,na	$2 \cdot \frac{2p^2q}{1+q} \cdot \frac{1}{2}$	$2 \cdot \frac{2p^2q}{1+q} \cdot \frac{1}{2}$	0
na,na	$\frac{4pq^2}{1+q} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{4pq^2}{1+q} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{4pq^2}{1+q} \cdot \frac{1}{4}$
aa,aa	0	0	q^2

Sumando cada una de las columnas, obtenemos:

$$P\ (Normal) = \frac{p^3 + 2p^2q + pq^2}{1+q} = \frac{p(p+q)^2}{1+q} = \frac{p}{1+q}$$

$$P\ (Híbrido) = \frac{2p^2q + 2pq^2}{1+q} = \frac{2pq(p+q)}{1+q} = \frac{2p}{1+q}$$

$$P\ (Albino) = \frac{pq^2}{1+q} + q^2 = \frac{q^2(p+q+1)}{1+q} = \frac{2q^2}{1+q}$$