UNIDAD 8: Representación gráfica de funciones

CUESTIONES INICIALES-PÁG.196

1. En las siguientes funciones, estudia sus características: dominio, los puntos de corte con los ejes, las simetrías, la periodicidad, las asíntotas y ramas parabólicas, la monotonía, los extremos relativos, el tipo de concavidad y la existencia de puntos de inflexión:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x+6}{x-4}$

a) Las características de la función f (x) = $x^2 - 4x + 2$ son:

● Dominio: Dom f = R

● Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX: P\left(2+\sqrt{2},\, 0\right) \; y \; Q\left(2-\sqrt{2},\, 0\right) \\ OY: R\,(0,\, 2) \end{cases}$

● No es simétrica respecto del eje OY ni respecto del origen de coordenadas.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, ya que se cumple:

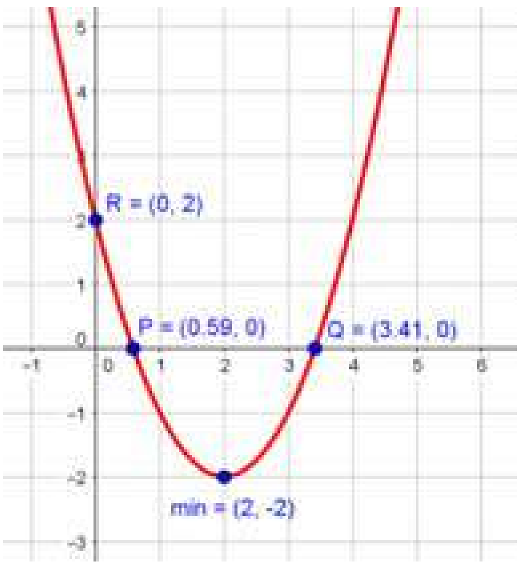
$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 4x + 2) = +\infty \;\text{ y }\; \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 2) = +\infty$$

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$ y estrictamente creciente en $(2, +\infty)$

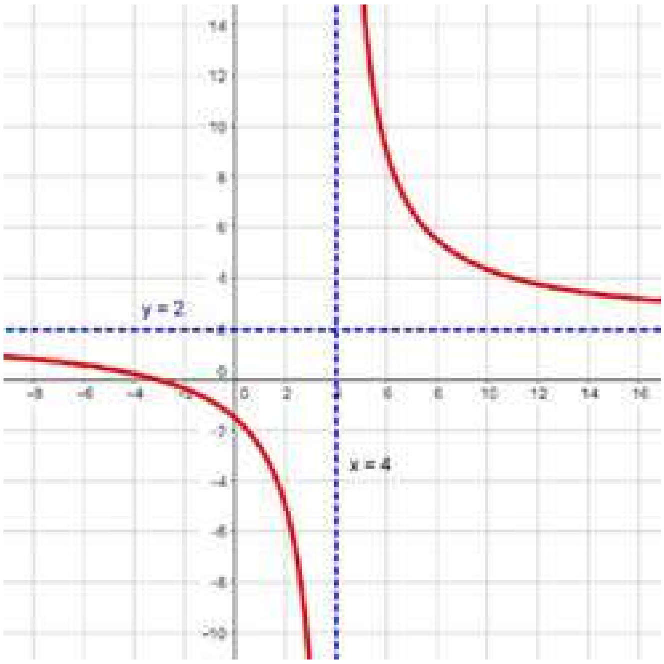
● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (2, - 2).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en todo R.

● Puntos de inflexión: no tiene.



b) Las características de la función $f\,(x) = \dfrac{2x+6}{x-4}$ son:



● Dominio: Dom f = R – {4}

● Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX: P\,(-3,\,0) \\ OY: Q\left(0,\,-\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$

● No es simétrica respecto del eje OY ni respecto del origen de coordenadas.

● Asíntotas: las rectas x = 4 e y = 2.

● Ramas parabólicas: no tiene.

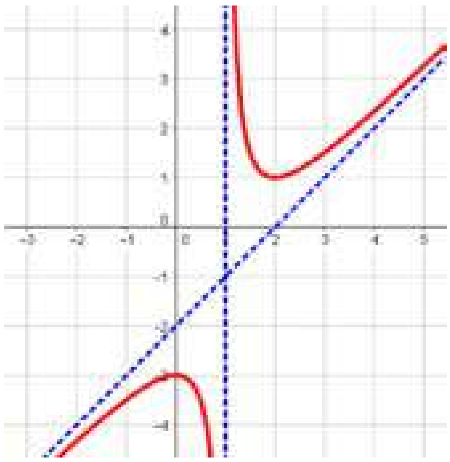
● Monotonía: es estrictamente decreciente en R – {4}.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,\ 4)$ y hacia las y positivas en $(4,+\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

2. Estudia las características (dominio, recorrido, simetrías, asíntotas, monotonía, extremos relativos y curvatura) de la función $f\,(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$, representada en la gráfica.



Las características de $f\,(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ son:

● Dominio: Dom f = R - {1}.

● Puntos de corte con los ejes: (0, - 3)

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 1 e y = x - 2.

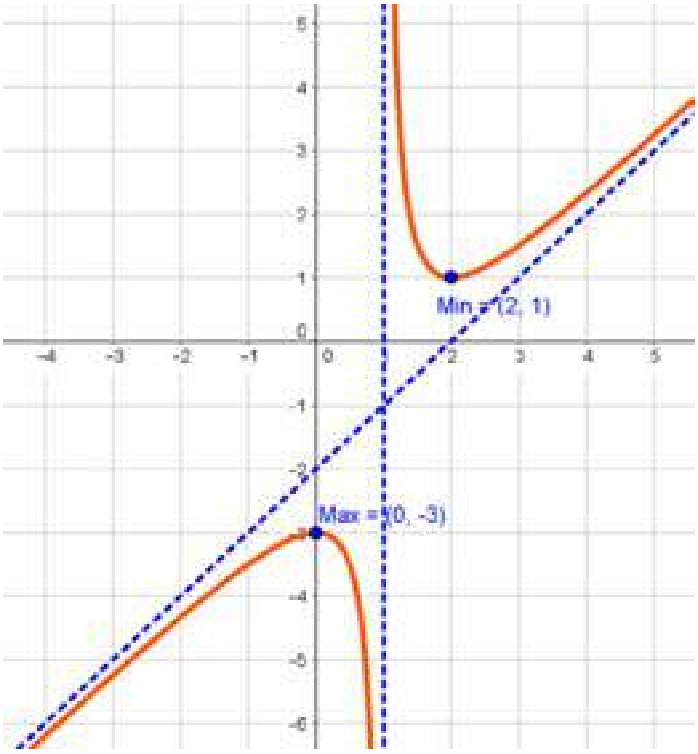
● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty,0)\cup(2;+\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0,1)\cup(1,2)$

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (0, - 3) y un mínimo relativo en (2, 1).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1; +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 213

1. Primos gemelos. Hay infinitos pares de números primos gemelos, es decir, de primos cuya diferencia es 2. Ejemplo: 7 y 5 son primos gemelos, ya que 7 – 5 = 2. Encuentra cuatro pares de primos gemelos.

Esta es una conjetura que está sin demostrar.

Hasta el número 100 podemos encontrar varios primos gemelos: 5 y 7; 11 y 13; 17 y 19; 29 y 31; 41 y 43; 71 y 73.

2. Número primos generados. El polinomio $n^2 - n + 41$, cuya indeterminada n es entera, genera números primos cuando n va desde – 40 hasta 40. Este polinomio, ¿genera primos para cualquier entero n?

En efecto, el polinomio $n^2 - n + 41$ genera número primos para valores de n comprendidos entre – 40 y 40.

Por ejemplo: si n = 25, entonces $25^2 - 25 + 41 = 641$, que es un número primo.

Para cualquier valor de n no genera números primos, pues, por ejemplo, para n = 41, $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ que es un número compuesto.

3. Número mágico. Toma un número de tres cifras. Forma el número que se obtiene al escribir a la derecha del anterior el número repetido. Este número de 6 cifras lo dividimos por 7 y el cociente obtenido, por 11, y el último cociente, por 13. ¿Qué se observa?

Tomamos un número de tres cifras cualquiera, 739, y le aplicamos lo que dice el problema y obtenemos:

$$\frac{739739}{7 \cdot 11 \cdot 13} = 729.$$

Observamos que obtenemos el número de partida. Veamos que esto se cumple con cualquier número y para ello partimos de un número cualquiera xyz.

xyzxyz= 100 000x + 10 000y + 1 000z + 100x + 10y + z = 1001 · (100x + 10y + z) = 7 · 11 · 13 · xyz

Por tanto, al dividir xyzxyz por 7, por 11 y por 13, obtenemos el número de partida xyz.

4. Conjetura de Collatz o (3n + 1). Compruébala para los valores de n: 7, 12, 17 y 30.

Indicamos con f^2 (x) = f (f(x)) y así sucesivamente por cuestiones de escritura.

Para n = 7:
f (7) = 22; f^2 (7) = 11; f^3 (7) = 34; f^4 (7) = 17; f^5 (7) = 52; f^6 (7) = 26; f^7 (7) = 13; f^8 (7) = 40; f^9 (7) = 20; f^{10} (7) = 10; f^{11} (7) = 5; f^{12} (7) = 16; f^{13} (7) = 8; f^{14} (7) = 4; f^{15} (7) = 2; f^{16} (7) = 1…

Para n = 12:
f (12) = 6; f^2 (12) = 3; f^3 (12) = 10; f^4 (12) = 5; f^5 (12) = 16; f^6 (16) = 8; f^7 (12) = 4; f^8 (12) = 2; f^9 (12) = 1…

Para n = 17:
f (17) = 52; f^2 (17) = 26; f^3 (17) = 13; f^4 (17) = 40; f^5 (17) = 20; f^6 (17) = 10; f^7 (17) = 5; f^8 (17) = 16; f^9 (17) = 8; f^{10} (17) = 4; f^{11} (17) = 2; f^{12} (17) = 1…

Para n = 30:
f (30) = 15; f^2 (30) = 46; f^3 (30) = 23; f^4 (30) = 70; f^5 (30) = 35; f^6 (30) = 106; f^7 (30) = 53; f^8 (30) = 160; f^9 (30) = 80; f^{10} (30) = 40; f^{11} (30) = 20; f^{12} (30) = 10; f^{13} (30) = 5; f^{14} (30) = 16; f^{15} (30) = 8; f^{16} (30) = 4; f^{17} (30) = 4; f^{17} (30) = 2; f^{18} (30) = 1…

NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 215

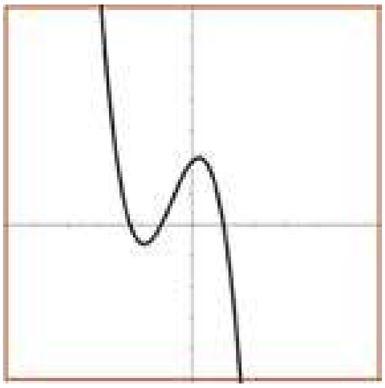
1. Representa gráficamente las funciones que siguen, explorando sus gráficas y modificando su aspecto.

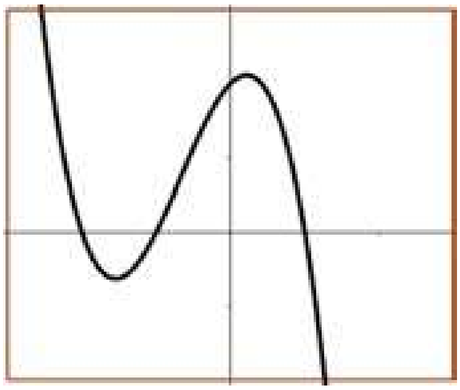
a) f (x) = - x^3 - $2x^2$ + x + 2 **b) f(x) = $x^2 \cdot e^{-x}$** **c)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Seguimos los pasos descritos en el epígrafe OPCIONES PARA UNA GRÁFICA:

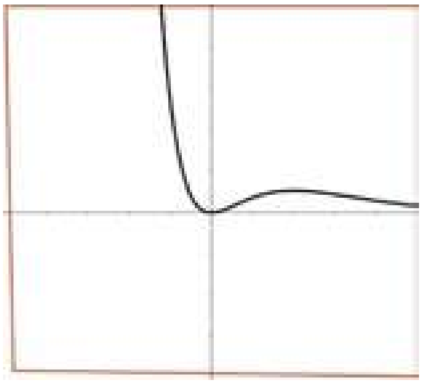
- Editamos la función en la tecla **Y=**.
- Pulsamos **GRAPH** y visualizamos la gráfica.
- Activando la tecla **WINDOW** podemos mejorar el aspecto de la gráfica.
- Pulsando de nuevo **GRAPH** obtenemos una nueva imagen de la gráfica.
- Activando **TRACE** nos movemos con el cursor por la gráfica y en la pantalla aparece la posición del cursor así como sus coordenadas.
- Con la tecla **ZOOM** modificamos el aspecto de la gráfica.

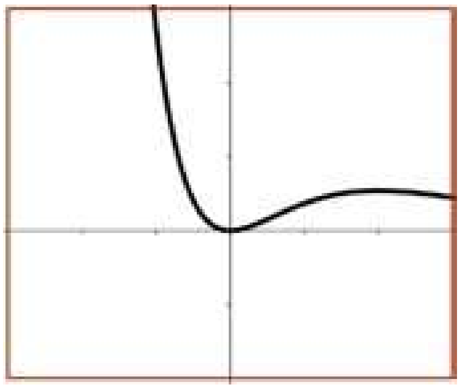
a) Para la función f (x) = - x^3 - $2x^2$ + x + 2 podemos obtener imágenes como las que siguen.



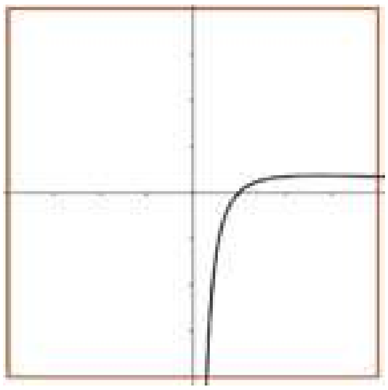


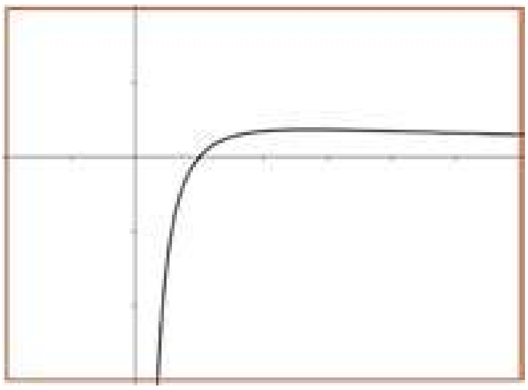
b) La gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ puede presentar los siguientes aspectos:





c) La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ presenta el siguiente aspecto:





2. Para las funciones de la actividad anterior visualiza simultáneamente su gráfica y su tabla de valores.

Procedemos como se explica en el epígrafe GRÁFICA Y TABLA DE VALORES DE UNA FUNCIÓN:

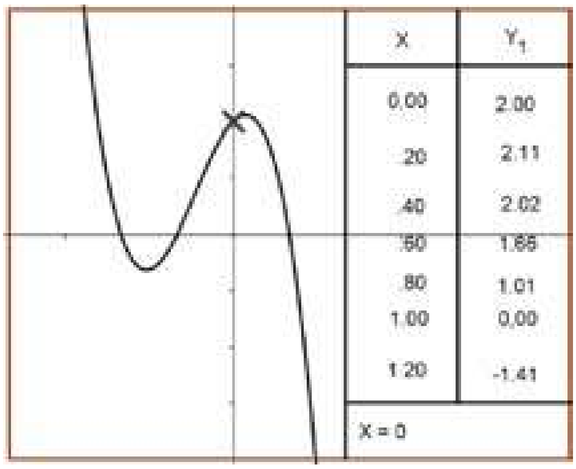
- Pulsamos la tecla **Y =** y en Y_1 introducimos la expresión de la función.

- En el menú de la tecla **MODE** elegimos **FLOT 2**, para obtener resultados con dos cifras decimales y en la línea COMPL (Full) HORIZ G-T elegimos la opción **G-T** (gráfico-tabla) que muestra la pantalla dividida verticalmente.

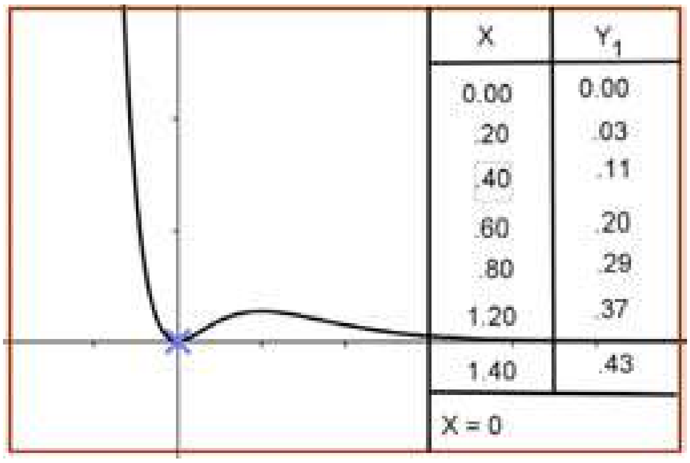
- Pulsando **GRAPH** visualizamos la gráfica de la función y parte de su tabla de valores. Con las teclas **WINDOWS** y **ZOOM** podemos modificar el aspecto de la gráfica.

- Con la tecla **TRACE** nos movemos sobre la gráfica y la posición del cursor queda reflejada en la tabla y en la pantalla gráfica, como puede verse en las imágenes.

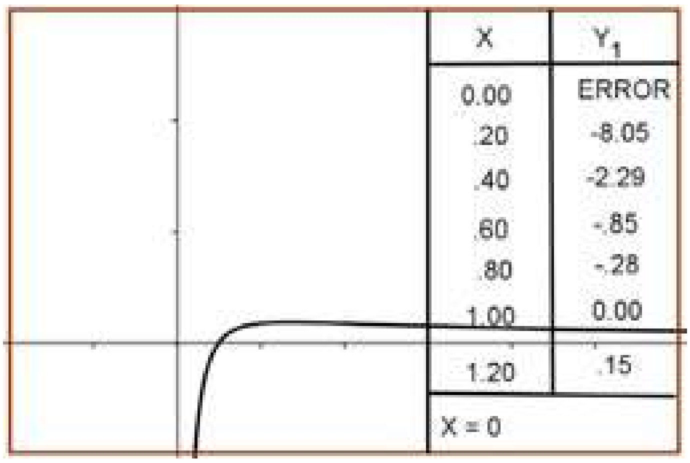
a) Para la función f (x) = $- x^3 - 2x^2 + x + 2$ obtenemos:



b) Para la función f(x) = $x^2 \cdot e^{-x}$ obtenemos:

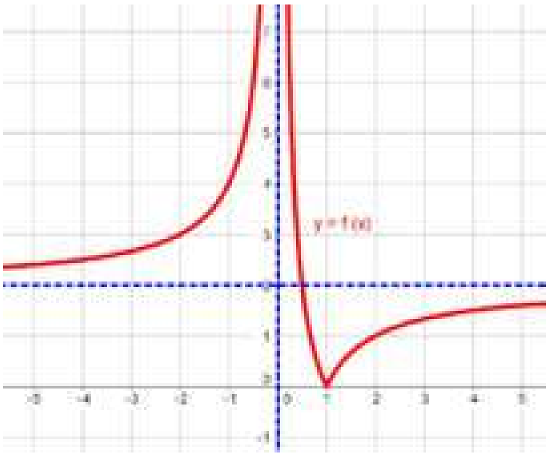


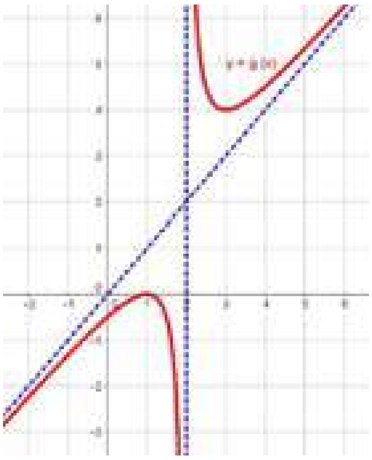
c) Para la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ obtenemos:

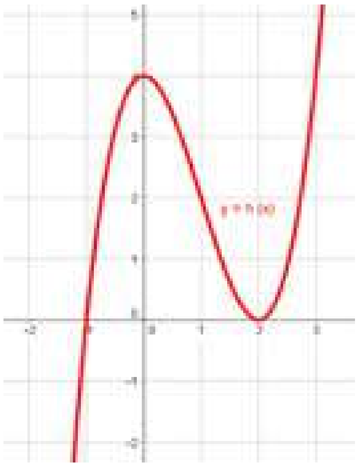


ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 218

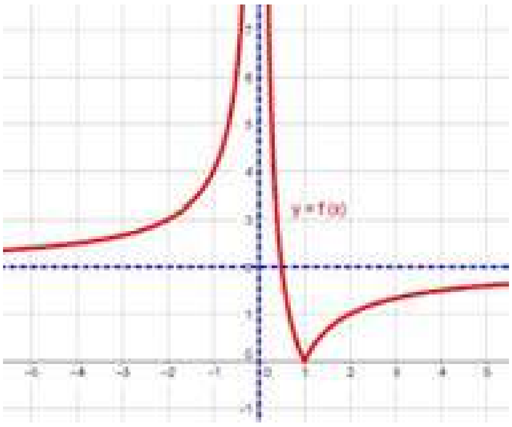
1. Describe las siguientes funciones indicando sus dominios, recorridos, puntos de corte con los ejes, asíntotas, ramas infinitas, intervalos de monotonía y curvatura y sus puntos singulares.







a) Las características de la gráfica de f (x) son:



● Dominio: Dom f = R - {0}.

● Recorrido: Im f = $\left[0, +\infty\right)$.

● Puntos de corte con los ejes: (1, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 0 e y = 2.

● Ramas parabólicas: no tiene.

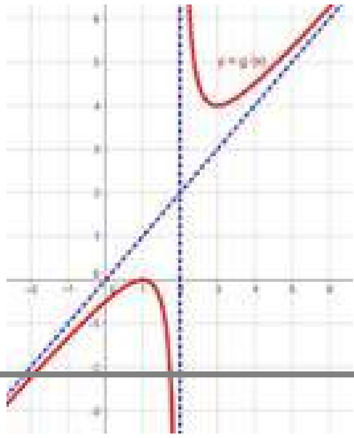
● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 1)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (1, 0).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(1, +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

b) Las características de la gráfica de g (x) son:



● Dominio: Dom f = R - {2}.

● Recorrido: Im f = $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

● Puntos de corte con los ejes: (1, 0).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 2 e y = x.

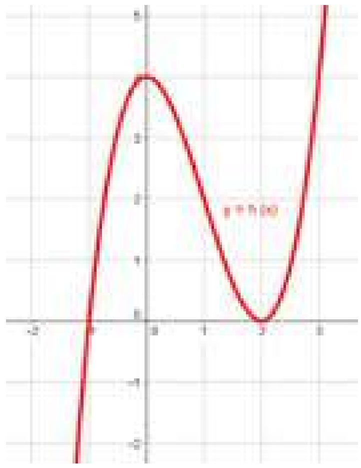
● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(1, 2) \cup (2,3)$

● Extremos relativos: tiene un máximo relativo en (1, 0) y un mínimo relativo en (3, 4).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(2, +\infty)$

● Puntos de inflexión: no tiene.



c) Las características de la gráfica de h (x) son:

● Dominio: Dom f = R.

● Recorrido: Im f = R.

● Puntos de corte con los ejes: (- 1, 0); (2, 0) y (0, 4).

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, una a menos infinito y otra a más infinito.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 2)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (2, 0) y un máximo relativo en (0, 4).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (1, 2) es de inflexión.

2. Encuentra las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-1}$

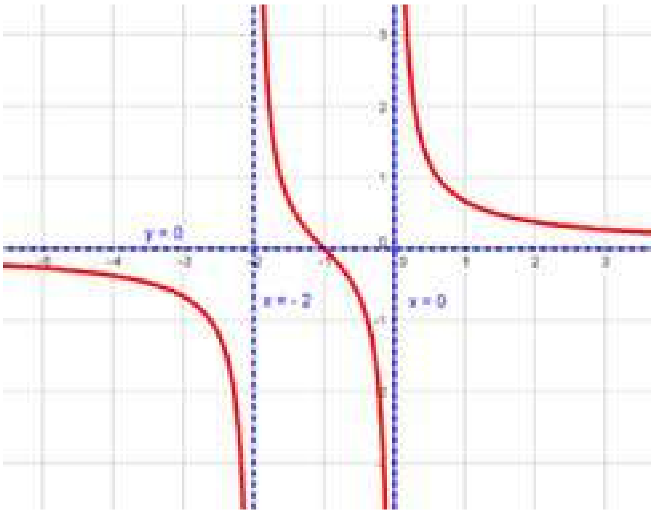
a) Las asíntotas verticales son las rectas:

● x = - 2, al cumplirse $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = +\infty$

- x = 0, al cumplirse $\lim\limits_{x \to -0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = +\infty$

La asíntota horizontal es y = 0 al cumplirse $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = 0$.

Asíntotas oblicuas no tiene ya que $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+1}{x^3+2x^2} = 0$



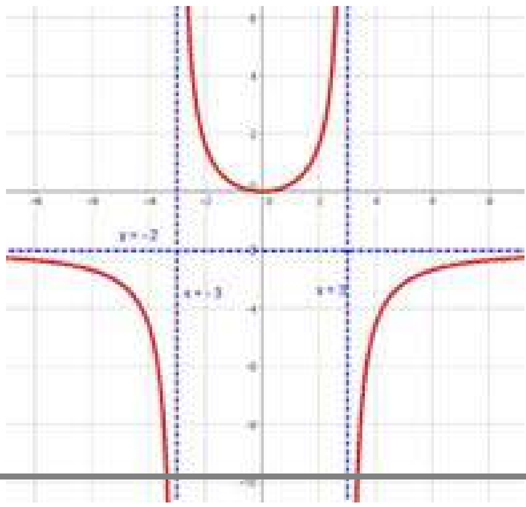
b) Las asíntotas verticales son las rectas:

- x = - 3, al cumplirse $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = +\infty$

- x = 3, al cumplirse $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = +\infty$

La asíntota horizontal es y = - 2 al cumplirse $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{9-x^2} = -2$.

Asíntotas oblicuas no tiene ya que $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{9x-x^3} = 0$



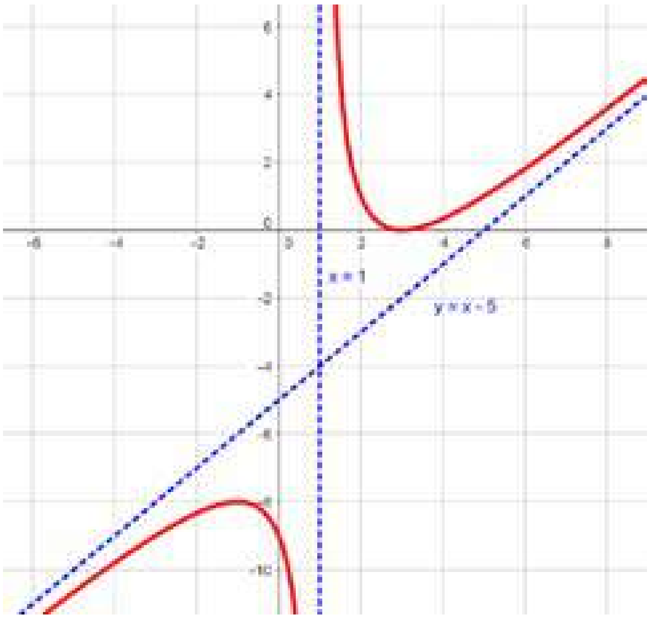
c) La asíntota vertical es: x = 1, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-3)^2}{x-1} = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-3)^2}{x-1} = +\infty$$

Asíntotas horizontales no tiene ya que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-3)^2}{x-1} = \infty$.

La asíntota oblicua es la recta y = x – 5, al cumplirse:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-3)^2}{x^2 - x} = 1 \text{ y } n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{(x-3)^2}{x-1} - x \right] = -5$$



3. La evolución del número de bacterias en un cultivo de laboratorio como función del tiempo sigue la expresión N (t) = - t^2 + bt – c, 0 ≤ t ≤ 30, donde N (t) denota el número de bacterias y t el tiempo en horas. Se sabe que el número máximo de bacterias se alcanza a las 10 horas y que a las 30 horas no hay ninguna bacteria.

a) Determina las constantes b y c.

b) Representa gráficamente el número de bacterias en función del tiempo.

a) Como el máximo se alcanza a las 10 horas, N ´ (10) = 0:

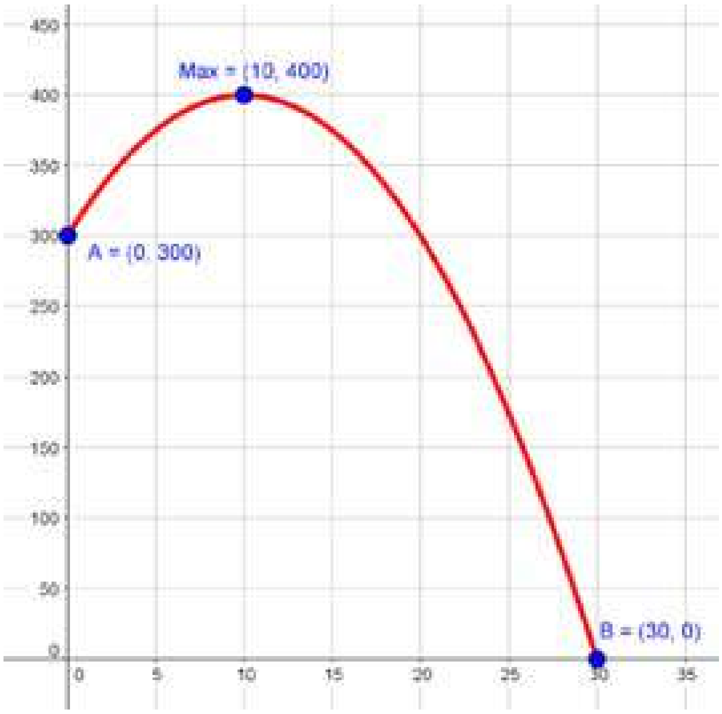
$$N'(t) = -2t + b = 0 \quad \Rightarrow \quad -20 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 20$$

A las 30 horas no hay bacterias, es decir, N (30) = 0:

$$N(30) = -30^2 + 20 \cdot 30 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -300$$

b) La función N (t) = - t^2 + 20t + 300 es una parábola de vértice el punto (10, 400) y con puntos de corte en los ejes coordenados en (0, 300) y (30, 0).

En el dibujo puede verse su gráfica.



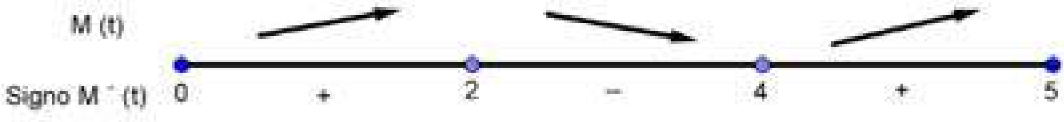
4. La cantidad de madera (en metros cúbicos) que se extrae de una explotación forestal durante un período de cinco días viene dada por la función M (t) = t^3 – $9t^2$ + 24t, 0 ≤ t ≤ 5, siendo t el tiempo transcurrido en días.

a) Estudia en qué períodos se ha registrado un aumento y en los que se ha registrado una disminución de la cantidad de la cantidad de madera extraída

b) ¿En que día o días se ha extraído la máxima cantidad de madera?, ¿y la mínima? Calcula la cantidad máxima y mínima de metros cúbicos de madera extraída.

c) Representa gráficamente la función M (t), calculando, si los hay, los puntos de inflexión.

a) El estudio del signo de la primera derivada $M'(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t - 2)(t - 4)$ aparece en el esquema que sigue.



Se ha registrado un aumento de la cantidad de madera extraída en los dos primeros días y en el 5º día.

Se ha registrado una disminución en los días 3º y 4º.

b) Una función continua definida en un intervalo cerrado alcanza los extremos absolutos en los extremos relativos o en los extremos del intervalo:

$M(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 = 0$ $M(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 = 16$

M (2) = $2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 = 20$ M (3) = $3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 = 18$

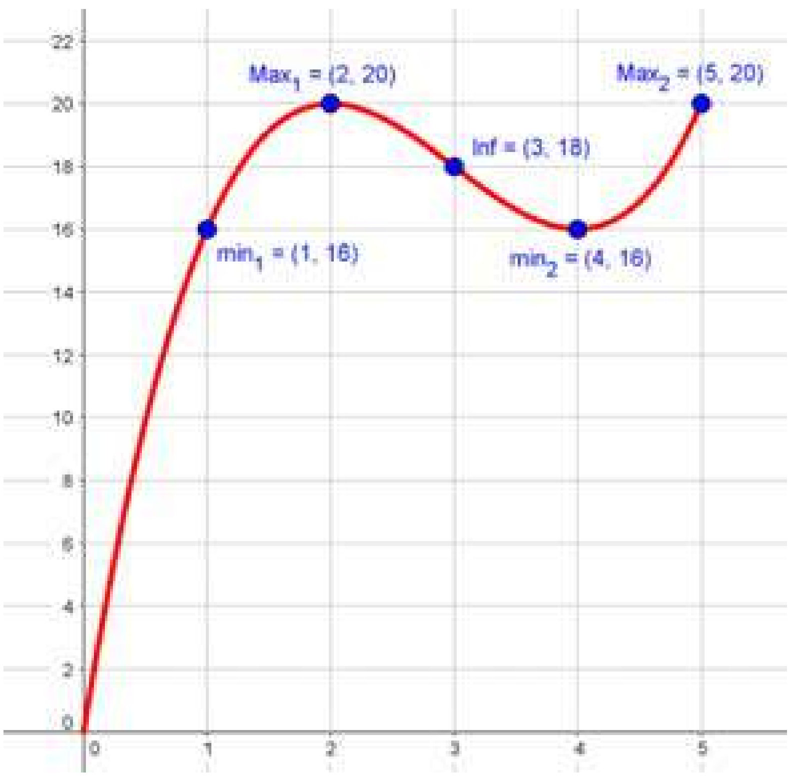
M (4) = $4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 = 16$ M (5) = $5^3 - 9 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 = 20$

La máxima cantidad de madera se extrajo en los días segundo y quinto, y fueron 20 m^3.

La mínima cantidad de madera se extrajo en el primer día y en el cuarto día, y fueron 16 m^3.
c) Estudiamos el signo de la segunda derivada M ´´ (t) = 6t – 18 = 6(t – 3):

El punto (3, 18) es de inflexión.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.

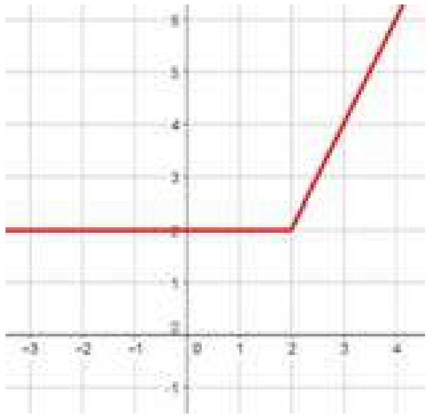


5. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) f (x) = |x - 2| + x   **c) f (x) = - x^3 + 3x - 2**   **e) f (x) = $x^4 - 2x^2$ - 8**

b) $f(x) = \left|9 - x^2\right|$ **d) f (x) = $x^3 - 3x^2 + 4$**   **f) f (x) = $x^4 - x^3$**

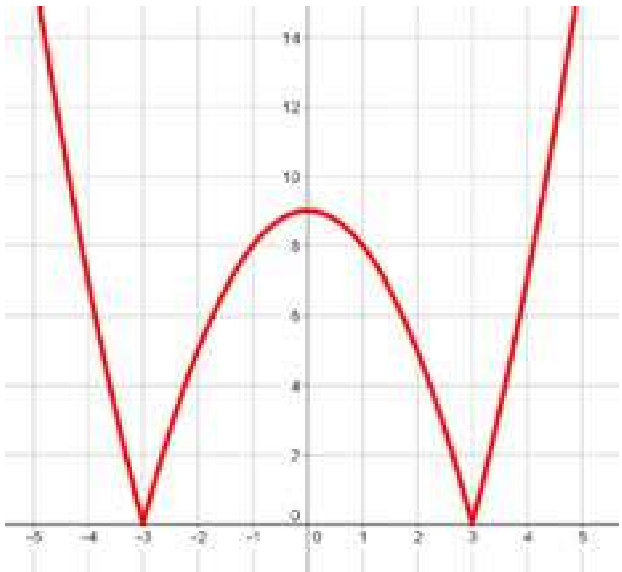
a) La función f (x) = |x - 2| + x puede expresarse en la forma: $f(x) = \begin{cases} 2 & si\ x \le 2 \\ 2x - 2 & si\ x > 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en el dibujo.



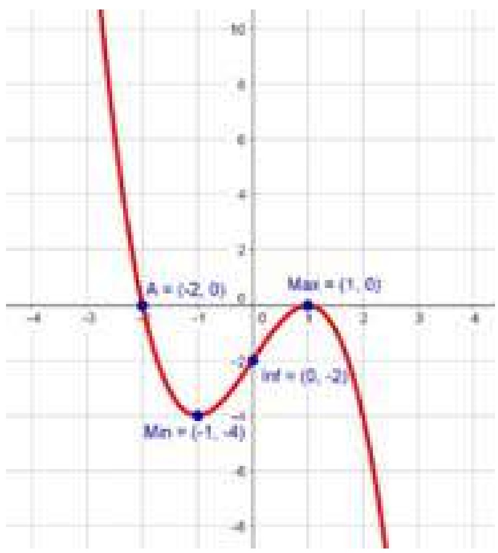
b) La función f (x) = |9 – x²| puede expresarse en la forma:

$$f\ (x) = \begin{cases} x^2 - 9 & si\ x \in (-\infty, -3) \cup (\ 3, +\infty) \\ -x^2 + 9 & si\ x \in (-3,\ 3) \end{cases}$$

y su gráfica puede verse en el dibujo.



c) Las características de f (x) = - x^3 + 3x - 2 son:



● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-2,\ 0)\ y\ (1,\ 0) \\ OY: (0, -2) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + 3x - 2) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 3x - 2) = -\infty$$

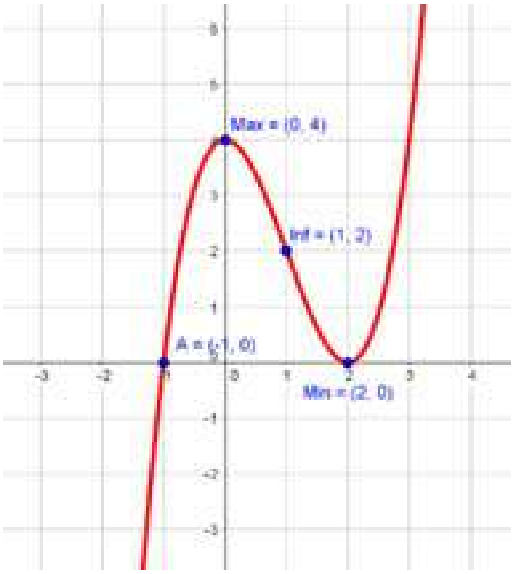
● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ estrictamente creciente en $(-1, 1)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (- 1, - 4) y un máximo relativo en (1, 0).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y negativas en $(0, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, - 2) es de inflexión.

d) Las características de f (x) = $x^3 - 3x^2 + 4$ son:



● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-1, 0) \ y \ (2, 0) \\ OY: (0, 4) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

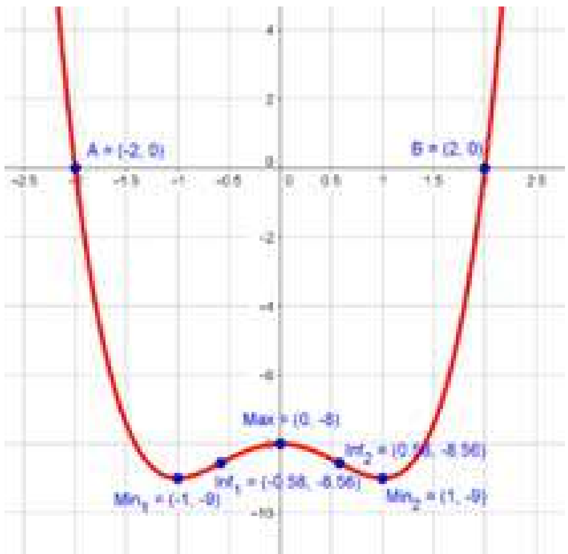
$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = +\infty$$

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ estrictamente decreciente en $(0, 2)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (2, 0) y un máximo relativo en (0, 4).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (1, 2) es de inflexión.



e) Las características de f (x) = $x^4 - 2x^2 - 8$ son:

● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-2, 0) \ y \ (2, 0) \\ OY: (0, -8) \end{cases}$$

● Simetría: es simétrica respecto del eje de ordenadas.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^4 - 2x^2 - 8) = +\infty$$

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ estrictamente creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene dos mínimos relativos en (- 1, - 9) y (1, - 9) y un máximo relativo en (0, - 8).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-0{,}58; 0{,}58)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -0{,}58) \cup (0{,}58; +\infty)$.

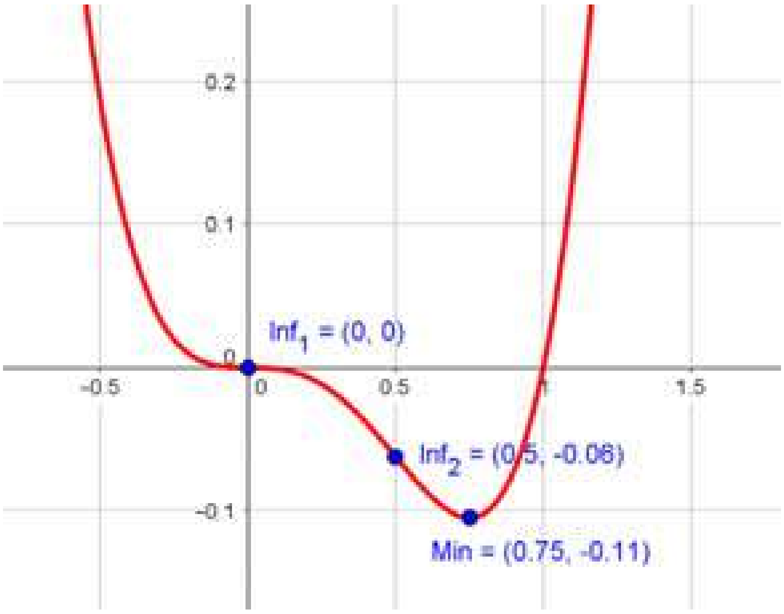
● Puntos de inflexión: los puntos (- 0,58; - 8,56) y (0,58; 8,56) son de inflexión.

f) Las características de f (x) = $x^4 - x^3$ son:

● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (0, 0) \ y \ (1, 0) \\ OY: (0, 0) \end{cases}$$



● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: no tiene.

● Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \to \mp\infty} (x^4 - x^3) = +\infty$$

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0{,}75)$ estrictamente creciente en $(0{,}75; +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (0,75; - 0,11).

● Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0) \cup (0{,}5; +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(0, 0{,}5)$.

● Puntos de inflexión: los puntos (0, 0) y (0,5; - 0,06) son de inflexión.

6. Sea la función f (x) = $2x^3 + bx^2 + cx - 5$. Halla los valores de b y c para que f (x) tenga un máximo en x = 1 y un mínimo en x = 2. Representa la función que se obtiene.

Calculamos b y c haciendo uso de la primera derivada $f'(x) = 6x^2 + 2bx + c$:

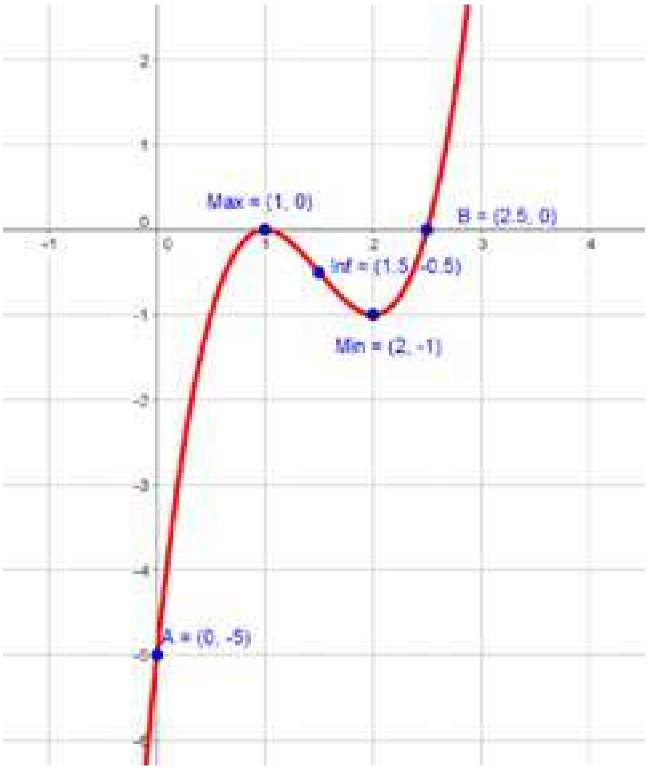
$f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 2b + c = -6$

$f'(2) = 6 \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 4b + c = -24$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} 2b + c = -6 \\ 4b + c = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -9 \\ c = 12 \end{cases}$$

La función es $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ y en la imagen podemos ver su gráfica.



Los puntos especiales son.

Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX: (1,0) \, y \, (2,5,0) \\ OY: (0,-5) \end{cases}$

Máximo: (1, 0).

Mínimo: (2, - 1).

Punto de Inflexión: (1,5; - 0,5).

7. La gráfica de la función f (x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de inflexión en x = 1 y un máximo en (0, 4).

a) Halla los coeficientes a, b y c.

b) Encuentra los máximos y mínimos relativos y representa la función.

a) Las derivadas de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ son:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad y \quad f''(x) = 6x + 2a$$

Si tiene un máximo en el punto (0, 4) se cumplirá:

$f(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 4$

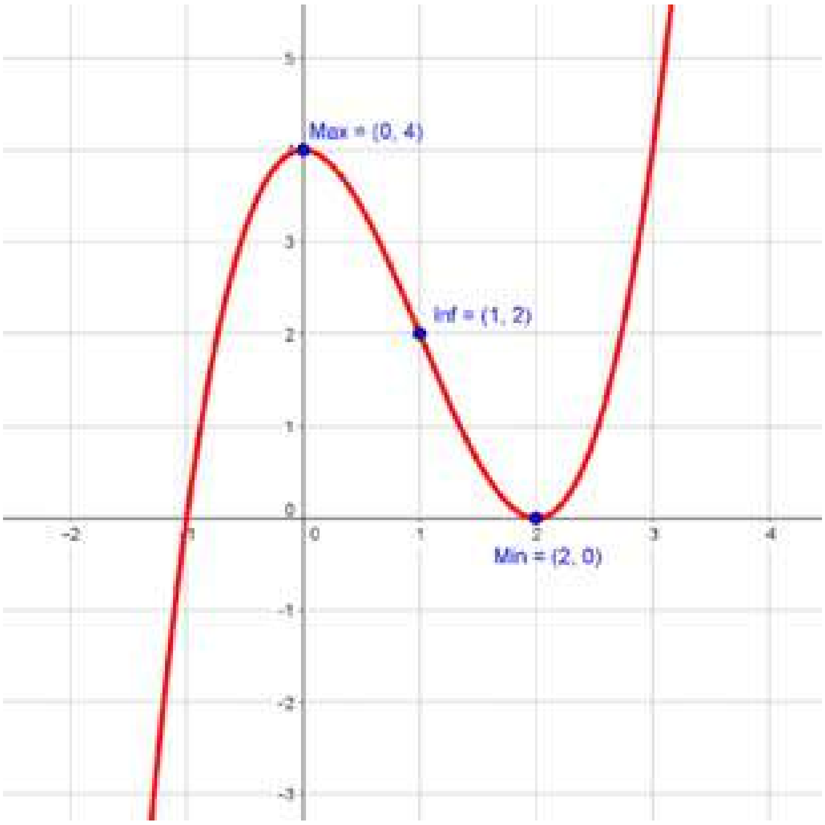
$f'(0) = 0 \Rightarrow \quad b = 0$

Si tiene un punto de inflexión en x = 1 se cumplirá $f''(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 + 2ª = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3$

Por tanto, la función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

b) El máximo relativo es el punto (0, 4), el mínimo relativo el punto (2, 0) y el punto de inflexión está en (1, 2).

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 219

8. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x}{(x-4)^2}$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ **g)** $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$

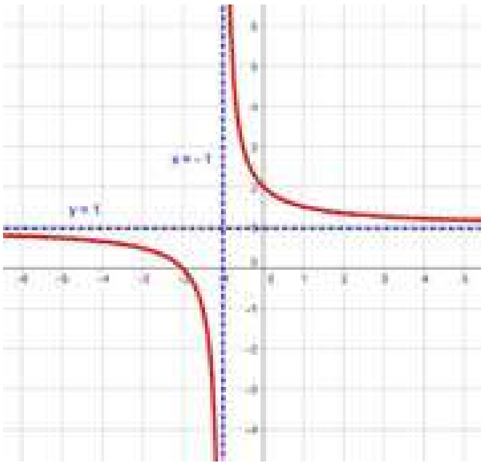
b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ **f)** $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-4}$ **h)** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

a) Las características de $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {- 1}.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-2, 0) \\ OY: (0, 2) \end{cases}$$



● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = - 1 e y = 1.

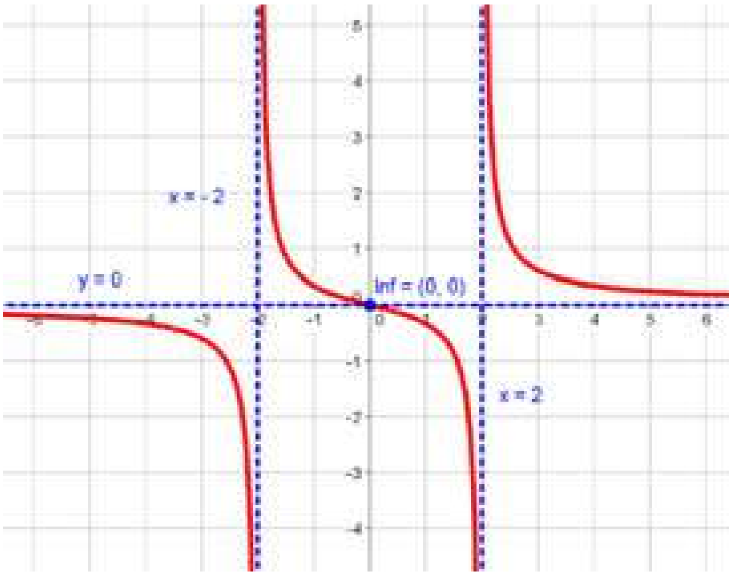
● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en R – {- 1}.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-1, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.



b) Las características de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {- 2, 2}.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (0, 0) \\ OY: (0, 0) \end{cases}$$

● Simetría: respecto del origen de coordenadas.

● Asíntotas: las rectas x = -2, x = 2 e y = 0.

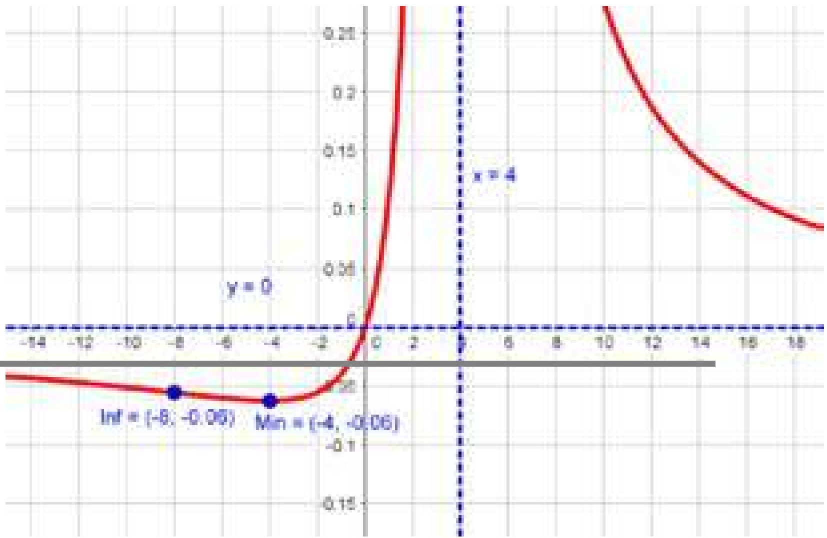
● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en R – {- 2, 2}.

● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (0, 0) es de inflexión.



c) Las características de $f(x) = \dfrac{x}{(x - 4)^2}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {4}.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (0, 0) \\ OY: (0, 0) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 4 e y = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

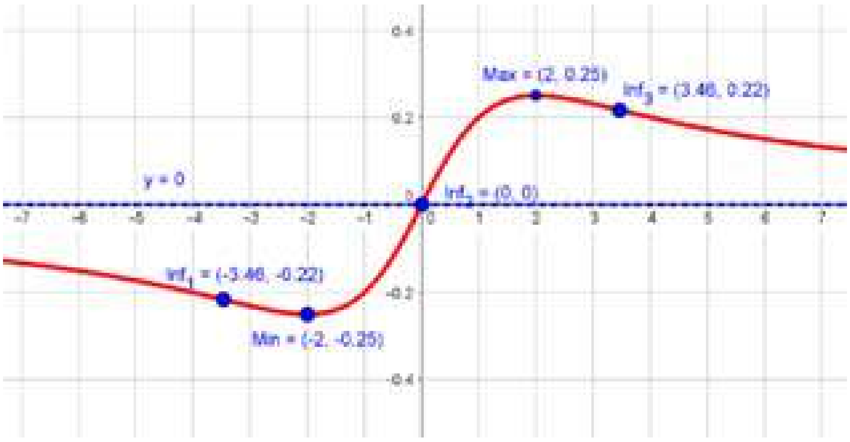
● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-4, 4)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (- 4, - 0,06).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -8)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-2, 4) \cup (4, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: el punto (- 8, - 0,06) es de inflexión.

d) Las características de $f\,(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ son:



● Dominio: Dom f = R.

● Puntos de corte con los ejes:

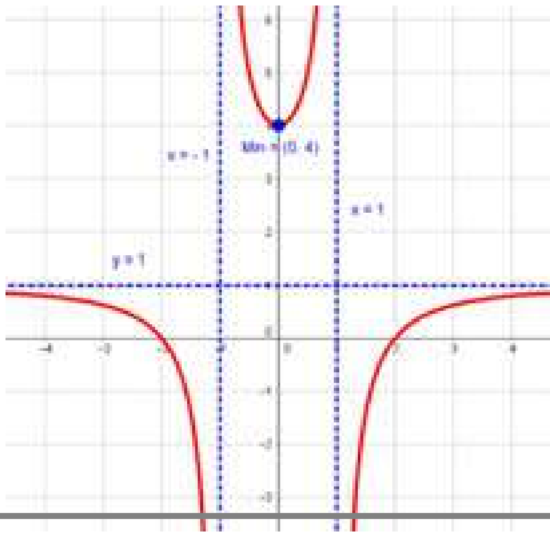
$$\begin{cases} OX: (0, 0) \\ OY: (0, 0) \end{cases}$$

● Simetría: respecto del origen de coordenadas

● Asíntotas: la recta y = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y estrictamente creciente en $(-2, 2)$.



● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (- 2, - 0,25) y un máximo relativo en (2, 0,25).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -3{,}46) \cup (0, 3{,}46)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-3{,}46, 0) \cup (3{,}46, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: los puntos (- 3,46; - 0,22); (0, 0) y (3,46; 0,22) son de inflexión.

e) Las características de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {- 1, 1}.
● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-2, 0) \text{ y } (2, 0) \\ OY: (0, 4) \end{cases}$$

● Simetría: respecto del eje de ordenadas

● Asíntotas: las rectas x = - 1, x = 1 e y = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y estrictamente creciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (0, 4).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-1, 1)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

f) Las características de $f(x) = \dfrac{3x^2}{x - 4}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {4}.

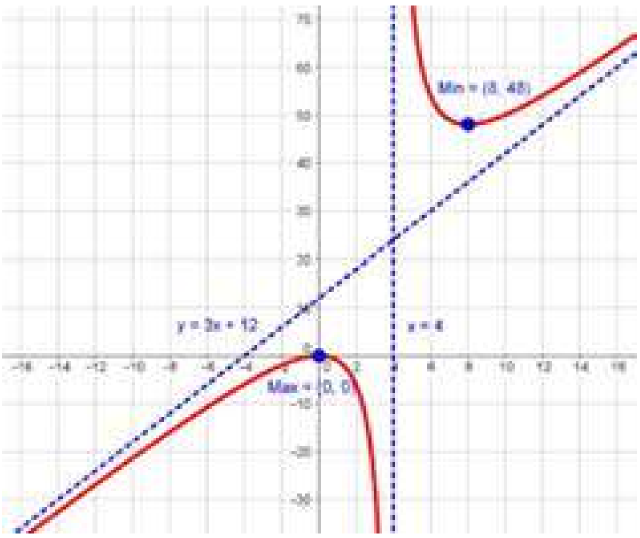
● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (0, 0) \\ OY: (0, 0) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = 4 e y = 3x + 12.

● Ramas parabólicas: no tiene.

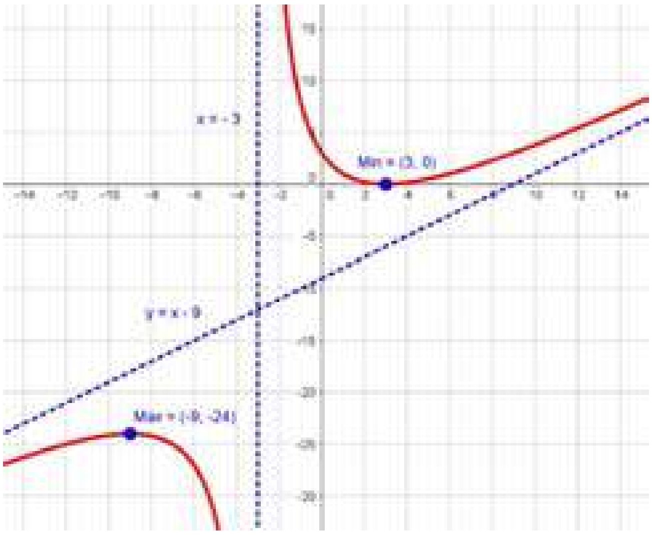


● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 4) \cup (4, 8)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (8, 48) y un máximo relativo en (0, 0).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 4)$ y cóncava hacia las y positivas en $(4, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.



g) Las características de $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {- 3}.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (3, 0) \\ OY: (0, 3) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas x = - 3 e y = x - 9.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-9, -3) \cup (-3, 3)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, -9) \cup (3, +\infty)$.

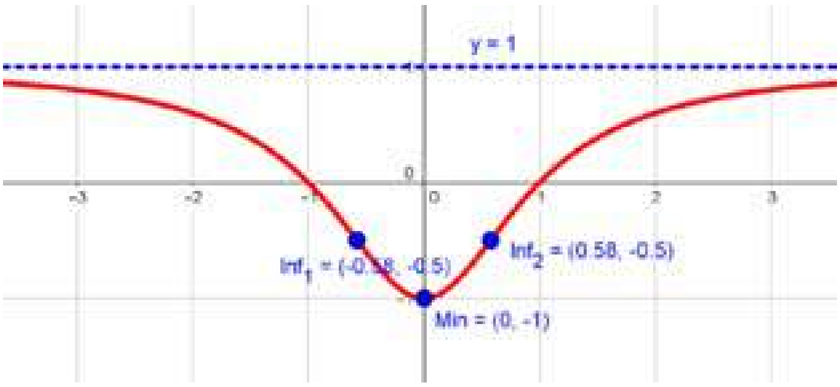
● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (3, 0) y un máximo relativo en (- 9, - 24).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -3)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-3, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

h) Las características de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ son:

● Dominio: Dom f = R.



● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-1, 0) \ y \ (1, 0) \\ OY: (0, -1) \end{cases}$$

● Simetría: respecto del eje de ordenadas.

● Asíntotas: la recta y = 1.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.

● Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en (0, - 1).

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -0{,}58) \cup (0{,}58; +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-0{,}58; 0{,}58)$.

● Puntos de inflexión: los puntos (- 0,58; - 0,50) y (0,58; - 0,50) son de inflexión.

9. Un modelo teórico asociado a los costes de almacenamiento y transporte de materiales para un proceso de manufactura, propone la siguiente función de coste:

$$C\,(x) = 100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right)$$

donde C (x) es el coste total, en euros, de almacenamiento y transporte (durante tres meses) de x toneladas de material.

a) ¿Qué cantidad de materiales hace que el coste sea mínimo?

b) ¿Cuáles son las asíntotas de esta función? Representa dicha función para x ≥ 0.

9. a) Para determinar el coste mínimo anulamos la primera derivada:

$$C\,'\,(x) = 100\left(9 - \frac{144}{x^2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; 9x^2 - 144 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 16 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -4 \text{ (sin } \textit{sentido}) \\ x = 4 \end{cases}$$

Comprobamos que es un mínimo ya que $C\,''\,(4) = \dfrac{28\,800}{4^3} > 0$

La cantidad de materiales que hace el coste mínimo es x = 4 toneladas. El valor del coste mínimo es:

$$C\,(4) = 100\left(100 + 9 \cdot 4 + \frac{144}{4}\right) = 17\,200 \textit{ euros}$$

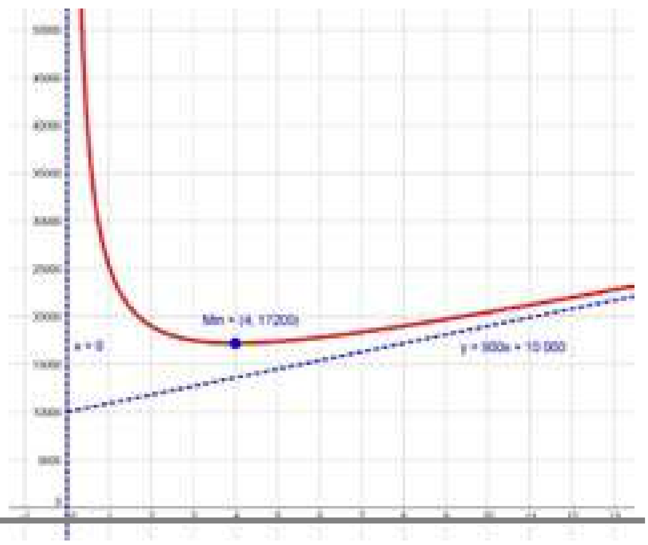
b) Las asíntotas de esta función son las rectas x = 0 e y = 900x + 10 000, ya que se cumple:

$$\lim_{x \to 0^+} C\,(x) = \lim_{x \to 0^+} 100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right) = +\infty$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{C\,(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 100\left(\frac{100}{x} + 9 + \frac{144}{x^2}\right) = 100 \cdot 9 = 900$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \left[C\,(x) - 900x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(10\,000 + 900x + \frac{144}{x} - 900x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(10\,000 + \frac{144}{x}\right) = 10\,000$$

c) La representación gráfica pedida puede verse en la imagen que sigue.



10. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) f (x) = ln (x + 2) **b)** $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

a) Las características de f (x) = ln (x + 2) son:

● Dominio: Dom f = $(-2, +\infty)$.

● Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX: (-1, 0) \\ OY: (0, \ \ln 2) \end{cases}$$

● Simetría: no tiene.

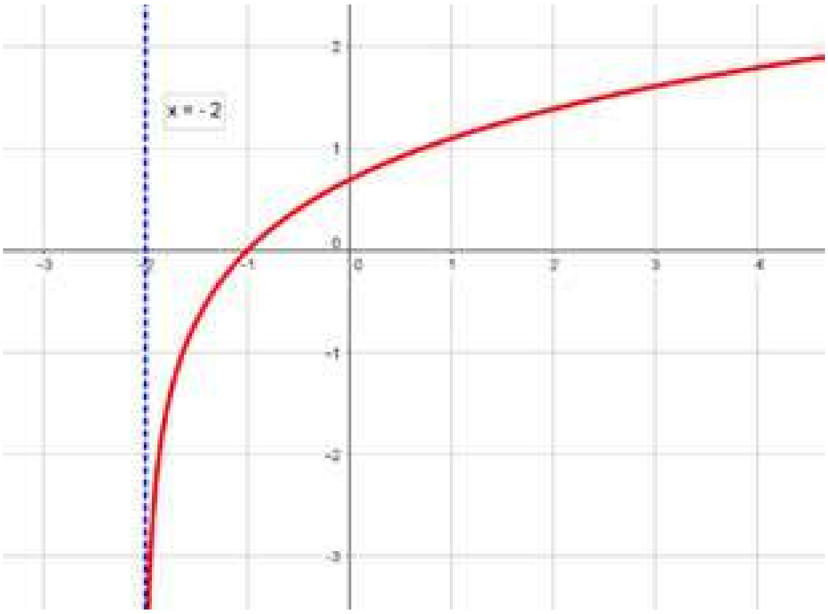
● Asíntotas: la recta x = - 2.

● Ramas parabólicas: tiene una al cumplirse:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x + 2) = +\infty$$

.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(-2, +\infty)$.



● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-2, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

b) Las características de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ son:

● Dominio: Dom f = R – {0}.

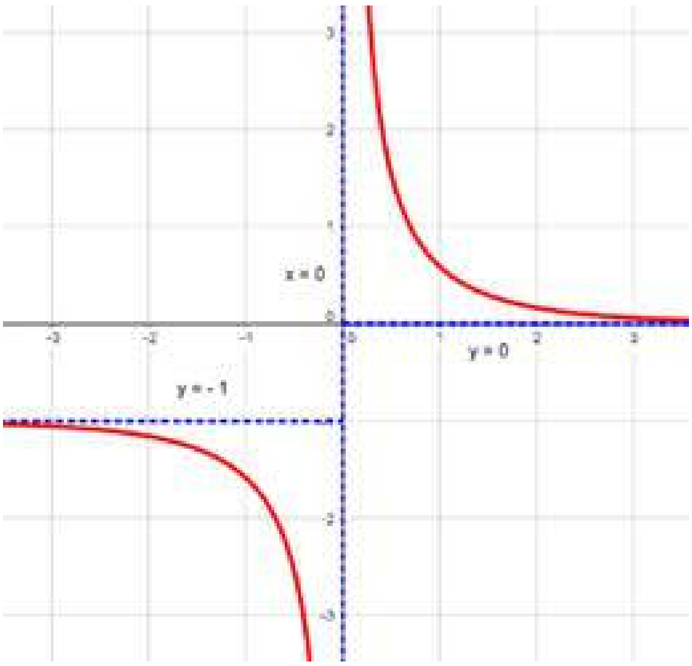
● Cortes con los ejes: no tiene.

● Simetría: no tiene.

● Asíntotas: las rectas y = - 1, y = 0 y x = 0.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente decreciente en R – {0}.



● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(0, +\infty)$.

● Puntos de inflexión: no tiene.

c) Las características de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ son:

● Dominio: Dom f = $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

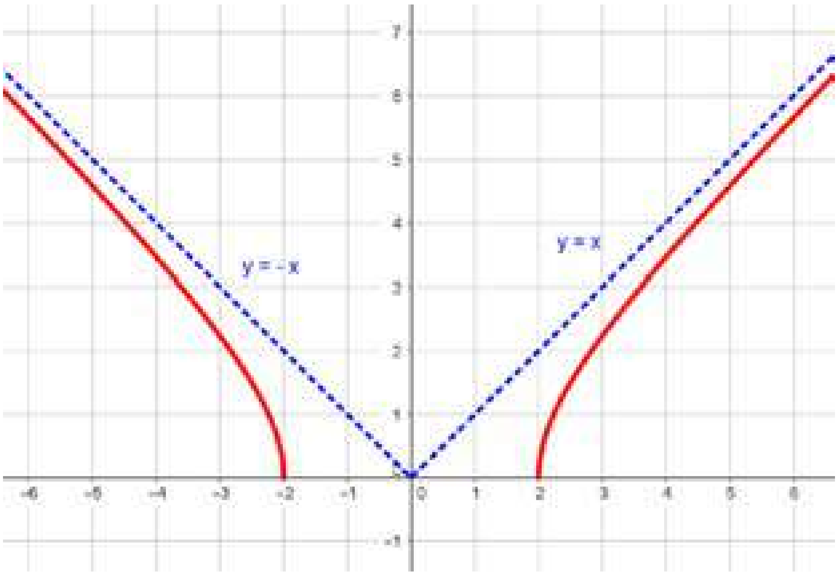
● Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX: (-2, 0) \ y \ (2, 0) \\ OY: \end{cases}$

● Simetría: respecto del eje de ordenadas.

● Asíntotas: las rectas y = - x e y = x.

● Ramas parabólicas: no tiene.

● Monotonía: es estrictamente creciente en $(2, +\infty)$ y monótona decreciente en $(-\infty, -2)$.



● Extremos relativos: no tiene.

● Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

● Puntos de inflexión: no tiene.

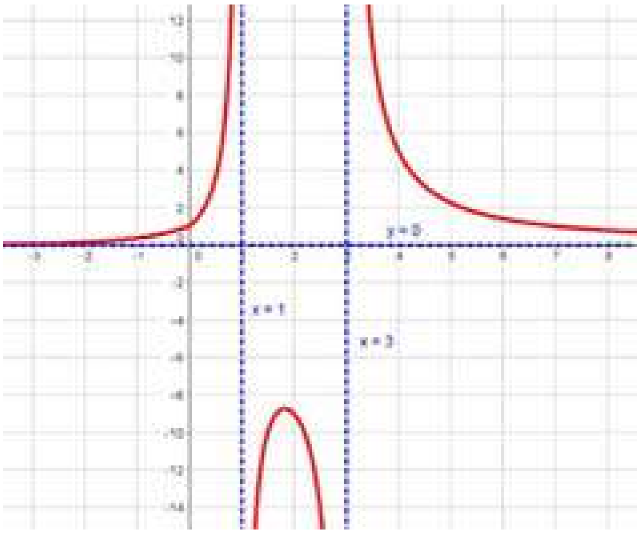
11. Encuentra las asíntotas de la función $f(x) = \begin{cases} e^x & si \ x < 0 \\ \dfrac{3x+3}{x^2-4x+3} & si \ x \geq 0 \end{cases}$.

Las asíntotas de la función son las rectas:

● y = 0 al cumplirse $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+3}{x^2-4x+3} = 0$

● x = 1, al cumplirse $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x+3}{x^2-4x+3} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3x+3}{x^2-4x+3} = -\infty$

● x = 3, al cumplirse $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3x+3}{x^2-4x+3} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^{+}} \dfrac{3x+3}{x^2-4x+3} = +\infty$



12. La función que da los costes de una empresa, en miles de euros, respecto al número x > 0 de toneladas que fabrica, viene dada por C (x) = 2x³ – 6 · ln x. Halla:

a) El mínimo coste y el número de toneladas que hay que fabricar para alcanzar ese mínimo.

b) Representa gráficamente la función dada.

c) Si los ingresos de esta empresa viene dados por I (x) = 2x³ + 12x, encuentra la función beneficio y estudia si existe beneficio máximo.

a) Las derivadas de la función $C(x) = 2x^3 - 6 \cdot \ln x$ son:

$$C'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x} \qquad C''(x) = 12x + \frac{6}{x^2}$$

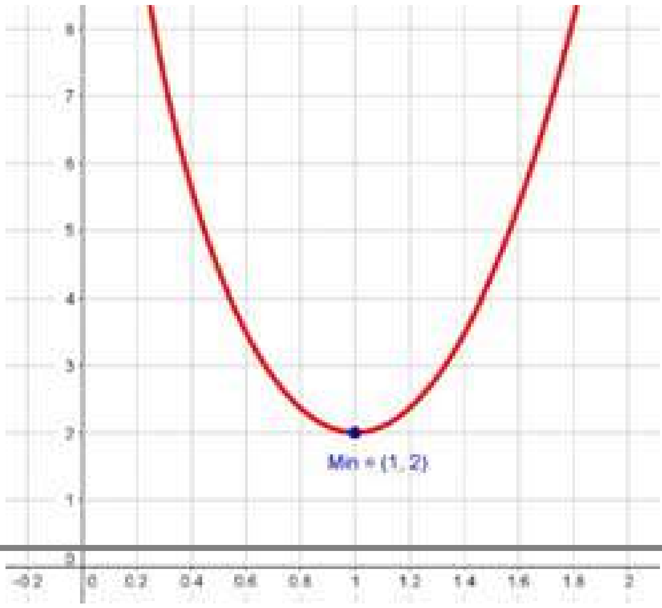
El valor que anula la primera derivada es x = 1, y al ser C ´´ (1) = 18 > 0, en el punto (1, 2) la función tiene un mínimo.

b) La gráfica de la función $C(x) = 2x^3 - 6 \cdot \ln x$ puede verse en el dibujo.

En la gráfica podemos ver el mínimo del apartado anterior, la asíntota vertical x = 0 (eje OY) y la rama parabólica hacia más infinito.

c) Teniendo en cuenta que beneficios = ingresos – costes, la función beneficio, B (x), viene dada por:

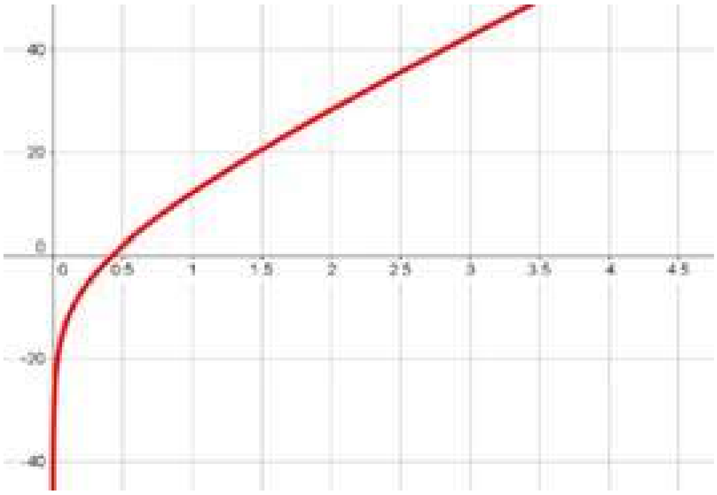
$B(x) = I(x) - C(x) \quad \Rightarrow \quad B(x) = 2x^3 + 12x - (2x^3 - 6 \cdot \ln x) \quad \Rightarrow \quad B(x) = 12x + 6 \cdot \ln x$



Para ver si existe beneficio máximo hallamos las dos primeras derivadas:

$$B'(x) = 12 + \frac{6}{x} \qquad\qquad B''(x) = -\frac{6}{x^2}$$

La primera derivada se anula para $x = -\frac{1}{2}$ y este punto está fuera del dominio de definición de la función. Por tanto, la función beneficio no tiene un máximo. Puede verse en la gráfica que sigue.



13. Los beneficios de una empresa en sus primeros ocho años vienen dados, en millones de euros, por la función:

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t,\ 0 \le t \le 8$$

donde la variable t indica el tiempo transcurrido en años, desde su fundación.

a) Estudia la monotonía y los extremos de B (t).

b) Dibuja la gráfica de B (t) en el intervalo [0, 8] y explica, a partir de ella, la evolución de los beneficios de esta empresa en sus ocho años de existencia,

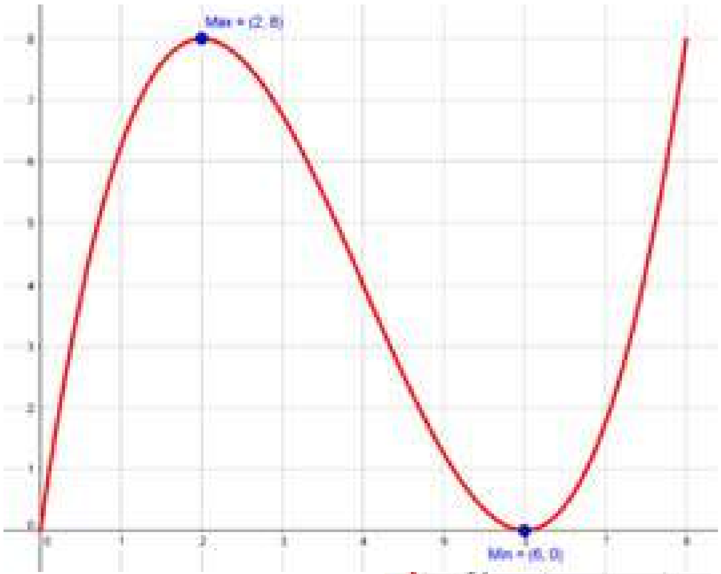
a) Para estudiar la monotonía y los extremos utilizamos la derivada primera:

$$B\ \ (t) = \frac{3}{4}t^2 - 6t + 9 = 0 \ \Rightarrow\ 3t^2 - 24t + 36 = 0 \ \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 2 \end{cases}$$

En el esquema que sigue aparece el estudio del signo de B ´ (t).

La función B (t) es creciente en $(0, 2) \cup (6, 8)$ y decreciente en $(2, 6)$. Tiene un máximo en (2, 8) y un mínimo en (6, 0).

b) La gráfica puede verse a continuación:



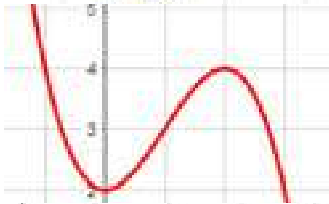
Los beneficios de la empresa crecen de cero a ocho millones de euros en los dos primeros años.

Entre el segundo y el sexto año, los beneficios descienden.

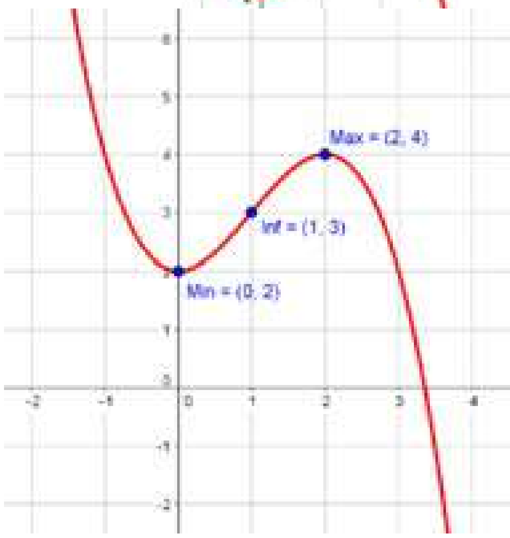
En el sexto año, no hay beneficios ni pérdidas.

A partir del sexto año, los beneficios vuelven a ascender hasta alcanzar de nuevo los ocho millones de euros en el octavo año.

14. Determina los coeficientes a, b, c y d de una función polinómica de tercer grado cuya representación gráfica es la que muestra el dibujo.



La función f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un mínimo en el punto (0, 2) y un máximo en el punto (2, 4). La derivada primera es f ´ (x) = $3ax^2 + 2bx + c$.



Imponemos las condiciones f (0) = 2; f ´ (0) = 0; f (2) = 4 y f ´ (2) = 0 y obtenemos:

$$\begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

La función es $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ y su gráfica podemos verla en el dibujo.

15. En una granja dedicada a la cría de pollos, el peso de los mismos, en función de la edad, viene representado por la función:

$$P(x) = \begin{cases} -x^2 + bx \ \ si \ 0 \le x \le 21 \\ c \qquad\qquad si \ x > 21 \end{cases}$$

donde x representa la edad en días y P el peso en gramos. Se sabe que la función se continua y que a los 14 días un pollo pesa 2 198 gramos.

a) Encuentra el valor de las constantes b y c.

b) Representa gráficamente el peso en función de x

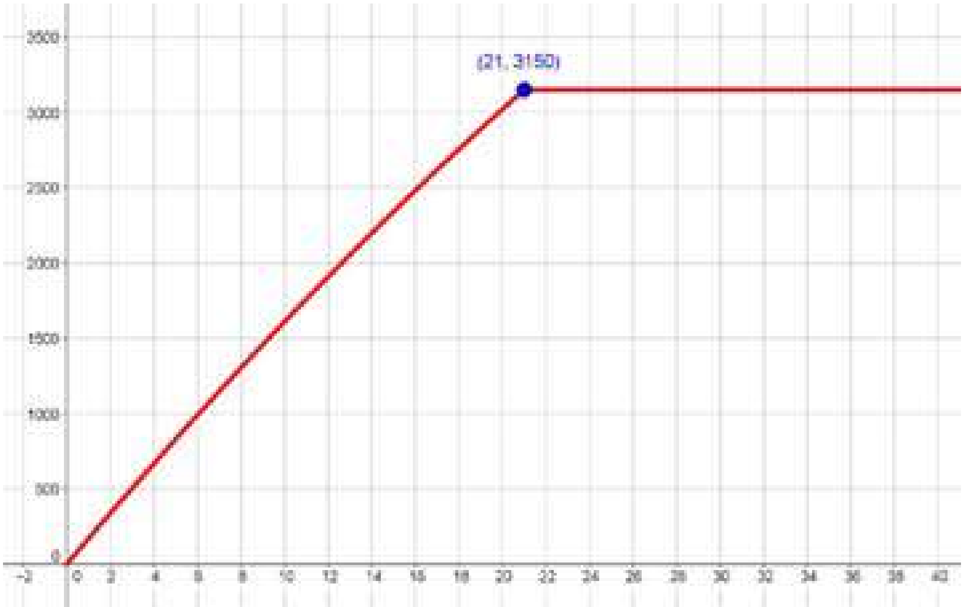
a) Si a los 14 días un pollo pesa 2 198 gramos, se cumplirá:

$$P(14) = 2198 \quad \Rightarrow \quad -(14)^2 + 14b = 2198 \quad \Rightarrow \quad b = 171$$

Si la función P (x) es continua, entonces:

$$\lim_{x \to 21} \left(-x^2 + 171x\right) = c \qquad \Rightarrow \qquad c = 3150$$

b) La gráfica de la función $P(x) = \begin{cases} -x^2 + 171x & si\ 0 \le x \le 21 \\ 3150 & si\ x > 21 \end{cases}$ está formada por un trozo de parábola en el intervalo [0, 21] y una semirrecta en el resto de su dominio. Podemos verla a continuación.



ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 220

1. La gráfica de la función siguiente tiene como asíntota oblicua la recta y = x. ¿Cuáles son los valores de a y b? ¿La función resultante tiene otras asíntotas?

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx - 4}{x - 3}$$

Calculamos los valores de a y b:

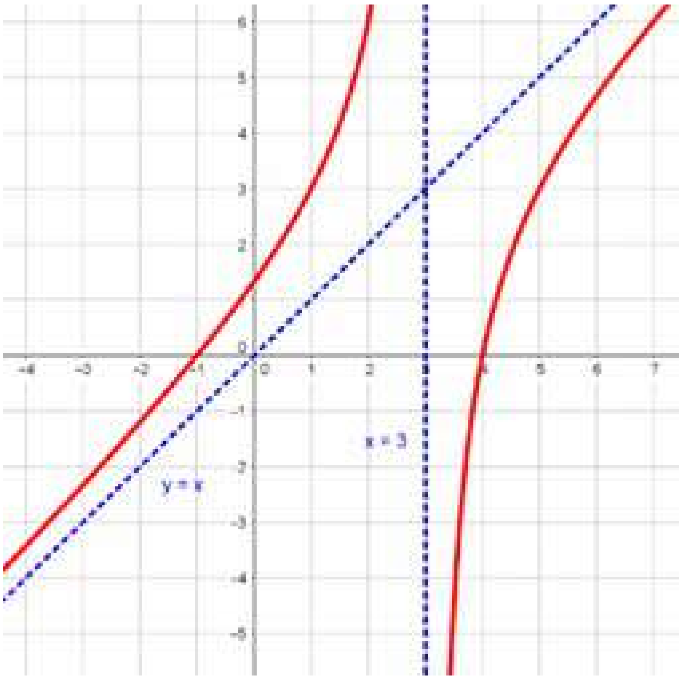
$$m = 1 = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2 + bx - 4}{x^2 - 3x} = a$$

$$n = 0 = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + bx - 4}{x - 3} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(b+3)x - 4}{x - 3} = b + 3$$

Por tanto, a = 1; b = - 3 y la función es $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 3}$.

Existe también otra asíntota vertical en x = 3, ya que:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-3x-4}{x-3} = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-3x-4}{x-3} = -\infty$$



2. La calificación obtenida por un estudiante en cierto examen depende de las horas de preparación a través de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{5} & si\ 0 \le x \le 5 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x+3} & si\ x > 15 \end{cases}$$

a) Estudia el conjunto de valores positivos de x para los que f (x) es creciente. ¿Tiene sentido afirmar que a más tiempo de preparación corresponde más calificación?

b) Contesta razonadamente si hay algún punto en que estudiar un poco más puede ser muy rentable.

c) ¿Se puede obtener la calificación 10? Justifica la respuesta.

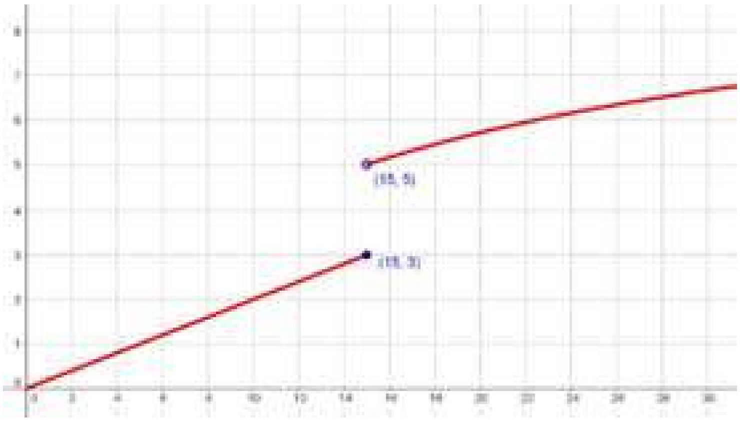
Realizamos la representación gráfica de la función y = f (x).

La gráfica está formada por un segmento recto que une los puntos (0, 0) y (15, 3) y un arco de hipérbola con origen en el punto (15, 5).

a) Vemos en la gráfica que la función es creciente para todos los valores de su dominio $(0, +\infty)$. La derivada de la función es siempre positiva.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & si\ 0 \le x \le 5 \\ \dfrac{6}{(0{,}2x+3)^2} & si\ x > 15 \end{cases}$$

Por tanto, tiene sentido afirmar que a más tiempo de preparación corresponde más calificación.

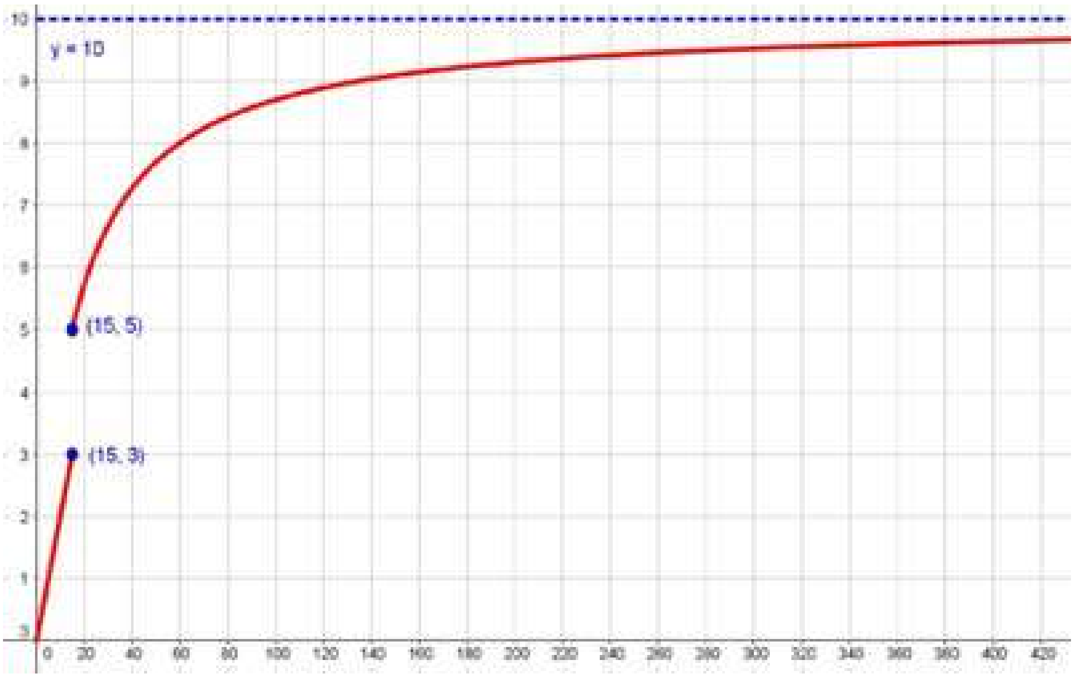


b) Como puede observarse en el dibujo la gráfica es discontinua en x = 15: En un entorno del citado punto pasa de valer 3 a valer 5, de esta manera, estudiando un poco más de 15 horas se obtendría una calificación de 5 y estudiando un poco menos se obtendría un 3. Para x = 15 estudiar un poco más puede ser muy rentable

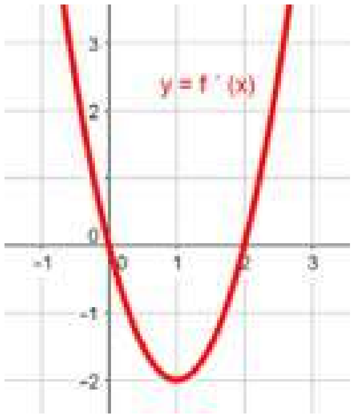
c) Si estudiamos un gran número de horas la calificación que se obtienes es:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{0{,}2x+3} = \frac{2}{0{,}2} = 10$$

Estudiando muchas horas nos acercaremos a la calificación 10 pero será imposible obtenerla al ser y = 10 una asíntota de la función.



3. El gráfico de la figura, que muestra una función polinómica de segundo grado que pasa por el origen, es la representación de la derivada de una función y = f (x).



a) Determina dónde es creciente y dónde decreciente la función y = f (x).

b) Encuentra los máximos y mínimos relativos, así como los puntos de inflexión de la función y = f (x).

c) Haz un bosquejo de la gráfica de y = f (x). Justifícalo.

a) Estudiamos el signo de la función representada en el gráfico y = f ´ (x) y de esta forma conoceremos la monotonía de la función y = f (x).

La función y = f (x) es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, al ser y = f ´ (x) positiva en ese intervalo y decreciente en (0, 2), al ser y = f ´ (x) negativa en ese intervalo.

b) El máximo de y = f (x) se alcanza en x = 0 ya que la función y = f ´ (x) pasa de ser creciente a ser decreciente.

El mínimo de y = f (x) se alcanza en x = 2 ya que la función y = f ´ (x) pasa de ser decreciente a ser creciente.

El punto de inflexión de y = f (x) se obtiene en x = 1 ya que la derivada de y = f ´ (x), es decir, f ´´ (x) se anula en dicho punto.

c) Un bosquejo de la gráfica de y = f (x) podría ser la del dibujo adjunto.

4. La producción de cierta hortaliza en un invernadero, P (x) en kilogramos, depende de la temperatura, x en grados centígrados, según la expresión:

$$\mathbf{P(x) = (x + 1)^2 \cdot (32 - x)}$$

Calcula cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero. ¿Qué producción se obtendrá con dicha temperatura óptima? Representa de forma aproximada la función en el intervalo [- 5, 25].

Para hallar la temperatura óptima, igualamos a cero la derivada primera:

$$P\,'(x) = -3x^2 + 60x + 63 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 20x - 21 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 21 \\ x = -1 \end{cases}$$

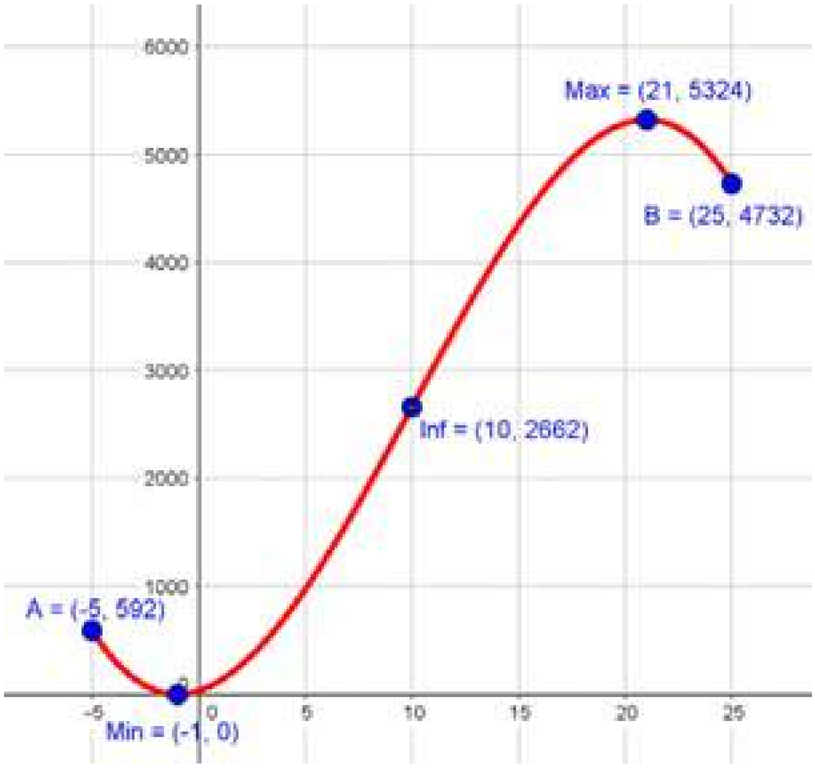
Con la derivada segunda, P ´´ (x) = - 6x + 60, determinamos el tipo de extremo relativo:

$$P''(21) = -66 < 0 \text{ (máximo) e } P''(-1) = 66 > 0 \text{ (mínimo)}$$

La temperatura óptima son 21 ºC.

Con la temperatura óptima se obtienen:
$P(21) = (21 + 1)^2 \cdot (32 - 21) = 5\,324$ kilogramos de hortaliza.

La representación gráfica puede verse en el dibujo.



5. La temperatura de un horno viene descrita por la siguiente curva en función del tiempo que lleva encendido (f (x) representa la temperatura en ºC a los x minutos).

$$f(x) = \frac{900x + 200}{x + 10}, \quad x \geq 0$$

a) Representa gráficamente la función f (x). ¿Disminuye la temperatura del horno en algún instante?

b) Sabiendo que los materiales del horno se deterioran si este alcanza los 1000 ºC, ¿habría que apagar el horno en algún momento para que no sufra daños?

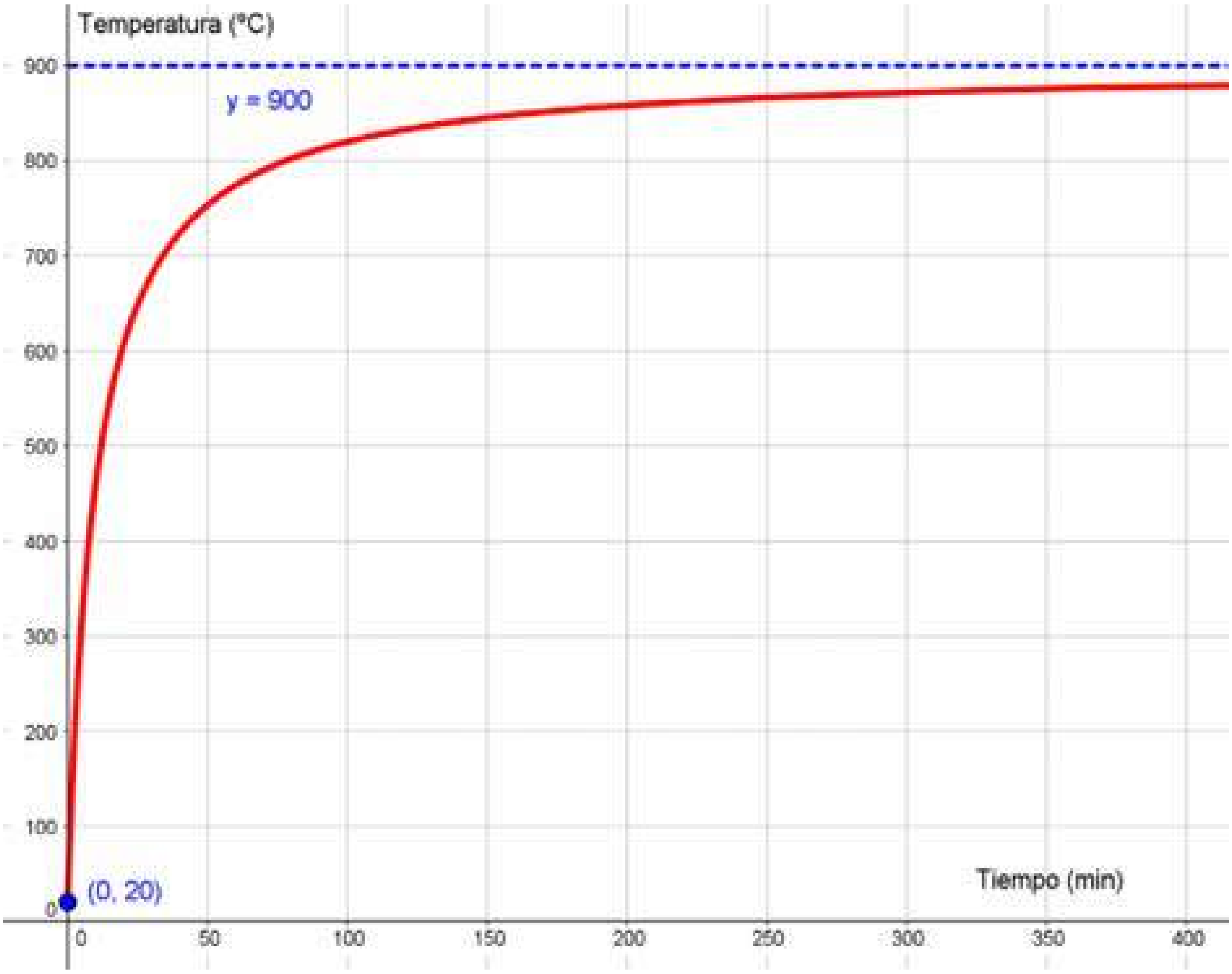
a) la derivada primera de la función es $f'(x) = \dfrac{8\,800}{(x + 10)^2} > 0$.

Como f ´ (x) > 0 para todo x > 0, la función f (x) es siempre creciente, por tanto, la temperatura del horno nunca disminuye.

Además tenemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{900x + 200}{x + 10} = 900$, es decir, la recta y = 900 es una asíntota horizontal.

La temperatura inicial del horno es $f(0) = \dfrac{900 \cdot 0 + 200}{0 + 10} = 20$ ºC.

La representación gráfica puede verse a continuación.



b) No habrá que apagar el horno, la temperatura nunca llega a 900 ºC.

6. En un entorno controlado, el tamaño de una población de aves, P(t) (en cientos), se ajusta a la función:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & si\ 0 \le t \le 10 \\ 95 - \dfrac{250}{t} & si\ t > 10 \end{cases}$$

Representa gráficamente la función y responde a las cuestiones que siguen.

a) ¿A partir de qué año crecerá la población P (t)? ¿En algún año la población es mínima?

b) Determina el valor al que tiende la población con el paso del tiempo.

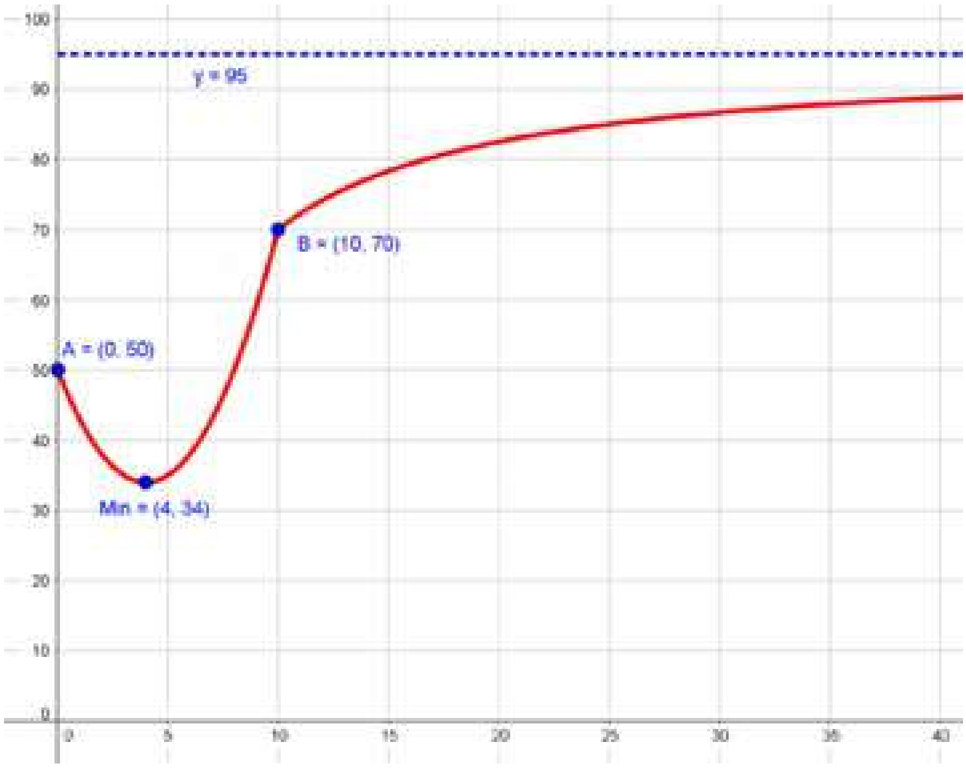
c) Calcula el intervalo de tiempo en el que la población se mantiene entre 5000 y 7500 aves.

Dibujamos la gráfica de P (t), teniendo en cuenta que para 0 ≤ t ≤ 10 es una parábola de vértice el punto (4, 34) y que P (0) = 50 y P (10) = 70.

Para t > 10 es un arco de hipérbola con $P\,(10) = 95 - \dfrac{250}{10} = 70$, lo que hace que la función sea continua.

Además, tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 95 al cumplirse $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(95 - \dfrac{250}{t}\right) = 95$.

Teniendo en cuenta lo anterior la gráfica adopta la siguiente forma.



a) La población P (t) crece a partir del 4º año. La población es mínima en el cuarto año, con 3400 aves.

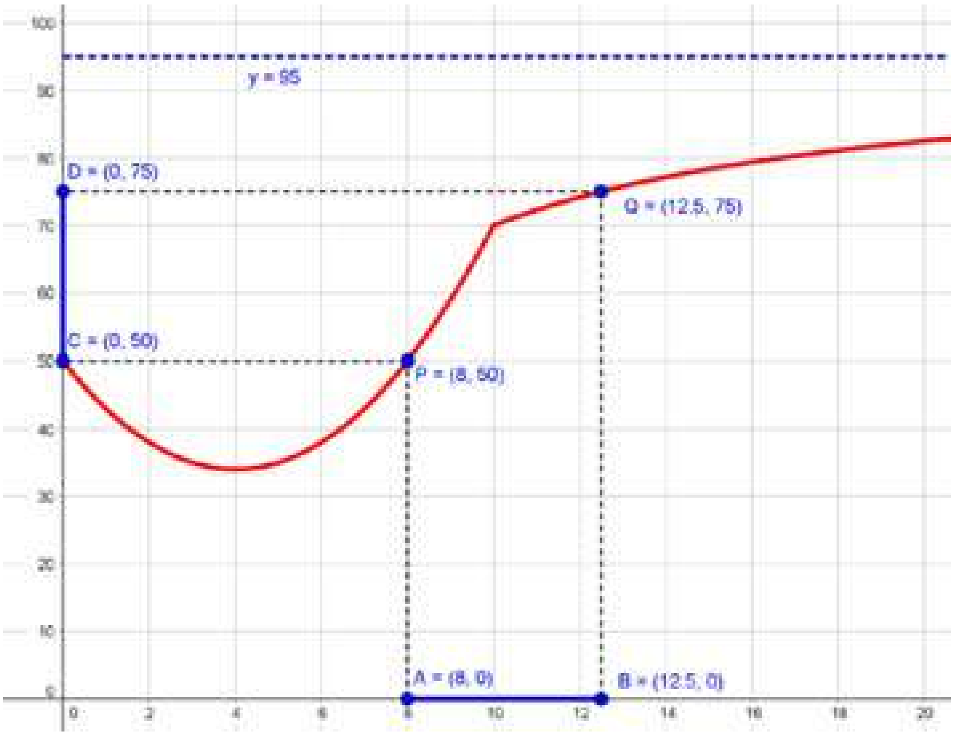
b) Con el paso del tiempo la población tiende a 9 500 aves, ya que $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(95 - \dfrac{250}{t}\right) = 95$.

c) Calculamos el intervalo de tiempo en el que la población se mantiene entre 5000 y 7500 aves.

$$t^2 - 8t + 50 = 50 \Rightarrow t \cdot (t - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 8 \end{cases}$$

$$95 - \frac{250}{t} = 75 \Rightarrow 95t - 250 = 75t \Rightarrow 20t = 250 \Rightarrow t = 12{,}5$$

La población se mantiene entre 5 000 y 7 500 aves entre los años 8 y 12,5.



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 221

Funciones potenciales en biología

Las funciones de expresión f (x) = k · x^p donde p en un número entero o fraccionario (positivo o negativo), se denominan funciones potenciales.

1. Realiza la representación gráfica cuando p = 1, p = -1, p = 2, p = 3, p = 1/2, p = 1/3, etc. Estudia sus características, en particular, su comportamiento en más infinito o menos infinito y cuando x tiende a cero.

Estas funciones potenciales ejercen de leyes de escala en el ámbito de la naturaleza. Esto significa que al conocer el valor de la función f (x) = x^p en un punto x, el valor de la función para el valor λx (λ veces menor), es f (λx) = $\lambda^p \cdot x^p = \lambda^p \cdot f(x)$, es decir, λ^p veces menor.

Existen muchos comportamientos, asociados a fenómenos naturales, que siguen este tipo de leyes. La más famosa de ellas es la ley de Klieber (descubierta por Max Klieber en 1932) o ley ¾ del metabolismo basal que relaciona el ritmo metabólico (Q) de un animal con su masa (M) y viene dada por la expresión Q ≈ $M^{3/4}$. Esta ley tiene consecuencias muy importantes respecto a la distribución masa-tamaño (diversidad de la biomasa) en el planeta. Para las plantas el exponente es próximo a 1.

2. Busca ejemplos de animales y plantas que sigan la ley de Klieber. Realiza representaciones gráficas de la expresión matemática de la ley para distintos seres vivos.

Otras leyes de escala en Biología son la ley de Damuth (1981) que relaciona el número de animales en función de su masa o la ley de Fenchel (1974) que establece que las especies de mayos tamaño corporal poseen menores tasas de crecimiento corporal.

3. Busca información sobre las leyes anteriores, ¿qué expresión matemática tienen?, analiza el significado de sus variables, realiza representaciones gráficas adecuadas.

4. ¿Existen otras leyes de escala, análogas a las anteriores?

A continuación damos referencias donde encontrar información sobre las leyes de escala.

● Para conocer más sobre la ley de Kleber ver el artículo "*La ley de la selva sigue siempre las mismas reglas matemáticas*", aparecido en El País el 3 de septiembre de 2015.

● MARTÍN, Miguel Ángel. (2013). *Matemáticas bioenriquecidas*. Edición propia. Madrid

● http://www.ecologia.info/leyes.htm

● www.uam.es/personal_pdi/ciencias/.../08_BioCap6_Leyes_Escala.ppt

● www.ua.es/personal/mj.caturla/bio/tema1.MetabolismoyMasa.pdf