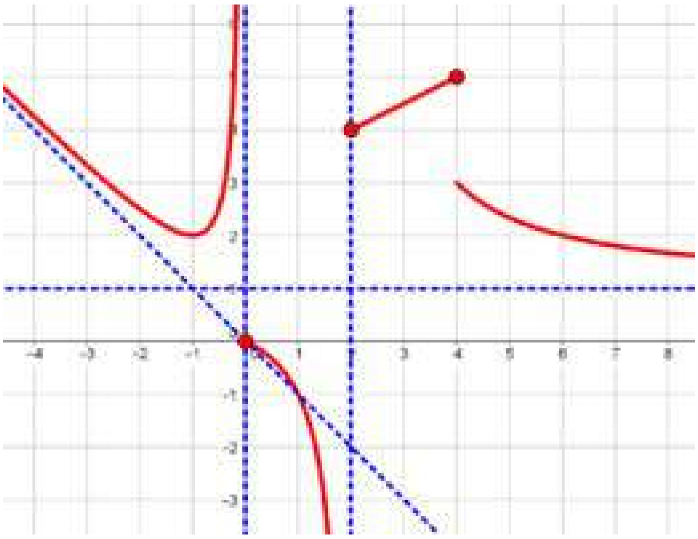
UNIDAD 5: Límites de funciones. Continuidad

CUESTIONES INICIALES-PÁG.114

1. En la función y = f (x), cuya gráfica aparece en el dibujo, calcula:



- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
- **f (0) ; f (2) y f (4)**
- **Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.**

Las respuestas son:

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *no existe*
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ *no existe*
- $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ no existe.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- f (0) = 0; f (2) = 4 y f (4) = 5
- Las rectas x = 0 y x = 2 son una asíntotas verticales. La recta y = 1 es una asíntota horizontal y la recta y = - x es una asíntota oblicua.

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4}$ **, halla:**

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

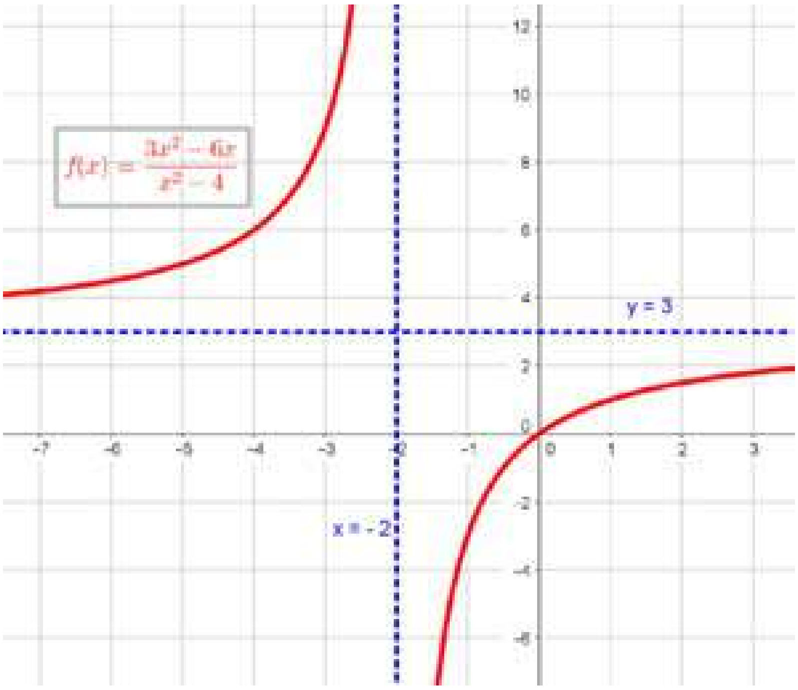
Los límites pedidos son:

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \dfrac{0}{-4} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{3x}{x+2} = \frac{3}{2}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$

Los resultados anteriores pueden verse en la gráfica.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 135

1. Sumas. Demuestra: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{999 \cdot 1001} = 0,\overline{498501}$.

El término general de la sucesión formada por los sumando es $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Descomponiendo este en fracciones simples, obtenemos: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} + \frac{-1/2}{2n+1}$.

Aplicando esta igualdad a cada uno de los sumandos, obtenemos:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{3}$$

$$\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1/2}{3} + \frac{-1/2}{5}$$

$$\frac{1}{5\cdot 7}=\frac{1/2}{5}+\frac{-1/2}{7}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\frac{1}{997\cdot 999}=\frac{1/2}{997}+\frac{-1/2}{999}$$

$$\frac{1}{999\cdot 1001}=\frac{1/2}{999}+\frac{-1/2}{1001}$$

Sumando todas estas igualdades, obtenemos:

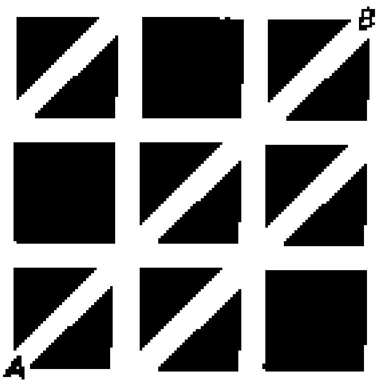
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 1001}=\frac{1/2}{1}+\frac{-1/2}{1001}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2002}=\frac{1000}{2001}=\frac{500}{1001}=0,\overline{498501}.$$

Fácilmente se comprueba la igualdad sin más que poner el número decimal periódico puro dedo en forma de fracción:

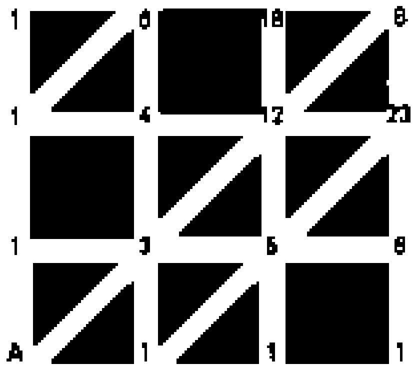
$$0,\overline{498501}.=\frac{499500}{999999}=\frac{500\cdot 27\cdot 37}{1001\cdot 27\cdot 37}=\frac{500}{1001}$$

Por tanto, la igualdad que plantea el problema es verdadera.

2. Plano de ciudad. La figura representa el plano de una ciudad. ¿De cuántas formas se puede ir desde A hasta B de manera que nunca retrocedamos?



Queda del siguiente modo:



Solamente consideramos los caminos en vertical hacia arriba que denominamos como V, en diagonal hacia arriba que denotamos con D y en horizontal hacia la derecha que denotamos con H.

En la figura señalamos el número de caminos que hay desde A a cada esquina. Fácilmente se llegan a encontrar esos números sin más que ir trazando caminos. Así en el cruce que hay un 3 se llega a el desde A por tres caminos V-D-H; en el cruce que hay 5 = 3 + 1 + 1, se llega a el por cinco caminos: HHV-HD-DH-VH-HVH.

Observamos que el número que hay en cada cruce es suma de los que de las dos esquinas contiguas si el cuadrado es cerrado y de las tres esquinas si el cuadrado se abierto.

3. Trama triangular. Resuelve el problema análogo al que figura en la página anterior, considerando que en este caso los triángulos equiláteros que debes contar son los que tienen el vértice hacia abajo.

Procediendo de forma análoga a las del problema de la página anterior, obtenemos:

	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Nº de triángulos de lado 1	Total
Trama n = 2	1					1
Trama n = 3	3					3
Trama n = 4	6	1				7
Trama n = 5	10	3				13
Trama n = 6	15	6	1			22
Trama n = 7	21	10	3			34
Trama n = 8	28	15	6	1		50

Observamos que aparecen dos sucesiones según sea n par o impar.

● Si n es par, obtenemos la sucesión: 1, 7, 22, 50, 95, 161…

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general vale:

$$\frac{n \cdot (n+2) \cdot (2n-1)}{24}$$

● Si n es impar, obtenemos la sucesión: 3, 13, 34, 70, 125…

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general vale:

$$\frac{(n-1) \cdot (n+1) \cdot (2n-3)}{24}$$

Por tanto, el número de triángulos equiláteros con el vértice hacia abajo que podemos contar en una trama triangular de n unidades de lado es:

$$\begin{cases} \dfrac{n \cdot (n+2) \cdot (2n-1)}{24} & si\ n\ es\ par \\ \dfrac{(n-1) \cdot (n+1) \cdot (2n+3)}{24} & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

● En una trama de lado n hay:

I. 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28… = $\binom{n}{n-2}$ triángulos de lado 1 con n ≥ 2.

II. 1 + 3 + 6 + 10 + 15 +… = $\binom{n-2}{n-4}$ triángulos de lado 2 con n ≥ 4.

III. 1 + 3 + 6 + 10 + 15 +… = $\binom{n-4}{n-6}$ triángulos de lado 3 con n ≥ 6.

Así sucesivamente.

En general es $\binom{n+2-2k}{n-2k}$ con k = 1, 2,…, n; siendo k el número de unidades de lado.

4. Primos. Demuestra que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre un número múltiplo de 24.

Hemos de demostrar que $p^2 - q^2 = \dot{24}$, siendo p y q número primos mayores que 3.

Para demostrarlo, vemos primero que si p es un número primo mayor que 3, entonces $p^2 - 1 = \dot{24}$.

Sabemos que $p^2 - 1 = (p - 1) \cdot (p + 1)$. Los números están colocados: p – 1, p (primo) y p + 1.

Como p es primo, p – 1 y p + 1 son múltiplos de 2 y uno de ellos también es múltiplo de 4, pues en tres números consecutivos mayores que 3 con los extremos pares a la fuerza uno de estos extremos es múltiplo de 4.

También (p – 1) o (p + 1) han de ser múltiplos de 3, puesto que son tres números consecutivos.

Por tanto, se cumple que $p^2 - 1 = \dot{2} \cdot \dot{3} \cdot \dot{4} = \dot{24}$.

Además como: $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad p^2 - q^2 = \dot{24} - \dot{24} = \dot{24}$.

Por tanto, se cumple que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre múltiplo de 24.

5. Tablero de ajedrez. ¿Cuántos rectángulos de lados desiguales hay en un tablero de ajedrez?

Partimos del siguiente cuadro:

TIPO DE TABLERO	TIPOS DE RECTÁNGULOS										TOTAL
	1 x 1	1 x 2	1 x 3	1 x 4	2 x 2	2 x 3	2 x 4	3 x 3	3 x 4	4 x 4	
1 x 1	1										1
2 x 2	4	4			1						9
3 x 3	9	12	6		4	4		1			36
4 x 4	16	24	16	8	9	12	6	4	4	1	100
5 x 5	25	40	30	20	16	24	16	9	12	4	225

Observamos la sucesión del número total de rectángulos (incluidos como tales los cuadrados):

1, 9, 36, 100, 225, 441…

$1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2, 21^2$…

En un tablero 8x8, que es un tablero de ajedrez, hay $36^2 = 1296$ rectángulos.

Si nos quedamos solo con los no cuadrados, habría 1296 – 204 cuadrados = 1092 rectángulos no cuadrados en un tablero 8x8.

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 137

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} \left(2x^2 - 6x + 1\right)^{\frac{2}{x^2 - 6x + 9}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^2}{x+1} - 3x\right)$

En la imagen podemos ver el resultado de estos límites hechos con las opciones del menú **Análisis** de Wiris.

$$\lim_{x \to 3^+} (2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1)^{\frac{2}{x^2 - 6 \cdot x + 9}} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3 \cdot x^2}{x+1} - 3 \cdot x\right) \rightarrow -3$$

2. Halla las asíntotas de la función f(x) = $2x - \dfrac{4}{x-2}$

En la imagen vemos la solución de esta actividad mediante Wiris.

$$f(x) := \left(2 \cdot x - \frac{4}{x-2}\right) \rightarrow x \mapsto 2 \cdot x - \frac{4}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \rightarrow -\infty$$

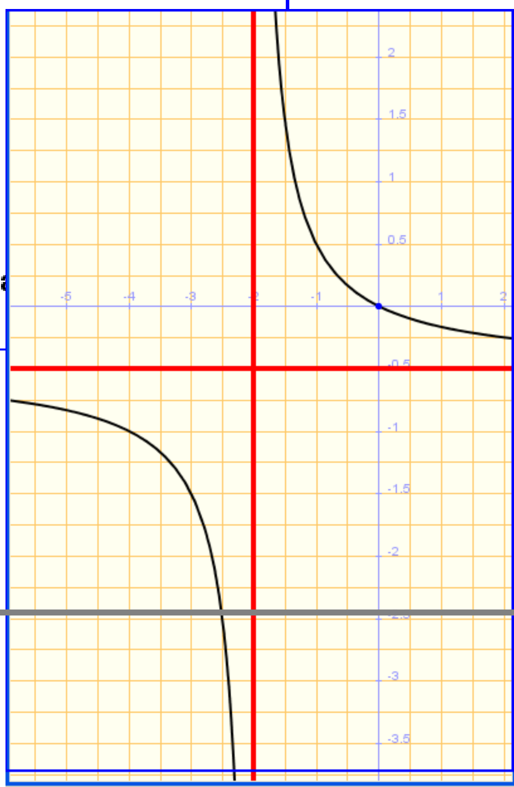
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow 2$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - 2 \cdot x) \rightarrow 0$$

representar(f(x),{asintota={color=rojo,

→ tablero1



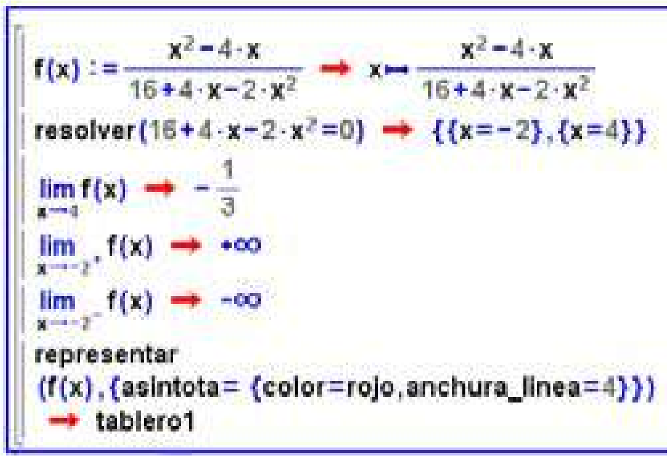
Hemos obtenido las asíntotas de esta función que son las rectas de ecuaciones $x = 2$ e $y = 2x$.

En la gráfica podemos ver la función y sus asíntotas.

3. Estudia, de forma analítica y gráfica, la continuidad de las funciones siguientes:

a) f(x) = $\dfrac{x^2-4x}{16+4x-2x^2}$ **b) f(x) =** $\begin{cases} sen\ x & si\quad -\dfrac{\pi}{2}\le x\le 0 \\ 1-3^x & si\quad 0<x<1 \\ \dfrac{4}{x+1} & si\quad 1\le x\le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

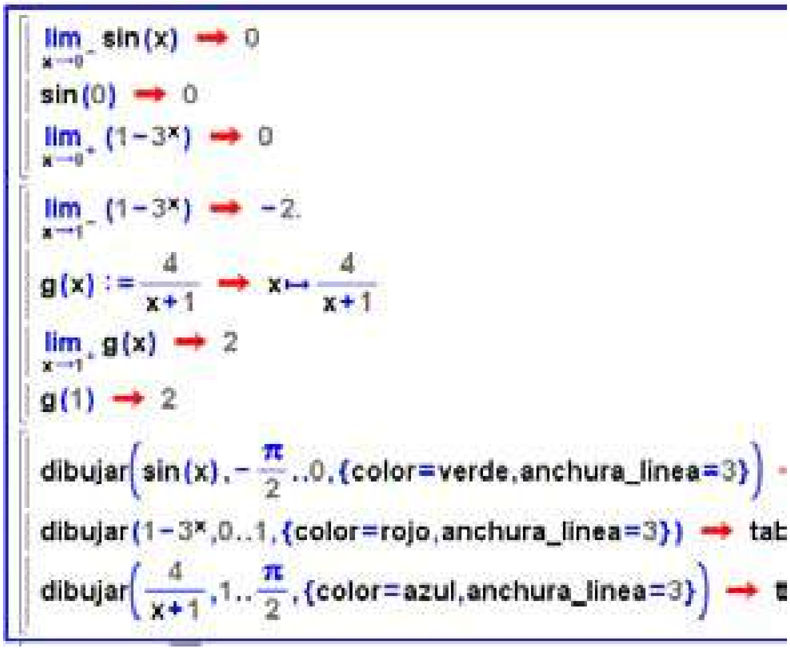
a) La función f(x) presenta dos discontinuidades en x = 4 y x = - 2. Hallando los límites, como vemos en la imagen, tenemos que en x = 4 presenta una discontinuidad evitable y en x = - 2 una discontinuidad no evitable de primera especie con salto infinito. En la siguiente gráfica podemos ver la discontinuidad en x = - 2.



b) Para esta función a trozos estudiamos la continuidad en x = 0 y en x = 1.

En la imagen vemos que para x = 0 es continua y no lo es para x = 1. Por tanto, la función es continua en todo su dominio excepto en x = 1.

En la gráfica vemos la continuidad de la función.


$\lim_{x \to 0^-} \sin(x) \rightarrow 0$

$\sin(0) \rightarrow 0$

$\lim_{x \to 0^+} (1-3^x) \rightarrow 0$

$\lim_{x \to 1^-} (1-3^x) \rightarrow -2.$

$g(x) := \frac{4}{x+1} \rightarrow x \mapsto \frac{4}{x+1}$

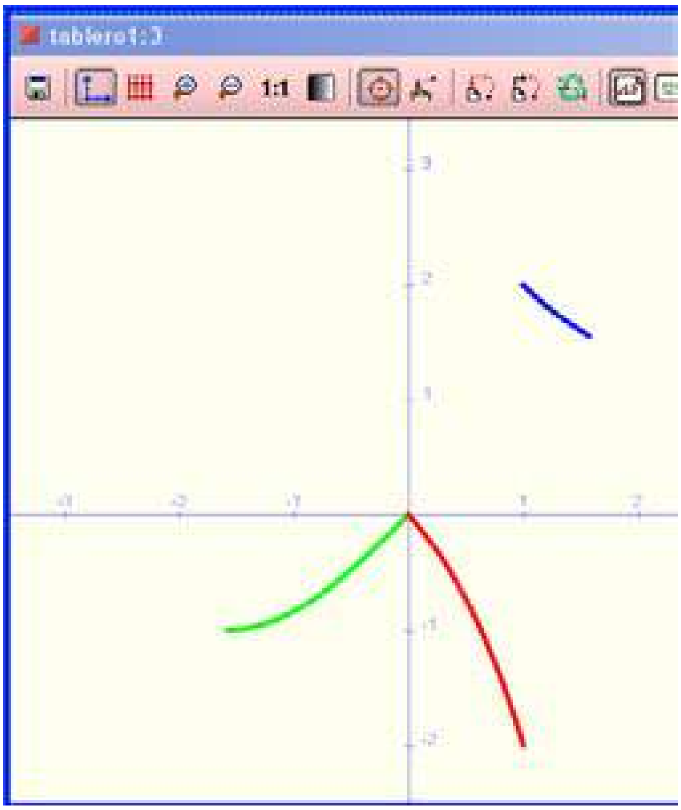
$\lim_{x \to 1^+} g(x) \rightarrow 2$

$g(1) \rightarrow 2$

dibujar$\left(\sin(x), -\frac{\pi}{2}..0, \{color=verde, anchura_linea=3\}\right)$

dibujar$(1-3^x, 0..1, \{color=rojo, anchura_linea=3\}) \rightarrow$ tab

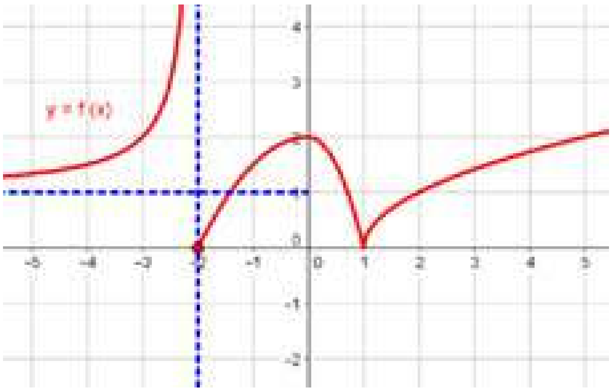
dibujar$\left(\frac{4}{x+1}, 1..\frac{\pi}{2}, \{color=azul, anchura_linea=3\}\right) \rightarrow$



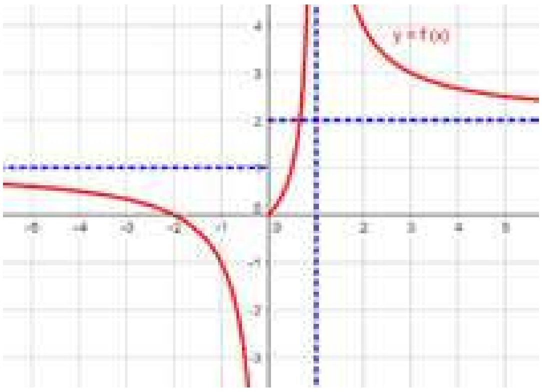
ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 140

1. A partir de las gráficas de las siguientes funciones, halla los valores y los límites pedidos:

I)



II)



a) f (- 2) **d)** $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ **j)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ **m)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) f (0) **e)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ **k)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ **n)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) f (1) **f)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ **i)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **l)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Los valores y los límites pedidos son:

I)

a) f (- 2) = 0

b) f (0) = 2

c) f (1) = 0

d) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ *no existe*

g) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$

h) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

j) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$

k) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$

l) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

II)

a) f (- 2) = 0

b) f (0) = 0

h) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \textit{no existe}$

c) f (1) no existe

d) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

j) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

k) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

l) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{no existe}$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

2. Para cada una de las funciones que siguen halla el valor del límite en x = 1. Puedes ayudarte de la representación gráfica de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x \le 1 \\ 2x - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} x + 2 & si\ x \ne 1 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$ **h)** $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x < 1 \\ 3x - 2 & si\ x \ge 1 \end{cases}$

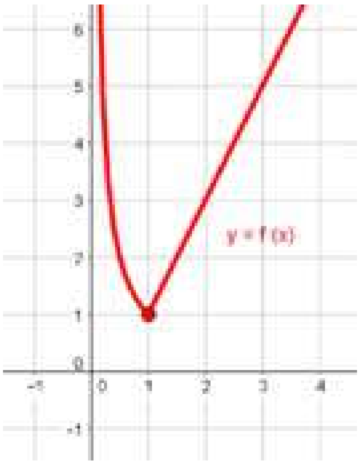
Hallamos los límites laterales en x = 1 para cada una de las funciones.

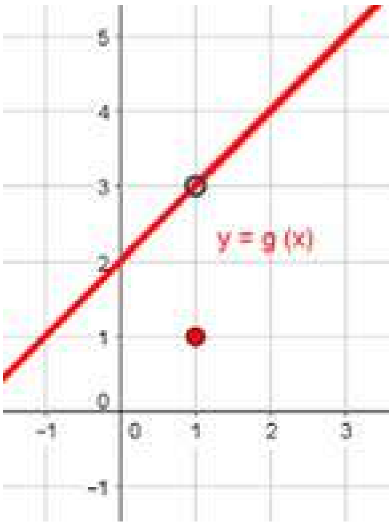
a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

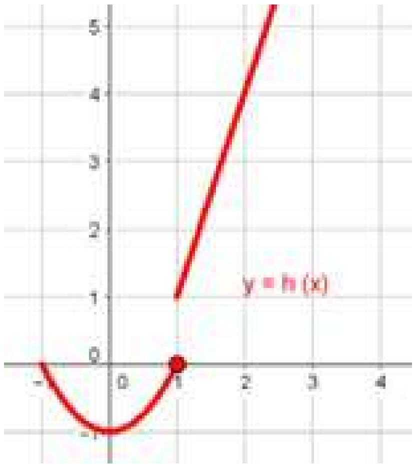
c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (3x - 2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} h(x)\ \text{no existe}$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x + 2) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$

A continuación pueden ver las representaciones gráficas de las funciones alrededor del punto x = 1.







3. Explica el significado de las expresiones que siguen y realiza la

representación gráfica adecuada:

a) $\lim_{x \to 2} (4x - 5) = 3$ **c)** $\lim_{x \to +\infty} \left(-3x^2 + 6x\right) = -\infty$ **e)** $\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - 3x\right) = +\infty$

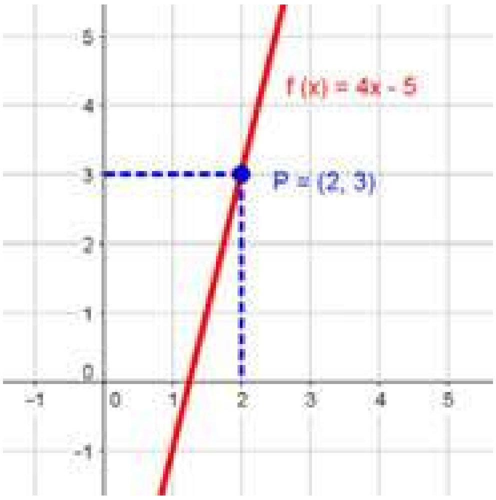
b) $\lim_{x \to 6} \dfrac{x}{x-4} = 3$ **d)** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{x} = 2$ **f)** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+4}{x} = +\infty$

A continuación aparece el significado de los límites y las representaciones gráficas pedidas.

a) $\lim_{x \to 2} (4x - 5) = 3$

Podemos conseguir que el valor de la expresión (4x – 5) esté tan próximo a 3 como queramos, dando a x valores suficientemente próximos a 2.

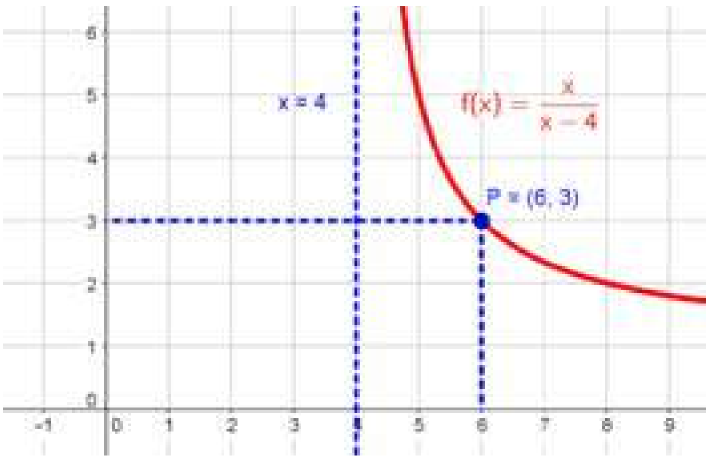
Geométricamente, los valores de las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función f (x) = 4x - 5 se aproximan a 3 cuando el valor de las abscisas de dichos puntos se toman próximos a 2.



b) $\lim_{x \to 6} \dfrac{x}{x-4} = 3$

Podemos conseguir que el valor de la expresión $\dfrac{x}{x-4}$ esté tan próximo a 3 como queramos, dando a x valores suficientemente próximos a 6.

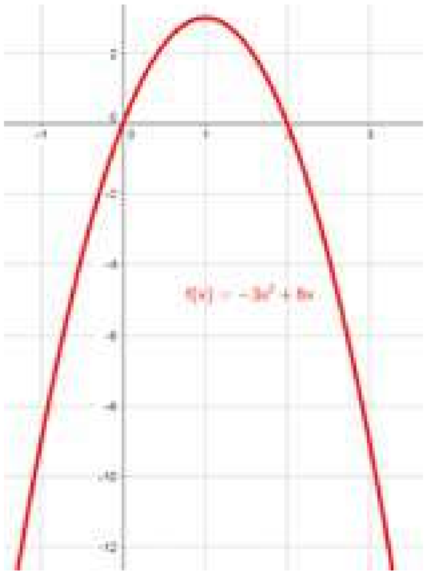
Geométricamente, los valores de las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$ se aproximan a 3 cuando el valor de las abscisas de dichos puntos se toman próximos a 6.



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3x^2 + 6x\right) = -\infty$

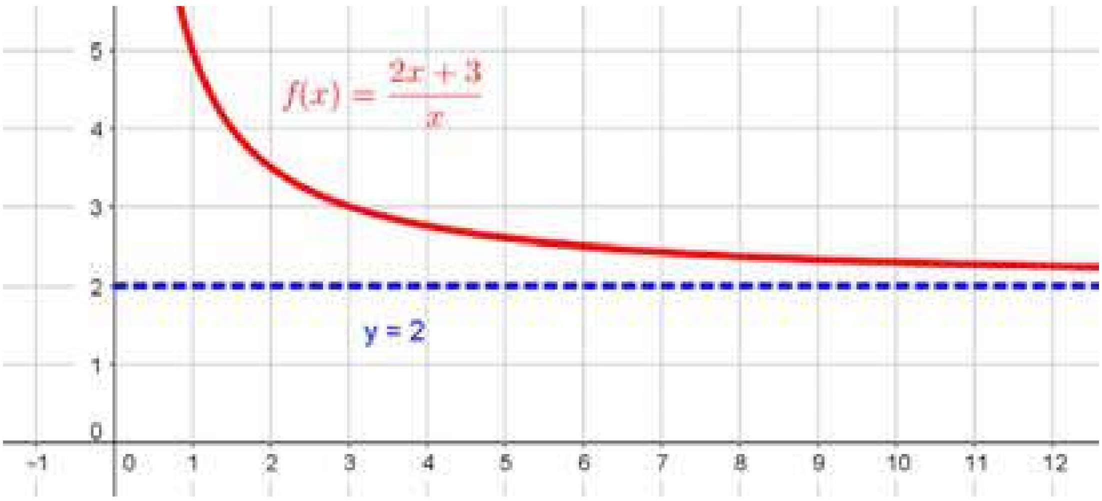
Podemos conseguir que el valor (- $3x^2$ + 6x) sea tan grande como queramos, en valor absoluto, sin más que tomar x tan grande como sea necesario.

Geométricamente, la gráfica de la función $f(x) = -3x^2 + 6x$ tiene una rama parabólica.



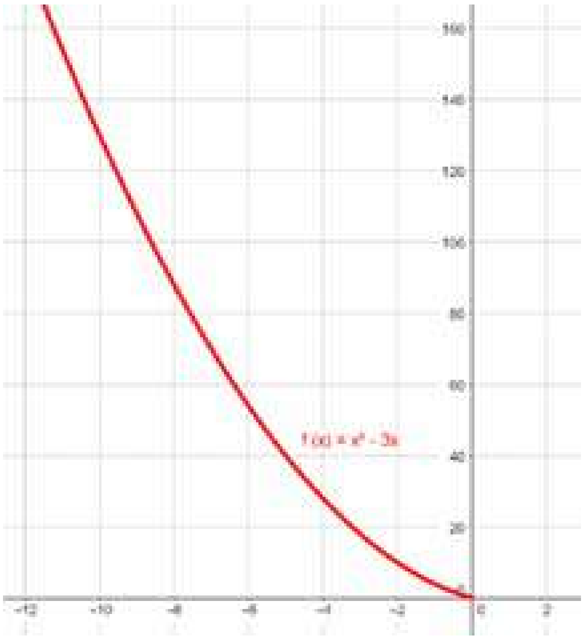
d) Podemos conseguir que el valor de la expresión $\dfrac{2x+3}{x}$ esté tan próximo a 2 como queramos, dando a x valores tan grandes como sea necesario.

Geométricamente, los valores de las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x+3}{x}$ se aproximan a 2 cuando el valor de las abscisas de dichos puntos se hacen muy grandes.



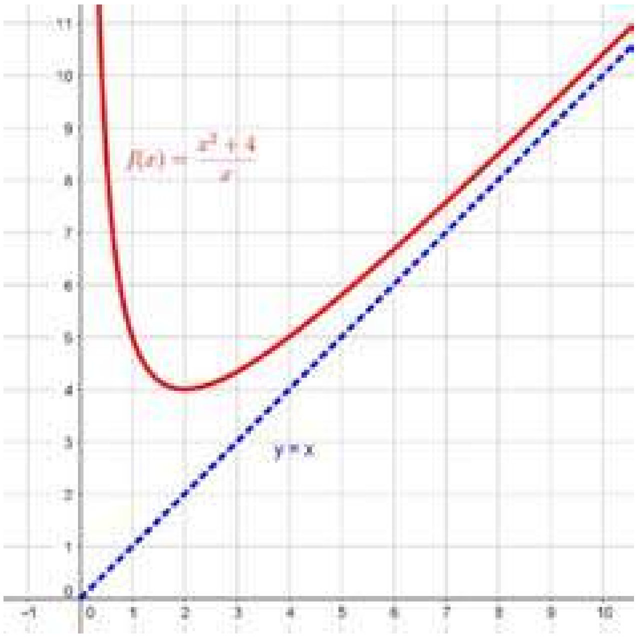
e) Podemos conseguir que el valor ($x^2 - 3x$) sea tan grande como queramos sin más que tomar x con valores negativos tan grande como sea necesario en valor absoluto.

Geométricamente, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3x$ tiene una rama parabólica cuando x tiende a menos infinito.



f) Podemos conseguir que el valor $\frac{x^2+4}{x}$ sea tan grande como queramos sin más que tomar x tan grande como sea necesario.

Geométricamente, la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ tiene asíntota oblicua de ecuación y = x.



■ 4. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-3}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^{-4}}{4}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3$

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{x^3}{5}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{-x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{4}{x^4}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{x^3}\right)$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{-x}$

Los valores de los límites son:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-3} = 0$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^{-4}}{4}\right) = +\infty$ g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^x = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$ e) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{x^3}{5}\right) = 0$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{4}{x^4}\right) = +\infty$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{5}{x^3}\right) = 0$ i) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{-x} = +\infty$

5. Determina, si existen, las asíntotas de cada una de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 6}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$

a) Las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ son las rectas de ecuación x = - 2, x = 2 e y = 0.

b) Las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 2}$ son las rectas de ecuación x = 2 e y = x + 2.

c) La asíntota de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 6}$ es la recta de ecuación y = 1.

d) Las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$ son las rectas de ecuación x = 3 e y = x.

6. Las pérdidas o beneficios, acumulados por una empresa a los x años de su fundación, viene dados en millones de euros por la función:

$$G(x) = \frac{10(x - 2)}{x + 4}$$

a) ¿En qué año comenzó la empresa a tener beneficios?

b) ¿Cuáles eran las pérdidas o beneficios de la empresa a los 5, 10 y 15 años de su fundación?

c) Calcula el límite, si existe, de los beneficios de la empresa.

a) Las pérdidas o beneficios de la empresa durante los primeros años fueron:

En el año de la fundación, al ser $G(0) = \dfrac{10(0 - 2)}{0 + 4} = -5$, la empresa perdió 5 millones de euros.

En el primer año, como $G(1) = \dfrac{10(1 - 2)}{1 + 4} = -2$, la empresa perdió 2 millones de euros.

En el segundo año, $G(2) = \dfrac{10(2 - 2)}{2 + 4} = 0$, la empresa no tuvo ni pérdidas ni ganancias.

En el tercer año $G(3) = \dfrac{10(3 - 2)}{3 + 4} = 1{,}43$, la empresa ganó 1,43 millones de euros.

Por tanto, la empresa comenzó a tener beneficios al tercer año de su fundación:

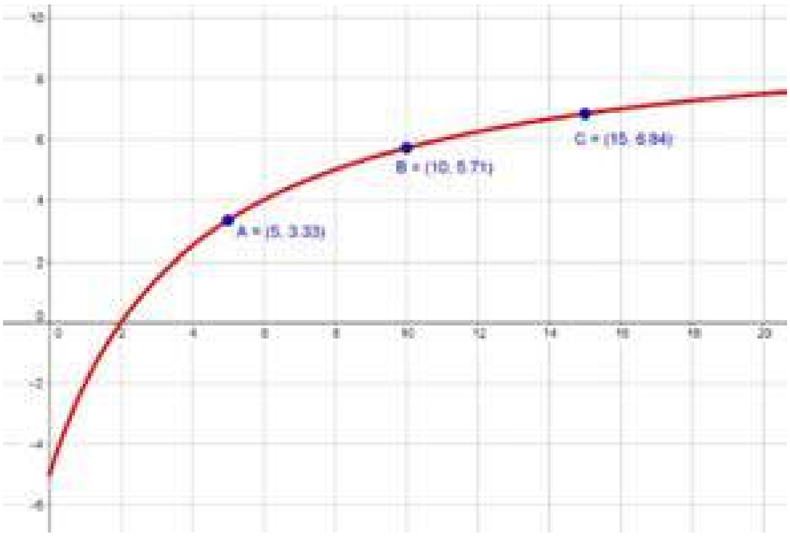
b) Los beneficios de la empresa a los 5, 10 y 15 años de su fundación fueron3,33; 5,71 y 6,84, respectivamente, al cumplirse:

$$G\,(5)=\frac{10(5-2)}{5+4}=3{,}33 \quad G\,(10)=\frac{10(10-2)}{10+4}=5{,}71 \qquad G\,(15)=\frac{10(15-2)}{15+4}=6{,}84$$

c) El límite de los beneficios de la empresa es 10 millones de euros, al cumplirse:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{10(x-2)}{x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x}{x}=10$$

En la gráfica pueden verse alguno de los resultados anteriores.



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 141

7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x}{x^3+2x^2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}$ **k)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-3x+5}{x^2-6}$ **g)** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ **l)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-x}{5x^3-6x+2}$ **h)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{3-\sqrt{9-x}}$ **m)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{5x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ **i)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$ **n)** $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^3-2}{x^2+2}\right)^{\frac{3}{x-2}}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$ **j)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+4}\right)$ **ñ)** $\lim\limits_{x \to 0} (1+4x)^{2/x^3}$

Los valores de los límites son:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x}{x^3 + 2x^2} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x + 5}{x^2 - 6} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - x}{5x^3 - 6x + 2} = \dfrac{2}{5}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = \dfrac{12}{5}$

f) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 4} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 4} = -\infty$; Por tanto $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 4} = no\ \ existe$

g) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = 4$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{3 - \sqrt{9 - x}} = 6$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x} = \dfrac{1}{2}$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+4}\right) = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x\right) = \dfrac{1}{2}$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 - 1}\right) = -\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{5x-2} = e^{10/3}$

n) $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 2} \right)^{\frac{3}{x-2}} = e^4$

ñ) $\lim_{x \to 0} (1 + 4x)^{2/x^3} = +\infty$

8. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 3 - \dfrac{|x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ 3 & si\ x = 0 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} x - 1 & si\ x \leq 1 \\ x^2 - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$ **c)** $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & si\ x \neq -2 \\ -2 & si\ x = -2 \end{cases}$

a) La función $f(x) = \begin{cases} 3 - \dfrac{|x|}{x} & si\ x \neq 0 \\ 3 & si\ x = 0 \end{cases}$ es continua para cualquier número real, excepto en x = 0, donde pasamos a estudiar su continuidad.

Hallamos los límites laterales de la función cuando x tiende a 0:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(3 - \dfrac{-x}{x} \right) = \lim_{x \to 0^-} 4 = 4 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(3 - \dfrac{x}{x} \right) = \lim_{x \to 0^+} 2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x)\ no\ existe$$

Por tanto, la función es continua en R – {0}.

b) La función $g(x) = \begin{cases} x - 1 & si\ x \leq 1 \\ x^2 - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$ es continua para cualquier número real excepto para x = 1, donde pasamos a estudiar su continuidad.

Hallamos los límites laterales de la función cuando x tiende a 1:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} (x - 1) = 0 \\ \lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} g(x) = 0$$

Como g (1) = 0, la función y = g (x) es continua en para cualquier número real.

c) La función $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & si\ x \neq -2 \\ -2 & si\ x = -2 \end{cases}$ es continua para cualquier número real excepto para x = - 2, donde pasamos a estudiar su continuidad.

Hallamos el límite de la función cunado x tiende a – 2:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x - 2) = -4$$

Además, h (- 2) = - 2. Por tanto la función y = h (x) en continua en R – {- 2}.

9. Calcula k, en cada caso, de modo que las funciones siguientes sean continuas en todo R.

a) $f(x) = \begin{cases} x + k & si\ x \le 0 \\ x^2 - 1 & si\ x > 0 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & si\ x \ne 1 \\ k & si\ x = 1 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & si\ x \le 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si\ x > 1 \end{cases}$

a) La función y = f (x) es continua el cualquier punto no nulo al ser sus expresiones polinomios.

Estudiamos la continuidad en x = 0. Hallamos los límites laterales en el punto citado y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (x + k) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow k = -1.$$

Como f(0) = k. La función dada es continua en toda la recta real si k = -1.

b) La función y = f (x) es continua el cualquier punto, distinto de x = 1, al ser la expresión racional. Estudiamos la continuidad en x = 1. Hallamos el límite en x = 1 y obtenemos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Como f(1) = k. La función dada es continua en toda la recta real si k = 1/2

c) La función y = f (x) es continua el cualquier punto, distinto de x = 1, al ser sus expresiones polinomios y racionales. Estudiamos la continuidad en x = 1. Hallamos los límites laterales en el punto citado y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} (3 - kx^2) = 3 - k \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{kx} = \dfrac{2}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - k = \frac{2}{k} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ o \\ k = 2 \end{cases}.$$

Como f(1) = 3 - k. La función dada es continua en toda la recta real si k = 1 o k = 2.

10. Determina, en cada caso, los valores de los parámetros m y n para los cuales las funciones siguientes sean continuas en todo su dominio.

a) $f(x) = \begin{cases} mx + 6 & si\ x \le -1 \\ nx^2 - 2x + 1 & si\ -1 < x \le 2 \\ \dfrac{x - 5}{(x - 1)^2} & si\ x > 2 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} e^{mx} & si\ x < 0 \\ x + 2m & si\ 0 \le x < 2 \\ -x + n & si\ x \ge 2 \end{cases}$

a) Hallamos los límites laterales de la función cuando x tiende a – 1 y cuando x tiende a 2:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(mx+6\right)=-m+6\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(nx^2-2x+1\right)=n+3\end{array}\right\}\Rightarrow\ -m+6=n+3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\left(nx^2-2x+1\right)=4n-3\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-5}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\ 4n-3=-\dfrac{1}{3}$$

Resolviendo el sistema en las incógnitas m y n obtenemos:

$$\begin{cases}-m+6=n+3\\ 4n-3=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{7}{3}\\ n=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

b) Hallamos los límites laterales de la función cuando x tiende a 0 y cuando x tiende a 2:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{mx}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+2m\right)=2m\end{array}\right\}\Rightarrow\ 1=2m$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x+2m\right)=2+2m\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(-x+n)=-2+n\end{array}\right\}\Rightarrow\ 2+2m=-2+n$$

Resolviendo el sistema en las incógnitas m y n obtenemos:

$$\begin{cases}1=2m\\ 2+2m=-2+n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\ n=5\end{cases}$$

11. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos:

a) $f\,(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ **b)** $g\,(x)=\begin{cases}3-x^2 & si\ x\le 0\\ e^{-x} & si\ x>0\end{cases}$ **c)** $h\,(x)=\begin{cases}\left|x-2\right| & si\ x\le 0\\ x^2-2x & si\ x>0\end{cases}$

a) La función $f\,(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ es:

● Discontinua no evitable en x = 0 con salto infinito, ya que:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=-\infty\ \text{ y }\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=+\infty$$

● Discontinua evitable en x = 3 con salto infinito, ya que:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=2$$

Redefinimos la función y = f (x) para que sea continua en x = 3, en la forma: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x} & si\ x\neq 3\\ 2 & si\ x=3\end{cases}$

b) La función $g(x)=\begin{cases}3-x^2 & si\ x\leq 0\\ e^{-x} & si\ x>0\end{cases}$ tiene, en x = 0, una discontinuidad no evitable con salto finito, al ser:

$$\lim_{x\to 0^-}(3-x^2)=3 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} e^{-x}=1$$

c) La función $h(x)=\begin{cases}|x-2| & si\ x\leq 0\\ x^2-2x & si\ x>0\end{cases}$ tiene, en x = 0, una discontinuidad no evitable con salto finito, al cumplirse:

$$\lim_{x\to 0^-}|x-2|=2 \text{ y } \lim_{x\to 0^+}(x^2-2x)=0$$

12. Los gastos de mantenimiento de la maquinaria de una determinada empresa, G (x) (en miles de euros), vienen dados en función del tiempo, x, en meses, que dicha maquinaria lleva en funcionamiento. La expresión de G (x) es:

$$G(x)=\begin{cases}-\dfrac{2x}{15}+3 & si\ 0\leq x\leq 15\\ \dfrac{60x-60}{x+15} & si\ x>15\end{cases}$$

En la citada empresa, ¿es continuo el gasto de mantenimiento de la maquinaría? ¿Qué sucede a medida que transcurre el tiempo?

Veamos si el gasto de mantenimiento es una función continua del tiempo. Para ello calculamos los límites laterales en t = 15, ya que en el resto de valores del dominio de definición las funciones son continuas.

$$\lim_{t\to 15^-}G(x)=\lim_{t\to 15^-}\left(-\frac{2x}{15}+3\right)=1 \qquad \lim_{t\to 15^+}G(x)=\lim_{t\to 15^+}\left(\frac{60x-60}{x+15}\right)=28$$

Observamos que la función no es continua para x = 15.

Veamos qué a medida que pasa el tiempo el gasto de mantenimiento de la maquinaria tiende a 60 000 euros, al cumplirse:

$$\lim_{t\to +\infty}G(x)=\lim_{t\to +\infty}\frac{60x-60}{x+15}=\lim_{x\to +\infty}\frac{60x}{x}=60$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 142

1. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2x^2+4}{x^2-1}-\dfrac{3}{x-1}\right]$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{4x^2+6x}-2x\right]$

Los límites pedidos son:

a) Es una indeterminación del tipo 0/0. Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada del numerador, simplificamos la expresión resultante y hallamos el límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x \cdot \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{3 \cdot \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{3 \cdot (1+1)} = \frac{1}{3}$$

b) Es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Operamos la expresión y el límite pasa a ser una indeterminación del tipo 0/0. Simplificamos la expresión resultante y hallamos el límite.

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{2x^2 + 4}{x^2 - 1} - \frac{3}{x-1}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

c) Es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada. Operamos la expresión resultante y hallamos el límite.

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + 6x} - 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{4x^2 + 6x} - 2x\right] \cdot \left[\sqrt{4x^2 + 6x} + 2x\right]}{\left[\sqrt{4x^2 + 6x} + 2x\right]} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{\sqrt{4x^2 + 6x} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{\sqrt{4 + \frac{6}{x}} + 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

2. El siguiente límite es una indeterminación del tipo 0/0:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + a}{x^2 - bx + 2}.$$

Calcula los valores de a y b y, posteriormente, encuentra el valor del límite.

Si la indeterminación se del tipo 0/0 se cumplirá:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + a}{x^2 - bx + 2} = \frac{4 + 4 + a}{4 - 2b + 2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \begin{cases} a + 8 = 0 \\ -2b + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 3 \end{cases}$$

Para los valores anteriores, el límite vale:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+4}{x-1} = 6$$

3. Dada la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & si\ x \le 0 \\ \dfrac{1}{x-2} & si\ 0 < x < 3 \\ e^{x-3} & si\ x \ge 3 \end{cases}$$

¿Qué tipo de discontinuidades presenta? ¿Tiene asíntotas horizontales?

3. Las discontinuidades que presenta la función son

- En x = 0 tiene una discontinuidad de primera especie con salto finito, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 0^-} (2x + 4) = 4 \text{ y } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}$$

- En x = 2 tiene una discontinuidad de primera especie con salto infinito, al ser:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

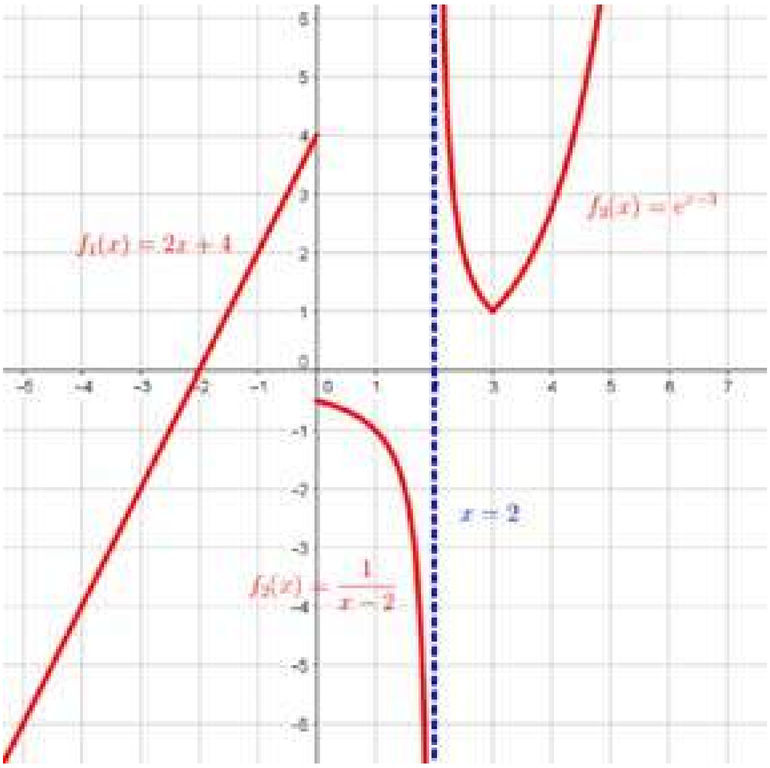
- En x = 3 la función es continua, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-2} = 1; \ \lim_{x \to 3^+} e^{x-3} = 1 \text{ y f (3) = } e^0 = 1$$

La función no tiene asíntotas horizontales ya que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x + 4) = -\infty \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{x-3} = +\infty$$



En la gráfica puede verse todo lo anterior.

4. El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función $f(t) = \dfrac{18 + t^2}{(t+3)^2}$ **donde t es el tiempo medido en años desde t = 0. Calcula el tamaño de la población a largo plazo.**

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{18 + t^2}{(t+3)^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 + 18}{t^2 + 6t + 9} = 1$$

La población a largo plazo será de un millón de individuos.

5. En cierto país se está produciendo un descenso acusado del índice de natalidad, y se estima que la población en edad escolar (en millones de personas) viene dada en función del año por:

$$P(x) = 0{,}5 + \frac{5}{x - 2015}$$

Calcula la población escolar que habrá en los años 2025, 2030 y 2050. Halla la tendencia futura de la población escolar a largo plazo.

La población escolar en los años indicados será:

$$P(2025) = 0{,}5 + \frac{5}{2025 - 2015} = 0{,}5 + \frac{5}{10} = 1 \textit{ millón de personas}$$

$$P(2030) = 0{,}5 + \frac{5}{2030 - 2015} = 0{,}5 + \frac{5}{15} \approx 0{,}83 \textit{ millones de personas}$$

$$P(2050) = 0{,}5 + \frac{5}{2050 - 2015} = 0{,}5 + \frac{5}{35} \approx 0{,}64 \textit{ millones de personas}$$

Sí x se hace muy grande, el cociente se hará tan pequeño como se quiera (tenderá a cero), por lo que la tendencia de la población a largo plazo será:

$$\lim_{t \to +\infty} P(x) = \lim_{t \to +\infty} \left(0{,}5 + \frac{5}{x - 2015} \right) = 0{,}5 \textit{ millones de personas}$$

6. Calcula el valor de k (k ≠ 0) para que se verifiquen:

a) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{3kx^3 - 2kx^2 + kx - 1}{x^2 - 6x^3} = 1$

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{2x^2 + kx} - \sqrt{2x^2 - 1} \right] = 1$

a) Siendo k ≠ 0, el límite pedido es una indeterminación del tipo ∞ / ∞, y para que dicho límite valga 1, los coeficientes de x^3 en el numerador y en el denominador deben coincidir.

Por tanto, 3k = - 6, es decir, k = - 2.

Podemos comprobar que para k = - 2 el límite vale:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3kx^3 - 2kx^2 + kx - 1}{x^2 - 6x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-6x^3 + 4x^2 - 2x - 1}{-6x^3 + x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-6x^3}{-6x^3} = 1$$

b) El límite es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada y operamos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{2x^2 + kx} - \sqrt{2x^2 - 1}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{2x^2 + kx} - \sqrt{2x^2 - 1}\right] \cdot \left[\sqrt{2x^2 + kx} + \sqrt{2x^2 - 1}\right]}{\sqrt{2x^2 + kx} + \sqrt{2x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{kx + 1}{\sqrt{2x^2 + kx} + \sqrt{2x^2 - 1}}$$

El límite anterior es una indeterminación del tipo ∞ / ∞. Dividimos numerador y denominador por x y calculamos el límite resultante.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{kx + 1}{\sqrt{2x^2 + kx} + \sqrt{2x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{k + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{k}{x}} + \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{k}{2\sqrt{2}}$$

Para que la última expresión sea 1, entonces $k = 2\sqrt{2}$.

7. La profundidad de la capa de arena de una playa se verá afectada por la construcción de un paseo marítimo. En una zona de la playa, esa profundidad, P, en metros, vendrá dada por la siguiente función, siendo t el tiempo en años desde el inicio de la construcción:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 + 2 & si\ 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & si\ t > 1 \end{cases}$$

a) Es la profundidad una función continua del tiempo.

b) Si la profundidad llegara a superar los 4 metros, se debería elevar la altura del paseo marítimo, ¿será necesario elevar la altura del paseo?

7. a) Veamos si la profundidad es una función continua del tiempo. Para ello calculamos los límites laterales en t = 1, ya que en el resto de puntos del dominio de definición las funciones son continuas.

$$\lim_{t \to 1^-} P(t) = \lim_{t \to 1^-} (t^2 + 2) = 3 \qquad \lim_{t \to 1^+} P(t) = \lim_{t \to 1^+} \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = \frac{6}{2} = 3$$

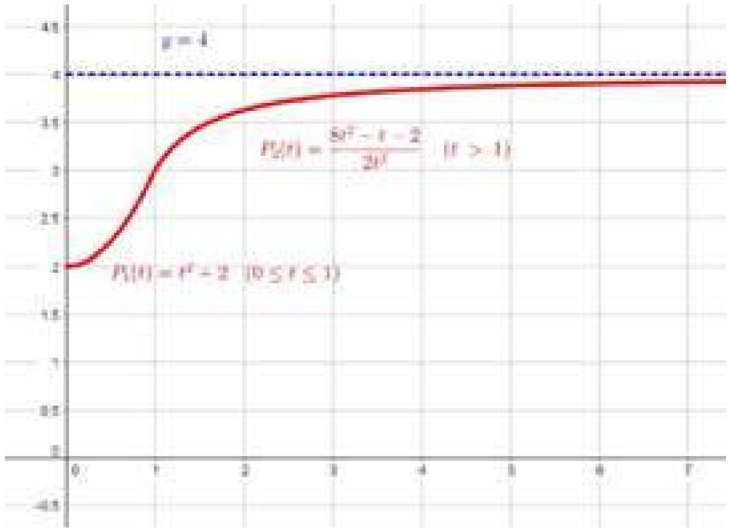
Como los límites laterales son iguales, la profundidad es una función continua del tiempo.

b) Calculamos el límite de la función P (t) cuando t tiende a más infinito.

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{8t^2}{2t^2} = 4$$

No será necesario elevar la altura del paseo ya que la profundidad no superará los 4 metros.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



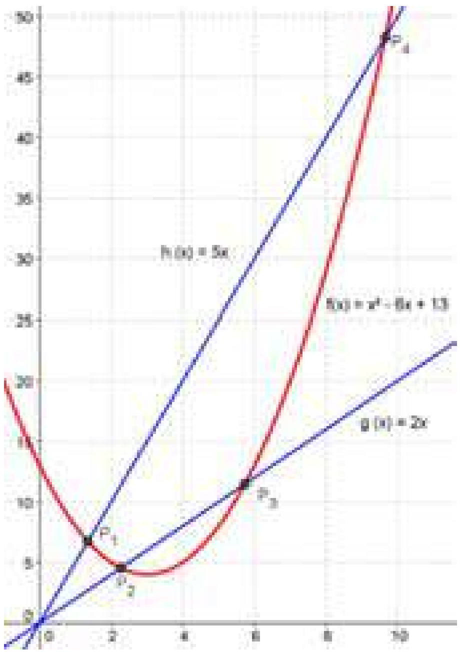
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 143

Parábolas y rectas

Queremos investigar posibles patrones que aparecen cuando se estudia la intersección de funciones polinómicas con funciones lineales.

1. Consideramos las funciones cuadráticas de expresión $y = (x - p)^2 + q$ cuyas gráficas son parábolas de vértice V (p, q) y las funciones lineales $y = mx$ e $y = nx$.

a) Sea la parábola $y = (x - 3)^2 + 4$ y las rectas $y = 2x$ e $y = 5x$.



Utilizando medios tecnológicos, hallamos las cuatro intersecciones P_1, P_2, P_3, P_4, que pueden verse en el dibujo.

Llamamos x_1, x_2, x_3 y x_4 a las abscisas de estas intersecciones en el orden en el que aparecen, de izquierda a derecha, sobre el eje OX.

Calculamos los valores de las expresiones:

$$D_1 = x_2 - x_1; \qquad D_2 = x_4 - x_3 \quad \text{y} \quad V = |D_1 - D_2|.$$

b) Considera otras parábolas de la forma $y = k(x - p)^2 + q$, con $k > 0$, que tengan el vértice en el primer cuadrante, cuando se cortan con las rectas $y = 2x$ e $y = 5x$. Comienza estudiando los casos en los que $k = 1$.

c) Investiga lo que sucede para cualquier valor de k y para cualquier posición del vértice. Si cambiamos las rectas, ¿qué resultados obtenemos?

d) ¿Encontraremos resultados similares para funciones polinómicas de grado tres? ¿Y para funciones polinómicas de grado superior?

1. a) Las intersecciones son los puntos de la parábola y = $(x - 3)^2 + 4$ con las rectas y = 2x e y = 5x, son los puntos:

$$\begin{cases} y = (x-3)^2 + 4 \\ y = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 11x + 13 = 0 \\ y = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 9{,}65; \quad y_4 = 48{,}27 \quad (P_4) \\ x_1 = 1{,}35; \quad y_1 = 6{,}73 \quad (P_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = (x-3)^2 + 4 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 13 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 5{,}73; \quad y_4 = 11{,}46 \quad (P_3) \\ x_2 = 2{,}27; \quad y_1 = 4{,}54 \quad (P_2) \end{cases}$$

Los valores pedidos son:

$D_1 = 2{,}27 - 1{,}35 = 0{,}92$; $D_2 = 9{,}65 - 5{,}73 = 3{,}92$ y $V = |0{,}92 - 3{,}92| = 3$.

En las imágenes que siguen pueden verse las cuatro intersecciones:

P_1 (1,35; 6,73); P_2 (2,27; 4,54); P_3 (5,73; 11,46) y P_4 (9,65; 48,27)

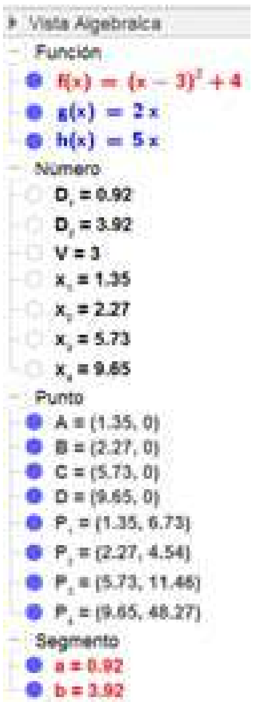
Además aparecen dibujados los puntos A (1,35; 0); B (2,27; 0); C (5,73; 0) y D (9,65; 0) sobre el eje OX, que tienen las mismas abscisas que los puntos intersección

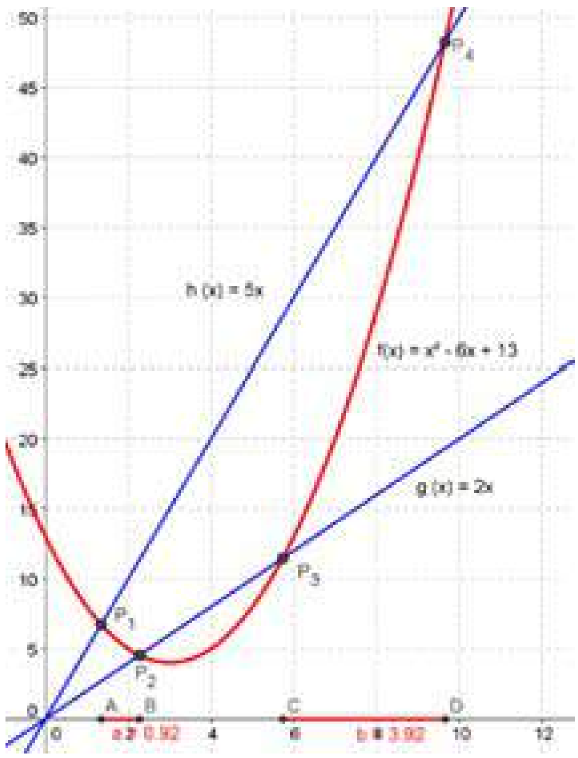
En el recuadro de la Vista Algebraica aparecen calculadas las expresiones:

$D_1 = x_2 - x_1 = 0{,}92$; $D_2 = x_4 - x_3 = 3{,}92$ y $V = |D_1 - D_2| = |0{,}92 - 3{,}92| = 3$.

También pueden verse, sobre el eje OX, los segmentos a = AB y b = CD, de medidas 0,92 y 3,92 respectivamente.

El valor V = 3 es el valor absoluto de la diferencia de las pendientes de la rectas y = 5x e y = 2x.

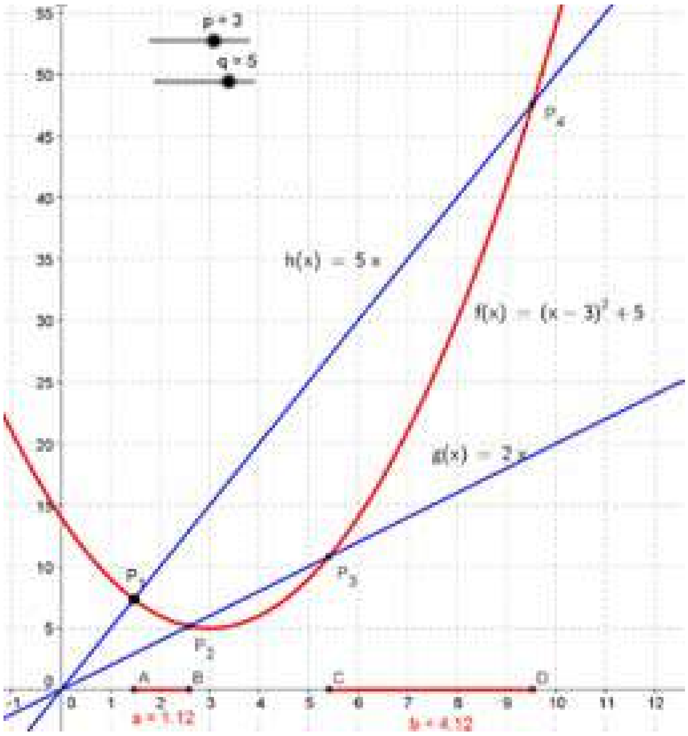


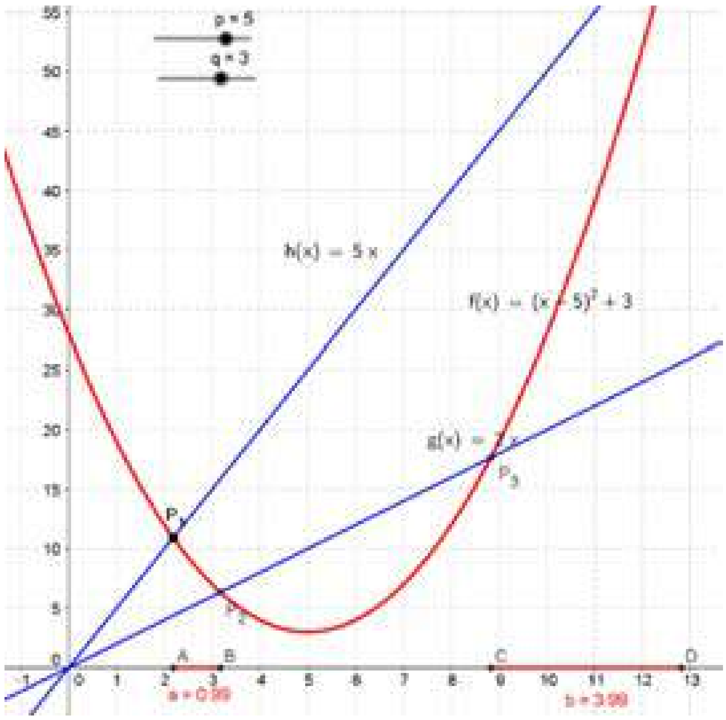


b) Analizamos las situaciones para parábolas de la expresión y = $(x - p)^2 + q$, con p y q positivos y las rectas y = 2x e y = 5x.

Trabajando en el programa GeoGebra, creamos dos deslizadores denominados p y q. Introducimos la función f (x) = $(x - p)^2 + q$ y observamos que al variar los valores de p y q, es decir, la posición del vértice de la parábola, el valor de V se mantiene fijo en 3.

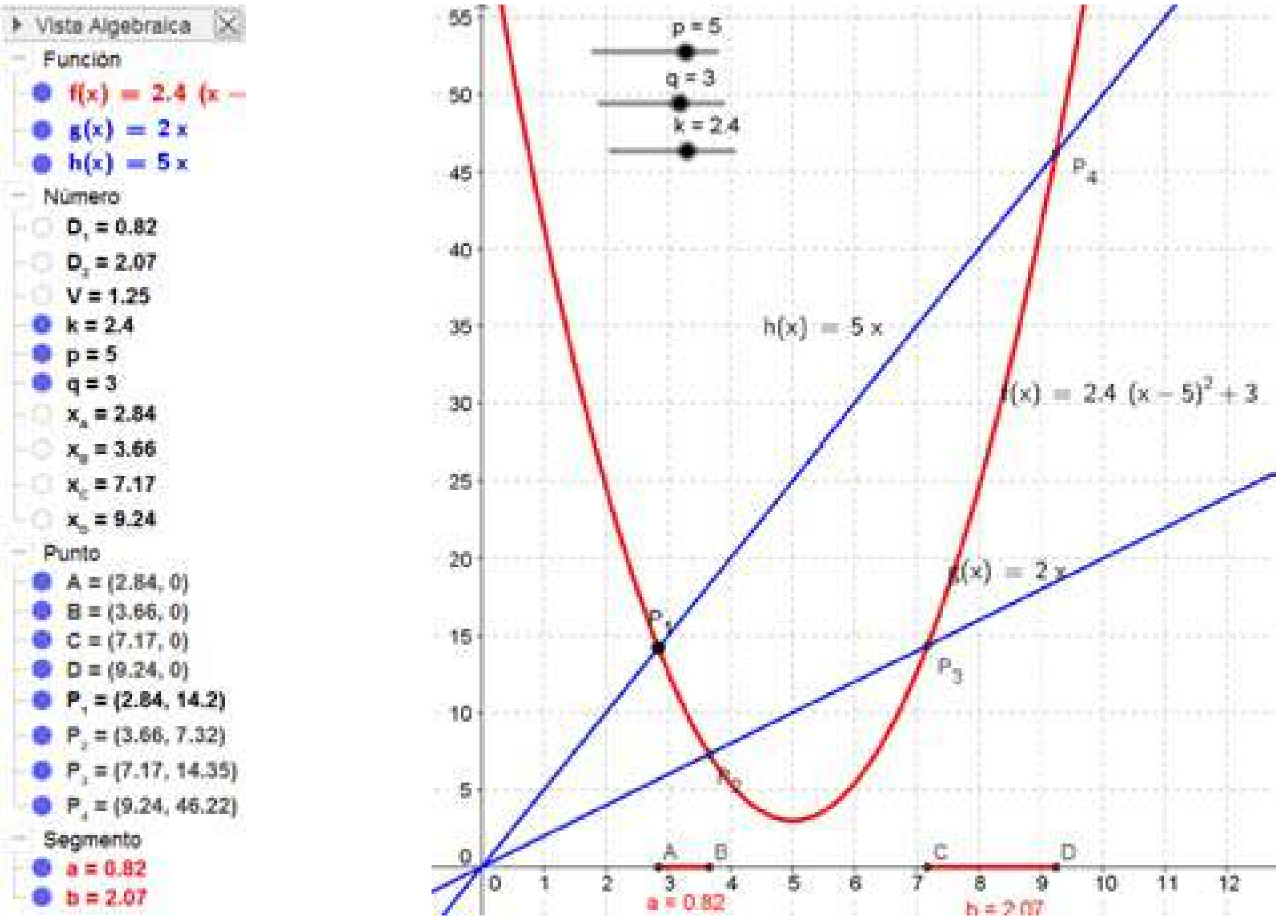
En las imágenes pueden verse los casos de los vértices V (3, 5) y V (5, 3)





c) Introducimos un nuevo deslizador k y lo hacemos variar, observando los resultados.

En la imagen puede verse el valor V = 1,25 que es el resultado de operar $V = \left|\dfrac{m-n}{k}\right| = \left|\dfrac{5-2}{2{,}4}\right| = 1{,}25$.



Obtenemos otros valores de V haciendo cambios en los tres deslizadores.

Para cambiar las rectas, creamos dos nuevos deslizadores llamados m y n e introducimos las funciones g (x) = mx y h (x) = nx. También podemos analizar las intersecciones de rectas que no pasan por el origen, es decir, funciones de la forma g (x) = mx + m_1 y h (x) = nx + n_1.

Variamos todos los deslizadores y observamos que, en las situaciones que haya intersecciones, el valor buscado es $V = \left|\dfrac{m-n}{k}\right|$.

El hecho de obtener el valor anterior lo podemos encontrar en el razonamiento que sigue.

Sean y = ax^2 + bx + x, con a ≠ 0, y = mx + m_1 e y = nx + n_1 las ecuaciones de una parábola y dos rectas que se cortan en cuatro puntos.

Hallamos las abscisas de esos cuatro puntos:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + m_1 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = mx + m_1 \Rightarrow ax^2 + (b - m)x + (c - m_1) = 0$$

Si llamamos x_1 y x_4 a las soluciones de la ecuación anterior, una de las relaciones de Cardano puede expresarse en la forma:

$$x_1 + x_4 = -\frac{b - m}{a}$$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = nx + n_1 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = nx + n_1 \Rightarrow ax^2 + (b - n)x + (c - n_1) = 0$$

Si llamamos x_2 y x_3 a las soluciones de la ecuación anterior, una de las relaciones de Cardano puede expresarse en la forma:

$$x_2 + x_3 = -\frac{b - n}{a}$$

El valor buscado V será:

$$V = \left|(x_2 - x_1) - (x_4 - x_3)\right| = \left|(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)\right| = \left|-\frac{b - n}{a} - \left(-\frac{b - m}{a}\right)\right| = \left|\frac{n - m}{a}\right|$$

El valor anterior depende de las pendientes de las rectas, m y n, y del coeficiente a del término x^2 de la parábola.

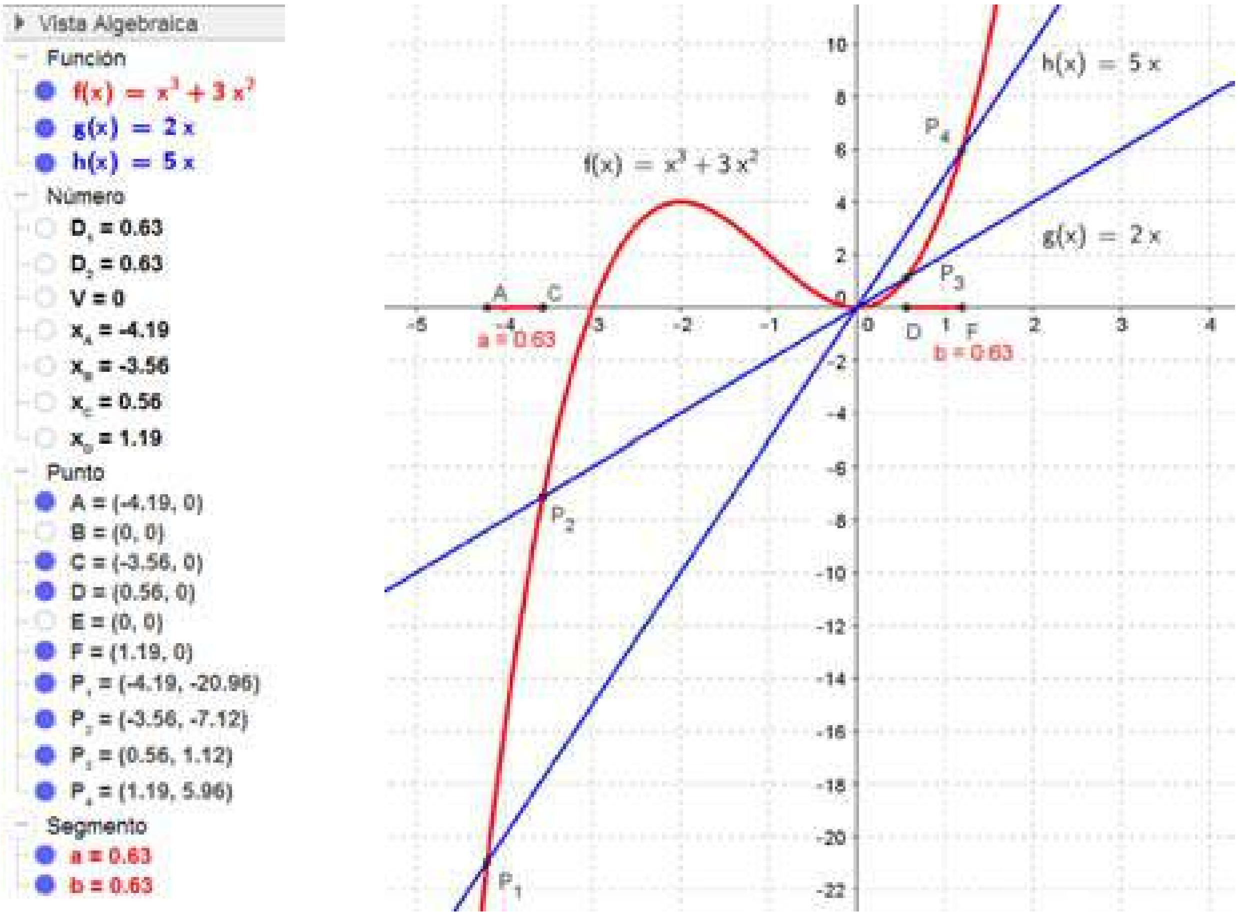
d) Veamos qué ocurre cuando cortamos la curva cúbica de ecuación f (x) = x^3 + $3x^2$ con las rectas g (x) = 2x y h (x) = 5x.

En las imágenes que siguen pueden verse las intersecciones denominadas P_1, P_2, P_3 y P_4, además del origen de coordenadas y en la Vista Algebraica sus coordenadas.

Pueden verse los puntos proyección de los puntos anteriores sobre el eje OX: A, C, D y F, con sus coordenadas en la Vista Algebraica.

Hallamos las diferencias:

$D_1 = x_C - x_A = 0{,}63$ $\quad$ $D_2 = x_F - x_D = 0{,}63$ $\quad$ $V = |D_1 - D_2| = |0{,}63 - 0{,}63| = 0$



Veamos qué ocurre cuando cortamos la curva cúbica de ecuación f (x) = x^3 - x^2 – x + 2 con las rectas g (x) = 2x y h (x) = 5x.

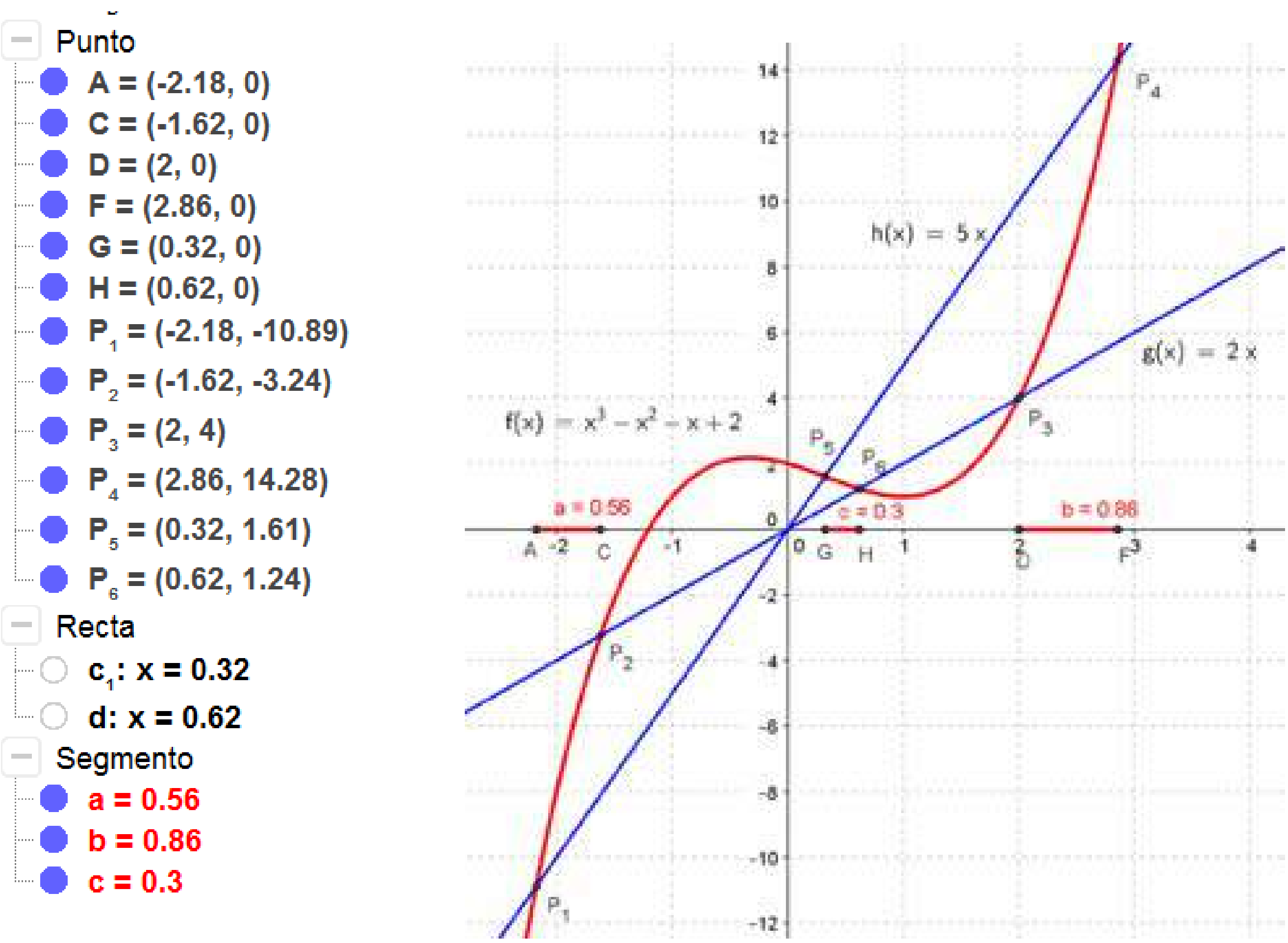
En las imágenes que siguen pueden verse las intersecciones denominadas P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6, y en la Vista Algebraica sus coordenadas.

Pueden verse los puntos proyección de los puntos anteriores sobre el eje OX: A, C, D, F, G y H, con sus coordenadas en la Vista Algebraica.

Hallamos las diferencias:

$D_1 = x_B - x_C = 0{,}56$ $D_2 = x_D - x_C = 0{,}86$ $D_3 = x_H - x_G = 0{,}3$

$$V = |D_1 - D_2 + D_3| = |0{,}56 - 0{,}86 + 0{,}3| = 0$$



El hecho de obtener el valor anterior, V = 0, lo podemos encontrar en el razonamiento que sigue.

Sean $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$, $y = mx + m_1$ e $y = nx + n_1$ las ecuaciones de una cúbica y dos rectas que se cortan en seis.

Hallamos las abscisas de esos seis puntos:

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y = mx + m_1 \end{cases} \Rightarrow \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = mx + m_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ax^3 + bx^2 + (c - m)x + (d - m_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{cases}$$

Las soluciones x_1, x_3 y x_6 cumplen una de las relaciones de Cardano que puede expresarse en la forma:

$$x_1 + x_3 + x_6 = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y = nx + n_1 \end{cases} \Rightarrow \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = nx + n_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ax^3 + bx^2 + (c-n)x + (d-n_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{cases}$$

Las soluciones x_2, x_4 y x_5 cumplen una de las relaciones de Cardano que puede expresarse en la forma:

$$x_2 + x_4 + x_5 = -\frac{b}{a}$$

El valor buscado V será:

$$V = \left|(x_2 - x_1) + (x_4 - x_3) - (x_6 - x_5)\right| = \left|(x_2 + x_4 + x_5) - (x_1 + x_3 + x_6)\right| =$$

$$= \left|-\frac{b}{a} - \left(-\frac{b}{a}\right)\right| = \left|\frac{b}{a} - \frac{b}{a}\right| = 0$$

El valor anterior siempre es nulo.

Los mismo ocurre para funciones polinómicas de grado superior.