UNIDAD 1: Matrices

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 10

1. Los electrodomésticos que vende una cadena en una gran ciudad los tiene en cuatro comercios C_1, C_2, C_3 y C_4. Vende tres marcas de televisores TV_1, TV_2 y TV_3. En un momento determinado, el comercio C_1 tiene 20 televisores de la marca TV_1, 18 del tipo TV_2 y 16 del TV_3. El comercio C_2, 22, 16 y 38, respectivamente. De igual forma, el comercio C_3, 30, 40 y 10. Por último, las unidades de C_4 son 15, 25 y 20. Expresa, de forma ordenada, los datos anteriores en una tabla.

En las filas de la tabla se han colocado las marcas de los televisores y en las columnas los comercios, obteniéndosela tabla:

	C_1	C_2	C_3	C_4
TV_1	20	22	30	15
TV_2	18	16	40	25
TV_3	16	38	10	20

2. Encuentra las soluciones de los sistemas siguientes por el método de Gauss, expresándolos en forma matricial:

a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - 5y = 19 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x + 2y - 3z = 11 \\ 2x - 5y + z = -14 \\ 3x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$

La resolución de los sistemas puede expresarse en la forma siguiente:

a) En la primera matriz realizamos la operación elemental por filas: multiplicamos por 2 la primera fila y por 3 la segunda, restando los productos anteriores y colocando los resultados en la segunda fila ($2F_1 - 3F_2 \to F_2$), y obtenemos la segunda matriz.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 19 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 17 & -51 \end{pmatrix}$$

La segunda matriz proporciona la solución: x = 2, y = - 3.

b) En la primera matriz realizamos las operaciones elementales por filas: $2F_1 + F_2 \to F_2$ y $3F_1 + F_3 \to F_3$ y obtenemos la segunda matriz. En esta matriz realizamos la operación elemental por filas $9F_2 + F_3 \to F_3$ y obtenemos la tercera matriz.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 2 & -5 & 1 & -14 \\ 3 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 9 & -11 & 40 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -56 & 112 \end{pmatrix}$$

La tercera matriz proporciona la solución: x = - 1, y = 2, z = - 2.

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 29

1. Las edades de la familia. Una madre de familia, que ronda la cuarentena, observa que, si escribe tres veces seguidas su edad, obtiene un número que es igual al producto de su edad multiplicada por la de su marido y las edades de sus cuatro hijos. ¿Qué edad tiene cada uno de los cuatro miembros de al familia?

Supongamos que la edad de la madre es de 39 años; imponiendo las condiciones del problema, obtenemos:

$$393939 = 39 \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \quad \Rightarrow \quad P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 10101 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$$

Luego la madre tiene 39 años, el padre tiene 37 y los cuatro hijos tienen, respectivamente, 13, 7, 3 y 1 años.

Observamos que si partimos de que la madre tiene 38 años obtenemos la misma respuesta, e igual que para 37, 36, 35 años. Es decir, independientemente de la edad de la madre, nos salen las edades del padre, 37 años, y las edades de los hijos: 13, 7, 3 y 1 años.

En general la madre tendrá xy años, xy = 10x + y años.

$$393939 = 39 \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{xyxyxy}{xy} = P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4$$

Ahora bien:

$$\frac{xyxyxy}{xy} = \frac{100\,000x + 10\,000y + 1000x + 100y + 10x + y}{10x + y} =$$

$$= \frac{101010x + 10101y}{10x + y} = \frac{10101\,(10x + y)}{10x + y} = 10101$$

Descomponemos 10 101 en factores: 10 101 = 37 · 13 · 7 · 3 · 1.

Luego las edades serán: P = 37 años, H_1 = 13 años, H_2 = 7 años, H_3 = 3 años y H_4 = 1 años.

2. Dos números. Encuentra dos números tales que su suma, su producto y su cociente sean iguales.

Llamamos x, y a los números. Se debe cumplir que: $x + y = x \cdot y = \frac{x}{y}$.

Resolviendo:

$$\begin{cases} x + y = x \cdot y \\ x \cdot y = \dfrac{x}{y} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{x}{x-1} \\ xy^2 = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

Para y = 1, se tiene que $\frac{x}{x-1} = 1$. Ecuación que no tiene solución.

Para y = - 1, se tiene que $\frac{x}{x-1} = -1$, entonces $x = \frac{1}{2}$.

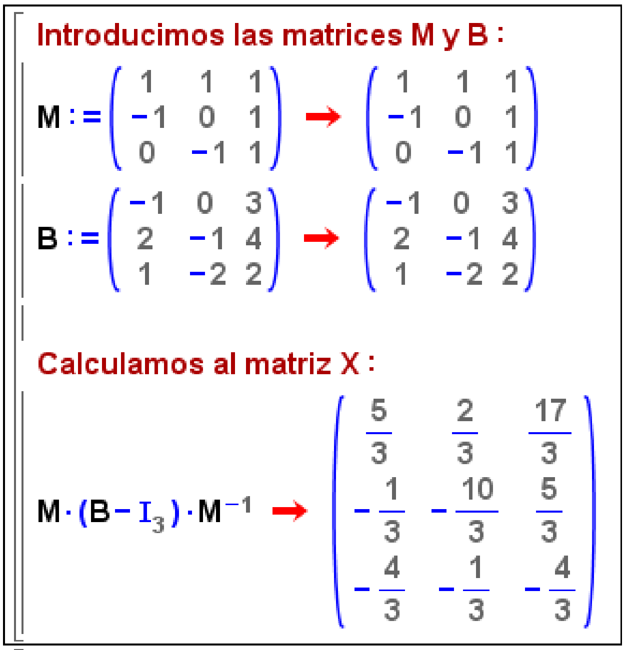
La solución válida es: $x = \frac{1}{2}$, y = - 1.

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 31

1. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$**.**

Halla la matriz X que verifique la igualdad M^{-1} X M = B – I.

En la siguiente imagen podemos ver la solución de esta actividad. La matriz unidad I la hemos introducido mediante el operador I_O del menú **Matrices,** como vemos en la imagen. La matriz X la hemos hallado despejándola en la igualdad dada: X = M · (B – I) · M^{-1}



2. Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$. Halla los valores de a para los cuales esta matriz no tiene inversa.

Halla la inversa para a = - 1.

En la siguiente imagen podemos ver la resolución de esta actividad.

La matriz dada no tiene inversa para a = 0 y a = 1.

Para a = -1 obtenemos la matriz inversa de A que vemos en la imagen.

Introducimos la matriz A :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A :

$$|A| \rightarrow a^3 - a^2$$

Anulamos el determinante :

$$\text{resolver}(a^3 - a^2 = 0) \rightarrow \{\{a=0\},\{a=1\}\}$$

Calculamos la inversa de la matriz A para a = − 1 :

$$a := -1 \rightarrow -1$$

$$A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & x & -2 \\ 3 & x & -2 & 2 \\ x & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

En la siguiente imagen podemos que las soluciones de esta ecuación son x = - 3 y x = -1.

Introducimos y calculamos el determinante :

$$\left|\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & x & -2 \\ 3 & x & -2 & 2 \\ x & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right| \rightarrow x^4 + 16 \cdot x^2 + 104 \cdot x + 87$$

Resolvemos la ecuación :

$$\text{resolver}(x^4 + 16 \cdot x^2 + 104 \cdot x + 87 = 0) \rightarrow \{\{x=-3\},\{x=-1\}\}$$

4. Estudia el rango de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & m \\ m & -4 & 4 \\ -1 & m & -2 \end{bmatrix}$ **en función de los valores de m.**

En la siguiente imagen podemos ver que el determinante de esta matriz se anula para los valores m = 2 y m = - 4 y para estos valores el rango de la matriz es 1 y 2 respectivamente. Para todos los demás valores de m el rango de la matriz será 3 puesto que su determinante es no nulo.

Introducimos la matriz y calculamos su determinante :

$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & m \\ m & -4 & 4 \\ -1 & m & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & m \\ m & -4 & 4 \\ -1 & m & -2 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de la matriz A :

$\left|\begin{pmatrix} 1 & -2 & m \\ m & -4 & 4 \\ -1 & m & -2 \end{pmatrix}\right| \rightarrow m^3 - 12 \cdot m + 16$

Anulamos el determinante :

resolver$(m^3 - 12 \cdot m + 16 = 0) \rightarrow \{\{m=-4\},\{m=2\}\}$

Hallamos el rango para m = 2 :

$m := 2 \rightarrow 2$

rango(A) $\rightarrow$ 1

Hallamos el rango para m = −4 :

$m := -4 \rightarrow -4$

rango(A) $\rightarrow$ 2

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 34

1. A cuatro compañeros, A, B, C, D, de segundo de bachillerato, se les pide que respondan a la pregunta: "¿Crees que alguno de vosotros aprobará este curso? Di quiénes".

Las respuestas son: A opina que B y D; B opina que A y el mismo; C opina que A, B y D; D opina que el mismo. Expresa este enunciado en una matriz.

Expresamos la información del enunciado en una tabla, poniendo un 1 en el caso que un individuo opine de otro que aprobará el curso y un 0 en caso contrario.

	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	1	1	0	0
C	1	1	0	1
D	0	0	0	1

Los valores de la tabla dan lugar a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Halla las matrices A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) y C = (c_{ij}), de dimensiones 3x2, 3x3 y 3 x 4, cuyos elementos sean, respectivamente:

a) $a_{ij} = (2i - j)^2$ **b) $b_{ij} = i^j$** **c) $c_{ij} = (i + j)^{i-j}$**

Las matrices pedidas son:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \\ 25 & 16 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{16} & \frac{1}{125} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{36} \\ 16 & 5 & 1 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

3. Encuentra todas las matrices de dimensión 2x2 tales que la suma de los elementos de cada fila sea igual a 1 y la suma de los elementos de la primera columna sea igual a cero.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si los elementos de cada fila deben sumar 1 se cumplirá: $\begin{cases} a + b = 1 \\ c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 - a \\ d = 1 - c \end{cases}$ y la matriz será de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ c & 1-c \end{pmatrix}$.

Si la suma de los elementos de la primera columna deben sumar 0, se cumplirá: a + c = 0, es decir, c = - a. Sustituyendo en la matriz, obtenemos:

$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

4. Calcula a, b, c y de para que se cumpla $\begin{pmatrix} -2 & 3a \\ d & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & 4 \\ 5 & c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Operamos e igualamos los elementos de las matrices resultantes:

$$\begin{pmatrix} a+b-2 & 3a+4 \\ d+5 & c+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b - 2 = 2a \\ 3a + 4 = 2b \\ d + 5 = 2c \\ c + 7 = 2d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: a = 0, b = 2, c = 17/3 y d = 19/3.

5. Una empresa de aceite de oliva elabora tres calidades: normal, extra y virgen extra y posee tres marcas X, Y, Z, distribuyendo su producción en cuatro almacenes. Las miles de litros almacenados en el primer almacén vienen expresados en la matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{X} & \textbf{Y} & \textbf{Z} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 22 & 46 & 80 \\ 36 & 58 & 88 \\ 48 & 66 & 92 \end{pmatrix} \end{array}$$

El segundo almacén tiene el doble que el primero, el tercero la mitad y el cuarto el triple. ¿Qué volumen de producción de aceite tiene en cada uno de los almacenes, y en total, de cada calidad y de cada una de las marcas?

Las matrices A_i, con i = 1, 2, 3, 4, muestran el volumen de aceite de cada uno de los almacenes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 22 & 46 & 80 \\ 36 & 58 & 88 \\ 48 & 66 & 92 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 44 & 92 & 160 \\ 72 & 116 & 176 \\ 96 & 132 & 184 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 11 & 23 & 40 \\ 18 & 29 & 44 \\ 24 & 33 & 46 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 66 & 138 & 240 \\ 108 & 174 & 264 \\ 144 & 198 & 276 \end{pmatrix}$$

El volumen total de aceite almacenado de cada calidad y de cada una de las marcas es:

$$T = \begin{pmatrix} 143 & 299 & 520 \\ 234 & 377 & 572 \\ 312 & 429 & 598 \end{pmatrix}$$

6. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \; y \; C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$**; calcula:**

a) A + B **b) A – B + C** **c) 2A + B – 3C** **d) AB – AC** **e) 2AB – 3AC + 4BC**

Los resultados de las operaciones son:

a) $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $2A + B - 3C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

d) $AB - AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $2AB - 3AC + 4\,BC = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -12 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 & 88 \\ -32 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 84 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}$

7. Calcula los productos posibles entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los productos posibles son:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 16 & 9 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 3 \\ 5 & -13 & 18 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 5 \\ -4 & 12 & 7 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

8. Encuentra, en cada caso, la matriz A que cumpla:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2A$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2A$

Las matrices buscadas son:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -6 & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$

9. Obtén las matrices A y B que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

a) $\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3A - 5B = \begin{pmatrix} 23 & 21 & 16 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \\ -A + 3B = \begin{pmatrix} -13 & -11 & -8 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

Resolviendo los sistemas por reducción obtenemos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 35

10. Halla, en cada caso, todas las matrices que conmuten con:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de dimensión 2x2 cualquiera. En cada caso se cumplirá:

a) A · X = X · A $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ a - 2c & b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & a - 2b \\ c + d & c - 2d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = a + b \\ a - 2c = c + d \\ b + d = a - 2b \\ b - 2d = c - 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = b \\ d = a - 3b \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a - 3b \end{pmatrix} con\ a, b \in R.$$

b) B · X = X · B $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=a \\ b=b \\ c+d=a+c \\ d=b+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=a \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} con\ a,\ c \in R.$$

c) C · X = X · C $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ c-d & 2c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2c=a-b \\ b+2d=2a \\ -a=c-d \\ -b=2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=d-c \\ b=-2c \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} d-c & -2c \\ c & d \end{pmatrix} con\ c,\ d \in R.$$

11. Determina todas las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican M² = 2M.

Para $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ se tiene que:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} \text{ y } 2M = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}$$

La igualdad de las matrices anteriores nos da el sistema: $\begin{cases} a^2+b^2=2a \\ 2ab=2b \end{cases}$.

En la segunda ecuación se obtiene a = 1 o b = 0. Estos valores llevados a la primera ecuación nos proporcionan cuatro soluciones:

i) a = 1, b = 1 ii) a = 1, b = - 1 iii) a = 0, b = 0 iv) a = 2, b = 0

Las cuatro matrices solución son, respectivamente:

i) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ iv) $M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$**, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades de la trasposición de matrices:**

a) $\left(A^t\right)^t$ **b)** $(A + B)^t = A^t + B^t$ **c)** $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ **d)** $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

En cada apartado obtenemos:

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\left(A^t\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $(A + B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ 4k & 0 \end{pmatrix}$ y $(k \cdot A)^t = \begin{pmatrix} k & 4k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

$k \cdot A^t = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 4k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ y $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

13. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$**,** $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$**,** $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **y** $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$**, efectúa las siguientes operaciones:**

a) $A^t \cdot B$ **b)** $C^t \cdot B$ **c)** $D \cdot D^t$ **d)** $D \cdot D^t$

Los resultados de los productos son:

a) $A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \end{pmatrix}$

b) $C^t \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 0 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$

c) $D \cdot D^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$

d) $D^t \cdot D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

14. Descompón las matrices dadas en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

La descomposición de la matriz M es M = S + H, siendo S la matriz simétrica, $S = \frac{M + M^t}{2}$ y H la matriz antisimétrica, $H = \frac{M - M^t}{2}$.

En cada caso se obtiene:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

15. Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Sea A una matriz cuadrada, demuestra que A + A^t es simétrica.

b) Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica.

Las respuestas quedan:

a) Se tiene: $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$, por tanto, la matriz $(A + A^t)$ es simétrica pues coincide con su traspuesta.

b) Una matriz A es antisimétrica si $A^t = - A$.

Veamos cómo son las potencias sucesivas:

$(A^2)^t = (A \cdot A)^t = A^t \cdot A^t = (- A) \cdot (-A) = A^2$, luego A^2 es simétrica.

$(A^3)^t = (A^2 \cdot A)^t = A^t \cdot (A^2)^t = (- A) \cdot A^2 = - A^3$, luego A^3 es antisimétrica.

Por tanto, las potencias pares son matrices simétricas y las potencias impares son antisimétricas.

16. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$**, calcula A^{97} y B^{59}.**

En cada uno de los dos casos calculamos las potencias sucesivas de A y B.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$$

$A^3 = A^2 \cdot A = - I \cdot A = - A$

$A^4 = A^3 \cdot A = - A \cdot A = - A^2 – (- I) = I$

$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = - I$

etcétera.

Observamos que las potencies de la matriz A se repiten de cuatro en cuatro. Así:

$A^{97} = A^{4 \cdot 24 + 1} = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = I \cdot A = A$

Calculando las potencias sucesivas de $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos que:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos continuar y observar que las potencias pares siguen una ley de recurrencia y las impares otra. Es decir:

Si n es par: $B^n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$ y si n es impar: $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{\frac{n+1}{2}} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $B^{59} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{30} \\ 2^{29} & 0 \end{pmatrix}$

17. Calcula A^n, para n $\in$ N, siendo A las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Quedan del siguiente modo:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

b) Si $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -sen\,n\alpha \\ sen\,n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{cases} I \text{ si } n \text{ es par} \\ A \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$

■ 18. Tres artesanas, Ana Berta y Carla trabajan para una marca de joyería. Elaboran conjuntos de anillos, pendientes y colgantes. Por cada conjunto realizado en oro les pagan 600 €, si es en plata 500 € y si es en acero 400 €. Las matrices N y D muestran sus producciones en los meses de noviembre y diciembre. La matriz P muestra el pago por unidad elaborada.

$$N = \begin{array}{c} \begin{matrix} Oro & Plata & Acero \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{matrix} Oro & Plata & Acero \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad S = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Determina las siguientes matrices y explica qué representan:

a) N · S **b) D · S** **c) N + D** **d) (N + D) · S**

Operamos las matrices y obtenemos:

a) $N \cdot S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5300 \\ 5400 \\ 4800 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que ha ganado cada una de las tres artesanas en el mes de noviembre.

b) $D \cdot S = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5600 \\ 6000 \\ 6200 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que han ganado cada una de las tres artesanas en el mes de diciembre.

c) $N + D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 8 & 2 & 14 \\ 6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

La matriz muestra la producción realizada durante los meses de noviembre y diciembre.

d) $(N + D) \cdot S = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 12 \\ 8 & 2 & 14 \\ 6 & 6 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10900 \\ 11400 \\ 11000 \end{pmatrix}$

La matriz muestra el dinero que ha ganado cada una de las tres artesanas en los meses de noviembre y diciembre.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 36

19. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -11 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

a) Realizando la operación elemental $3F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

b) Realizando las operaciones elementales $F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2$, $F_3 + F_1 \rightarrow F_3$ y $F_3 + F_2 \rightarrow F_3$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Realizando las operaciones elementales $F_2 + F_1 \rightarrow F_2$, $F_3 + 4F_1 \rightarrow F_3$ y $3F_2 - 2F_3 \rightarrow F_3$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

d) Realizando las operaciones elementales $F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2$, $F_3 + F_1 \rightarrow F_3$ $F_4 + 2F_4 + 2F_1 \rightarrow F_4$, $F_4 + 3F_2 \rightarrow F_4$ y $2F_3 + F_4 \rightarrow F_4$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -11 & 0 & 11 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -15 & 2 & 17 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

20. Halla las matrices inversas de las siguientes matrices haciendo uso de la definición de matriz inversa:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se cumplirá $A \cdot A^{-1} = I$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 5c = 1 \\ -a + 3c = 0 \\ 2b - 5d = 0 \\ -b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos:

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ c) No existe C^{-1} d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

21. Calcula las matrices inversas de las matrices que siguen por el método de Gauss-Jordan:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Utilizando el método de Gauss-Jordan obtenemos:

a) Realizamos las siguientes operaciones elementales por filas: $F_2 \to 2F_1 + F_2$; $F_2 \to 1/3\ F_2$ y $F_1 \to F_1 - F_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) Realizamos las siguientes operaciones elementales por filas: $F_2 \to F_1 - F_2$; $F_3 \to F_3 - F_2$; $F_2 \to F_2 + F_3$ y $F_1 \to F_1 - F_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de B es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Procediendo como en el apartado anterior, obtenemos que la matriz inversa de C es:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

22. Calcula X tal que X – B² = A · B, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

En la ecuación tenemos que $X = A \cdot B + B^2$.

Calculamos las matrices:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

23. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & b \\ a & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Operamos en ambos lados de la igualdad y obtenemos: $\begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$.

Igualando los elementos de las matrices se tiene el sistema, cuya solución es:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5/4 \\ y = -7/4 \end{cases}$$

b) Operamos las matrices y obtenemos: $\begin{pmatrix} 1 + b^2 & a + bc \\ a + bc & a^2 + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Igualando los elementos de las matrices se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 1 + b^2 = 5 \\ a + bc = 0 \\ a^2 + c^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \pm 2 \\ a + 2c = 0 \\ a^2 + c^2 = 5 \end{cases}$$

Para los dos valores de b se obtiene cuatro soluciones:

i) a = - 2, b = 2, c = 1 ii) a = 2, b = 2, c = - 1 iii) a = 2, b = - 2, c = 1 iv) a = - 2, b = - 2, c = -1.

24. Resuelve la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$**.**

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sustituyendo y operando, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4a+4c-b-d & -2a-2c \\ 12a+16b-3b-4d & -6a-8b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de las matrices se obtiene:

$$\begin{cases} 4a+4c-b-d=6 \\ -2a-2c=4 \\ 12a+16c-3b-4d=22 \\ -6a-8c=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-6 \\ c=-1 \\ d=-8 \end{cases}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$.

25. Determina la matriz X que verifica AXA – B = O, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\ y\ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si despejamos X de la ecuación matricial, obtenemos: $X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$.

La matriz inversa de la matriz A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

La matriz buscada es $X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

26. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, encuentra, en cada caso, la matriz X que cumple:

a) X · A + 2B = C **b) A · X – B = C** **c) A · X · B = C**

a) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: $X = (C - 2B) \cdot A^{-1}$.

Operando con las matrices tenemos:

$$C - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: $X = A^{-1} \cdot (B + C)$.

Operando con las matrices tenemos:

$$B + C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz incógnita X y obtenemos: $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Operando con las matrices tenemos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

27. Si A es una matriz cuadrada de orden n, tal que $A^2 = A$, e I es l matriz unidad de orden n, ¿qué matriz es B^2, si B = 2A - I?

Se tiene que:

$$B^2 = B \cdot B = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A \cdot A - 2A \cdot I - I \cdot 2A + I \cdot I = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4A - 4A + I = I.$$

Por tanto, la matriz B^2 es la matriz unidad. Las matrices como B se denominan idempotentes.

28. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Demuestra que si $A \cdot B = A$ y $B \cdot A^{-1} = B$, entonces $A^2 = A$.

b) Si A una matriz que conmuta con B y C, ¿es cierto que $(B \cdot C) \cdot A = A \cdot (B \cdot C)$?

a) Se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$A^2 \underset{(1)}{=} A \cdot A \underset{(2)}{=} (A \cdot B) \cdot A \underset{(3)}{=} A \cdot (B \cdot A^{-1}) \cdot A \underset{(4)}{=} A \cdot B \cdot A^{-1} \cdot A \underset{(5)}{=} A \cdot B \underset{(6)}{=} A$$

y que:

(1) Es la definición de potencia cuadrado de una matriz

(2) Por la hipótesis $A \cdot B = A$.

(3) Por la hipótesis $B \cdot A^{-1} = B$.

(4) Por la propiedad asociativa del producto.

(5) Al ser $A \cdot A^{-1} = I$.

(6) Por la hipótesis $A \cdot B = A$.

b) Se cumple:

$$(B \cdot C) \cdot A \underset{(1)}{=} B \cdot (C \cdot A) \underset{(2)}{=} B \cdot (A \cdot C) \underset{(3)}{=} (B \cdot A) \cdot C \underset{(4)}{=} (A \cdot B) \cdot C \underset{(5)}{=} A \cdot (B \cdot C)$$

al ser:

(1); (3) y (5) Por la propiedad asociativa del producto de matrices.

(2) Las matrices A y C conmutan.

(4) Las matrices A y B conmutan.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 37

29. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

Realizamos operaciones elementales en las filas de las matrices, obteniendo matrices equivalentes, es decir, con el mismo rango.

a) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$.

c) Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = 2.

d) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 5 & 15 & 23 & 18 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{pmatrix}$ = 3

30. a) Escribe cuatro matrices de dimensión 2x4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4 que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

En ambos casos existen múltiples respuestas.

a) La matriz de dimensión 2x4,

- con rango 1 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

- con rango 2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- con rango 3 o 4 no es posible construirlas.

a) Un ejemplo podría ser:

- con rango 1: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \\ 10 & -10 & 20 & -30 \end{pmatrix}$ - con rango 2: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$

- con rango 3: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ - con rango 4: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

31. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a.

a) $\begin{pmatrix} a+2 & a-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 5 & -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

Las soluciones son:

a) Rango de $\begin{pmatrix} a+2 & a-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a+2 & a-2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a+6 \end{pmatrix}$

Si a = - 6 el rango es 1, y si a ≠ - 6 el rango es 2.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$

Si a ≠ 1 y a ≠ - 1 el rango es 3.

Si a = - 1 o a = 1 rango es 2.

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$

Si a ≠ - 2 y a ≠ 1 el rango es 3.

Si a = - 2 el rango es 2.

Si a = 1 el rango es 1.

d) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 5 & -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & 30+a & 51 & 3 \\ 0 & 11 & 20-a & 1 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & a+30 & 51 & 3 \\ 0 & 0 & a^2+10a-39 & 3-a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & a+30 & 51 & 3 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+13) & 3-a \end{pmatrix}$.

Si a ≠ 3 el rango es 3.

Si a = 3 el rango es 2.

32. En un instituto hay alumnos de tres pueblos, A, B y C, distribuidos en cursos según la matriz M. Una empresa de transporte elabora dos rutas R_1 y R_2. Los kilómetros que recorría cada alumno se muestran en la matriz N. Si el precio por alumno y kilómetro de 12 euros, expresa en forma de matriz lo que se recaudaría por curso por cada itinerario.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 98 \\ 96 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los kilómetros recorridos por cada grupo de alumnos en cada una de las dos rutas, R_1 y R_2, es:

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 98 \\ 96 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5104 & 4516 & 2752 & 1440 \\ 5460 & 4630 & 2965 & 1426 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}$$

La recaudación por curso en cada itinerario es:

$$12 \cdot \begin{pmatrix} 5104 & 4516 & 2752 & 1440 \\ 5460 & 4630 & 2965 & 1426 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 61248 & 54192 & 33024 & 17280 \\ 65520 & 55560 & 35580 & 17112 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}$$

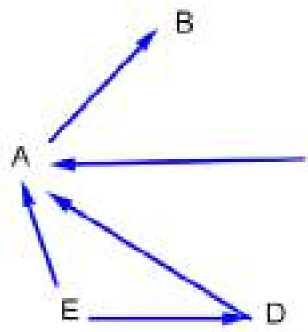
33. Entre cinco personas hay la siguiente relación de influencias: A influye sobre B; E sobre D; C, D y E influyen sobre A. Se pide:

a) Construye la matriz de influencias: M.

b) Halla la matriz de influencias de dos etapas: M^2.

c) Interpreta la suma de las filas de M y de sus columnas.

Dibujamos el grafo con las relaciones de influencias que se describen en el enunciado.



a) Teniendo en cuenta que los individuos de las filas influyen sobre los individuos de las columnas, como puede verse en el grafo, la matriz de influencias es:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

b) La matriz de influencias en dos etapas es M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El significado de los elementos que valen 1 es:

- $a_{32} = 1$: C influye en B a través de A.
- $a_{42} = 1$: D influye en B a través de A.
- $a_{51} = 1$: E influye en A a través de D.
- $a_{52} = 1$: E influye en B a través de A.

c) La suma de las filas es 1, 0, 1, 1 y 2, respectivamente.

Estos valores significan:

Fila	Suma de la fila	Significado
Primera	1	A influye en una persona, B
Segunda	0	B no influye en nadie
Tercera	1	C influye en una persona A
Cuarta	1	D influye en una persona, A
Quinta	2	E influye en dos personas, A y D

La suma de las columnas es 3, 1, 0, 1, 0, respectivamente.

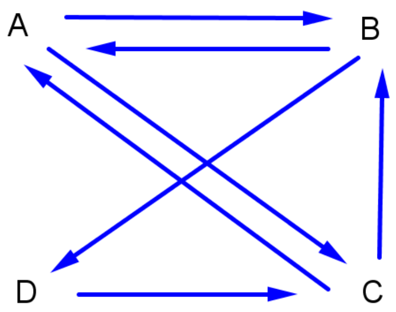
Estos valores significan:

Columna	Suma de la columna	Significado
Primera	3	A está influenciado por 3 personas, C, D y E
Segunda	1	B está influenciado por una persona, A
Tercera	0	C no está influenciado
Cuarta	1	D está influenciado por una persona, E
Quinta	0	E honesta influenciado

34. Dibuja el grafo de cuatro vértices, cuya matriz asociada es la matriz M. Supón que la matriz anterior determina los contagios directos de una determinada enfermedad. Halla, calculando M^2 y M^3, los contagios de segundo y tercer orden de los elementos del grupo.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dibujamos el grafo:



Calculamos M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores de los elementos de esta matriz muestran los contagios indirectos de segundo orden. Así, por ejemplo:

$a_{11} = 2$ indica que A se contagia a sí mismo a través de B o C al existir los caminos A-B-A o A-C-A.

$a_{12} = 1$ indica que A contagia a B a través de un tercero al existir el camino A-C-B.

Calculamos M^3:

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores de los elementos de esta matriz muestran los contagios indirectos de tercer orden. Así, por ejemplo:

a_{12} = 2 indica que A contagia a B a través de otros dos individuos al existir los caminos A-C-A-B o A-B-A-B.

a_{32} = 2 indica que C contagia a B a través de otros dos individuos al existir los caminos C-A-C-B o C-B-A-B.

35. Un investigador médico estudia la difusión de un virus en una población de 1000 cobayas de laboratorio. En cualquier semana, hay una probabilidad del 80% de que un cobaya infectado venza al virus y un 10% de que un cobaya no infectado quede infectado. Actualmente, hay 100 cobayas infectados por el virus. ¿Cuántos estarán infectados la próxima semana? ¿Y dentro de dos semanas? ¿Se estabilizará el número de cobayas infectados?

La matriz, P, de las probabilidades de transición es:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} Infectado & No\ inf\ ectado \end{array} \\ \begin{array}{r} Infectado \\ No\ inf\ ectado \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} = P \end{array}$$

Estarán infectados la próxima semana:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = X_1$$

Estarán infectados dentro de dos meses:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 889 \end{pmatrix} = X_2$$

De otra forma: $P^2 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 890 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 889 \end{pmatrix} = X_2$

Calculamos el valor estacionario:

Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces:

$$P \cdot X_{est} = X_{est} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}80 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}20x + 0{,}10y = x \\ 0{,}80x + 0{,}90x = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0{,}80x + 0{,}10y = 0 \\ 0{,}80x - 0{,}10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{y = 8x$$

Si x + y = 1000, entonces: $\begin{cases} x = 889 \\ y = 111 \end{cases}$.

36. Una residencia aloja a 200 estudiantes que estudian en una facultad de ciencias. Todos los que estudian matemáticas más de una hora un día las estudian menos de una hora al día siguiente. Una cuarta parte de los que estudian matemáticas menos de una hora un día las estudian más de una hora al día siguiente. La mitad de los estudiantes han estudiado matemáticas hoy más de una hora. ¿Cuántos las estudiaran más de una hora mañana? ¿Y pasado mañana? ¿Y al tercer día? ¿Cómo evolucionan el número de estudiantes de cada apartado con el paso del tiempo?

La matriz, P, de las probabilidades de transición es:

$$\begin{array}{c} \\ +1\,hora \\ -1\,hora \end{array} \begin{array}{c} +1\,hora \quad -1\,hora \\ \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

Y la matriz de estado, representando la población actual en cada uno de los dos estados, es:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

La matriz del día siguiente es:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 175 \end{pmatrix} = X_1$$

La matriz del segundo día es:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 156 \end{pmatrix} = X_2$$

La matriz del tercer día es:

$$P \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 44 \\ 156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 161 \end{pmatrix} = X_3$$

Calculamos el valor estacionario:

Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces:

$$P \cdot X_{est} = X_{est} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}25y = x \\ x + 0{,}75x = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 0{,}25y = 0 \\ x - 0{,}25y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{y = 4x$$

Si x + y = 200, entonces: $\begin{cases} x = 40 \\ y = 160 \end{cases}$.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 38

1. Una factoría de muebles fabrica tres modelos de estanterías A, B y C, cada una de dos tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo A; 8000 grandes y 6000 pequeñas de tipo B, y 4000 grandes y 6000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos,

a) Representa esta información en dos matrices.

b) Halla una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería.

a) Las matrices son:

$$\begin{array}{ll} & \quad\textit{Tamaños} \\ & \textit{Grande} \quad \textit{Pequeño} \\ \begin{array}{r} A \\ \textit{Modelos}\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & \textit{Tornillos} \quad \textit{Soportes} \\ \begin{array}{r} \textit{Grande} \\ \textit{Pequeño} \end{array} & \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) La matriz que representa la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería es el resultado del producto que sigue:

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 & 8000 & 4000 \\ 8000 & 6000 & 6000 \end{pmatrix} = \begin{array}{ll} \quad A \qquad\quad B \qquad\quad C & \\ \begin{pmatrix} 112\,000 & 200\,000 & 136\,000 \\ 38\,000 & 72\,000 & 48\,000 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \textit{Tornillos} \\ \textit{Soportes} \end{array} \end{array}$$

También se puede multiplicar la primera matriz del apartado a) por la segunda y obtenemos:

$$\begin{array}{ll} & \quad G \qquad\quad P \\ \begin{array}{r} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix}$$

2. Halla las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b\,(a+d) \\ b\,(a+d) & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b\,(a+d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b\,(a+d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$

Los casos posibles son:

i) b = 0, entonces a = 0 o a = 1, y d = 0 o d = 1. Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) a = 1 – d, entonces $b = \pm\sqrt{d - d^2}$ con d $\in$ [0, 1]. Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 1-d & \pm\sqrt{d-d^2} \\ \pm\sqrt{d-d^2} & d \end{pmatrix} \text{ con d } \in [0, 1].$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $e\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**, determina, si es posible, un valor de k para que la matriz (A – kI)^2 sea la matriz nula.**

La matriz A – kI es $A - kI = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$.

La matriz (A – kI)^2 es:

$$(A-kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ -2k+2 & -2k+2 & 5-6k+k^2 \end{pmatrix}$$

El valor que hace que la última matriz sea la matriz nula es k = 1.

4. En una población de 100 000 consumidores, 20 000 usan la marca A, 30 000 la marca B y 50 000 ninguna de ellas. En un mes, un usuario de A tiene una probabilidad del 20% de cambiar a la marca B, y 5% de pasar a no usar ninguna de ellas. Un usuario de B tiene una probabilidad del 15% de cambiar a la marca A y 10% de no usar ninguna de ambas. Uno de los que no usa ninguna de las dos marcas tiene una probabilidad del 10% de pasar a usar la marca A y un 10% de pasar a usar B. ¿Cuántos usuarios de cada

clase habrá el mes próximo? ¿Y dentro de dos meses? ¿Se estabilizarán los valores de los consumidores de cada clase?

La matriz, P, que representa las probabilidades de transición dadas es:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ Ning. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & Ning. \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

Y la matriz de estado, representando la población actual en cada uno de los tres estados, es:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 20\,000 \\ 30\,000 \\ 50\,000 \end{pmatrix}$$

La matriz de estado del próximo mes:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20\,000 \\ 30\,000 \\ 50\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24\,500 \\ 31500 \\ 44\,000 \end{pmatrix} = X_1$$

La matriz de estado del segundo mes:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24\,500 \\ 31500 \\ 44\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27\,500 \\ 32\,925 \\ 39\,575 \end{pmatrix} = X_2$$

Hallamos el valor estacionario. Sea $X_{est} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Se cumplirá: $P \cdot X_{est} = X_{est}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}75 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}75x + 0{,}15y + 0{,}10z = x \\ 0{,}20x + 0{,}75y + 0{,}10z = y \\ 0{,}05x + 0{,}10y + 0{,}80z = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0{,}25x + 0{,}15y + 0{,}10z = 0 \\ 0{,}20x - 0{,}25y + 0{,}10z = 0 \\ 0{,}05x + 0{,}10y - 0{,}20z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0{,}25x + 0{,}15y = -0{,}10z \\ 0{,}20x - 0{,}25y = -0{,}10z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{16}{13}z \\ y = \dfrac{18}{13}z \end{cases}$$

Como x + y + z = 100 000, se tiene como solución:

$$X_{est} \cong \begin{pmatrix} 34\,040 \\ 38\,300 \\ 27\,660 \end{pmatrix}$$

5. Prueba que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

Calculamos $A^2 - A - 2I$ y obtenemos:

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la expresión $A^2 - A - 2I = 0$, operando se obtiene:

$$A^2 - A - 2I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A - I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A = I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = I$$

La matriz inversa se es $A^{-1} = \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right)$.

Por tanto, $A^{-1} = \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

6. Sean las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si M es una matriz de la forma M = aI + bJ, siendo a y b números reales, se pide:

a) Calcula M^2 y M^3.

b) Calcula M^n, siendo n un número natural.

La matriz M = aI + bJ adopta la expresión $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Las potencias cuadrada y cúbica son:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

b) Para encontrar la expresión de M^n, con n natural, calculamos nuevas potencias:

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \cdot M = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4b \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, M^n, con n natural, tiene la expresión: $M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

La demostración de esta última expresión puede efectuarse por el método de inducción.

7. La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es distinta de la matriz nula. ¿Es inversible? En caso afirmativo, halla M^{-1}.

Calculamos la posible matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

La matriz M siempre es inversible, ya que a y b no pueden ser 0 simultáneamente, entonces $a^2 + b^2 \neq 0$.

La matriz inversa de M es $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$.

8. Si A y B son dos matrices diagonales de orden 2, demuestra que A · B = B · A. Halla todas las matrices diagonales A tales que A · A = I.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$.

Los productos de ambas son:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ una matriz diagonal cualquiera. La condición A · A = I nos conduce al sistema:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 = 1 \\ a_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \pm 1 \\ a_2 = \pm 1 \end{cases}$$

Las matrices diagonales buscadas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Estudia según los valores de m el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix}$**.**

La solución queda:

Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

Por tanto, si m = 0 el rango es 2 y para todos los demás valores de m el rango es 3.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 39

Un estudio sobre el empleo

El 75% de la población laboral de una Comunidad Autónoma tiene trabajo y el resto está en paro. Se prevé que cada año se destruirán un 10% de los empleos, por lo que el gobierno emprende un programa de reactivación económica con el que promete emplear anualmente al 20% de los parados.

a) Cumpliéndose la previsión, ¿será mejor o peor la situación al año siguiente? ¿Qué sucedería al cabo de dos años?

b) Si las condiciones se mantienen, calcula la evolución del empleo en los próximos diez años.

c) Si las cifras iniciales fuesen de un 60% de empleo y un 40% de paro, ¿cómo evolucionaría la situación?

d) Si cada año el 20% de los que tienen empleo pasan al paro, y el 30% de los parados encuentran empleo, forma la matriz de transición y estudia como evolucionaría.

e) Si el 12% de la población laboral está en paro y se destruyen cada año un 5% de los empleos, ¿hacia qué situación se evolucionaría empleando anualmente al 10% de los parados? ¿Cuál debería ser el plan de empleo para que el paro no alcanzase el 25%?

a) La situación del enunciado puede expresarse en la forma:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72{,}5 \\ 27{,}5 \end{pmatrix} = X_1$$

Observamos que se produce un descenso del empleo.

Lo que ocurre al cabo de dos años es:

$$P \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 72{,}5 \\ 27{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70{,}75 \\ 29{,}25 \end{pmatrix} = X_2$$

De otra forma:

$$P^2 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}83 & 0{,}34 \\ 0{,}17 & 0{,}66 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70{,}75 \\ 29{,}25 \end{pmatrix} = X_2$$

El empleo vuelve a descender por segundo año consecutivo.

Es el momento de hacer conjetura y confirmarlas o refutarlas.

b) Encontraremos como resultados:

$$P^3 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}78 & 0{,}44 \\ 0{,}22 & 0{,}56 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69{,}5 \\ 30{,}5 \end{pmatrix} = X_3$$

$$P^4 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,51 \\ 0,25 & 0,49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68,7 \\ 31,3 \end{pmatrix} = X_4$$

$$P^5 \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,55 \\ 0,28 & 0,45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68,1 \\ 31,9 \end{pmatrix} = X_5$$

$$P^{10} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,68 & 0,65 \\ 0,32 & 0,35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66,9 \\ 33,1 \end{pmatrix} = X_{10}$$

Se observa el ***carácter estacionario*** de la situación. Calculamos, por ejemplo, dentro de 20 años.

$$P^{20} \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,66 \\ 0,33 & 0,33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66,67 \\ 33,33 \end{pmatrix} = X_{20}$$

Se debe observar que ***el carácter estacionario reside en la matriz***, y no en las cifras iniciales de empleo, X_0.

Se observa, además que ***las dos columnas de la matriz tienden a igualarse***, o sea: ***el resultado final, al cabo de cierto número de pasos, no depende de la situación inicial.***

Se encontraría al cabo de 10 y 20 años:

$$X_{10} = \begin{pmatrix} 66,8 \\ 33,2 \end{pmatrix} \;\; y \;\; X_{20} = \begin{pmatrix} 66,67 \\ 33,33 \end{pmatrix}$$

El acercamiento progresivo al valor de estabilización se realiza con mayor o menor rapidez según el estado de partida.

¿Y si cambiamos los valores de la matriz?

c) En este caso los resultados son:

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix},\; P^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,45 \\ 0,3 & 0,55 \end{pmatrix}, \ldots,\; P^{10} = \begin{pmatrix} 0,600 & 0,599 \\ 0,399 & 0,400 \end{pmatrix}$$

d) Resolvemos el sistema matricial $P \cdot X_{est} = X_{est}$.

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,9x + 0,2y = x \\ 0,1x + 0,8y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0,1x + 0,2y = 0 \\ 0,1x - 0,2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{-0,1x + 0,2y = 0$$

La ecuación anterior junto con x + y = 100, nos da la solución: x = 66,67 e y = 33,33.

e) En este caso las matrices son: $P = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,10 \\ 0,05 & 0,90 \end{pmatrix}$ y $X_0 = \begin{pmatrix} 88 \\ 12 \end{pmatrix}$.

La evolución de la situación puede expresarse en la forma:

$$P \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 88 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 15 \end{pmatrix} = X_1$$

Observamos que se produce un descenso del empleo.

Pueden calcularse los valores del empleo en los años sucesivos, aunque vemos si esta situación presenta un carácter estacionario.

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}95x + 0{,}10y = x \\ 0{,}05x + 0{,}90y = y \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0{,}05x + 0{,}10y = 0 \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 66{,}67 \\ y = 33{,}33 \end{cases}$$

Obtenemos el mismo resultado que en la situación anterior.

Sea la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$, veamos la relación entre a y b para que el paro no alcance el 25%.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = x \\ (1-a)x + (1-b)y = y \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)x + by = 0 \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1-a}{b}x \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{100b}{b+1-a} \\ y = \dfrac{100(1-a)}{b+1-a} \end{cases}$$

Para que el paro no alcance el 25% se cumplirá: $\dfrac{100(1-a)}{b+1-a} < 25$.

Operando en la desigualdad se obtiene: b > 3 – 3a.