UNIDAD 2: Determinantes

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 38

1. Calcula las matrices inversas de las matrices siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Empleando el método de Gauss-Jordan, obtenemos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong$

$\cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de B es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calcula el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Aplicando las operaciones elementales por filas, obtenemos:

a) $\text{Rango de } A = \text{Rango de} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \text{Rango de} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2.$

b) $\text{Rango de } B = \text{Rango de} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango de} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} =$

$$= Rango\ de \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = 3.$$

3. Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicando las operaciones elementales por filas, obtenemos:

$$Rango\ de\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Rango\ de \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 2a & -a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si a = 0, el rango de A es 2.

Si a ≠ 0, el rango de A es 3.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 53

1. Parejas. Tres amigos, Juan, José y Jesús van de compras con sus parejas María, Merche y Marina, aunque no necesariamente en ese orden. Cada uno de los seis compra uno o varios objetos y paga por cada objeto tantos euros como objetos compra. José compre 23 objetos más que María y Juan 11 más que Merche. Cada hombre gastó 63 euros más que su pareja. ¿Cuál es la pareja de cada uno?

Hacemos una tabla con la información del problema:

	Juan	José	Jesús	María	Merche	Marina
Objetos compra	11 + y	23 + x		x	y	z
Euros paga	$(11 + y)^2$	$(23 + x)^2$		x^2	y^2	z^2

Una solución puede ser:

Juan con María: $x^2 = (11 + y)^2 - 63$

José con Marina: $z^2 = (23 + x)^2 - 63$

Entonces: x = 9; y = 1; z = 31.

Juan compra 12 y su esposa María 9.

José compra 32 y su esposa Marina 31.

Jesús compre 8 y su esposa Merche 1.

2. Pirámides de bolas. Un mago apila bolas, todas iguales, para formar dos pirámides tetraédricas. De pronto se da cuenta de que juntando las bolas de ambas pirámides, puede formar una sola pirámide tetraédrica mayor. ¿Cuál es el mínimo número de bolas de las que tendrá que disponer el mago inicialmente?

Al construir pirámides tetraédricas de bolas aparecen los números tetraédricos:

1, 4, 10, 20 35, 56, 84…

que forman una progresión aritmética de tercer orden, de término general $T_n = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$.

● Si las dos pirámides son iguales, el mínimo número es 20 bolas, con lo que formaría una pirámide tetraédrica de arista 4 a partir de dos tetraédricas de arista 3.

● Si las dos pirámides iniciales no son iguales, el mínimo número es 680 bolas, número obtenido al sumar las bolas de dos pirámides tetraédricas de aristas 8 y 14, y de bolas 120 y 560.

La nueva pirámide tetraédrica formada por 680 bolas tiene de arista 15, ya que se cumple:

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} = 680 \quad \Rightarrow \quad n = 15.$$

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 55

1. Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) A + 3 · B **b) A · B** **c) B³** **d) A⁻¹**

En la calculadora definimos las matrices A y B. Para ello activamos el menú *Matrices* y en la opción **EDIT** introducimos las dimensiones de la matriz, que en nuestro caso serían 3 x 3, tecleando: **3 NTER 3 ENTER**.

Introducimos los elementos de la matriz de forma ordenada. Para la matriz A del enunciado, la secuencia de teclas sería: **1 ENTER 2 ENTER -1 ENTER 3 ENTER 8 ENTER 2 ENTER 4 ENTER 9 ENTER -1 ENTER.**

Para introducir la matriz B tecleamos -**1 ENTER 0 ENTER 3 ENTER 0 ENTER -2 ENTER 1 ENTER 3 ENTER 2 ENTER 0 ENTER.**

Realizamos las operaciones indicadas tecleando éstas en la pantalla principal con ayuda del menú *Matrices*, donde están las matrices A y B. Obtenemos los resultados que pueden verse en los gráficos.

a)

[A] + 3 * [B]

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \\ 13 & 15 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

[A] * [B]

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & 5 \\ 3 & -12 & 17 \\ -7 & -20 & 21 \end{bmatrix}$$

c)

[B]^3

$$\begin{bmatrix} -19 & -18 & 36 \\ -9 & -16 & 15 \\ 36 & 30 & -13 \end{bmatrix}$$

d)

[A]^-1

$$\begin{bmatrix} -26 & -7 & 12 \\ 11 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Resuelve la ecuación matricial A · X + B = C, siendo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$**,** $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Utilizando las propiedades de las operaciones con matrices obtenemos:

$$A \cdot X + B = C \iff A \cdot X = C - B \iff X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

Introduciendo en la calculadora las matrices A, B y C y realizando las operaciones indicadas, obtenemos la matriz que aparece en el gráfico.

[A]^-1 * ([C] – [B])

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Resuelve los sistemas que siguen, diagonalizando las matrices ampliadas:

a) $\begin{cases} 3x + 3y + z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 4 \\ 8x + 8y - 7z = 8 \end{cases}$

Las matrices ampliadas de los sistemas son:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -2 & 4\\ 8 & 8 & -7 & 8\end{pmatrix}$$

Introducimos en la calculadora las matrices anteriores.

La función **rref (**, que podemos encontrar en el menú *Matrices* y en la opción **MATH**, nos devuelve la forma diagonal de una matriz dada.

Para los sistemas del enunciado a), b) y c), obtenemos las matrices [A], [B] y [C] que aparecen en los gráficos.

a)

escre ([A]) ► Frac

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1/5\\ 0 & 1 & 0 & 1/5\\ 0 & 0 & 1 & -1/5\end{bmatrix}$$

El sistema tiene por solución x = 1/5, y = 1/5, z = - 1/5 y es compatible determinado.

b)

escre ([B])

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

El sistema del apartado tiene por soluciones x = 1 – z; y = 0 y es compatible indeterminado.

c)

escre ([C]) ► Frac

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/4 & 0\\ 0 & 1 & -5/8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

El sistema carece de soluciones y es incompatible.

En la resolución de los sistemas de los apartados a) y c) hemos activado la opción ► Frac que se encuentra en el menú *Matemáticas* (tecla MATH), para obtener los elementos de las matrices expresados en forma de fracción.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 58

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$

Los valores de los determinantes son:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$ c) $\begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = -1$ e) $\begin{vmatrix} m & -n \\ n & m \end{vmatrix} = m^2 + n^2$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{vmatrix} = 0$

2. Calcula los determinantes de las matrices que siguen, utilizando la regla de Sarrus:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Los valores de los determinantes son:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^3 - 1$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -1$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -0 \end{vmatrix} = -1$

Desarrollamos los determinantes, resolvemos las ecuaciones resultantes y obtenemos:

a) $\begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; x^4 - 34x^2 + 225 = 0$.

Las soluciones son x = - 5, x = - 3, x = 3 y x = 5.

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; x^3 - x = 0.$

Las soluciones son x = - 1, x = 0 y x = 1.

c) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow 3 - x = -1.$

La solución es x = 4.

4. Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, justifica que son nulos los determinantes que siguen, sin desarrollarlos.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -8 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -9 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

Las razones en cada caso son:

a) Las filas primera y tercera son proporcionales: $F_3 = 3 \cdot F_1$.

b) Las columnas primera y tercera coinciden: $C_1 = C_3$.

c) La columna tercera es combinación lineal de la primera y la segunda; $C_3 = 2 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2$.

d) La fila tercera es combinación lineal de la primera y la segunda; $F_3 = 3 \cdot F_1 + F_2$.

5. Prueba, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son múltiplos de 2, 3, 7 y 11, respectivamente.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

a) Sumamos los elementos de las tres filas y el resultado lo colocamos en la primera ($F_1 + F_2 + F_2 \rightarrow F_1$), sacamos factor común 2 de la primera fila y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \dot{2}$$

b) Sumamos los elementos de las tres filas y el resultado lo colocamos en la primera ($F_1 + F_2 + F_2 \rightarrow F_1$), sacamos factor común 3 de la primera fila y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{3}$$

c) Realizamos la siguiente operación con las columnas ($C_3 + C_2 - 2 \cdot C_1 \rightarrow C_3$), sacamos factor común 7 de la tercera columna y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{7}$$

d) Puede observarse que los números que forman cada una de las filas, 121, 198 y 506 son múltiplos de 11. Operando en cada fila, multiplicamos la primera columna por 100, la segunda por 10 y sumamos ambos resultados a la tercera columna, quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \cdot 11 \\ 1 & 9 & 11 \cdot 18 \\ 5 & 0 & 11 \cdot 46 \end{vmatrix} \; 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix} = \dot{11}$$

6. Demuestra las siguientes igualdades aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicamos y dividimos la primera fila por a, la segunda fila por b y la tercera por c, dejando la expresión $\frac{1}{abc}$ fuera del determinante. Después sacamos factor común de la primera columna abc y el determinante resultante es nulo al tener dos columnas iguales.

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \cdot \begin{vmatrix} abc & a^2 & 1 \\ abc & b^2 & 1 \\ abc & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 1 & b^2 & 1 \\ 1 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Sean F_1, F_2 y F_3 las tres filas de una matriz cuadrada A de orden 3 tal que su determinante es det (F_1, F_2, F_3) = 5. Calcula:

a) det (2A) **b) det (A^3)** **c) det ($3F_1 - F_3$, $2F_3$, F_2)**

a) Teniendo en cuenta la propiedad:
Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

y que el orden es 3:

$$\det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot 5 = 40.$$

b) Teniendo en cuenta la propiedad:
El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices.

Obtenemos:

$$\det(A^3) = \det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

c) Teniendo en cuenta las propiedades:
Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

Si en una matriz cuadrada se permutan dos líneas, su determinante cambia de signo.

$$\det (3F_1 - F_3, 2F_3, F_2) = 2 \cdot \det (3F_1 - F_3, F_3, F_2) = - 2 \cdot \det (3F_1 - F_3, F_2, F_3)$$

Haciendo uso de la propiedad:
Si a los elementos de una línea de una matriz cuadrada se les suma una combinación lineal de otras líneas, su determinante no varía.

$$\det (3F_1 - F_3, 2F_3, F_2) = - 2 \cdot \det (3F_1 - F_3, F_2, F_3) = - 2 \cdot \det (3F_1, F_2, F_3) = - 6 \cdot \det (F_1, F_2, F_3) = - 30$$

8. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

b) La matriz A verifica $AA^t = I$. Halla det (A).

a) Utilizando la propiedad det (A · B) = det (A) · det (B), se obtiene: $\det (A^2) = [\det (A)]^2$. Por tanto:

$$\left[\det(A)\right]^2 - \det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(A)\cdot\left[\det(A) - 1\right] = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \det(A) = 0 \\ \quad o \\ \det(A) = 1 \end{cases}$$

b) Teniendo en cuenta las propiedades $\det (A) = \det (A^t)$ y det (A · B) = det (A) · det (B), se obtiene:

$$\det\left(A \cdot A^t\right) = \det\left(I\right) \quad \Rightarrow \quad \det(A)^2 = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \det(A) = -1 \\ \quad 0 \\ \det(A) = 1 \end{cases}$$

9. Sea A una matriz cuyas filas son F_1, F_2 y F_3, y su determinante vale 4. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz B cuyas filas son F_3, $F_1 - 2F_2$, $- F_1$?

La solución queda:

$$\begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 - 2F_2 \\ -F_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ -2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2\,|A| = -8.$$

10. Comprueba que el determinante que sigue es divisible por 5, sin calcularlo, a partir de las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Sustituimos los elementos de la fila tercera por la suma de los elementos de las filas tercera y segunda, y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Observamos que el determinante es divisible por 5.

Existen otras formas de combinar líneas de este determinante para obtener número múltiplos de 5, por ejemplo, la suma de los elementos de la columna tercera con el doble de los elementos de la columna segunda.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 59

11. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla los menores complementarios α_{12}, α_{22}, α_{23} y α_{31}, si existen.

b) Calcula, si existen, los adjuntos A_{12}, A_{22}, A_{23} y A_{31}, si existen.

c) Halla las matrices adjuntas de las matrices dadas.

Las respuestas son:

a) Los menores complementarios pedidos son:
En la matriz A: $\alpha_{12} = 0$; $\alpha_{22} = 2$; α_{23} y α_{31} no existen.

En la matriz B: $\alpha_{12} = 4$; $\alpha_{22} = - 12$; $\alpha_{23} = - 8$ y $\alpha_{31} = - 16$.

En la matriz C: $\alpha_{12} = - 6$; $\alpha_{22} = - 3$; $\alpha_{23} = 6$ y $\alpha_{31} = 1$.

b) Los adjuntos pedidos son:
En la matriz A: $A_{12} = 0$; $A_{22} = 2$; A_{23} y A_{31} no existen.

En la matriz B: $B_{12} = - 4$; $B_{22} = - 12$; $B_{23} = 8$ y $B_{31} = - 16$.

En la matriz C: $C_{12} = 6$; $C_{22} = - 3$; $C_{23} = - 6$ y $C_{31} = 1$.

c) Las matrices adjuntas son:

$$Adj\ (A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -20 \\ 6 & -12 & 8 \\ -16 & -2 & -10 \end{pmatrix} y\ C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & -10 \\ 0 & -3 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Halla las matrices adjuntas de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Las matrices adjuntas son:

a) $Adj\ (A) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $Adj\ (B) = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 19 \\ 20 & -13 & -5 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ c) $Adj\ (C) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Las matrices inversas de las matrices del enunciado son:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+a & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

■ **14. Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$**, averigua los valores del parámetro a para los cuales la matriz no tiene inversa. Calcula, si es posible, la inversa de A cuando a = 2.**

El determinante de la matriz A es det (A) = $-a^2 + 4a - 3 = -(a-1)(a-3)$.

La matriz no tiene inversa para a = 1 o a = 3.

La matriz para a = 2 es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

15. Determina, según los valores de a, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

Se obtiene que:

- Si a = 0, el rango de A es 2.

- Si a ≠ 0, el rango de A es 3.

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**, halla el rango de la matriz $A^2 - A^t$ según los distintos valores de a.**

La matriz B^2 es $A^2 = \begin{pmatrix} a+2 & 2a & 1 \\ 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz M = A^2 - A^t es $M = \begin{pmatrix} a+1 & 2a-1 & 0 \\ 2-a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

El determinante de M es det (M) = (a – 2) (2a – 1) y los valores del rango son:

- Si a ≠ 2 y a ≠ 1/2, el rango de M es 3.
- Si a = 2, el rango de B es 2.
- Si a = 1/2, el rango de B es 2.

17. Determina para qué valores de a el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **es 3.**

El determinante de la matriz A es a – 3, y se anula para a = 3. Por tanto, para cualquier valor de a distinto de 3 el rango de la matriz A es 3.

18. Usamos el código numérico:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
14	5	18	9	23	1	12	25	6	16	13	22	2	24

Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_
17	7	21	15	27	8	10	20	3	26	19	4	11	28

a) Codifica el mensaje MANDA_DINERO, utilizando como matriz de cifrado $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$**.**

b) Mi amiga Marisa me dice que su nombre escrito en clave con una matriz A, 2 x 2, es:

16 14 33 6 22 14

¿Podrías hallar A?

a) El mensaje anterior, según el código numérico se transforma en:

2 14 24 9 14 28 9 6 24 23 27 7

Para enviar de forma cifrada el mensaje anterior se toma la secuencia 2 14 24 9 14 28 9 6 24 23 27 7 y se multiplica, tomando números de dos en dos, por la matriz de cifrado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 76 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 117 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 182 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 57 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 187 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 116 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hay que tener en cuenta que si los números que resultan de multiplicar por la matriz de cifrado son mayores de 28, como por ejemplo en el primer caso que son 30 y 76, hay que restar 28 las veces que sean necesarias hasta obtener un número menor que 28. En nuestro caso:

$$30 - 28 = 2 \quad \text{y} \quad 76 - 28 - 28 = 20$$

El mensaje codificado será: 2 20 14 5 14 14 21 1 14 19 13 4, que se convierte en:

MUABAAPAFAXKY.

b) Teniendo en cuenta el código numérico inicial, la palabra Marisa se corresponde con la clave numérica:

M	A	R	I	S	A
2	14	27	6	8	14

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz 2x2 buscada. Se cumplirá:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 14b = 16 \\ 2c + 14d = 14 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 27a + 6b = 33 \\ 27c + 6d = 6 \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas se obtiene: a = 1, b = 1, c = 0 y d = 1.

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 60

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \textbf{ y } B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix},$$

resuelve la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$.

La resolución de la ecuación es:

$$A^3 \cdot X - 4B = O \quad \Rightarrow \quad A^3 \cdot X = 4B \quad \Rightarrow \quad X = \left(A^3\right)^{-1} \cdot 4B$$

Las matrices a calcular son:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \left(A^3\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ y\ 4B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de k para los cuales A no es invertible.
b) Para k = 0, calcula la matriz A^{-1}.

c) Para k = 0, resuelve la ecuación matricial A · X = B.

a) El determinante de la matriz A es det (A) = $k^2 - 4k + 3 = (k - 1)(k - 3)$. Para K = 1 y k = 3 la matriz A no es invertible.

b) Para k = 0 la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

c) La solución de la ecuación matricial es $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) Sea B una matriz cuadrada de tamaño 3 x 3 que verifica B2 = 16 I, siendo I la matriz unidad. Calcula el determinante de B.

b) Si A es una matriz cuadrada de tamaño 2 x 2 para la cual se cumple que A- 1 = At, ¿puede ser el determinante de A igual a 3?

Las respuestas a los distintos apartados son:

a) Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes:

El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices:

$$\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$$

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número:

$$\det(F_1, F_2, \ldots, k \cdot F_i, \ldots, F_n) = k \cdot \det(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_n)$$

A partir de $B^2 = 16\,I$ podemos escribir $\det(B^2) = \det(16\,I)$. Calculamos ambos determinantes:

$$\det(B^2) = \det(B \cdot B) = \det(B) \cdot \det(B) = (\det(B))^2$$

$$\det(16\,I) = \det\left(16 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16^3$$

Por tanto, $(\det(B))^2 = 16^3 \Rightarrow \det(B) = \sqrt{16^3} \Rightarrow \det(B) = 64.$

b) No puede ser $\det(A) = 3$ ya que se cumple:

$$A^{-1} = A^t \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A^t) \Rightarrow \frac{1}{\det(A)} = \det(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$**.**

a) ¿Para qué valores de a la matriz es inversible?

b) Estudia el rango según los valores de a.

c) Halla a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$ **.**

a) Una matriz A es inversible si su determinante es distinto de cero. Hallamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 \quad \Rightarrow -2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Por tanto, A es inversible si $a \neq 0$.

b) Estudio del rango:

- Si $a \neq 0$ el rango de la matriz A es 3, ya que el determinante de A es distinto de 0.

- Si $a = 0$ el rango de A es 1, ya que tiene dos columnas con todos sus elementos nulos.

c) Calculamos la matriz $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}-2a & 0 & 0\\ 2a & a^2 & -a\\ 0 & 0 & -2a\end{pmatrix}\qquad [Adj\,(A)]^t=\begin{pmatrix}-2a & 2a & 0\\ 0 & a^2 & 0\\ 0 & -a & -2a\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a}\end{pmatrix}$$

Expresamos la igualdad matricial $A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot A$ y obtenemos:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{4} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{a}{4}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{a}{4}\\ -\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2a}=\frac{1}{4}\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}a^2=4;\ a=-2\ y\ a=2\\ a=2\\ a=2\end{cases}\qquad\Rightarrow a=2$$

El valor de A buscado es a = 2. Para este valor se cumple:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad y\quad \frac{1}{4}\cdot A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

5. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, calcula la matriz X para que se cumpla la ecuación matricial A · X – 2 · I = O, siendo I y O las matrices unidad y nula, respectivamente.

Resolvemos la ecuación matricial:

$$AX-2I==O\ \Rightarrow\ AX=2I\ \Rightarrow\ X=A^{-1}\cdot 2I\ \Rightarrow\ X=2A^{-1}$$

Como $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ se tiene: $X=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

6. a) Determina para qué valores de a la siguiente matriz no tiene inversa:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 5-a & -2\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$$

b) Considerando la matriz A del apartado anterior con a = - 1, resuelve la ecuación matricial XA + B = CA, donde:

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\ \ y\ \ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) Una matriz cuadrada no tiene inversa si su determinante es cero:

$$\det(A) = 11a - a^2 = a \cdot (11 - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 11 \end{cases}$$

La matriz A no tiene inversa para a = 0 y a = 11.

b) Resolvemos la ecuación matricial:

$$XA + B = CA \Rightarrow XA = CA - B \Rightarrow X = (CA - B) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = C - B \cdot A^{-1}$$

Hallamos las matrices A^{-1} y BA^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \qquad B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{17}{6} \\ 3 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Determina la matriz X solución de la ecuación matricial A · X – I = A, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \textbf{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operamos en la ecuación matricial para despejar X:

$$AX - I = A \Rightarrow AX = A + I \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (A + I) \Rightarrow X = I + A^{-1}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ y finalmente:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 61

Matemáticas y criptografía

La criptografía o arte de escribir en clave, aparece y se desarrolla con la invención de la escritura. Las civilizaciones más antiguas ya hicieron uso de ella, aunque fueron los griegos y romanos los que la desarrollaron para comunicarse en secreto con fines belicistas.

A lo largo de los siglos, y en numerosas ocasiones, tanto los criptógrafos como sus oponentes, los descodificadores, han utilizado las matemáticas en sus respectivos trabajos. Entre las herramientas utilizadas podemos encontrar: el análisis por frecuencias, la aritmética modular, los números primos, etc.

Intenta descifrar los mensajes que siguen.

ÑDV · ODWHODWLFDV · VLUYHP · SDUD · WRGR · HP · ÑD · YLGD · BD · TXH · WH · HPVHQDP · D · UDCRPDU · D · UHVRÑYHU · SUREÑODV · SHUR · VREUH · WRGR · OH · KDP · GDGR · GLVFLSÑLPD · SDUD · OL · OLVOD · XPD · GLVFLSÑLPD · YXH · PR · HV · SDUD · PDGD · RSUHVLYD · VLPR · YXH · OH · IDFLÑLWD · VHU · ÑLEUH

EDUEDED · KHPGULFNV

α↑ · ↑7↓5β · ≠α · 4◊3α4◊371◊Δ · ↑β · >α · ≠α□◊≠β · α8 · 47 · 3◊2+7↑↑◊ · 3◊4↓7α8 · 9+α≠αΔ · α81β835◊5 · ↑◊Δ · ◊137■7≠◊≠αΔ · 5αΔ+α↑3◊Δ · ≠α · ↑◊ · +87≠◊≠ · Δ7α3α · ↑◊ · ↑↑◊■α · ≠α · ↑◊ · 3◊2+7↑↑◊ · ↑◊ · 37α8α · α↑ · 1β8Δα5□α · ≠α↑ · 1β↑α<7β · αΔ9α5β · 2+α · 3α · Δ75■◊8 · 9◊5◊ · 95α9◊5◊5 · α↑ · α●◊4α8

◊8◊

Para ayudarte, podemos decirte que uno de los mensajes está codificado con el *cifrado César*, y puedes descifrarlos mediante el análisis por frecuencias.

Investiga sobre criptografía.

El primer mensaje está puesto en clave con el ***cifrado César*** siguiente:

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Letra cifrada	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O

Letra	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z
Letra cifrada	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z	A	B	C

y dice:

LAS MATEMÁTICAS SIRVEN PARA TODO EN LA VIDA, YA QUE TE ENSEÑAN A RAZONAR, A RESOLVER PROBLEMAS. PERO SOBRE TODO ME HAN DADO DISCIPLINA PARA MI MISMA. UNA DISCIPLINA QUE NO ES PARA NADA OPRESIVA QUE ME FACILITA SER LIBRE.

BARBARA HENDRICKS

El segundo mensaje dice:

EL LIBRO DE MATEMÁTICAS LO HE DEJADO EN MI TAQUILLA. TAMBIÉN PUEDES ENCONTRAR LAS ACTIVIDADES RESUELTAS DE LA UNIDAD SIETE. LA LLAVE DE LA TAQUILLA LA TIENE EL CONSERJE DEL COLEGIO. ESPERO QUE TE SIRVAN PARA PREPARAR EL EXAMEN.

ANA

El cifrado puede verse en las tablas:

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Símbolo	◊	↓	1	≠	α		<	>	7	□		↑	4

Letra	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z
Símbolo	8		β	9	2	5	Δ	3	+	■	●		

La descodificación de los mensajes puede hacerse mediante el análisis de frecuencias.

El análisis por frecuencias, para descifrar un criptograma, se basa en estudiar la frecuencia con la que aparecen los distintos símbolos en un lenguaje determinado y luego estudiar la frecuencia con la que aparecen en los criptogramas, y de esta manera establecer una relación entre ellos.

La idea fundamental es que no todas las letras aparecen con la misma frecuencia, sino que algunas aparecen más a menudo que otras. Contando los signos del texto cifrado y ordenándolos de mayor a menor frecuencia podemos establecer conjeturas acerca de qué letra corresponde a cada signo. El análisis se completa con la búsqueda de palabras frecuentes como artículos y preposiciones. El resto es cuestión de intuición.

En nuestro idioma las letras E (≈ 17%) y A (≈ 12%) destacan sobre todas las demás y pueden identificarse con facilidad, aunque en un texto corto la frecuencia de ambas se puede invertir. Todas las vocales ocupan un 47% del texto.

Las consonantes más frecuentes son L, S, N y D (≈ 30%) y las seis letras menos frecuentes son V, Ñ, J, Z y K (con poco más del 1%).