

UNIDAD 4: Programación lineal

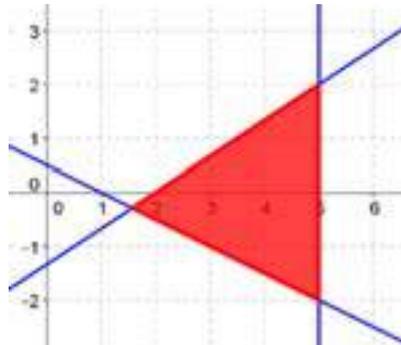
CUESTIONES INICIALES-PÁG. 88

1. Representa en el plano el conjunto de puntos que cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{cases} x + 2y \geq 1 \\ x \leq 5 \\ 2x - 3y \geq 4 \end{cases} \\
 \text{b) } \begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ 2x + y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Las regiones buscadas son:

a)

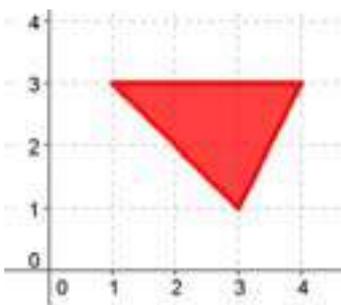


b)

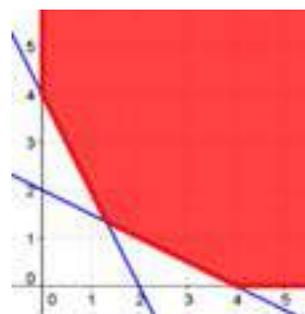


2. Escribe el sistema de inecuaciones cuya solución es el conjunto de puntos de la figura sombreada:

a)



b)



Los sistemas pedidos son:

$$a) \begin{cases} 2x - y \leq 5 \\ x + y \geq 4 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y \geq 4 \\ 2x + y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 101

1. Lentejas y garbanzos. En un puesto del mercado tiene 5 sacos de garbanzos y uno de lentejas. Un cliente se lleva una cierta cantidad de garbanzos; después, otro cliente se lleva el doble de garbanzos que el cliente anterior, quedándose sólo el saco de lentejas. El vendedor sólo vende sacos completos. Sabiendo que los diferentes sacos son de 19, 18, 31, 16, 15 y 20 kg, ¿de cuántos kilogramos es el asco de lentejas?

Sumando los kilos de todos los sacos, obtenemos 119 kg. Como un cliente se lleva cierta cantidad y otro se lleva el doble de esa cantidad quedan sólo el saco de lentejas, entonces al quitar a 119 kg, el saco de lentejas debe quedar un número que es múltiplo de 3, esto se cumple con:

$$119 - 20 = 99.$$

Un cliente lleva 33 kg en los sacos de 18 kg y 15 kg y el otro cliente se lleva 66 kg en los sacos de 19 kg, 31 kg y 16 kg. El saco de lentejas peso 20 kg.

2. Tres cartas. De una baraja española de 40 cartas, extraemos 3 y las colocamos en una fila horizontal. Las cartas verifican las condiciones siguientes: a la derecha del *caballo* hay 1 o dos *sotas*; a la izquierda de la *sota*, hay 1 o 2 *sotas*; a la izquierda de un oro, hay una o dos *copas*; y a la derecha de de una *copa*, hay una o dos *copas*. ¿De qué tres caratas se trata?

El caballo y las sotas las señalaremos con C S S. Para que se verifiquen las condiciones han de ser:

$$C_c S_o S_c$$

Por tanto, las cartas son:

- Caballo de copas ● Sota de oros ● Sota de copas.

3. Primas. Dos amigos, Pedro y Luisa, se encuentran una tarde y Pedro le dice a Luisa: «Ayer estuve con mis tres primas». Luisa le pregunta: «¿qué edad tienen?», a lo que Pedro contesta: «el producto de sus edades es 2450 y la suma de las mismas es el doble de tu edad». Luisa dijo que con estos datos no podía saber las edades. Pedro añadió: «yo soy por lo menos un año más joven que la más vieja». Por supuesto, Luisa conoce la edad de Pedro. ¿Cuáles son las edades de las primas de Pedro y cuál es la edad de Luisa?

Descomponemos 2450 en factores, obtenemos $2450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

Las posibles edades de las tres primas son:

| Prima 1 | Prima 2 | Prima 3 | Suma | Luisa |
|---------|---------|---------|------|-------|
| 2 | 25 | 49 | 76 | 38 |
| 5 | 5 | 98 | 108 | 54 |
| 5 | 10 | 49 | 64 | 32 |
| 7 | 7 | 50 | 64 | 32 |
| 2 | 35 | 35 | 72 | 36 |
| 1 | 49 | 50 | 100 | 50 |

| | | | | |
|---|----|----|----|----|
| 7 | 14 | 25 | 46 | 23 |
| 7 | 14 | 35 | 52 | 26 |
| 5 | 14 | 35 | 54 | 27 |

Una vez hecha la tabla con todas las posibilidades, observamos que hay un resultado suma repetido, por tanto ahí está la razón de que Luisa le dijera a Pedro que con esos datos no podía saber las edades.

La edad de Luisa es de 32 años. Luisa sabe la edad de Pedro. Si Pedro hubiera tenido 48 años o menos, no quedaría claro, por tanto Pedro ha de tener 49 años y las primas 7, 7 y 50 años.

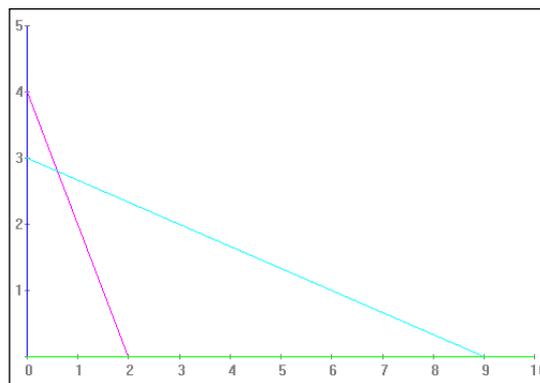
NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 103

1. Optimiza la función $F(x, y) = x + 3y$ sujeta a las restricciones:

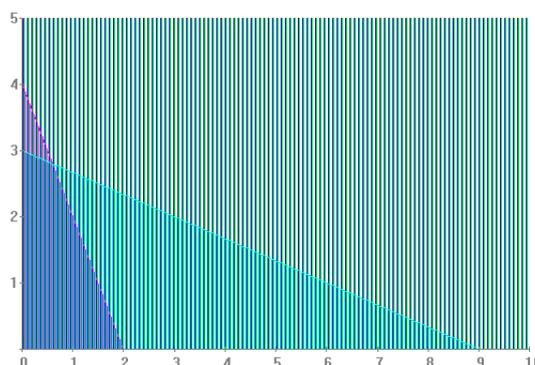
$$\{x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 4; x + 3y \leq 9\}$$

Seguimos los pasos descritos en el epígrafe RESOLUCIÓN DE UN PROGRAMA LINEAL:

- En la ventana **PROGRAMACIÓN LINEAL-Entrada de datos** introducimos las inecuaciones y la función objetivo y pulsando **Aceptar** aparece la representación gráfica de las rectas $2x + y = 4$ y $x + 3y = 9$.



- Para visualizar toda la región de soluciones activamos en el menú **Programación lineal** la opción **Marcar soluciones**. En la imagen adjunta aparecen las soluciones del sistema en el cuadrilátero de color azul, cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$; $(2, 0)$; $(0,6; 2,8)$ y $(0, 3)$.



- Si queremos conocer los valores óptimos del programa lineal debemos activar la opción **Copiar la solución en el portapapeles** del menú **Programación lineal** y llevándolo a un procesador de textos el programa nos proporciona los valores que podemos ver a continuación:

| | |
|-----------------------|--------------------------|
| F(0, 0) = 0; S S S S | F(0, 0) = 0; S S S S |
| F(0, 4) = 12; S S S N | F(0, 3) = 9; S S S S |
| F(0, 0) = 0; S S S S | F(2, 0) = 2; S S S S |
| F(9, 0) = 9; S S N S | F(0, 4) = 12; S S S N |
| F(2, 0) = 2; S S S S | F(0.6, 2.8) = 9; S S S S |
| F(0, 3) = 9; S S S S | F(9, 0) = 9; S S N S |
| Max(0, 3) = 9 | Mín(0, 0) = 0 |

Los valores anteriores son los que toma la función objetivo en los puntos de corte de las rectas fronteras de la región de soluciones entre sí y con los ejes coordenadas. Observamos que el máximo, de valor 9, se obtiene en todos los puntos del segmento de extremos (0, 3) y (0,6; 2,8); y el mínimo, de valor 0, se obtiene en el punto (0, 0).

2. Una empresa de transporte debe organizar el traslado de dos productos A y B entre dos ciudades utilizando camionetas y furgones. Cada camioneta permite transportar 5 unidades de A y 4 de B, mientras que en cada furgón se puede transportar 2 unidades de A y 1 de B. La empresa no puede transportar más unidades de las que puede vender en la ciudad de destino y en la ciudad de destino puede vender como máximo 90 unidades de A y 60 de B. El envío de una camioneta le reporta a la empresa un beneficio de 1600 euros, mientras que el envío de un furgón le reporta un beneficio de 600 euros. ¿Cuántas camionetas y furgones deben usar para maximizar el beneficio de estos transportes? ¿A cuánto asciende dicho beneficio óptimo?

Recogemos la información en una tabla:

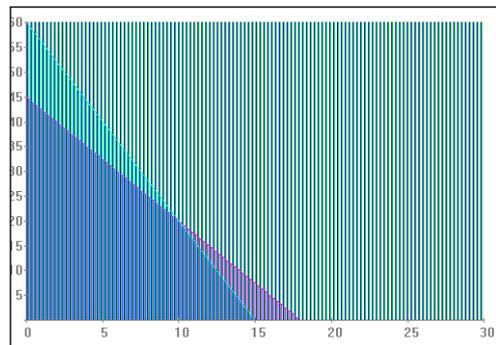
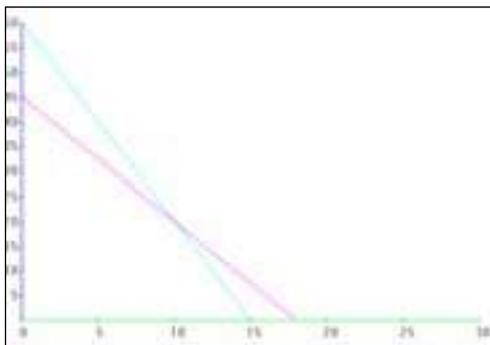
| | Camionetas | Furgones | Disponibilidad |
|-------------------|------------|-----------|----------------|
| Producto A | 5 | 2 | 90 |
| Producto B | 4 | 1 | 60 |
| Vehículos | x | y | |
| Beneficios | 1600 euros | 600 euros | |

El programa a maximizar es:

Maximizar $F(x, y) = 1600x + 600y$ sujeta a las restricciones:

$$\{x \geq 0, y \geq 0, 5x + 2y \leq 90; 4x + y \leq 60\}$$

Introducimos las inecuaciones y la función objetivo y dibujamos la región de soluciones como puede verse en la imagen.

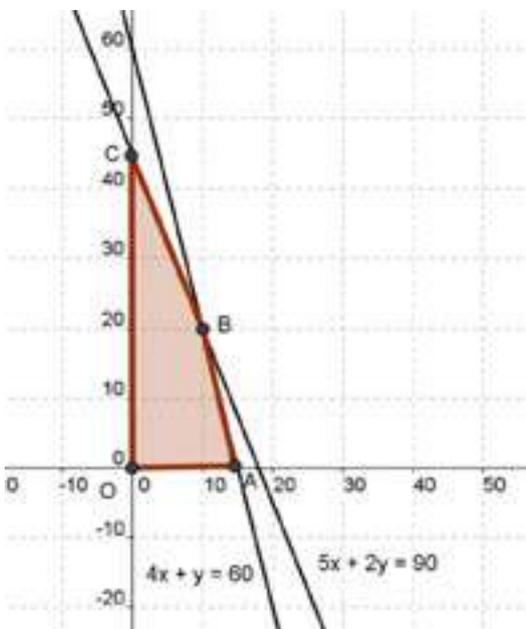


En la imagen adjunta aparecen las soluciones del sistema en el cuadrilátero de color azul, cuyos vértices son los puntos (0, 0); (15, 0); (10, 20) y (0, 45).

Si queremos conocer los valores óptimos del programa lineal debemos activar la opción **Copiar la solución en el portapapeles** del menú **Programación lineal** y llevándolo a un procesador de textos el programa nos proporciona los valores que podemos ver a continuación:

F(0, 0) = 0; S S S S
 F(0, 45) = 27000; S S S S
 F(0, 0) = 0; S S S S
 F(15, 0) = 24000; S S S S
 F(18, 0) = 28800; S S S N
 F(0, 60) = 36000; S S N S

F(0, 0) = 0; S S S S
 F(0, 60) = 36000; S S N S
 F(18, 0) = 28800; S S S N
 F(0, 45) = 27000; S S S S
 F(10, 20) = 28000; S S S S
 F(15, 0) = 24000; S S S S



Max(10, 20) = 28000

Mín(0, 0) = 0

El máximo beneficio, de 28 000 euros, se obtiene con el transporte de 10 camionetas y 20 furgones.

En la imagen adjunta puede verse otro dibujo de la región de soluciones y sus vértices.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 108

1. Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $x - 2y \leq 10$

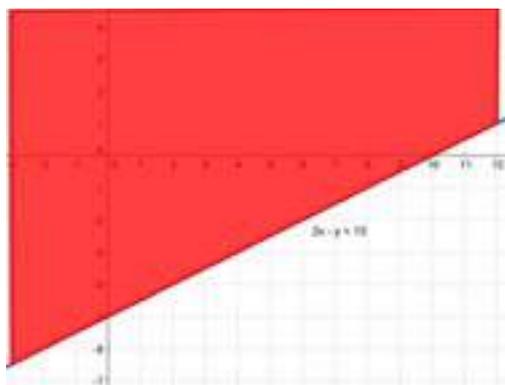
b) $x + 2y \geq 12$

c) $x \leq 3$

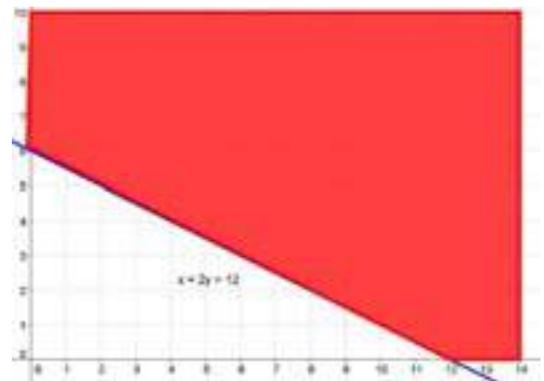
d) $y \geq -2$

Las soluciones pueden verse en los dibujos siguientes:

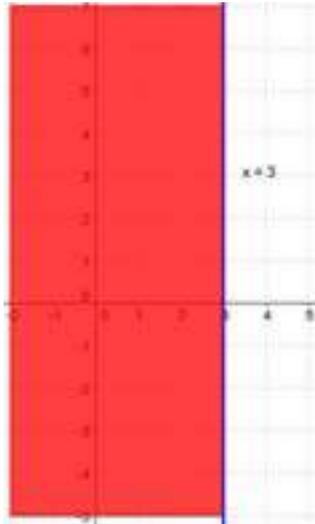
a)



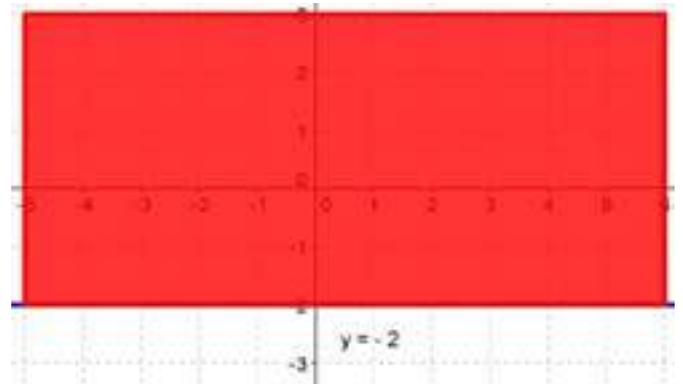
b)



c)



d)



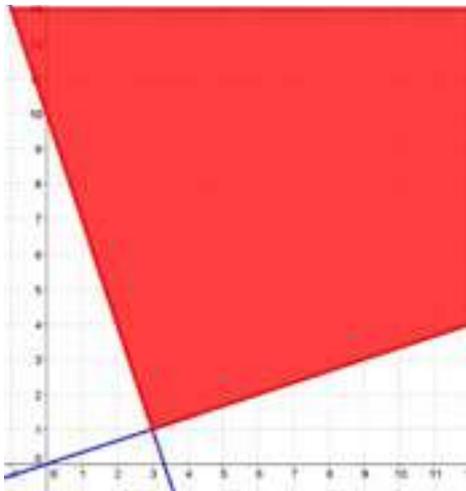
2. Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} 3x + y \geq 10 \\ x - 3y \leq 0 \end{cases}$$

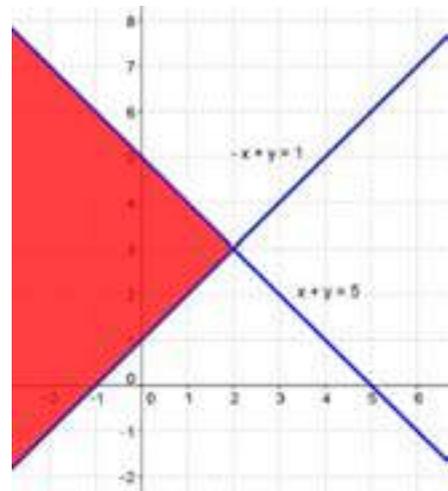
b)
$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ -x + y \geq 1 \end{cases}$$

Las regiones factibles pueden verse en los dibujos:

a)

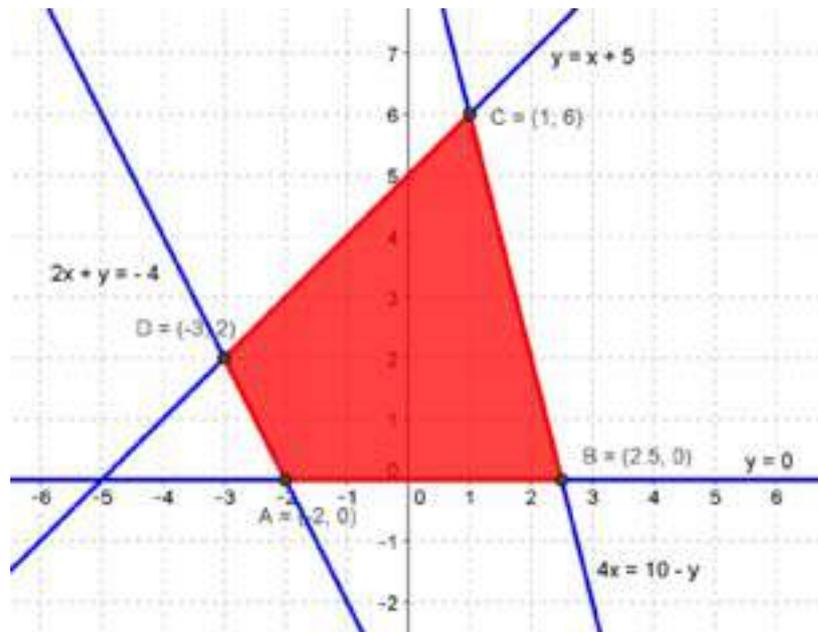


b)



■ 3. Dadas las inecuaciones: $y \leq x + 5$, $2x + y \geq -4$, $4x \leq 10 - y$, $y \geq 0$; representa el recinto que limitan y calcula sus vértices.

El recinto que limitan es el que aparece en el dibujo.

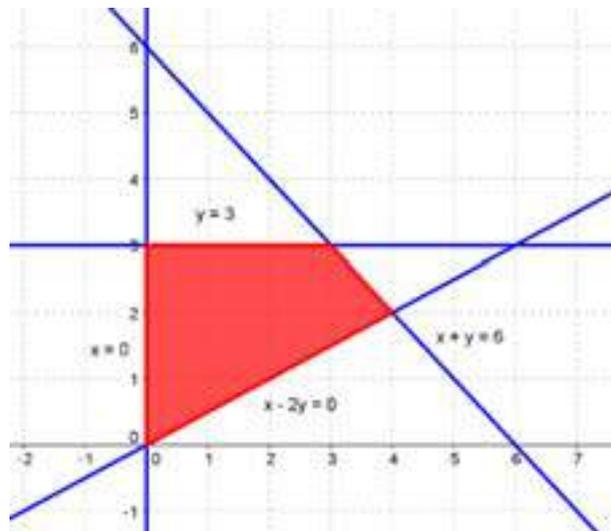


También pueden verse los vértices: A (- 2, 0); B (2,5; 0); C (1, 6) y D (- 3, 2).

4. Para el sistema de inecuaciones siguiente, representa el recinto que limitan, calcula sus vértices y determina todos los puntos de coordenadas enteras que se encuentran en el interior del recinto así como en su frontera.

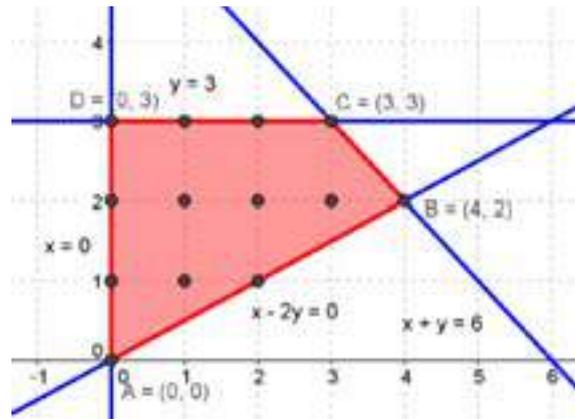
$$\{x - 2y \leq 0, x + y \leq 6, x \geq 0, y \leq 3\}$$

El recinto puede verse en el dibujo:



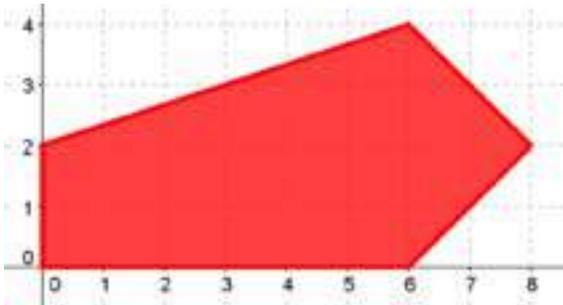
Los vértices son los puntos: A (0, 0); B (4, 2); C (3, 3) y D (0, 3).

Los puntos de coordenadas enteras pedidos, además de los vértices, son: (0, 1); (1, 1); (2, 1); (0, 2); (1, 2); (2, 2); (3, 2); (1, 3) y (2, 3).

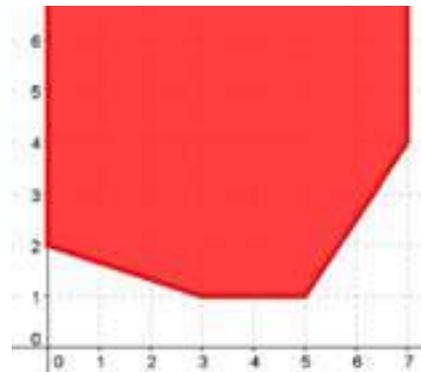


5. ¿Qué sistemas de inecuaciones tienen por solución la región coloreada en cada uno de los gráficos siguientes?

a)



b)



Los sistemas son:

$$a) \begin{cases} x - 3y \geq -6 \\ x + y \leq 10 \\ x - y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

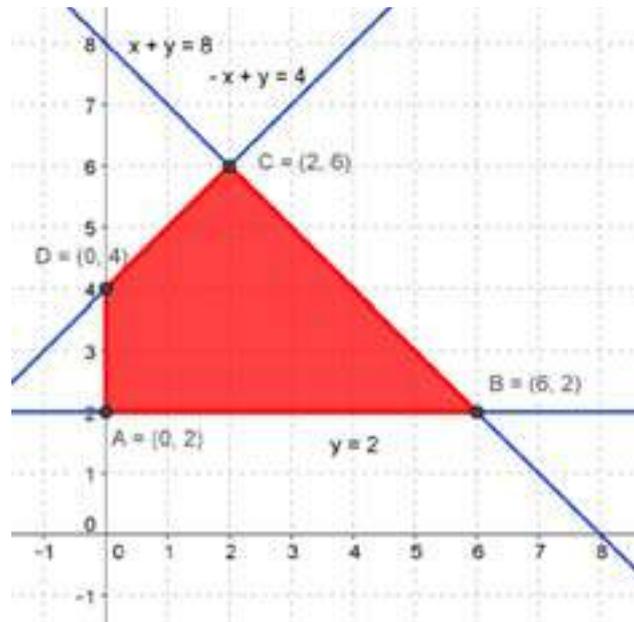
$$b) \begin{cases} x + 3y \geq 6 \\ 3x - 2y \leq 13 \\ x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

6. a) Representa gráficamente la región del plano definida por las inecuaciones:

$$\{0 \leq x, 2 \leq y, x + y \leq 8, -x + y \leq 4\}$$

b) Halla los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x + 3y$ en dicha región y los puntos en los que se alcanzan.

a) La región pedida en la zona coloreada del dibujo.



Las coordenadas de los vértices son:

$$A: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0, 2)$$

$$B: \begin{cases} x + y = 8 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(6, 2)$$

$$C: \begin{cases} x + y = 8 \\ -x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow C(2, 6)$$

$$D: \begin{cases} -x + y = 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow D(0, 4)$$

b) Para hallar los valores máximo y mínimo de $f(x) = x + 3y$ en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en $f(x, y)$ y obtenemos:

$$f_A(0, 2) = 0 + 3 \cdot 2 = 6$$

$$f_B(6, 2) = 6 + 3 \cdot 2 = 12$$

$$f_C(2, 6) = 2 + 3 \cdot 6 = 20$$

$$f_D(0, 4) = 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

El mínimo es 6 y se alcanza en el punto A (0, 2).

El máximo es 20 y se alcanza en el punto C (2, 6).

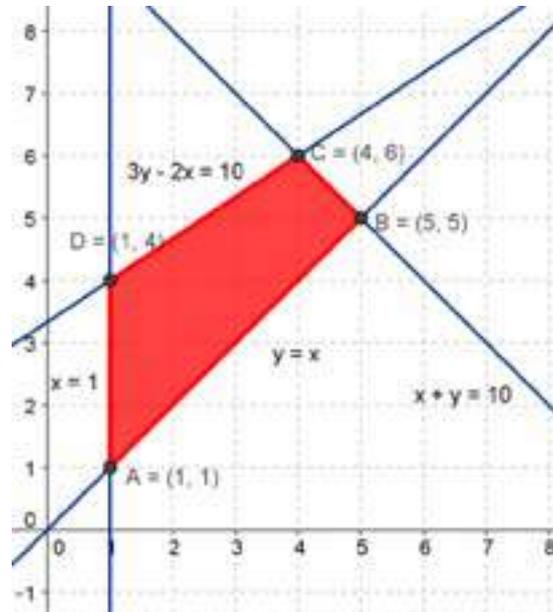
7. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\{x \geq 1, y \geq x, x + y \leq 10, 3y - 2x \leq 10\}$$

a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

b) ¿En qué punto o puntos de esta región alcanza los valores máximo y mínimo la función $f(x, y) = 2x - 2y + 7$?

a) La región factible es la zona coloreada del dibujo.



Las coordenadas de los vértices son:

$$A: \begin{cases} x = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1, 1)$$

$$B: \begin{cases} x + y = 10 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(5, 5)$$

$$C: \begin{cases} x + y = 10 \\ -2x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow C(4, 6)$$

$$D: \begin{cases} -2x + 3y = 10 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow D(1, 4)$$

b) Para hallar los valores en los que se alcanza el máximo y el mínimo de $f(x, y) = 2x - 2y + 7$, en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en $f(x, y)$ y obtenemos:

$$f_A(1, 1) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 7 = 7$$

$$f_B(5, 5) = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 5 + 7 = 7$$

$$f_C(4, 6) = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 6 + 7 = 3$$

$$f_D(1, 4) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 7 = 1$$

El mínimo es 1 y se alcanza en el punto D (1, 4).

El máximo es 7 y se alcanza en todos los puntos del segmento de extremos A (1, 1) y B (5, 5).

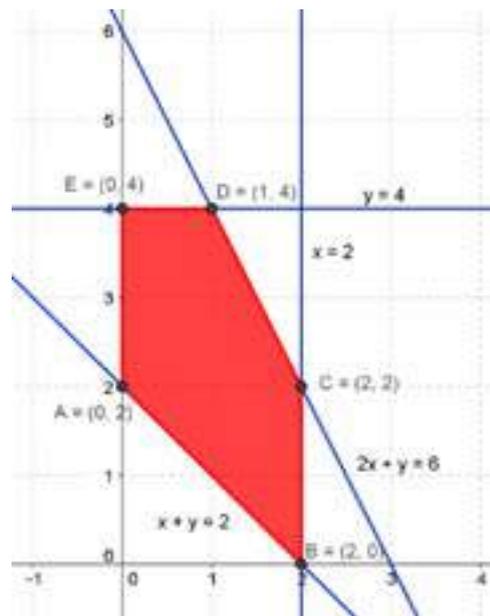
8. Sea el sistema de inecuaciones: $\{x + y \geq 2, 2x + y \leq 6, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$

a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Calcula, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función $f(x, y) = 3x + y$ en la región definida por el sistema.

c) Calcula, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función $g(x, y) = 3x + 3y$ en la región definida por el sistema.

a) El conjunto de soluciones es la región coloreada del dibujo.



Las coordenadas de los vértices son:

$$A: \begin{cases} x = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0, 2)$$

$$B: \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2, 0)$$

$$C: \begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2, 2)$$

$$D: \begin{cases} 2x + y = 6 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow D(1, 4)$$

$$E: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow E(0, 4)$$

b) Para hallar el mínimo de $f(x) = 3x + y$, en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en $f(x, y)$ y obtenemos:

$$f_A(0, 2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$f_B(2, 0) = 3 \cdot 2 + 0 = 6$$

$$f_C(2, 2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$$

$$f_D(1, 4) = 3 \cdot 1 + 4 = 7$$

$$f_E(0, 4) = 3 \cdot 0 + 4 = 4$$

El mínimo es 2 y se alcanza en el punto A (0, 2).

b) Para hallar el mínimo de $g(x) = 3x + 3y$, en dicha región, sustituimos las coordenadas de los vértices en $f(x, y)$ y obtenemos:

$$g_A(0, 2) = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6$$

$$g_B(2, 0) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 6$$

$$g_C(2, 2) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 12$$

$$g_D(1, 4) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 15$$

$$g_E(0, 4) = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

El mínimo es 6 y se alcanza en todos los puntos del segmento de extremos A (0, 2) y B (2, 0).

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 109

9. Un ahorrador dispone de 4000 € para invertir en dos tipos de fondos de inversión a cierto plazo. En el fondo A cada participación tiene un coste de 40 € y produce un beneficio de 15 €, mientras que en el fondo B cada participación da un beneficio de 5 € y su coste es de 50 €. Sabiendo que se puede adquirir un máximo de 60 participaciones del fondo A y al menos 40 del fondo B, determina cuántas participaciones de cada fondo se deben comprar para maximizar el beneficio y calcula ese beneficio.

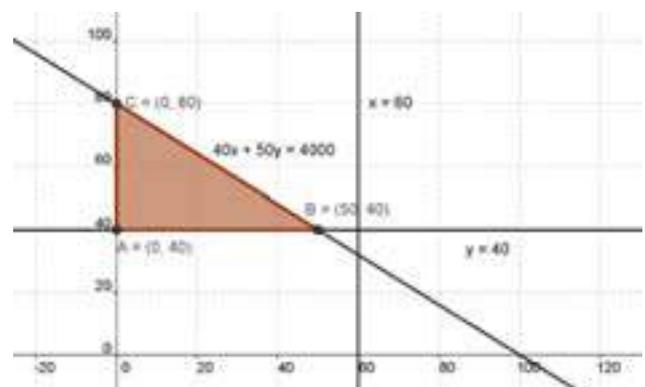
Recogemos la información en una tabla:

| Fondos de inversión | Coste | Inversión | Beneficios |
|---------------------|------------|-----------|------------|
| A | 40 euros | x | 15 euros |
| B | 50 euros | y | 5 euros |
| Disponibilidad | 4000 euros | | |

El programa a maximizar es:

$$\text{Max } z = 15x + 5y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 40x + 50y \leq 4000 \\ x \leq 60 \\ y \geq 40 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$



Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.

Hallamos los vértices de la citada región:

$$A(0, 40): \begin{cases} x = 0 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 40 \end{cases}$$

$$B(50, 40): \begin{cases} 40x + 50y = 4000 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases}$$

$$C(0, 80): \begin{cases} 40x + 50y = 4000 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 80 \end{cases}$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$Z_A = 200$$

$$Z_B = 950$$

$$Z_C = 400$$

La inversión debe ser: 50 participaciones del fondo A y 40 participaciones del fondo B con un beneficio máximo de:

$$15 \cdot 50 + 5 \cdot 40 = 950 \text{ euros.}$$

10. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Cada joya tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 24 euros. La se tipo B se vende a 30 euros y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si el orfebre sólo dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Recogemos la información en una tabla:

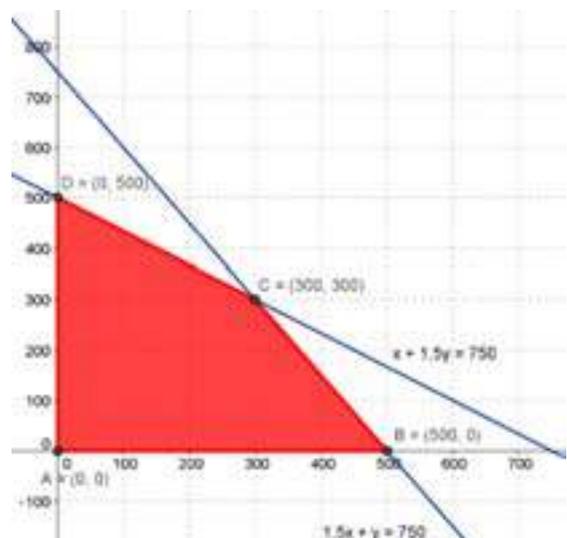
| | Tipo A | Tipo B | Disponibilidad |
|------------------------|----------|----------|----------------|
| Oro | 1 | 1,5 | 750 g |
| Plata | 1,5 | 1 | 750 g |
| Precio | 24 euros | 30 euros | |
| Número de joyas | x | y | |

El programa a maximizar es:

$$\text{Max } z = 24x + 30y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} x + 1,5y \leq 750 \\ 1,5x + y \leq 750 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.



Hallamos los vértices de la citada región:

$$A: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 0)$$

$$B: \begin{cases} 1,5x + y = 750 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 500 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(500, 0)$$

$$C: \begin{cases} 1,5x + y = 750 \\ x + 1,5y = 750 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 300 \end{cases} \Rightarrow C(300, 300)$$

$$D: \begin{cases} x + 1,5y = 750 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 500 \end{cases} \Rightarrow B(0, 500)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$Z_A = 0$$

$$Z_B = 12\,000$$

$$Z_C = 16\,200$$

$$Z_D = 15\,000$$

El orfebre debe fabricar 300 joyas de tipo A y 300 joyas de tipo B para obtener un beneficio máximo de 16 200 euros.

11. Un deportista solamente puede tomar para desayunar barras de chocolate y barras de cereales. Cada barra de chocolate proporciona 40 gramos de hidratos de carbono, 30 g de proteínas y 200 Kcal, mientras que cada barra de cereales proporciona 80 g de hidratos de carbono, 10 g de proteínas y 100 Kcal. El deportista quiere tomar al menos 320 g de hidratos de carbono y 90 g de proteínas, pero no quiere tomar más de 1000 Kcal. El coste de cada barra de chocolate es de 2 euros, mientras que el de cada barra de cereales es de 1 euro.

Determina cuántas barras de cada tipo tiene que tomar el deportista para desayunar de forma que se cumpla las condiciones anteriores y gaste la menor cantidad de dinero.

Recogemos la información en una tabla:

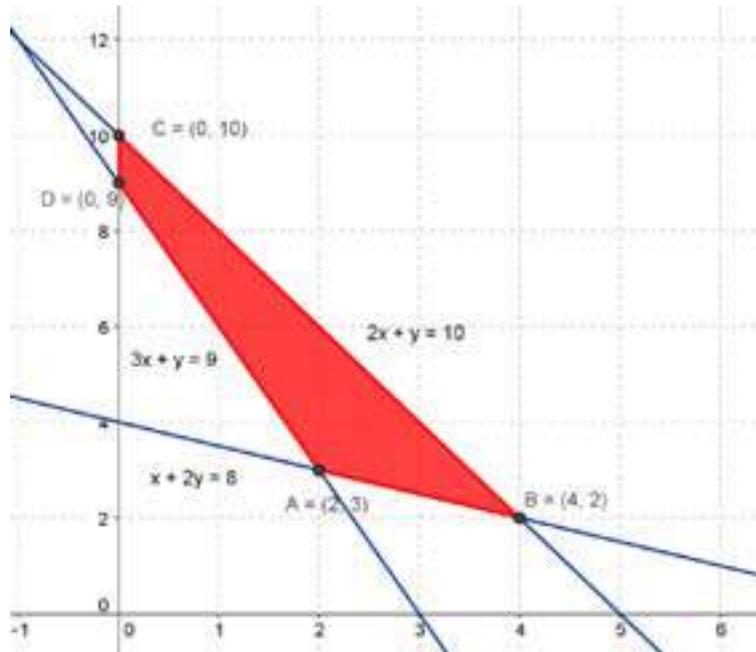
| | Chocolate | Cereales | Necesidades |
|----------------------------|-----------|----------|-------------|
| Hidratos de carbono | 40 | 80 | 320 |
| Proteínas | 30 | 10 | 90 |
| Kcal | 200 | 100 | 1000 |
| Coste | 2 | 1 | |
| Número de barras | x | y | |

El programa a minimizar es:

$$\text{Min } z = 2x + y$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 40x + 80y \geq 320 \\ 30x + 10y \geq 90 \\ 200x + 100y \leq 1000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.



Hallamos los vértices de la citada región:

$$A : \begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(2, 3)$$

$$B : \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(4, 2)$$

$$C : \begin{cases} 2x + y = 10 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow C(0, 10)$$

$$D : \begin{cases} 3x + y = 9 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow D(0, 9)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$Z_A = 7 \qquad Z_B = 10 \qquad Z_C = 10 \qquad Z_D = 9$$

El deportista tiene que tomar dos barras de chocolate y tres barras de cereales.

12. Tenemos que fertilizar unos terrenos de una finca utilizando dos abonos, A y B. El coste del abono A es 0,9 €/kg, y el abono B cuesta 1,5 €/kg. El abono A contiene un 20% de nitrógeno y un 10% de fósforo, mientras que el abono B contiene un 18% y un 15%, respectivamente. Para fertilizar los terrenos correctamente necesitamos un mínimo de 180 kg de nitrógeno y 120 kg de fósforo. ¿Cuál es el gasto mínimo que debemos hacer si queremos fertilizar los terrenos de la finca correctamente?

Recogemos la información en una tabla:

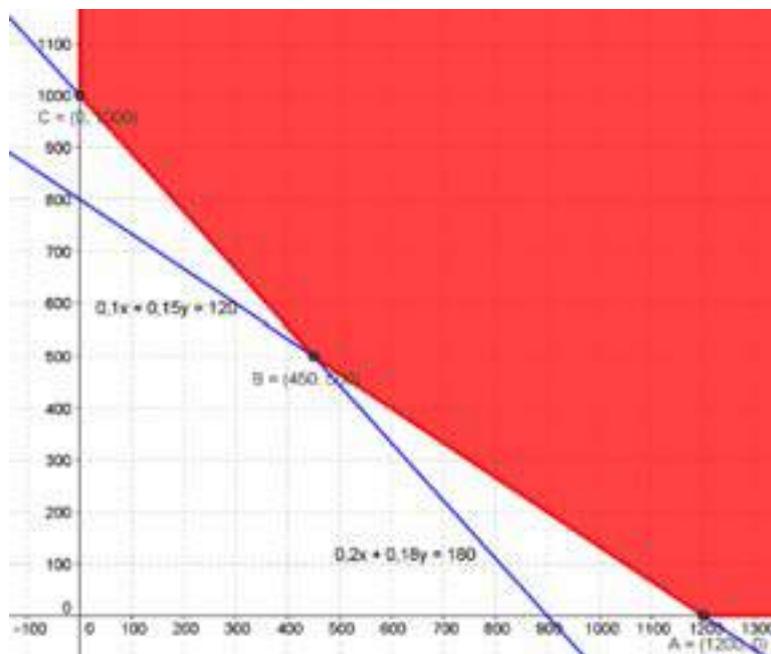
| | Abono A | Abono B | Necesidades |
|----------------------------|---------|---------|-------------|
| Nitrógeno | 20% | 18% | 180 kg |
| Fósforo | 10% | 15% | 120 kg |
| Coste | 0,9 | 1,5 | |
| Kilogramos de abono | x | y | |

El programa a minimizar es:

$$\text{Min } z = 0,9x + 1,5y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 0,2x + 0,18y \geq 180 \\ 0,1x + 0,15y \geq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.



Hallamos los vértices de la citada región:

$$A: \begin{cases} 0,1x + 0,15y = 120 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1200 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1200, 0)$$

$$B: \begin{cases} 0,2x + 0,18y = 180 \\ 0,1x + 0,15y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 450 \\ y = 500 \end{cases} \Rightarrow B(450, 500)$$

$$C: \begin{cases} 0,2x + 0,18y = 120 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1000 \end{cases} \Rightarrow C(0, 1000)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$Z_A(1200, 0) = 0,9 \cdot 1200 + 1,5 \cdot 0 = 1080$$

$$Z_B(450, 500) = 0,9 \cdot 450 + 1,5 \cdot 500 = 1155$$

$$Z_C(0, 1000) = 0,9 \cdot 0 + 1,5 \cdot 1000 = 1500$$

El gasto mínimo que tenemos que hacer para fertilizar la finca es 1080 €, lo que conseguimos comprando 1200 kg de fertilizante A.

13. Una empresa fabrica dos modelos de sillas de ruedas. Los recursos disponibles y las cantidades requeridas para cada silla se dan en la siguiente tabla:

| | Modelo 1 | Modelo 2 | Disponibilidad |
|-----------------------|----------|----------|----------------|
| Horas de mano de obra | 2 | 4 | 1000 |
| Unidades de acero | 3 | 1 | 600 |
| Motores | - | 1 | 200 |

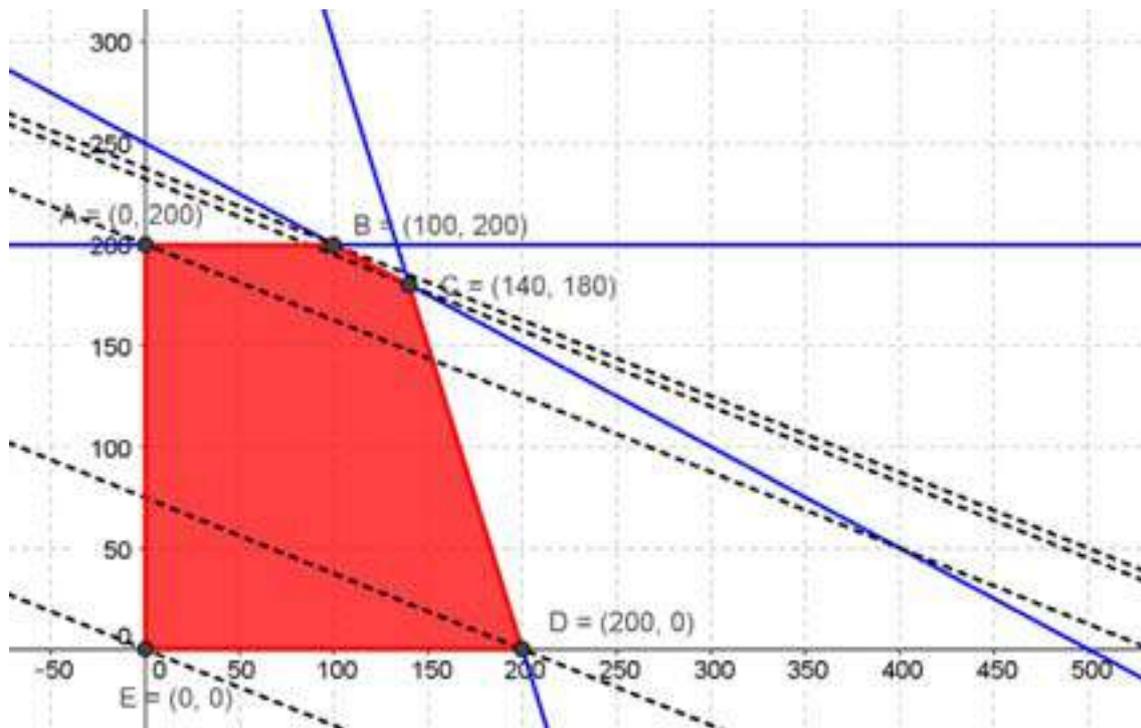
Si cada silla del modelo 1 da un beneficio de 60 euros y cada silla del modelo 2 de 160 euros, ¿cuántas unidades de cada modelo se han de fabricar para maximizar el beneficio? La resolución del programa lineal debe hacerse por el método gráfico, además, analiza gráficamente qué ocurre si la disponibilidad de acero se reduce a 410 unidades.

Sea x el número de sillas del modelo 1 e y el número de sillas del modelo 2, el programa a maximizar es:

$$\text{Max } z = 60x + 160y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 2x + 4y \leq 1000 \\ 3x + y \leq 600 \\ 0 \leq y \leq 200 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada, como puede verse en la imagen.



Trazamos la recta $60x + 160y = 0$, es decir, $3x + 8y = 0$, y las rectas paralelas a ella, que pasan por los vértices de la región factible.

Estas rectas (en trazo discontinuo en el dibujo) son:

Por A: $3x + 8y - 1600 = 0$

Por B: $3x + 8y - 1900 = 0$

Por C: $3x + 8y - 1860 = 0$

Por D: $3x + 8y - 600 = 0$

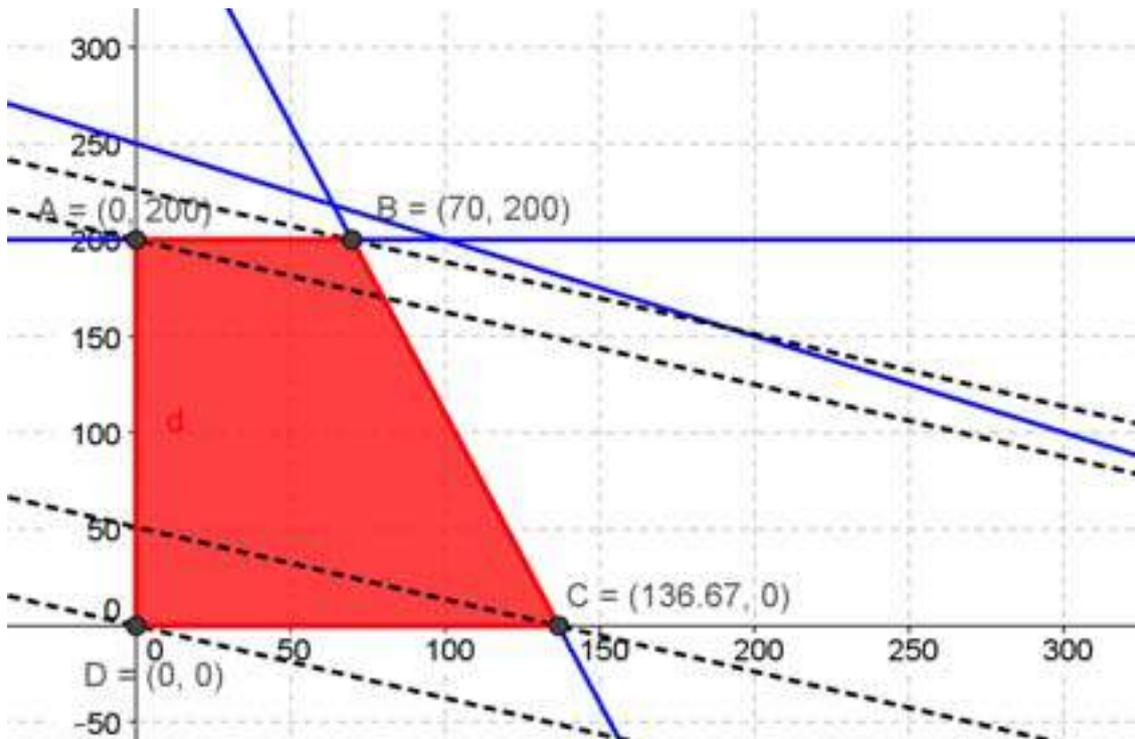
De estas rectas, la que corta al eje OY en el punto de mayor ordenada es la que pasa por el vértice B (100, 200), en el cual, la función objetivo alcanza su máximo.

Para maximizar el beneficio, hay que fabricar 100 sillas del modelo 1 y 200 sillas del modelo 2.

Si la disponibilidad de acero se reduce a 410 unidades, las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 1000 \\ 3x + y \leq 410 \\ 0 \leq y \leq 200 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada, como puede verse en la imagen.



Trazamos la recta $60x + 160y = 0$, es decir, $3x + 8y = 0$, y las rectas paralelas a ella, que pasan por los vértices de la región factible.

Estas rectas (en trazo discontinuo en el dibujo) son:

Por A: $3x + 8y - 1600 = 0$

Por B: $3x + 8y - 1810 = 0$

Por C: $3x + 8y - 410 = 0$

De estas rectas, la que corta al eje OY en el punto de mayor ordenada es la que pasa por el vértice B (70, 200), en el cual, la función objetivo alcanza su máximo.

Para maximizar el beneficio, habría que fabricar 70 sillas del modelo 1 y 200 sillas del modelo 2.

14. Una carpintería elabora dos tipos de muebles, A y B. Cada mueble de tipo A requiere 6 días de trabajo para su elaboración, mientras que cada mueble de tipo B requiere 3 días.. Por la estructura organizativa de dicha empresa, cada mes, que consta de 30 días laborables, se pueden elaborar, a lo suma 4 muebles de tipo A y 8 de tipo B.

a) ¿Cuántos muebles de cada tipo puede fabricar en un mes para cumplir con todos los requerimientos?

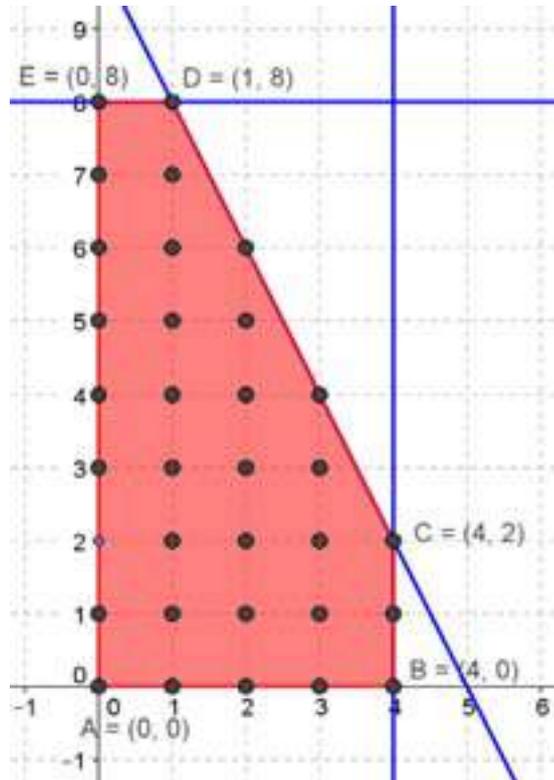
b) Si venden todo lo que fabrican y el beneficio proporcionado por cada mueble tipo A vendido es de 500 euros y por cada mueble de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos muebles de cada tipo deberían fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuántos tendrían que fabricar para maximizar el número de muebles elaborados?

a) Sea x el número de muebles de tipo A e y el número de muebles de tipo B.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ 6x + 3y \leq 30 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones son los puntos de coordenadas enteras de la zona sombreada del dibujo.



b) La función beneficio es $f(x, y) = 500x + 200y$.

Para determinar su máximo, sustituimos en ella los vértices de la región del conjunto de soluciones:

$$f_A(0, 0) = 500 \cdot 0 + 200 \cdot 0 = 0$$

$$f_B(4, 0) = 500 \cdot 4 + 200 \cdot 0 = 2000$$

$$f_C(4, 2) = 500 \cdot 4 + 200 \cdot 2 = 2400$$

$$f_D(1, 8) = 500 \cdot 1 + 200 \cdot 8 = 2100$$

$$f_E(0, 8) = 500 \cdot 0 + 200 \cdot 8 = 1600$$

Para maximizar el beneficio, tienen que fabricar 4 muebles de tipo A y 2 muebles de tipo B.

La función "máximo número de muebles elaborados" es $g(x, y) = x + y$. Para hallar su máximo, procedemos como en el caso anterior:

$$g_A(0, 0) = 0 + 0 = 0$$

$$g_B(4, 0) = 4 + 0 = 4$$

$$g_C(4, 2) = 4 + 2 = 6$$

$$g_D(1, 8) = 1 + 8 = 9$$

$$g_E(0, 8) = 0 + 8 = 8$$

El máximo número de muebles elaborados se obtiene fabricando un mueble tipo A y 8 muebles tipo B.

15. En una ciudad existen dos depósitos de harina A y B y tres panaderías P, Q y R. En el depósito A se almacenan 50 toneladas de harina y en el B 70. Las 120 toneladas que hay en total se reparten del siguiente modo: 30 para P, 50 para Q y 40 para R. El coste, en unidades monetarias, del transporte de una tonelada de un depósito a una panadería viene dado en la tabla adjunta. ¿Cómo debe hacerse la distribución de las 120 toneladas para que el coste del transporte sea mínimo?

| | | | |
|---|---|---|---|
| | P | Q | R |
| A | 8 | 3 | 5 |
| B | 2 | 4 | 4 |

Si llamamos x a las toneladas a transportar desde el depósito A a la panadería P e y a las toneladas a transportar desde el depósito B a la panadería Q, toda la distribución de la harina, en función de las variables anteriores, queda en la forma que recoge la tabla que sigue:

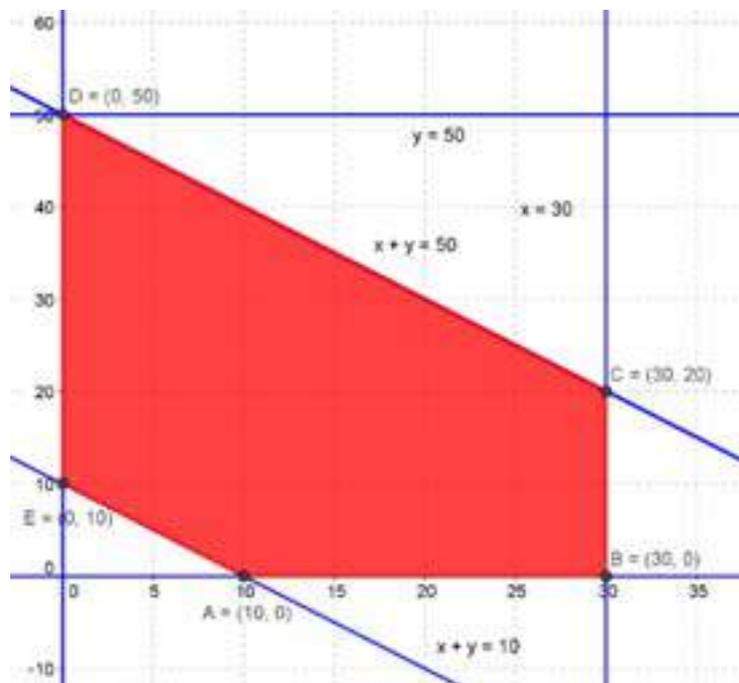
| | | | |
|---|----------|----------|---------------|
| | P | Q | R |
| A | x | y | $50 - x - y$ |
| B | $30 - x$ | $50 - y$ | $-10 + x + y$ |

El programa lineal a resolver es:

$$\text{Min } z = 5x - 2y + 470$$

$$\text{s. a. } \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x \leq 30, y \leq 50 \\ x + y \leq 50 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$$

La región factible es la zona coloreada del dibujo.



El valor de la función objetivo en los vértices de la región factible es:

$$z_A(10, 0) = 5 \cdot 10 - 2 \cdot 0 + 470 = 520$$

$$z_B(30, 0) = 5 \cdot 30 - 2 \cdot 0 + 470 = 620$$

$$z_C(30, 20) = 5 \cdot 30 - 2 \cdot 20 + 470 = 580$$

$$z_D(0, 50) = 5 \cdot 0 - 2 \cdot 50 + 470 = 370$$

$$z_E(0, 10) = 5 \cdot 0 - 2 \cdot 10 + 470 = 450$$

En el vértice D (0, 50) se minimiza la función objetivo, por tanto, la solución es $x = 0$, $y = 50$, es decir, las cantidades a transportar son las que aparecen en la tabla que sigue:

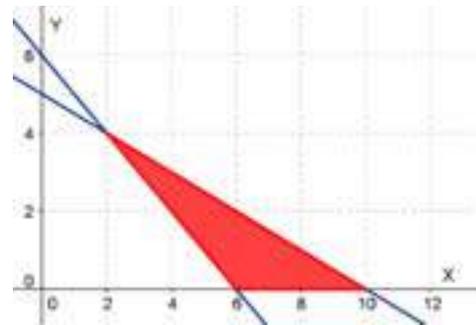
| | P | Q | R |
|---|----|----|----|
| A | 0 | 50 | 0 |
| B | 30 | 0 | 40 |

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 110

1. Considera la región sombreada del dibujo:

a) Determina el sistema de inecuaciones que delimita.

b) Calcula el valor máximo de la función $z = x + 2y$ en esta región e indica para qué valores se alcanza dicho máximo.



a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos (6, 0) y (0, 6) es $x + y = 6$.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (10, 0) y (0, 5) es $x + 2y = 10$.

Por tanto, el sistema que delimita la región sombreada, incluyendo los bordes, es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) El máximo de la función $z = x + 2y$ en la región sombreada se alcanza en uno de sus vértices:

$$z(6, 0) = 6 + 2 \cdot 0 = 6$$

$$z(10, 0) = 10 + 2 \cdot 0 = 10$$

$$z(2, 4) = 2 + 2 \cdot 4 = 10$$

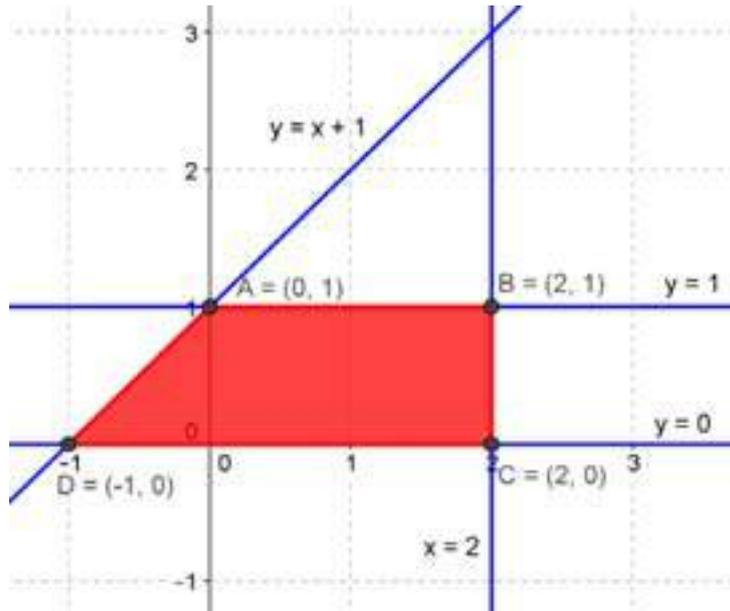
El máximo de la función $z = x + 2y$ en esta región es 10 y se alcanza en el segmento que une los puntos (2, 4) y (10, 0).

■ 2. a) Representa gráficamente el recinto limitado por las desigualdades siguientes:

$$\{0 \leq y \leq 1; y - 1 \leq x \leq 2\}$$

b) Halla los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -x + 2y$ en dicho recinto, así como los puntos en los que se alcanza dichos valores.

a) El recinto pedido puede verse en el dibujo.



b) La región factible es la zona sombreada del apartado anterior.

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo $f(x, y) = -x + 2y$:

$$f_A(0, 1) = -0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$f_B(2, 1) = -2 + 2 \cdot 1 = 0$$

$$f_C(2, 0) = -2 + 2 \cdot 0 = -2$$

$$f_D(-1, 0) = -(-1) + 2 \cdot 0 = 1$$

El valor máximo, 2, se alcanza en el punto A (0, 1) y el valor mínimo, -2, se alcanza en el punto C (2, 0).

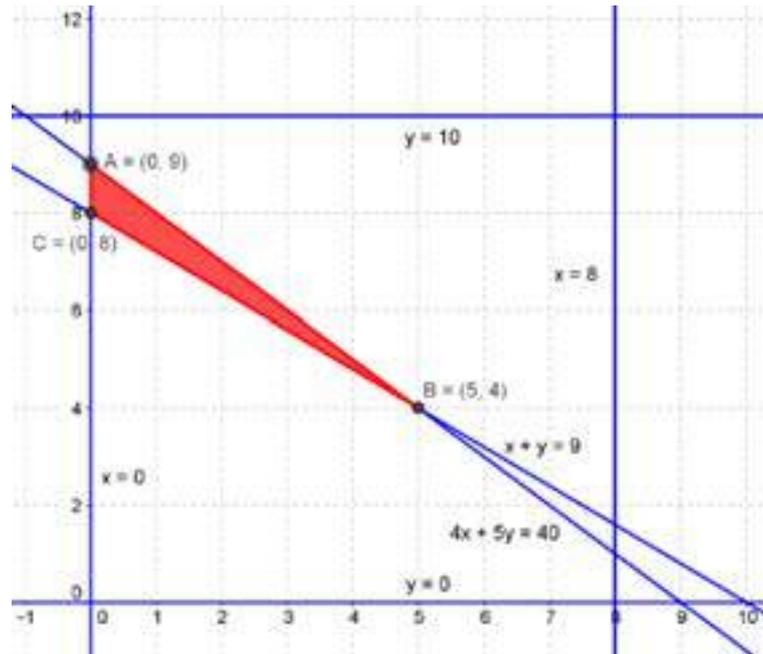
3. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autobús grande cuesta 80 € y el de uno pequeño 60 €. ¿Cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible?

a) Siendo x el número de autocares de 40 plazas e y el número de autocares de 50 plazas, el programa a optimizar es:

$$\text{Min } z = 60x + 80y$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 40x + 50y \geq 400 \\ x + y \leq 9 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible como puede verse en la imagen.



Hallamos los vértices de la citada región:

$$A : \begin{cases} x + y = 9 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow A(0, 9)$$

$$B : \begin{cases} x + y = 9 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(5, 4)$$

$$C : \begin{cases} 4x + 5y = 40 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow C(0, 8)$$

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$Z_A = 720$$

$$Z_B = 620$$

$$Z_C = 640$$

Para que la excursión resulte lo más económica posible, hay que utilizar 5 autocares de 40 plazas y 4 de 50 plazas.

4. Una industria papelera elabora dos clases de papel a partir de dos tipos de madera. Las cantidades de madera necesarias por unidad de cada tipo de papel y las disponibilidades semanales (en las unidades adecuadas) aparecen en la tabla:

| | Papel 1 | Papel 2 | Disponibilidades |
|----------|---------|---------|------------------|
| Madera 1 | 8 | 8 | 64 |
| Madera 2 | 4 | 8 | 50 |

Si el beneficio neto por cada unidad de papel son 100 000 y 200 000 unidades monetarias respectivamente, ¿qué cantidad de papel de cada clase nos dará un beneficio máximo?

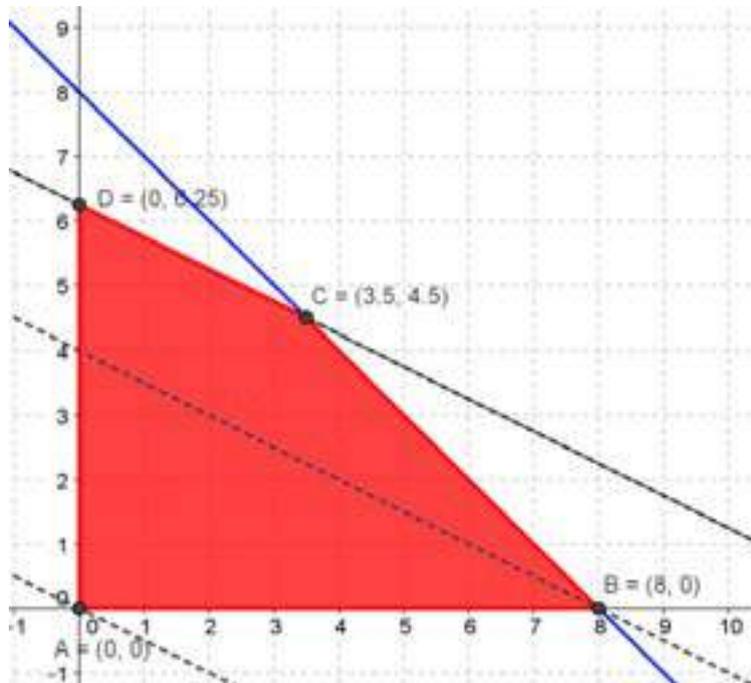
La resolución del programa lineal debe hacerse por el método gráfico, además, analiza gráficamente qué ocurre si las disponibilidades de madera 1 se reducen a 50 unidades.

a) Sea x el número de unidades de papel 1 e y el número de unidades de papel 2, el programa a maximizar es:

$$\text{Max } z = 100\,000x + 200\,000y$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} 8x + 8y \leq 64 \\ 4x + 8y \leq 50 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada, como puede verse en la imagen.



Trazamos la recta $100\,000x + 200\,000y = 0$, es decir, $x + 2y = 0$, y las rectas paralelas a ella, que pasan por los vértices de la región factible.

Estas rectas (en trazo discontinuo en el dibujo) son:

Por A: $x + 2y = 0$

Por B: $x + 2y - 8 = 0$

Por C: $x + 2y - 12,5 = 0$

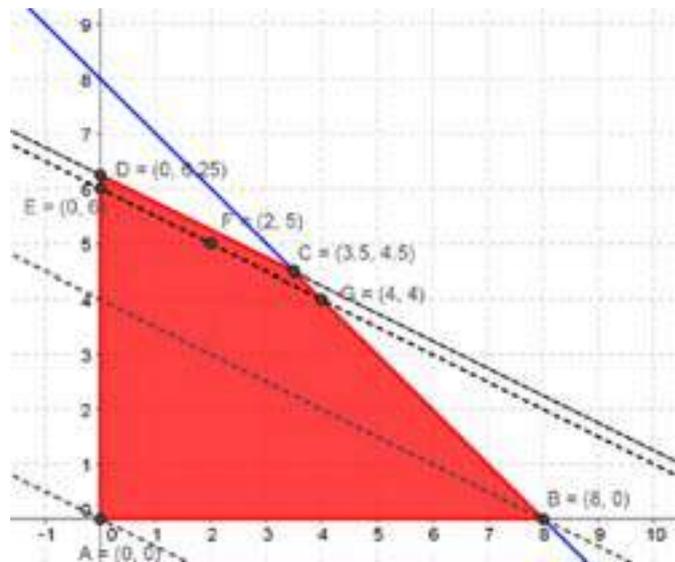
Por D: $x + 2y - 12,5 = 0$

De estas rectas, la que corta al eje OY en el punto de mayor ordenada es la que pasa por los vértices C (3,5; 4,5) y D (0; 6,25).

Como los puntos del segmento CD no tiene ambas coordenadas enteras, trazamos la recta de nivel más próxima al segmento CD que pasa por el punto (0, 6), $x + 2y - 12 = 0$. Los puntos de la región factible que pertenecen a esa recta y tienen las dos coordenadas enteras son los que maximizan el beneficio.

Estos son E (0, 6), F (2,5) y G (4, 4); es decir, hay que elaborar 6 unidades de papel 2, o 2 unidades de papel 1 y 5 unidades de papel 2, o bien 4 unidades de cada tipo de papel.

El beneficio máximo en todos los casos es de 1 200 000 unidades monetarias.

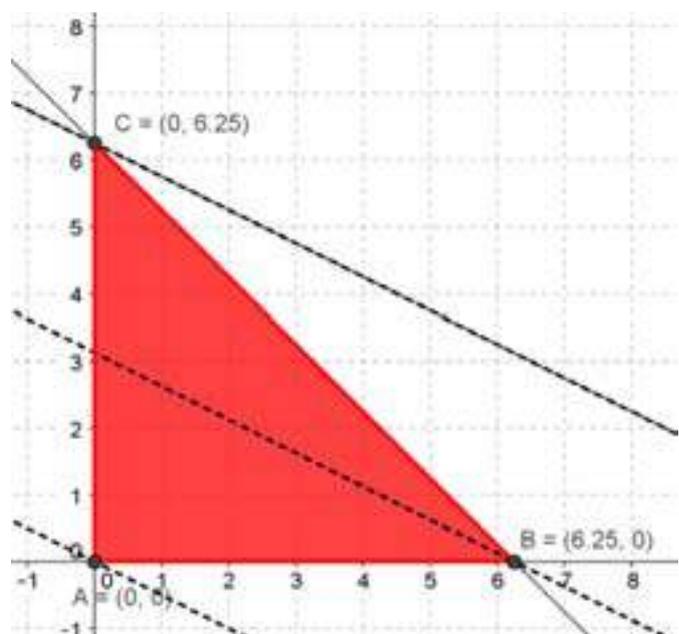


b) Ahora las restricciones son:

$$\begin{cases} 4x + 4y \leq 25 \\ 2x + 4y \leq 25 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Procediendo como en el caso anterior se obtiene:

Ahora la solución sería solo el vértice (0, 6,25), pero como no tiene coordenadas enteras es el punto (0, 6). En este caso, para maximizar el beneficio hay que elaborar 6 unidades de papel 2 y ninguna de papel 1.



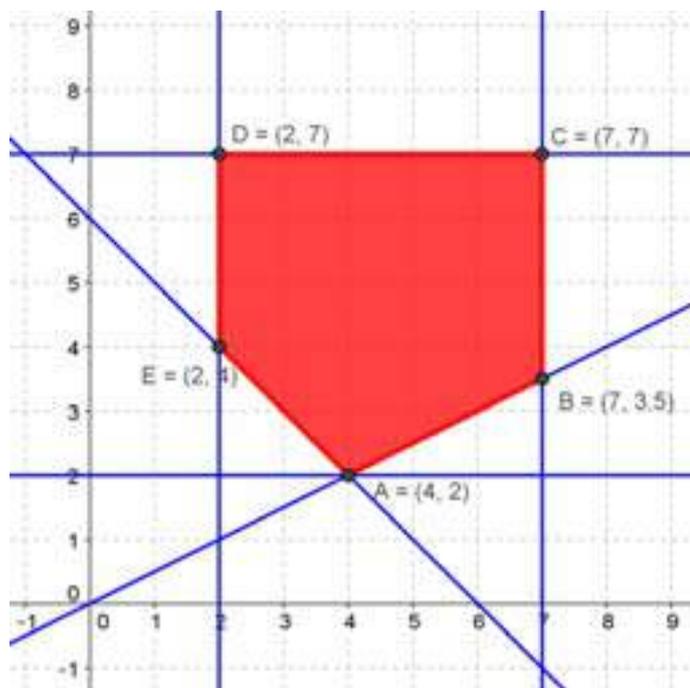
5. Un cadena de supermercados compra naranjas a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden naranjas a 1000 y 1500 euros por tonelada, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para satisfacer la demanda, la cadena debe comprar en total como mínimo 6 toneladas. La cadena debe comprar como máximo al distribuidor A el doble de naranjas que al distribuidor B. ¿Qué cantidad de naranjas debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste? Determina dicho coste mínimo.

Sea x el número de toneladas de tipo A e y el número de toneladas de tipo B, el programa lineal a resolver es:

$$\text{Mix } z = 1000x + 1500y$$

$$\text{s. a. } \begin{cases} 2 \leq x \leq 7 \\ 2 \leq y \leq 7 \\ x + y \geq 6 \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada:



Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo:

$$z_A(4, 2) = 1\,000 \cdot 4 + 1\,500 \cdot 2 = 7\,000$$

$$z_B(7; 3,5) = 1\,000 \cdot 7 + 1\,500 \cdot 3,5 = 12\,250$$

$$z_C(7, 7) = 1\,000 \cdot 7 + 1\,500 \cdot 7 = 17\,500$$

$$z_D(2, 7) = 1\,000 \cdot 2 + 1\,500 \cdot 7 = 12\,500$$

$$z_E(2, 4) = 1\,000 \cdot 2 + 1\,500 \cdot 4 = 8\,000$$

Para obtener el mínimo coste, ha de comprar 4 toneladas al distribuidor A y 2 toneladas al distribuidor B. El coste mínimo asciende a 7 000 euros.

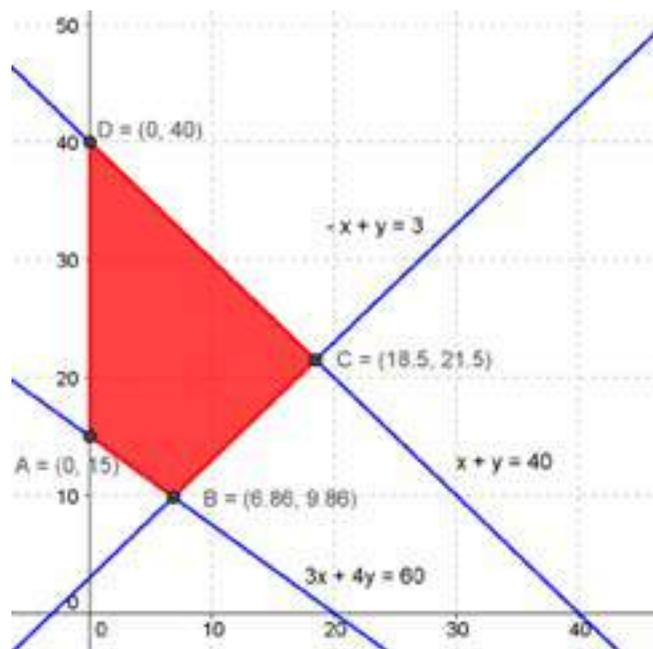
6. Un agricultor estima que el cuidado de cada metro cuadrado cultivado de lechugas requiere semanalmente 45 minutos, mientras que el de coles exige 50. Dispone de un terreno de 40 m² de extensión que puede dedicar total o parcialmente al cultivo de las dos verduras, pero quiere plantar al menos 3 m² de más de coles que de lechugas. El metro cuadrado de lechugas le reporta un beneficio de 3 €, mientras que el de coles le proporciona 4 €, planificando obtener al menos un beneficio de 60 €. ¿Cuánta extensión le interesa plantar de cada verdura si su objetivo es que el tiempo dedicado al cuidado de cada cultivo sea mínimo?

Sea x el número de m² plantado de lechugas e y el número de m² plantado de coles. El programa lineal a resolver es:

$$\text{Min } z = 45x + 50y$$

$$\text{s. a. } \begin{cases} x + y \leq 40 \\ y \geq x + 3 \\ 3x + 4y \geq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada del dibujo:



Los vértices de la región factible son los puntos A (0, 15), B (6,86; 9,86), C (18,5; 21,5) y D (0, 40).

Para hallar el mínimo tiempo, sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo:

$$z_A(0, 15) = 45 \cdot 0 + 50 \cdot 15 = 750$$

$$z_B(6,86; 9,86) = 45 \cdot 6,86 + 50 \cdot 9,86 = 801,43$$

$$z_C(18,5; 21,5) = 45 \cdot 18,5 + 50 \cdot 21,5 = 1907,5$$

$$z_D(0, 40) = 45 \cdot 0 + 50 \cdot 40 = 2000$$

Le interesa plantar 15 m² de coles y no plantar lechugas.

7. Un tendero va al mercado central con su furgoneta, que puede cargar 700 kilogramos, y con 500 euros en el bolsillo, a comprar fruta para su tienda. Encuentra manzanas a 0,80 €/kg y naranjas a 0,50 €/kg. Calcula que podrá vender las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,58 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?

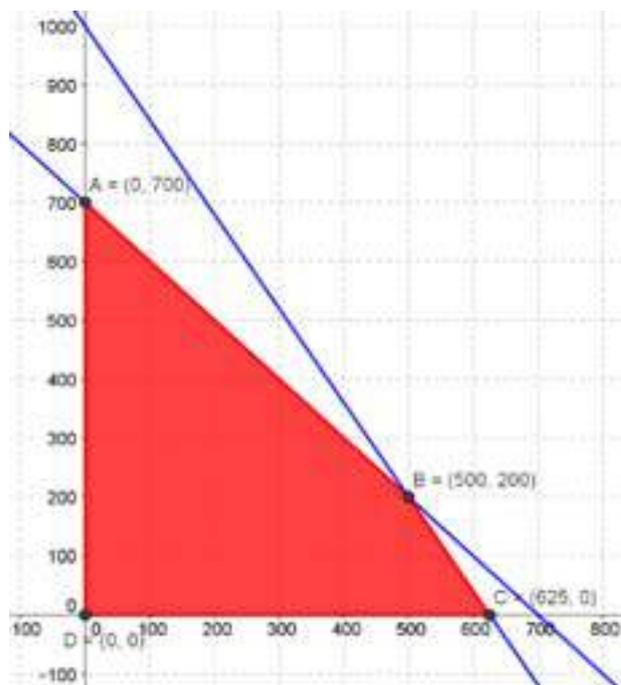
Sean x los kilogramos de manzanas e y los kilogramos de naranjas que compra. La función que queremos maximizar es $z(x, y) = 0,10x + 0,08y$, puesto que Beneficios = Ingresos – Costes.

El programa lineal a optimizar es:

$$\text{Max } z = 0,10x + 0,08y$$

$$\text{s. a. } \begin{cases} x + y \leq 700 \\ 0,80x + 0,50y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada:



Los vértices de la región factible son los puntos:

$$A(0, 700), B(500, 200), C(625, 0) \text{ y } D(0, 0).$$

Para obtener el máximo, sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo:

$$z_A(0, 700) = 0,10 \cdot 0 + 0,08 \cdot 700 = 56 \qquad z_B(500, 200) = 0,10 \cdot 500 + 0,08 \cdot 200 = 66$$

$$z_C(625, 0) = 0,10 \cdot 625 + 0,08 \cdot 0 = 62,5 \qquad z_D(0, 0) = 0,10 \cdot 0 + 0,08 \cdot 0 = 0$$

Para obtener el máximo beneficio, 66 euros, le conviene comprar 500 kg de manzanas y 200 kg de naranjas.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 111

Hipatia de Alejandría

Proponemos unas pautas a seguir en la realización de un trabajo sobre Hipatia de Alejandría.

El escenario: Descripción de la época histórica. ¿Cómo era el mundo occidental en la época? La ciudad donde se desarrolla la historia: orígenes, ¿cómo era en los siglos IV y V? ¿Cómo es en la actualidad? Relaciones de la ciudad con el resto del mediterráneo.

Las instituciones: La Biblioteca y el Museo: ¿Qué eran? ¿Qué funciones cumplían? ¿Por qué las destruyen? Las “escuelas”: ¿Cómo era la enseñanza en la época? ¿Qué estilos de enseñanza se practicaban?



Las personas y los personajes: Los habitantes de la ciudad: griegos, egipcios y judíos. Las clases sociales, las relaciones entre los habitantes, los cultos, las creencias... El personaje principal: ¿Cómo es? ¿Cómo lo ven los demás? Otros personajes relevantes.

Las relaciones: Estudio de la relación de Hipatia con otros personajes: padres, maestros, alumnos, adversarios, enemigos... Análisis de las diferencias entre los personajes: contrastes, disputas, enfrentamientos... Comentarios sobre las “razones” del comportamiento de los personajes: actitud antes los hechos que ocurren, reacciones...

Hechos concretos: Análisis en profundidad de alguna situación concreta: luchas por el poder, muerte de la protagonista...

El legado de Hipatia: Estudio de la evolución histórica de la situación de la mujer en la sociedad, en la educación, en la ciencia, etc.

En este caso ofrecemos información de fácil acceso.

Referencias bibliográficas:

ALIC, MARGARET (1991): El legado de Hipatia (Historia de las mujeres en la ciencia desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX). Siglo XXI editores. Mexico D. F.

CALVO POYATO, JOSÉ (2009): El sueño de Hipatia. Editorial Plaza y Janés. Barcelona.

DÍAZ, GULLERMO (2009): Hipatia de Alejandría. Editorial Alacena. Málaga.

DZIELSKA, MARÍA (2004): Hipatia de Alejandría. Ediciones Siruela. Madrid.

GÁLVEZ, PEDRO (2004): Hypatia (La mujer que amó la ciencia). Editorial Lumen. Barcelona.

GARCÍA, OLALLA (2009): El jardín de Hipatia. Editorial Espasa Calpe. Madrid.

MATAIX, SUSANA (2003): Matemática es nombre de mujer. Rubes editorial. Barcelona.

Direcciones electrónicas:

[1] <http://translate.google.es/translate?hl=es&sl=en&u=http://www.polyamory.org/~howard/Hypatia/&prev=search>

[2] https://www.google.es/?gws_rd=ssl#q=Biograf%C3%ADas+de+mujeres+matem%C3%A1ticas

Película de cine:

AMENÁBAR, ALEJANDRO (2009): *Ágora*.