UNIDAD 3: Sistemas de ecuaciones lineales

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 62

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ 2x - 3y - 7z = -3 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases}$

Utilizando el método de Gauss, obtenemos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ \quad 5y = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ 2x - 3y - 7z = -3 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ \quad 17y + 23z = 11 \\ \quad y - 8z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ \quad 17y + 23z = 11 \\ \quad 159z = -159 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{142}{57} \\ y = \dfrac{98}{57} \\ z = \dfrac{23}{57} \end{cases}$

2. Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería, por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado, en total, 600 euros y han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 euros. Si han vendido un total de 260 participaciones, calcula el número de participaciones que han vendido de cada importe.

Sean x, y, z el número de participaciones de 1, 2 y 5 euros, respectivamente. Las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema que sigue. En la primera ecuación se describe el número total de participaciones, en la segunda el importe total y en la tercera la relación entre participaciones de 1 euro y de 5 euros.

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado, es decir, tiene una solución única ya que el determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Aplicando el método de Gauss, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ \quad -y - 4z = -340 \\ \quad y + 3z = 260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ \quad y + 4z = 340 \\ \quad -z = -80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 160 \\ y = 20 \\ z = 80 \end{cases}$$

Se han vendido 160 participaciones de 1 euros, 20 participaciones de 2 euros y 80 participaciones de 5 euros.

Puede comprobarse, con facilidad, que la solución obtenida es la correcta:

$$\begin{cases} 160 + 20 + 80 = 260 \\ 160 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 80 = 600 \\ 160 \qquad - 2 \cdot 80 = 0 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 79

1. Pesada difícil. Cuatro amigos, Arturo, Berta, Carlos y Diana, encuentran una antigua báscula que sólo pesa objetos entre 50 y 100 kg. Estos amigos, individualmente, pesan menos de 50 kilos y tres juntos, más de 100 kg, por lo que deciden pesarse de dos en dos de la siguiente manera: Arturo y Berta, 69 kg; Berta y Carlos, 79 kg; Carlos y Diana, 74 kg; Diana y Arturo, 64 kg. Con estos datos, ¿se puede determinar el peso de cada uno? Si no fuera posible determinar los pesos individualmente, ¿qué parejas deben pesarse para encontrar la solución?

La solución queda:

$$\begin{cases} Arturo + Berta = 69 \\ Berta + Carlos = 79 \\ Carlos + Diana = 74 \\ Diana + Arturo = 64 \end{cases}$$

Restando la primera igualdad a la segunda obtenemos: Arturo – Carlos = - 10. Sumando a ésta la tercera obtenemos: Arturo + Diana = 64.

Esta igualdad es la misma que tenemos en cuarto lugar. Luego no es posible determinar el peso de cada uno ya que nos queda un sistema indeterminado con más incógnitas que ecuaciones.

El sistema tiene una única solución si reemplazamos la tercera igualdad, sustituyéndola por la expresión: Arturo + Carlos = 74 kg; con lo cual obtenemos que: Arturo pesa 32 kg; Berta pesa 37 kg; Carlos pesa 42 kg y Diana pesa 32 kg.

2. Curiosa elección. En una clase hacen la elección de delegados de una forma muy original. Se piden tres alumnos voluntarios, que resultan ser Ana, Luis y Clara. Se les venda los ojos a cada de ellos y se les coloca en la cabeza una cinta, como las que llevan algunos tenistas. Estas tres cintas se toman de una bolsa que contiene tres cintas rojas y dos amarillas. Se les retira la venda de los ojos y de esta forma cada uno puede ver las cintas de sus compañeros, pero no la suya propia. Será elegido quien acierte el color de la cinta que lleva. Primero se pregunta a Ana y responde que no puede saberlo; lo mismo sucede con Luis. Por último, Clara dice que su cinta es roja, por lo que resulta ser elegida delegada. ¿Cómo lo supo?

Número de situación	Ana	Luis	Clara
(1)	R	R	R

En la tabla podemos ver todas las situaciones que se pueden plantear.

(2)	R	R	A
(3)	R	A	R
(4)	A	R	R
(5)	R	A	A
(6)	A	R	A
(7)	A	A	R

En todos los casos lleva cinta roja excepto en (2), (5) y (6).

El caso (2) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera sabido que su cinta era roja, ya que si hubiera sido amarilla Ana hubiera sabido el color de la suya.

El caso (5) no es posible, pues en esta situación Ana hubiera dicho que su cinta era roja.

El caso (6) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera dicho que su cinta era roja. Por tanto, en todos los demás casos la de Clara es roja.

3. Suma de cubos. ¿Cuánto suman los cubos de los n primeros números naturales?

Queda así:

$1^3 = 1 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$
…

La sucesión 1, 3, 6, 10, 15… es una progresión aritmética de segundo orden, su término general es $\frac{n^2+n}{2}$, por tanto:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

Vamos a probar la relación anterior por inducción.

Observamos que es cierta la relación para n = 1:

$$1^3 = 1 = \left(\frac{1^2+1}{2}\right)^2$$

Suponemos que es cierto para n = k, es decir:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k^2+k}{2}\right)^2$$

y veamos si es cierto para n = k + 1:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3\right) + (k+1)^3 = \left(\frac{k^2+k}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

Operando en la última expresión, obtenemos:

$$\left(\frac{k^2+k}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2\cdot(k+1)^2+4\,(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2\,[k^2+4\,(k+1)]}{4}=$$

$$=\frac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}\right]^2=\left[\frac{(k+1)\cdot[(k+1)+1]}{2}\right]^2=\left[\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}\right]^2$$

Por tanto, se cumple: $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}\right)^2$

Esto último completa la demostración.

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}=680 \quad\Rightarrow\quad n=15.$$

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 81

1. Discute, según los valores de a, y resolver cuando tenga más de una solución el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+ay+z=1 \\ 2x+y+az=4 \\ ax+ay=a-z \end{cases}$$

En la siguiente imagen podemos ver la solución de esta actividad.

Al igualar a cero el determinante de la matriz de los coeficientes A obtenemos los valores de a = - 1 y a = 1.

En la imagen vemos que para a = -1 los rangos son distintos por lo que el sistema es incompatible. Para a = 1 los rangos son iguales a 2 por lo que el sistema es compatible indeterminado. Para el resto de valores del parámetro a los rangos son iguales a 3 por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolvemos el sistema para a = 1 que es compatible indeterminado y para el caso compatible determinado y obtenemos las soluciones que vemos en la imagen.

Introducimos la matriz de los coeficientes A y
la matriz ampliada B :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 4 \\ a & a & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 4 \\ a & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

Anulamos el determinante de la matriz A :

resolver$(|A|=0) \rightarrow \{\{a=-1\},\{a=1\}\}$

Fijamos el valor del parámetro y hallamos
los rangos de las matrices A y B :

$a:=-1 \rightarrow -1$

rango$(A) \rightarrow 2$

rango$(B) \rightarrow 3$

$a:=1 \rightarrow 1$

rango$(A) \rightarrow 2$

rango$(B) \rightarrow 2$

Resolvemos el sistema para a = 1 :

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=3, y=-z-2, z=z\}\}$$

Resolvemos el sistema para a ≠ −1 :

$a:=a \rightarrow a$

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} x+a\cdot y+z=1 \\ 2x+y+a\cdot z=4 \\ a\cdot x+a\cdot y+z=a \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\{a=1, x=3, y=-z-2, z=z\}, \left\{a=a, x=1, y=\frac{-2}{a^2-1}, z=\frac{2\cdot a}{a^2-1}\right\}\right\}$$

2. Discute según los valores de b y resolver, en los casos en que sea posible, el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar la solución para la cual z = 2.

En la siguiente imagen podemos ver la resolución de esta actividad.

Como vemos el sistema es incompatible para los valores que anulan el determinante de la matriz principal A.

Resolvemos para el resto de valores y obtenemos la solución para z = 2.

Introducimos la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada B :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & b & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ b & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ b & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Anulamos el determinante de la matriz A :

resolver$(|A|=0) \rightarrow \{\{b=0\},\{b=1\}\}$

Fijamos el valor del parámetro y hallamos el rango de las matrices A y B :

$b:=1 \rightarrow 1$

rango$(A) \rightarrow 2$

rango$(B) \rightarrow 3$

$b:=0 \rightarrow 0$

rango$(A) \rightarrow 2$

rango$(B) \rightarrow 3$

Resolvemos el sistema para $b \neq 1$ y $b \neq 0$ y tomando $z = 2$:

$b:=b \rightarrow b$

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} x+b\cdot y+2z=b \\ x+y+z=-1 \\ b\cdot x+y-z=1 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\left\{b=\frac{-2}{z+2}, x=\frac{-2\cdot z^2-6\cdot z-4}{z+4}, y=\frac{z^2+z}{z+4}, z=z\right\}, \left\{b=-\frac{1}{2}, x=-4, y=1, z=2\right\}\right\}$$

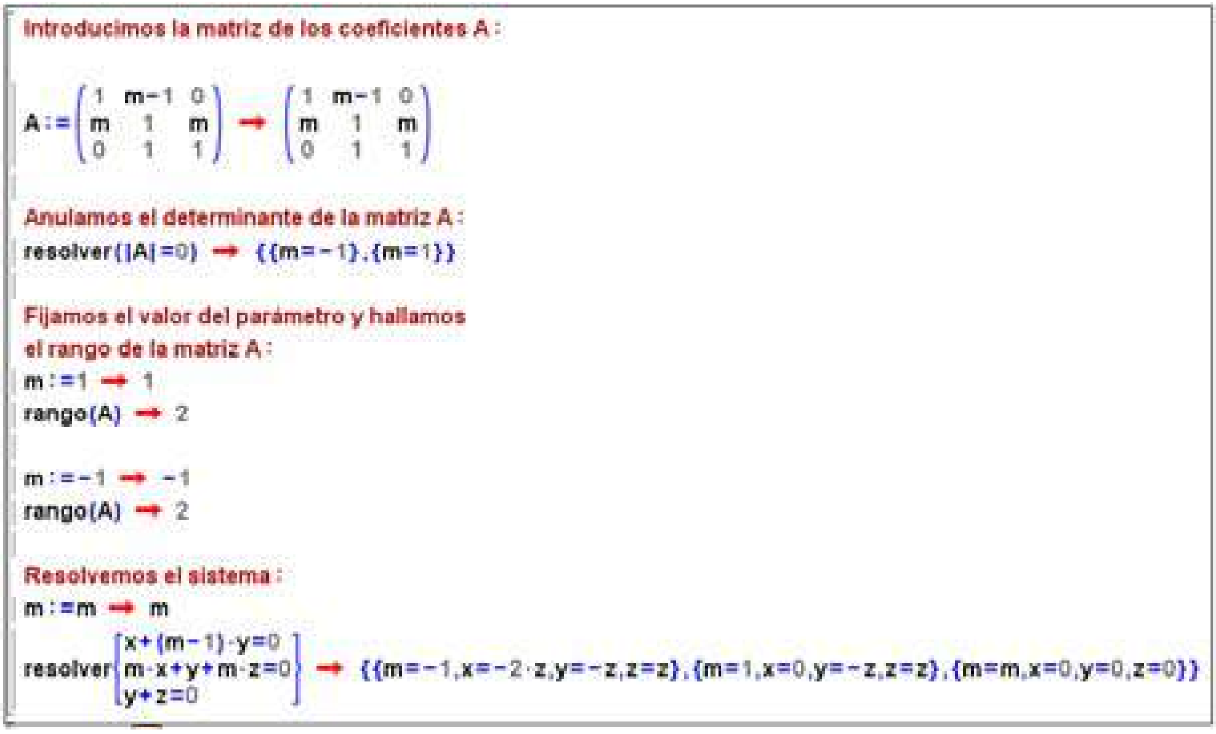
3. Discute, según los valores de m, y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+(m-1)y=0 \\ y+m\,z+mx=0 \\ y=-z \end{cases}$$

En la siguiente imagen podemos ver las soluciones de esta actividad.

Resolvemos la ecuación que se obtiene al igualar a cero el determinante de la matriz principal A y obtenemos los valores de m = 1 y m = -1. Para estos valores de m el rango de A es menor que el número de incógnitas por lo que el sistema es compatible indeterminado. Para el resto de valores de m el rango de A es igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado.

Resolvemos el sistema para m = -1 y para m = 1 y para el resto de valores de m obtenemos las soluciones que vemos en la imagen.



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 84

1. Expresa los sistemas siguientes de todas las formas posibles, poniendo de manifiesto, en cada caso, las matrices de los coeficientes y la ampliada:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

En cada uno de los apartados queda:

a) Expresión matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$

Expresión vectorial: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$

Las matrices de los coeficientes y la ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\ y\ A^{*}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

b) Expresión estándar: $\begin{cases}x-2y=2\\ 2x+y=-1\\ x+3y=3\end{cases}$

Expresión vectorial: $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Las matrices de los coeficientes y la ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\ y\ A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

c) Expresión estándar: $\begin{cases}x+3y-z=-4\\ 2x-y+2z=3\\ x\qquad -z=1\end{cases}$.

Expresión matricial: $\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$.

Las matrices de los coeficientes y la ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\ y\ A^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -4\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

2. Estudia la existencia de soluciones de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}3x-2y=5\\ 2x+y=1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x-2y=2\\ 2x+y=9\\ x+3y=7\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}x+3y-z=-4\\ 2x-y+2z=3\\ 7x+7y+z=-6\end{cases}$

Estudiamos cada caso y obtenemos:

a) Las matrices del sistema son: $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\ y\ A^*=\begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

El rango de A es 2 y el rango de A* es 2, por tanto, el sistema es compatible determinado. Tiene una única solución que es x = 1 e y = -1.

b) Las matrices del sistema son: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\ y\ A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 9\\ 1 & 3 & 7\end{pmatrix}$.

El rango de A es 2 y el rango de A* es 2 y como el número de incógnitas coincide con el valor del rango, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución. Puede comprobarse que ñla solución es x = 4, y = 1.

c) Las matrices del sistema son: $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 7 & 7 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -4\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 7 & 7 & 1 & -6\end{pmatrix}$.

El rango de A es 2 y el rango de A* es 2 y como el número de incógnitas es mayor que el valor del rango, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. Puede comprobarse que las soluciones pueden expresarse en la forma: x = 5/7 – 5t; y = - 11/7 + 4t; z = 7t, siendo t un número real cualquiera.

3. Estudia, según los valores del parámetro a, la naturaleza de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} ax-(3a-2)y=1\\ x \quad -ay=a\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}2x+y=2a\\ x-ay=-3\\ x+y=3\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}ax-y-z=-a\\ x-ay+az=a\\ x+y+z=-1\end{cases}$

Estudiamos cada caso y obtenemos:

a) Las matrices del sistema son: $A=\begin{pmatrix}a & -3a+2\\ 1 & -a\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}a & -3a+2 & 1\\ 1 & -a & a\end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz A vale – a^2 + 3a – 2 = - (a – 1)(a – 2). Esta expresión nos permite realizar el estudio que sigue:

- Si a ≠ 1 y a ≠ 2 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible determinado.

- Si a = 1 el rango de la matriz A es 1 y el de la matriz A* es 1, menor que el número de incógnitas, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Si a = 2 el rango de la matriz A es 1 y el de la matriz A* es 2, el sistema es incompatible.

b) Las matrices del sistema son: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -a\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2a\\ 1 & -a & -3\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz A* vale 2a (a – 2). Esta expresión nos permite realizar el análisis que sigue:

- Si a ≠ 0 y a ≠ 2 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 3, el sistema es incompatible.

- Si a = 0 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible determinado.

- Si a = 2 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible indeterminado.

c) Las matrices del sistema son: $A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & -a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 & -a \\ 1 & -a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz A vale - 2a (a + 1). Esta expresión nos permite realizar el análisis que sigue:

- Si a ≠ - 1 y a ≠ 0 el rango de la matriz A es 3 y el de la matriz A* es 3, el sistema es compatible determinado.

- Si a = 0 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 3, el sistema es incompatible.

- Si a = - 1 el rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A* es 2, el sistema es compatible indeterminado.

4. Consideramos el sistema $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$.

a) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte incompatible.

b) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte compatible indeterminado.

c) Añade una ecuación lineal de modo que el sistema resulte compatible determinado.

4. Las respuestas son:

a) En el nuevo sistema se tiene que cumplir que el rango de la matriz de los coeficientes sea 2 y el rango de la matriz ampliada 3. Añadimos, por ejemplo, una ecuación que sea suma de las otras dos, excepto para los términos independientes. Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x-y \quad\;\; =2 \end{cases}.$$

b) En el nuevo sistema se tiene que cumplir que el rango de la matriz de los coeficientes sea 2 y el rango de la matriz ampliada 2. Añadimos, por ejemplo, una ecuación que sea suma de las otras dos. Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x-y \quad\;\; =1 \end{cases}.$$

c) En el nuevo sistema se tiene que cumplir que el rango de la matriz de los coeficientes sea 3 y el rango de la matriz ampliada 3. Añadimos una ecuación que no sea combinación lineal de las otras dos. Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ x-2y-z=10 \end{cases}.$$

5. Interpreta geométricamente cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 0 \\ -12x + 4y = 4 \end{cases}$

Las soluciones son:

a) El rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 2, el sistema es compatible determinado, con solución única: x = 1, y = 3.

Las ecuaciones representan sendas rectas que se cortan en el punto P (1, 3).

b) El rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3, el sistema es incompatible, sin solución.

Las ecuaciones representan rectas que se cortan dos a dos.

c) El rango de la matriz de los coeficientes es 1 y el rango de la matriz ampliada es 2, el sistema es incompatible, sin solución.

Las ecuaciones representan rectas paralelas.

6. Interpreta geométricamente cada uno de los siguientes sistemas en función de los valores del parámetro a:

a) $\begin{cases} 2x + (1-a)y = 0 \\ x + \quad 2y = -a \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x + 2y = a \\ 2x - 4y = -4 \\ -3x + 6y = 6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y \quad = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + y + az = 1 \end{cases}$

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1-a & 0 \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz A, det (A) = a + 3, se anula para a = - 3

Estudio:
- Si a ≠ - 3, el rango de la matriz A es 2 y el rango de la matriz A* es 2, el sistema es compatible determinado.

Las ecuaciones representas rectas que se cortan.

- Si a = - 3, el rango de la matriz A es 1 y el rango de la matriz A* es 2, el sistema es incompatible.

Las ecuaciones representas rectas paralelas.

- Si a = 2, el rango de la matriz A es 1 y el rango de la matriz A* es 2, el sistema es incompatible.

Las ecuaciones representas rectas paralelas.

b) Las matrices del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 2 & -4 & -4 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 1. En la matriz A* hay menores que valen 4 – 2a o – 6 + 3a.

Estudio:

- Si a ≠ 2, el rango de la matriz A es 1 y el rango de la matriz A* es 2, el sistema es incompatible.

  Hay dos rectas coincidentes y otra paralela a las anteriores.

- Si a = 2, el rango de la matriz A es 1 y el rango de la matriz A* es 1, el sistema es compatible indeterminado.

  Las tres rectas son coincidentes.

c) Las matrices del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz A es det (A) = a - 2.

Estudio:

- Si a ≠ 2, el rango de la matriz A es 3 y el rango de la matriz A* es 3, el sistema es compatible determinado.

  Las ecuaciones representan tres planos que se cortan en un punto.

- Si a = 2, el rango de la matriz A es 2 y el rango de la matriz A* es 2, el sistema es compatible indeterminado.

  Las ecuaciones representan tres plano que se cortan en una recta.

7. Resuelve los sistemas siguientes por el método de la matriz inversa:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 4 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$

a) La matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, su determinante vale 7.

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

Escribimos el sistema en notación matricial, AX = B, despejamos X y obtenemos la solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 9/7 \end{pmatrix}$$

b) La matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, su determinante vale 1.

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 4 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Escribimos el sistema en notación matricial, AX = B, despejamos X y obtenemos la solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 4 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. Comprueba que los siguientes sistemas son de Cramer y encuentra su solución:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + 2z = -5 \end{cases}$

a) El sistema es de Cramer al tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el valor del determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13$.

La solución del sistema aplicando la regla de Cramer es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{13}{13} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-26}{13} = -2$$

b) El sistema es de Cramer al tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el valor del determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10.$

La solución del sistema aplicando la regla de Cramer es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10}{-10} = -1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{-10} = 2 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-10} = 0$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 85

9. Indica razonadamente si las parejas de sistemas que siguen son equivalentes:

a) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **y** $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y \quad = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$ **y** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y \quad = 1 \end{cases}$

a) Los dos sistemas son compatibles determinados con solución única x = 3, y = 1. Por tanto, los sistemas son equivalentes al tener la misma solución.

b) Los dos sistemas son compatibles determinados con solución única x = 3, y = - 2, z = 1. Por tanto, los sistemas son equivalentes al tener la misma solución.

10. Averigua para qué valor del parámetro a los dos sistemas siguientes son equivalentes:

$$(I): \begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \qquad y \qquad (II): \begin{cases} ax + 4y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Ambos sistemas son compatibles determinados si a ≠ 4.

Las soluciones de los sistemas son:

Sistema (I): $x = -\dfrac{7}{a-4}$; $y = \dfrac{4a-2}{a-4}$.

Sistema (II): $x = -\dfrac{7}{a-4};\ y = \dfrac{2a-1}{a-4}$.

Los sistemas son equivalentes si sus soluciones coinciden, por tanto:

$$\frac{4a-2}{a-4} = \frac{2a-1}{a-4} \Rightarrow 4a-2 = 2a-1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Para este valor del parámetro la solución de ambos sistemas es x = 2, y = 0.

11. Halla los valores de a, b y c para que los sistemas que siguen sean equivalentes:

$$\begin{cases} x + 3y = a \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad \textbf{y} \quad \begin{cases} x - 4y = -1 \\ 2x - y = b \\ 3x + 2y = c \end{cases}$$

El sistema primero es compatible determinado para cualquier valor del parámetro a. Su solución, en función de a, es:

$$x = \frac{a+3}{7},\ y = \frac{2a-1}{7}.$$

Sustituimos estos valores en la primera ecuación del segundo sistema, y obtenemos a = 2.

Para a = 2 la solución de ambos sistemas es $x = \dfrac{5}{7},\ y = \dfrac{3}{7}$.

Introducimos estos valores en la segunda y tercera ecuación del segundo sistema y obtenemos: b = 1 y c = 3.

Por tanto los valores buscados son: a = 2, b = 1 y c = 3.

12. Estudia, según los valores del parámetro a, la naturaleza de los sistemas siguientes y encuentra sus soluciones en los casos que sean compatibles:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx \quad + 2z = 0 \\ 2x - y + mz = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} ax + y - z = z \\ -x + ay + z = x \\ -3x + 3y + z = y \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y\ az = 0 \\ 3x + 2y + 4az = 0 \\ 2x + y = +3z = 0 \end{cases}$

a) El sistema es homogéneo y la matriz del sistema es A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz anterior vale det (A) = $- a^2 - a + 6 = -(a - 2) \cdot (a + 3)$. Este determinante se anula para a = 2 y a = - 3. Estos valores nos permiten hacer el siguiente estudio:

● Si a ≠ - 3 y a ≠ 2, el rango de la matriz A es 3 y coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

En este caso su solución es la trivial, es decir x = 0, y = 0, z = 0.

● Si a = - 3, el rango de la matriz A es 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$.

Considerando el menor anterior que nos ha dado el rango, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y + z = -x \\ 2z = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{5}{2}x \\ z = \dfrac{3}{2}x \end{cases}$$

Haciendo x = 2t, siendo t cualquier número real, podemos expresar las soluciones en la forma:

x = 2t, y = - 5t, z = 3t, con $t \in R$.

● Si a = 2, el rango de la matriz A es 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$.

Considerando el menor anterior que nos ha dado el rango, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y + z = -x \\ 2z = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

Haciendo x = t, siendo t cualquier número real, podemos expresar las soluciones en la forma:

x = t, y = 0, z = - t, con $t \in R$.

b) Volvemos a escribir el sistema, que resulta ser homogéneo: $\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ -2x + ay + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Estudiamos el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & a & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Al ser $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 ≠ 0, el rango de A es 2 con independencia del parámetro.

El determinante de la matriz A es det (A) = a^2 - 8a + 7 =(a - 1)(a - 7). El determinante se anula para a = 1 y a = 7. Estos valores nos permiten hacer el siguiente estudio:

● Si a ≠ 1 y a ≠ 7, el rango de A es 3 que coincide con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. En este caso su solución es la trivial, es decir, x = 0, y = 0, z = 0.

● Si a = 1, el rango de A es 2 menor que el número de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Para a = 1 el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -2x+y+z=0 \\ -3x+2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2z \\ -2x+y=-z \end{cases}$$

Las soluciones son x = t, y = t, z = t, siendo t cualquier número real.

● Si a = 7, estamos en una situación análoga al caso anterior.

Para a = 7 el sistema es:

$$\begin{cases} 7x+y-2z=0 \\ -2x+7y+z=0 \\ -3x+2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+y-2z=0 \\ -2x+7y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+y=2z \\ -2x+7y=-z \end{cases}$$

Las soluciones son x = $\frac{5}{17}$t, y = -$\frac{1}{17}$t, z = t, siendo t cualquier número real.

c) El determinante de la matriz del sistema es det (A) = 3a- 3. Se anula para a = 1. Podemos realizar el siguiente estudio.

● Si a ≠ 1, el rango de A es 3, que coincide con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. En este caso su solución es la trivial, es decir, x = 0, y = 0, z = 0.

● Si a = 1, el rango de A es 2, menor que el número de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Para a = 1 el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x + y + az = 0 \\ 3x + 2y + 4az = 0 \\ 2x + y \ + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -z \\ 3x + 2y = -4z \end{cases}$$

Las soluciones son x = - 2t, y = t, z = t, siendo t un número real cualquiera.

13. ¿Existen tres números tales que dados dos cualesquiera de ellos su suma es el otro más uno? En caso afirmativo, hállalos.

Llamamos x, y, z a los números buscados. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = z + 1 \\ x + z = y + 1 \\ y + z = x + 1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ \quad 2y - 2z = 0 \\ \quad 2y \quad\quad = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Los tres números son x= 1, y = 1, z = 1.

14. El dueño de un supermercado ha comprado embutidos, bebidas y conservas, por un importe total de 4600 euros. El valor de las conservas es el mismo que el de las bebidas y embutidos juntos. Si vende todos estos productos, añadiendo un beneficio del 10% en el embutido, el 20% en las bebidas y el 15% en las conservas, obtendrá un importe total de 5305 euros. Calcula lo que pagó por cada uno de ellos.

Sean x, y, z el importe de los embutidos, las bebidas y las conservas, respectivamente. Con las condiciones del enunciado podemos formular el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 4600 \\ x + y - z = 0 \\ 1{,}1x + 1{,}2y + 1{,}15z = 5305 \end{cases}$$

Este sistema es compatible determinado, es decir, tiene una solución única, al cumplirse:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1{,}1 & 1{,}2 & 1{,}15 \end{vmatrix} = 0{,}2 \neq 0$$

Resolvemos el sistema restando las dos primeras ecuaciones, para obtener 2z = 4600, es decir, z = 2300.

Sustituyendo z = 2300 en la primera y tercera ecuación, el sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 2300 \\ 1{,}1x + 1{,}2y = 2660 \\ z = 2300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2300 \\ 0{,}1y = 130 \\ z = 2300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1000 \\ y = 1300 \\ z = 2300 \end{cases}$$

El dueño del supermercado pagó 1000 euros por los embutidos, 1300 euros por las bebidas y 2300 euros por las conservas.

15. Tres empresas A, B y C se suministran entre si los bienes que cada una necesita de las otras y a su vez satisfacen la demanda exterior.

La empresa A suministra a la empresa B un 11% del material que esta necesita para hacer una unidad de sus productos, a la empresa C un 3% y a sí misma un 28% y tiene una demanda exterior de 1300 unidades. La empresa B suministra a las empresas A y C, respectivamente un 11% y un 9% de sus necesidades, ella necesita un 39% de lo que fabrica y su demanda exterior de 5000 unidades. La empresa C necesita un 15% de su fabricación, suministra un 6% de lo que necesita A y un 8% de lo que necesita B, y su demanda exterior es de 4000 unidades.

Halla la matriz de salida, es decir, la cantidad que debe producir cada una de las empresas para satisfacer la demanda interior y exterior.

Sea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matriz de salida.

Formamos el sistema: $\begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}11 & 0{,}03 \\ 0{,}11 & 0{,}39 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1300 \\ 5000 \\ 4000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$\begin{cases} 0{,}28x + 0{,}11y + 0{,}03z + 1300 = x \\ 0{,}11x + 0{,}39y + 0{,}09z + 5000 = y \\ 0{,}06x + 0{,}08y + 0{,}15z + 4000 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}72x - 0{,}11y - 0{,}03z = 1300 \\ -0{,}11x + 0{,}61y - 0{,}09z = 5000 \\ -0{,}06x - 0{,}08y + 0{,}85z = 4000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\,532 \\ y = 9\,699 \\ z = 5\,868 \end{cases}$$

Otra forma de encontrar la matriz de salida, X, es resolviendo la ecuación matricial:

$$X = A \cdot X + E \quad \Rightarrow \quad I \cdot X - A \cdot X = E \quad \Rightarrow \quad (I - A) \cdot X = E \quad \Rightarrow \quad X = (I - A)^{-1} \cdot E$$

Hallando la matriz inversa de I – A y operando, obtenemos:

$$X = (I - A)^{-1} \cdot E \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}44 & 0{,}27 & 0{,}08 \\ 0{,}28 & 1{,}71 & 0{,}19 \\ 0{,}13 & 0{,}18 & 1{,}20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1300 \\ 5000 \\ 4000 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3532 \\ 9699 \\ 5868 \end{pmatrix}$$

16. Tres individuos, un agricultor (A), un ganadero (G) y un pescador (P) forman una sociedad de consumos, cuyos productos se intercambian entre ellos sin relación con otras personas. La matriz de entrada y salida correspondiente a esta economía es:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & G & P \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ G \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuál debe ser la relación de precios de sus respectivos productos?

Los precios $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de los productos de los tres individuos deben cumplir la relación X = A · X.

La ecuación matricial anterior da lugar al sistema:

$$\begin{cases} x = 0{,}3x + 0{,}3y + 0{,}3z \\ y = 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}3z \\ z = 0{,}5x + 0{,}4y + 0{,}4z \end{cases}$$

Las soluciones del sistema homogéneo anterior son:

$$\begin{cases} 0{,}7x - 0{,}3y - 0{,}3z = 0 \\ -0{,}2x + 0{,}7y - 0{,}3z = 0 \\ -0{,}5x - 0{,}4y + 0{,}6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}70z \\ y = 0{,}63z \end{cases}$$

Las relaciones de precios serán: $\frac{x}{z} = 0{,}70 \quad \frac{y}{z} = 0{,}63 \quad \frac{y}{x} = 0{,}90$.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 86

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ **donde x, y, z son desconocidos.**

a) Sabiendo que A · B + C = 3D, plantea un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x, y, z.

b) Estudia el sistema planteado en función del número de sus soluciones y calcula una de ellas, si es posible.

a) Realizamos las operaciones matriciales indicadas y obtenemos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 3D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos las matrices y obtenemos el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$

b) Las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes vale 2 ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

El rango de la matriz ampliada vale 2 ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

El sistema es compatible indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones.

Para encontrar todas las soluciones resolvemos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones y en ellas llevamos la incógnita z al miembro de la derecha de la ecuación. Posteriormente calculamos los valores de x e y en función de la incógnita z.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 - z \\ 2x - y = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 - z \\ x = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 2 \end{cases}$$

Haciendo z = t, con t $\in$ R, las soluciones del sistema son {x = 1 – t, y = 2, z = t}.

Como nos piden una solución hacemos, por ejemplo, t = 0 y obtenemos: x = 1, y = 2, z = 0.

2. a) Determina, según los valores del parámetro a, los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución.

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x + 3y = -a \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$$

b) Resuelve los casos compatibles.

a) Las matrices del sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -a \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz ampliada, A*, es det (A*) = - 30 – 10ª y se anula para a = - 3.

Estudio:

- Si a ≠ - 3 el rango de A es 2 y el rango de A* es 3, por tanto el sistema es incompatible y carece de solución.

- Si a = - 3, el rango de A es 2, el rango de A* es 2 y este valor coincide con el número de incógnitas, lo que hace que el sistema sea compatible determinado.

b) Resolvemos el sistema para a = - 3. Para este valor del parámetro el sistema queda reducido a la primera y tercera ecuación, ya que la segunda ecuación es una combinación lineal de las otras dos:

$$\begin{cases} -x+y=2 \\ 2x+3y=3 \\ 6x+4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=2 \\ 6x+4y=2 \end{cases}$$

Resolviendo por cualquiera de los procedimientos conocidos obtenemos la solución: $x=-\frac{3}{5}$, $y=\frac{7}{5}$.

3. Un bar recibe un pedido diario de refrescos y batidos, por el que paga 6 euros, siendo el precio de cada refresco de 20 céntimos de euro y el de cada batido de m céntimos de euro. Si se intercambiasen los precios unitarios de refrescos y batidos, habría pagado 6 euros y 50 céntimos.

a) Plantea un sistema con dos ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de refrescos y el número de batidos adquiridos ese día. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) ¿Cuántos batidos habría comprado si cada batido costase 30 céntimos de euro?

Sea x el número de refrescos e y el número de batidos comprados ese día.

El sistema es:

$$\begin{cases} 20x+my=600 \\ mx+20y=650 \end{cases}$$

Las matrices del sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 20 & m \\ m & 20 \end{pmatrix} \ y \ A^*=\begin{pmatrix} 20 & m & 600 \\ m & 20 & 650 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz A es det (A) = 400 – m^2 = (20 + m)(20 – m). Los valores que anulan el determinante son m = 20 y m = - 20, que carece de sentido.

Estudio:

- Si m ≠ 20, el rango de A es 2, el rango de A* es 2 y este valor coincide con el número de incógnitas, lo que hace que el sistema sea compatible determinado.

- Si m = 20, el rango de A es 1, el rango de A* es 2, el sistema es incompatible.

Por tanto, en caso de existir solución, esta es única.

b) El sistema es:

$$\begin{cases} 20x+30y=600 \\ 30x+20y=650 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=60 \\ 3x+2y=65 \end{cases}$$

Resolviendo por reducción se obtiene: x = 15, y = 10.

Había comprado 10 batidos.

4. La condición de equilibrio para el precio, en unidades monetarias, de tres productos P_1, P_2 y P_3, relacionados entre sí, da lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales: x + y + z = 6; x + y – z = 0; 2x – y + z = 3, siendo x, y, z los precios de los productos P_1, P_2 y P_3, respectivamente.

Expresa el sistema en forma matricial AX = B. Calcula la matriz inversa de A y determina los precios de equilibrio para estos tres productos P_1, P_2 y P_3.

La expresión matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos los precios de equilibrio:

$$X = A^{-1} \cdot X \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Los precios son:

- Precio de P_1, 1 unidad monetaria.

- Precio de P_2, 2 unidades monetarias.

- Precio de P_3, 3 unidades monetarias.

5. En un crucero hay paquetes de tres tipos: individual (1 pasajero), pareja (2 pasajeros) y grupo familiar (4 pasajeros). La tarifa individual es de 800 €, la tarifa de pareja es de 1200 € y la tarifa familiar es de 1600 euros. Para el próximo viaje hay 2400 pasajeros que han pagado un total de 1 264 000 €. Si los pasajeros de individual son el 20% de la suma de los de pareja y de grupo familiar, determina la distribución de los pasajeros de los tres tipos de tarifas.

Llamamos x, y, z al número de paquetes individuales, pareja y grupo familiar, respectivamente.

Las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 2400 \\ 800x + 1200y + 1600z = 1264000 \\ x = 0{,}2 \cdot (2y + 4z) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \ldots$$

El sistema es compatible determinado al ser $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los procedimientos conocidos se obtiene la solución:

x = 400, y = 360, z = 320.

La distribución de pasajeros es:

- 400 paquetes individuales dan 400 pasajeros.

- 360 paquetes pareja dan 360 · 2 = 720 pasajeros.

- 320 paquetes grupo familiar dan 320 · 4 = 1 280 pasajeros.

6. Un camión trae, en su carga, cajas de tres productos A, B y C. Se ha perdido la hoja de carga, pero uno de los operarios recuerda que en total hay 120 cajas, que las de tipo A eran tantas como las de tipo B y C juntas y que las de tipo C eran la cuarta parte de las del tipo B.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo trae el camión?

b) Otro operario dice que del tipo A eran 12 más que del tipo B. Comprueba si esta información se contradice con la del primer operario.

a) Sean x, y, z el número de cajas de tipo A, B y C, respectivamente.

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 120 \\ x = y + z \\ z = \dfrac{y}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 120 \\ x - y - z = 0 \\ \quad y - 4z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los procedimientos conocidos, obtenemos:

x = 60, y = 48 y z = 12

El camión trae 60 cajas del producto A, 48 cajas del producto B y 12 cajas del C.

b) Lo que dice el segundo operario da lugar a la ecuación: x = 12 + y.

Esta información no se contradice con la del primer operario, ya que la solución del sistema cumple también la nueva ecuación: 60 = 12 + 48.

7. Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería, por importe de 1, 2 y 5 €. Han recaudado en total, 600 € y han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 €. Si han vendido un total de 260 participaciones, calcula el número de participaciones que han vendido de cada importe.

Sean x, y, z las participaciones que han vendido de 1, 2 y 5 euros, respectivamente. Las condiciones del enunciado nos permiten formular el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \\ x + y + z = 260 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los procedimientos que se explican en esta unidad se obtiene como solución: x = 160, y = 20 y z = 80.

Por tanto, los estudiantes vendieron 160 participaciones de 1 €, 20 de 2 € y 80 de 5 €.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 87

Matrices mágicas y cuadrados mágicos

1. Se dice que una ***matriz*** M, de orden 3, es ***mágica*** si las ocho sumas:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij};\quad \sum_{j=1}^{3} a_{ij};\quad \sum_{i=1}^{3} a_{ii};\quad a_{13} + a_{22} + a_{31}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1};\quad \sum_{i=1}^{3} a_{i2}; \sum_{i=1}^{3} a_{i3};\ \sum_{j=1}^{3} a_{1j};\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}; \sum_{j=1}^{3} a_{3j};\ \sum_{i=1}^{3} a_{ii};\ a_{13} + a_{22} + a_{31}$$

son iguales.

Llamamos s al valor común de estas sumas y M (s) a una de las matrices correspondientes. Se pide:

a) Encuentra la expresión de todas las matrices mágicas de suma s, M (s).

b) Halla el valor de la suma s si la matriz M (s) es antisimétrica. Construye todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

c) Construye todas las matrices mágicas simétricas, de suma s, de orden 3.

2. Las matrices mágicas están emparentadas con los ***cuadrados mágicos***. Un cuadrado mágico consta de N^2 casillas, cada una ocupada por un número natural distinto, de forma que la suma de los números de las distintas filas horizontales y verticales, así como de las dos diagonales es siempre la misma.

En la imagen puede verse el más famoso de los cuadrados mágicos de orden 4, debido al pintor Durero. Su suma o constante mágica es 34, además los cuatro números del centro (en color verde) también suman 34, así como los cuatro de las esquinas (en color negro). Los dos números en color rojo componen el año en el que fue realizado el grabado en el que aparece.

Los cuadrados mágicos están llenos de propiedades y sorpresas. Investiga sobre ellos.

a) Sea la matriz $M(s) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Expresando las ocho sumas del enunciado e igualándolas a s, obtenemos el siguiente sistema homogéneo de 8 ecuaciones con 10 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}+a_{12}+a_{13} - s = 0 \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} - s = 0 \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} - s = 0 \\ a_{11}+a_{21}+a_{31} - s = 0 \\ a_{12}+a_{22}+a_{32} - s = 0 \\ a_{13}+a_{23}+a_{33} - s = 0 \\ a_{11}+a_{22}+a_{33} - s = 0 \\ a_{13}+a_{22}+a_{31} - s = 0 \end{cases}$$

Realizando operaciones elementales por filas, las matrices que siguen tienen el mismo rango:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes vale 7. Como el número de incógnitas es 10, las soluciones del sistema, es decir, el conjunto de las matrices M (s) dependerán de 10 – 7 = 3 parámetros.

Procediendo de forma directa, si a_{11} = a; a_{12} = b; a_{21} = c, una matriz mágica de suma s, M (s), se expresará en la forma:

$$M\,(s) = \begin{pmatrix} a & b & s-a-b \\ c & -s+2a+b+c & 2s-2a-b-2c \\ s-a-c & 2s-2a-2b-c & -2s+3a+2b+2c \end{pmatrix}$$

Imponiendo que $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ = s, se obtiene 6a + 3b + 3c – 3s = 2, es decir, $c = \frac{4}{3}s - 2a - b$.

Toda matriz mágica M (s) depende de tres parámetros a, b y s. La expresión, respecto de estos parámetros, de una matriz mágica M (s) es:

$$M\,(s) = \begin{pmatrix} a & b & s-a-b \\ \frac{4}{3}s-2a-b & \frac{1}{3}s & -\frac{2}{3}s+2a+b \\ -\frac{1}{3}s+a+b & \frac{2}{3}s-b & \frac{2}{3}s-a \end{pmatrix} \qquad [\,\mathrm{I}\,]$$

Podemos expresar la matriz M (s) en función de tres matrices fijas en la forma:

$$M(s) = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = a \cdot A + b \cdot B + s \cdot S$$

b) Si la matriz mágica M (s) es antisimétrica, se cumplirá: $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, luego $s = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$. Además, $a = a_{11} = 0$

Haciendo a = 0 y s = 0 en la expresión [I] de la matriz mágica M (s) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = b \cdot B$$

Todas las matrices mágicas antisimétricas son de la forma anterior.

c) Imponiendo en la expresión [I] que la matriz sea simétrica, resulta:

$$b = \frac{4}{3}a - 2a - b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2}{3}s - a.$$

Sustituyendo este valor de b en la expresión [I] obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a & \frac{2}{3}s - a & \frac{1}{3}s \\ \frac{2}{3}s - a & \frac{1}{3}s & a \\ \frac{1}{3}s & a & \frac{2}{3}s - a \end{pmatrix}$$

que es la expresión genéricas de las matrices mágicas genéricas.

2. Sobre cuadrados mágicos la información es muy abundante tanto bibliográfica como en Internet, por tanto, dejemos esta cuestión abierta.