

UNIDAD 12: Integrales indefinidas
ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 300

1. Encuentra, en cada apartado, dos funciones cuyas derivadas sean las siguientes:

a) $f(x) = 3x^2$

c) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

Un ejemplo de las funciones pedidas son:

a) $F(x) = x^3 + 5$; $F(x) = x^3 - 2/5$

b) $F(x) = e^x - 3$; $F(x) = e^x + \sqrt{2}$

c) $F(x) = \sin x + \frac{1}{2}$; $F(x) = \sin x + \pi$

d) $F(x) = 2 \cdot \ln|x-1| + \frac{2}{5}$; $F(x) = 2 \cdot \ln|x-1| - \sqrt{5}$

2. Una función $F(x)$ es primitiva de una función $f(x)$ siempre que la derivada de $F(x)$ sea $f(x)$.

Comprueba, en cada uno de los siguientes apartados, que la función $F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

a) $F(x) = \arcsen 2x + \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$; $f(x) = \frac{4x}{(1+2x)\sqrt{1-4x^2}}$

b) $F(x) = \ln(1 - \cos x) - \ln(1 + \cos x) + \frac{3}{8}$; $f(x) = \frac{2}{\sen x}$

Se deriva la función $F(x)$ y se obtiene $f(x)$.

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 315

1. Número irracional. Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

La solución queda:

Supongamos que $\sqrt{3}$ no es irracional, por tanto $\sqrt{3}$ será racional, con lo que se puede poner en forma de fracción de este modo:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}, \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y primos entre sí.}$$

De esta igualdad obtenemos: $a = b\sqrt{3}$.

Elevando ambos miembros al cuadrado nos queda: $a^2 = 3b^2$.

De aquí deducimos que a^2 es múltiplo de 3. Si a^2 es múltiplo de 3 entonces a también lo es.

Podemos escribir $a = 3m$ con $m \in \mathbb{Z}$ y sustituyendo en la igualdad $a^2 = 3b^2$ obtenemos:

$$(3m)^2 = 3b^2 \Rightarrow 9m^2 = 3b^2 \Rightarrow 3m^2 = b^2$$

Como b^2 es múltiplo de 3 y, por tanto, b también lo es.

Con esto hemos llegado a que a y b son múltiplos de 3. Este resultado contradice el hecho de que a y b son primos entre si. Por tanto, hemos llegado a una contradicción o absurdo, por lo que concluimos afirmando que $\sqrt{3}$ no es un número racional, es decir, es un número irracional.

2. Implicación lógica. Demuestra que si $P \Rightarrow Q$, entonces $\text{no } Q \Rightarrow \text{no } P$.

Tiene que ser $\text{no } P$, pues si fuera P entonces sería Q , y como dice $\text{no } Q$, no puede ser P .

Veamos que las tablas de verdad de ambas proposiciones coinciden:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	no Q	no P	$\text{no } Q \Rightarrow \text{no } P$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

Es una ley lógica $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{no } Q \Rightarrow \text{no } P)$, denominada "contraposición".

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 317

1. Resuelve las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (3x-1) \ln(x+2) dx$ b) $\int \sqrt{\frac{3}{1+3x}} dx$ c) $\int \frac{2x^2+3x-2}{x^2-7x+10} dx$

Utilizando los mismos comandos de la actividad desarrollada obtenemos la solución de cada una de estas integrales indefinidas que vemos en las imágenes siguientes:

$$\int (3x-1) \cdot \ln(x+2) \rightarrow -6 \cdot \ln(|x+2|) + \left(\left(\frac{3x^2}{2} - x - 2 \right) \cdot \ln(x+2) - \frac{3x^2}{4} \right) + 4x$$

$$\int \sqrt{\frac{3}{1+3x}} \rightarrow \frac{6 \cdot \sqrt{3} \cdot x + 2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot x + 1}$$

$$\int \frac{2x^2+3x-2}{x^2-7x+10} \rightarrow 21 \cdot \ln(|-x+5|) - 4 \cdot \ln(|x-2|) + 2x$$

2. Halla las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^3 \frac{3x-1}{x^2+x} dx$

b) $\int_0^1 (5x+4) \cdot e^{-x} dx$

Utilizando los mismos comandos de la actividad desarrollada obtenemos el resultado de cada una de estas integrales definidas que vemos en la imagen siguiente:

$$\int_1^3 \frac{3 \cdot x - 1}{x^2 + x} \rightarrow 1.674$$

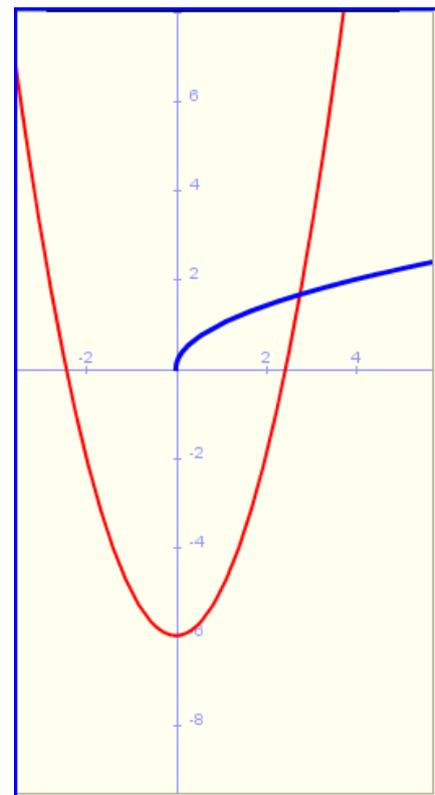
$$\int_0^1 (5 \cdot x + 4) \cdot e^{-x} \rightarrow \frac{9 \cdot e - 14}{e}$$

3. Calcula el área del recinto, del primer cuadrante, limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 6$; $g(x) = \sqrt{x}$ y el eje OX.

De la misma forma que hemos hecho en la actividad desarrollada resolvemos esta nueva actividad como vemos en la siguiente imagen:

```

f(x) = x^2 - 6 → x = √(x^2 - 6)
g(x) = √x → x = (√x)^2
dibujar(f(x), {color=rojo, anchura_linea=2}) → tablero1
dibujar(g(x), {color=azul, anchura_linea=3}) → tablero1
resolver(f(x) = g(x)) → {{x=2.7684}}
resolver(f(x) = 0) → {{x=-√6}, {x=√6}}
Integral1 = ∫₀².⁷⁶⁸⁴ (g(x)) → 3.0708
Integral2 = ∫√⁶².⁷⁶⁸⁴ (f(x)) → 0.25993
Area = |Integral1 - Integral2| → 2.8109
    
```



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 320

1. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de integrales inmediatas:

a) $\int (6x^2 - 5x + 7) dx$

i) $\int \frac{(3\sqrt{x} - 2)^4}{4\sqrt{x}} dx$

q) $\int \frac{5}{4 + 16x^2} dx$

b) $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^2} \right) dx$

j) $\int \frac{4x^2}{2x^3 + 5} dx$

r) $\int \frac{6}{\sqrt{9 - 2x^2}} dx$

c) $\int \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{x^4}{8} - 2 \right) dx$

k) $\int \frac{12x - 3}{4x^2 - 2x + 3} dx$

s) $\int \frac{4 \cos 2x}{3 - \operatorname{sen} 2x} dx$

d) $\int \left(\frac{5x^2 - 7\sqrt{x^3} - 9}{x} \right) dx$

l) $\int e^{3x} dx$

t) $\int \frac{3x}{(x^2 + 7)^5} dx$

e) $\int 3x(2x + 5)^2 dx$

m) $\int x \cdot 7^{5x^2} dx$

u) $\int \cos^2 3x \cdot \operatorname{sen} 3x dx$

f) $\int (1 - 4x)^3 dx$

n) $\int 3 \cdot \operatorname{sen} 6x dx$

w) $\int \frac{2}{3x \ln x} dx$

g) $\int (6x^2 - 5)^8 \cdot x dx$

o) $\int \cos \left(\frac{x}{4} \right) dx$

y) $\int \frac{5 \cdot \operatorname{sen} x}{\sqrt{7 - 4 \cos^2 x}} dx$

h) $\int 7x^2 \sqrt{x^3 + 2} dx$

p) $\int \left(e^{-2x} + \frac{5x^2}{\cos^2 x^3} \right) dx$

z) $\int 6x \cdot \operatorname{tg}(x^2 + 3) dx$

Las funciones primitivas son:

a) $\int (6x^2 - 5x + 7) dx = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x + C$

b) $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^2} \right) dx = x^4 + \frac{2}{x} + C$

c) $\int \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{x^4}{8} - 2 \right) dx = 3\sqrt{x} + \frac{x^5}{40} - 2x + C$

d) $\int \left(\frac{5x^2 - 7\sqrt{x^3} - 9}{x} \right) dx = \frac{5}{2}x^2 + \frac{14\sqrt{x^3}}{3} - 9 \cdot \ln |x| + C$

e) $\int 3x(2x + 5)^2 dx = 3x^4 + 20x^3 + \frac{75}{2}x^2 + C$

$$f) \int (1-4x)^3 dx = -\frac{(1-4x)^4}{16} + C$$

$$g) \int (6x^2 - 5)^8 \cdot x dx = \frac{(6x^2 - 5)^9}{108} + C$$

$$h) \int 7x^2 \sqrt{x^3 + 2} dx = \frac{14 \sqrt{(x^3 + 2)^3}}{9} + C$$

$$i) \int \frac{(3\sqrt{x} - 2)^4}{4\sqrt{x}} dx = \frac{(3\sqrt{x} - 2)^5}{30} + C$$

$$j) \int \frac{4x^2}{2x^3 + 5} dx = \frac{2}{3} \ln|2x^3 + 5| + C$$

$$k) \int \frac{12x - 3}{4x^2 - 2x + 3} dx = \frac{3}{2} \ln|4x^2 - 2x + 3| + C$$

$$l) \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$m) \int x \cdot 7^{5x^2} dx = \frac{1}{10 \cdot \ln 7} \cdot 7^{5x^2} + C$$

$$n) \int 3 \cdot \operatorname{sen} 6x dx = -\frac{1}{2} \cos 6x + C$$

$$o) \int \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right) + C$$

$$p) \int \left(e^{-2x} + \frac{5x^2}{\cos^2 x^3} \right) dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + \frac{5}{3} \operatorname{tg} x^3 + C$$

$$q) \int \frac{5}{4+16x^2} dx = \frac{5}{8} \operatorname{arctg}(2x) + C$$

$$r) \int \frac{6}{\sqrt{9-2x^2}} dx = 3\sqrt{2} \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right) + C$$

$$s) \int \frac{4 \cos 2x}{3 - \operatorname{sen} 2x} dx = -2 \cdot \ln|3 - \operatorname{sen} 2x| + C$$

$$t) \int \frac{3x}{(x^2 + 7)^5} dx = \frac{-3}{8 \cdot (x^2 + 7)^4} + C$$

$$u) \int \cos^2 3x \cdot \operatorname{sen} 3x dx = -\frac{1}{9} \cos^3 (3x) + C$$

$$w) \int \frac{2}{3x \ln x} dx = \frac{2}{3} \ln |\ln x| + C$$

$$y) \int \frac{5 \cdot \operatorname{sen} x}{\sqrt{7 - 4 \cos^2 x}} dx = -\frac{5}{2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{2 \cos x}{\sqrt{7}} \right) + C$$

$$z) \int 6x \cdot \operatorname{tg} (x^2 + 3) dx = -3 \cdot \ln |\cos (x^2 + 3)| + C$$

2. Halla una función $f(x)$ de la que sabemos que $f(1) = f'(1) = 1$ y $f''(x) = x$.

Imponiendo las condiciones del enunciado tenemos:

$$f'(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow f(x) = \int \left(\frac{x^2}{2} + C \right) dx = \frac{x^3}{6} + Cx + D$$

$$\text{Como } f(1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{6} + C + D \text{ y como } f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + C.$$

$$\text{De estas dos igualdades obtenemos } C = \frac{1}{2}; D = \frac{1}{3} \text{ y la función buscada es } f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$$

3. Halla dos primitivas de cada una de estas funciones:

$$a) \int \frac{e^{2x}}{4 - e^{2x}} dx$$

$$b) \int \frac{(2x-3)^2}{x} dx$$

$$c) \int \frac{4x-5}{1+9x^2} dx$$

Las primitivas pedidas pueden ser:

$$a) F(x) = \int \frac{e^{2x}}{4 - e^{2x}} dx = -\frac{1}{2} \ln |4 - e^{2x}| + 1; F(x) = \int \frac{e^{2x}}{4 - e^{2x}} dx = -\frac{1}{2} \ln |4 - e^{2x}|$$

$$b) F(x) = \int \frac{(2x-3)^2}{x} dx = 2x^2 - 12x + 9 \ln |x| + 6 ;$$

$$F(x) = \int \frac{(2x-3)^2}{x} dx = 2x^2 - 12x + 9 \ln |x| + \frac{7}{3}$$

$$c) F(x) = \int \frac{4x-5}{1+9x^2} dx = \frac{2}{9} \ln(1+9x^2) - \frac{5}{3} \operatorname{arctg}(3x) - 2$$

$$F(x) = \int \frac{4x-5}{1+9x^2} dx = \frac{2}{9} \ln(1+9x^2) - \frac{5}{3} \operatorname{arctg}(3x) - \sqrt[4]{3}$$

4. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:

a) $\int 3x \cdot e^{-x} dx$

d) $\int e^{2x} \cdot \cos x dx$

g) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$

b) $\int (2-5x) \cdot \operatorname{sen} 2x dx$

e) $\int 4x \cdot \ln x^2 dx$

h) $\int 2^{3x} \cdot \operatorname{sen} 3x dx$

c) $\int 14x^2 \cdot 7^{2x} dx$

f) $\int 5 \ln x dx$

i) $\int x \cdot \ln^2 x dx$

En cada una de las siguientes integrales utilizamos la fórmula de la integración por partes:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

a) $\int 3x \cdot e^{-x} dx = -3x \cdot e^{-x} - \int -3 e^{-x} dx = -3x \cdot e^{-x} - 3 \cdot e^{-x} + C$

b) $\int (2-5x) \cdot \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{2-5x}{2} \cdot \cos 2x - \int \frac{5}{2} \cos 2x dx = -\frac{2-5x}{2} \cos 2x - \frac{5}{4} \operatorname{sen} 2x + C$

c) $\int 14x^2 \cdot 7^{2x} dx = \frac{7x^2 \cdot 7^{2x}}{\ln 7} - \frac{7}{\ln 7} \int x \cdot 7^{2x} dx = \frac{7x^2 \cdot 7^{2x}}{\ln 7} - \frac{7x \cdot 7^{2x}}{\ln^2 7} + \frac{7 \cdot 7^{2x}}{2 \cdot \ln^3 7} + C$

d) Esta es una integral cíclica, pues al aplicar dos veces la integración por partes vuelve a salir la misma integral:

$$\int e^{2x} \cdot \cos x dx = e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x - \int 2e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x dx = e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cdot \cos x - \int 4e^{2x} \cdot \cos x dx$$

Llamando I a la integral inicial obtenemos: $I = e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cdot \cos x - 4I$. De modo que despejando I:

$$\int e^{2x} \cdot \cos x dx = \frac{e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cdot \cos x}{5} + C$$

e) $\int 4x \cdot \ln x^2 dx = 2x^2 \cdot \ln^2 x - \int \frac{2}{x} 2x^2 dx = 2x^2 \cdot \ln^2 x - 2x^2 + C$

f) $\int 5 \ln x dx = 5x \cdot \ln x - 5x + C$

g) $\int \operatorname{arctg} 2x dx = x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2x}{1+4x^2} dx = x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C$

$$\begin{aligned} \text{h) } \int 2^{3x} \cdot \operatorname{sen} 3x \, dx &= -\frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot \cos 3x + \int 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot \cos 3x \, dx = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot \cos 3x + \frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot \operatorname{sen} 3x - \int 2^{3x} \cdot \ln^2 2 \cdot \operatorname{sen} 3x \, dx \end{aligned}$$

Llamando I a la integral inicial y despejando I:

$$\int 2^{3x} \cdot \operatorname{sen} 3x \, dx = \frac{-2^{3x} \cdot \cos 3x + 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot \operatorname{sen} 3x}{3 \cdot (1 + \ln^2 2)} + C$$

$$\text{i) } \int x \cdot \ln^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int x \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$$

5. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales:

$$\text{a) } \int \frac{3x+1}{x^2-4x+3} \, dx$$

$$\text{d) } \int \frac{2x^2+13x+12}{x^3+3x^2-4} \, dx$$

$$\text{g) } \int \frac{2x^2-10}{x^2-x-2} \, dx$$

$$\text{b) } \int \frac{2x^2+3x+8}{(x+2)(x^2+1)} \, dx$$

$$\text{e) } \int \frac{2x^3+8x-4}{x^2+4} \, dx$$

$$\text{h) } \int \frac{x^3+6}{x^2-4} \, dx$$

$$\text{c) } \int \frac{dx}{x^2-5x+6}$$

$$\text{f) } \int \frac{2+7x-5x^2}{4x^3+4x^2+x+1} \, dx$$

$$\text{i) } \int \frac{x^4}{x^2+9} \, dx$$

$$\text{a) } \int \frac{3x+1}{x^2-4x+3} \, dx = \int \frac{-2}{x-1} \, dx + \int \frac{5}{x-3} \, dx = -2 \ln|x-1| + 5 \ln|x-3| + C$$

$$\text{b) } \int \frac{2x^2+3x+8}{(x+2)(x^2+1)} \, dx = \int \frac{2}{x+2} \, dx + \int \frac{3}{x^2+1} \, dx = 2 \ln|x+2| + 3 \operatorname{arctg} x + C$$

$$\text{c) } \int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{-1}{x-2} \, dx + \int \frac{1}{x-3} \, dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$$

$$\text{d) } \int \frac{2x^2+13x+12}{x^3+3x^2-4} \, dx =$$

$$= \int \frac{3}{x-1} \, dx + \int \frac{2}{(x+2)^2} \, dx + \int \frac{-1}{x+2} \, dx = 3 \ln|x-1| - \frac{2}{x+2} - \ln|x+2| + C$$

$$\text{e) } \int \frac{2x^3+8x-4}{x^2+4} \, dx = \int 2x \, dx + \int \frac{-4}{x^2+4} \, dx = x^2 - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + C$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \int \frac{2+7x-5x^2}{4x^3+4x^2+x+1} dx &= \\
 &= \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{3x+4}{4x^2+1} dx = -2 \ln|x+1| + \int \frac{3x}{4x^2+1} dx + \int \frac{4}{4x^2+1} dx = \\
 &= -2 \ln|x+1| + \frac{3}{8} \ln(4x^2+1) + 2 \operatorname{arctg}(2x) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } \int \frac{2x^2-10}{x^2-x-2} dx &= \int \frac{2(x^2-x-2)+2x-6}{x^2-x-2} dx = \int 2 dx + \int \frac{2x-6}{x^2-x-2} dx = \\
 &= 2x + \int \frac{8/3}{x+1} dx + \int \frac{-2/3}{x-2} dx = 2x + \frac{8}{3} \ln|x+1| - \frac{2}{3} \ln|x-2| + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } \int \frac{x^3+6}{x^2-4} dx &= \int \frac{x(x^2-4)+4x+6}{x^2-4} dx = \int x dx + \int \frac{4x+6}{x^2-4} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} + \int \frac{7}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{2} \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x+2| + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \int \frac{x^4}{x^2+9} dx &= \int \frac{(x^2-9)(x^2+9)+81}{x^2+9} dx = \int (x^2-9) dx + \int \frac{81}{x^2+9} dx = \\
 &= \frac{x^3}{3} - 9x + 27 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C
 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 321

■ 6. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable con el cambio que se indica en cada caso:

$$\text{a) } \int \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2+2}} dx \quad (5x^2+2=t^3) \quad \text{d) } \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx \quad (x=t^2)$$

$$\text{b) } \int \frac{2}{x(3+\ln x)^2} dx \quad (\ln x=t) \quad \text{e) } \int \operatorname{sen}^3 x dx \quad (\cos x=t)$$

$$\text{c) } \int \frac{e^x}{e^{2x}+4} dx \quad (e^x=t) \quad \text{f) } \int \frac{4x^3+2}{x^2+2} dx \quad (x^2=t)$$

a) Mediante el cambio dado ($5x^2+2=t^3$) obtenemos: $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{5x^2+2}} dx =$

$$\int \frac{4x}{t} \cdot \frac{3t^2}{10x} dt = \frac{3t^2}{5} = \frac{3(5x^2+2)^{\frac{2}{3}}}{5} + C$$

b) Mediante el cambio dado ($\ln x = t$) obtenemos: $\int \frac{2}{x(3+\ln x)^2} dx =$

$$\int \frac{2}{x(3+t)^2} \cdot x dt = \frac{-2}{3+t} = \frac{-2}{3+\ln x} + C$$

c) Mediante el cambio dado ($e^x = t$) obtenemos: $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4} dx =$

$$\int \frac{e^x}{t^2+4} \cdot \frac{dt}{e^x} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x}{2}\right) + C$$

d) Mediante el cambio dado ($x = t^2$) obtenemos: $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx =$

$$= \int \frac{t^2}{1+t} \cdot 2t dt = \int \frac{2t^3}{1+t} dt = \int \frac{(1+t)(2t^2 - 2t + 2) - 2}{1+t} dt =$$

$$= \int (2t^2 - 2t + 2) dt - \int \frac{2}{1+t} dt = \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\ln|1+t| =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

e) Mediante el cambio dado ($\cos x = t$) obtenemos:

$$\int \frac{\sin x (1-t^2)}{\sin x} \frac{dt}{-\sin x} = - \int \frac{\sin x (1-t^2)}{-\sin x} dt = -t + \frac{t^3}{3} = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

f) Mediante el cambio dado ($x^2 = t$) obtenemos: $\int \frac{4x^3+2}{x^2+2} dx =$

$$= \int \frac{4x^3}{x^2+2} dx + \int \frac{2}{x^2+2} = \int \frac{4x \cdot t}{t+2} \cdot \frac{dt}{2x} + \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= \int \frac{2((t+2)-4)}{t+2} dx + \sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 2t - 4\ln|t+2| + \sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 2x^2 - 4\ln|x^2+2| + \sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

7. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable:

a) $\int \frac{2}{3 + \sqrt{x-2}} dx$

d) $\int \frac{4\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

g) $\int \frac{\ln x + 8}{x(\ln^2 x + 4 \ln x)} dx$

b) $\int \frac{4 + \ln^3 x}{2x} dx$

e) $\int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x dx$

h) $\int \frac{4e^x}{e^{2x} - 1} dx$

c) $\int \frac{2e^x + 5}{e^x - 3} dx$

f) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} dx$

i) $\int \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx$

7. a) Mediante el cambio $(x - 2 = t^2)$ obtenemos:

$$\int \frac{2}{3 + \sqrt{x-2}} dx = \int \frac{2}{3+t} \cdot 2t dt =$$

$$= \int \frac{4t}{3+t} dx = \int \frac{4(3+t) - 12}{3+t} dt = 4t - 12 \ln|3+t| = 4\sqrt{x-2} - 12 \ln|3 + \sqrt{x-2}| + C$$

b) Mediante el cambio $(\ln x = t)$ obtenemos:

$$\int \frac{4 + \ln^3 x}{2x} dx = \int \frac{4 + t^3}{2x} \cdot x dt = 2t + \frac{1}{2} \frac{t^4}{4} = 2 \ln x + \frac{1}{8} \frac{\ln^4 x}{4} + C$$

c) Mediante el cambio $(e^x = t)$ obtenemos: $\int \frac{2e^x + 6}{e^x - 3} dx = \int \frac{2t + 6}{t - 3} \frac{dt}{t}$ = esta es una integral racional y

queda: $\int \frac{-2}{t} dt + \int \frac{4}{t-3} dt = -2 \ln|t| + 4 \ln|t-3| = -2x + 4 \ln|e^x - 3| + C$

d) Mediante el cambio $(x = t^2)$ obtenemos: $\int \frac{4\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = \int \frac{4t}{1+t} 2t dt = \int \frac{8t^2}{1+t} dt$ = esta es una integral racional y queda:

$$\int \frac{8(t-1)(t+1) + 8}{1+t} dt = 8 \frac{(t-1)^2}{2} + 8 \ln|1+t| = 4(\sqrt{x}-1)^2 + 8 \ln|1 + \sqrt{x}| + C$$

e) Mediante el cambio $(\operatorname{sen} x = t)$ obtenemos:

$$\int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x dx = \int \cos x \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cdot \operatorname{sen}^2 x dx = \int \cos x \cdot (1 - t^2) \cdot t^2 \frac{dt}{\cos x} =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$$

f) Mediante el cambio $(x-1 = t^2)$ obtenemos: $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} dx = \int \frac{t}{t^2-1} 2t dt = \int \frac{2t^2}{t^2-1} dt =$

$$= \int \frac{2(t^2 - 1) + 2}{t^2 - 1} dt = 2t + \ln|t - 1| + \ln|t + 1| = 2\sqrt{x-1} + \ln\left(\frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} + 1}\right) + C$$

g) Mediante el cambio ($\ln x = t$) obtenemos: $\int \frac{\ln x + 8}{x(\ln^2 x + 4 \ln x)} dx = \int \frac{t + 8}{x(t^2 + 4t)} x dt =$
 $= \int \frac{2}{t} dt + \int \frac{-1}{t+4} dt = 2\ln|t| - \ln|t+4| = 2\ln|\ln x| - \ln|\ln x + 4| + C$

h) Mediante el cambio ($e^x = t$) obtenemos: $\int \frac{4e^x}{e^{2x} - 1} dx = \int \frac{4t}{t^2 - 1} \frac{dt}{t} = \int \frac{2}{t-1} dt + \int \frac{-2}{t+1} dt =$
 $= 2\ln|t - 1| - 2\ln|t + 1| = 2\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C$

i) Mediante el cambio ($\arctg x = t$) obtenemos: $\int \frac{2 \arctg x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{2t}{x^2 + 1} (x^2 + 1) dt = t^2 =$
 $= (\arctg x)^2 + C$

8. Resuelve las siguientes integrales por el método que creas más adecuado:

a) $\int \ln(x^2 - 4) dx$

i) $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x - 1)} dx$

q) $\int e^{-2x} \cdot (x^2 + 1) dx$

b) $\int \frac{5 - 4x}{2x^2 + x - 1} dx$

j) $\int \frac{3x^2 + 6x + 10}{(x + 2)^2} dx$

r) $\int \frac{2}{e^{2x} - 1} dx$

c) $\int \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$

k) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$

s) $\int \frac{4x(x+1)}{x^2 - 2x + 5} dx$

d) $\int 5 \cos 3x \operatorname{sen}^2 3x dx$

l) $\int (x^3 + 1) \ln x dx$

t) $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x+1}}$

e) $\int \frac{8x^2 + 2x + 5}{4x^2 + 5} dx$

m) $\int \frac{2}{\sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt{x}} dx$

u) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{3 + \cos^2 x} dx$

f) $\int 8x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx$

n) $\int (2x - 1) \cdot \arctg x \cdot dx$

w) $\int e^{-x} \cdot \cos 2x dx$

g) $\int \frac{3}{x^2 + 6x + 18} dx$

o) $\int \frac{6}{x(\ln^2 x + \ln x)} dx$

x) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 x}} dx$

h) $\int \frac{3 + 3x - 2x^2}{x^2 + x^3} dx$

p) $\int \frac{5x - 12}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} dx$

y) $\int \frac{x^5}{x^4 - 1} dx$

a) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int \ln(x^2 - 4) dx = x \ln|x^2 - 4| - 2x - 2 \ln|x - 2| + 2 \ln|x + 2| + C$$

b) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{5 - 4x}{2x^2 + x - 1} dx = \ln|2x - 1| - 3 \ln|x + 1| + C$$

c) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{8\sqrt{x^5}}{5} + \frac{8\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + C$$

d) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int 5 \cos 3x \operatorname{sen}^2 3x dx = \frac{5}{9} \operatorname{sen}^3 3x + C$$

e) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{8x^2 + 2x + 5}{4x^2 + 5} dx = 2x + \frac{1}{4} \ln(4x^2 + 5) - \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

f) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int 8x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = 4x^2 e^{2x} - 4x e^{2x} + 2e^{2x} + C$$

g) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int \frac{3}{x^2 + 6x + 18} dx = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{3}\right) + C$$

h) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{3 + 3x - 2x^2}{x^2 + x^3} dx = -\frac{3}{x} - 2 \ln|x + 1| + C$$

i) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{\ln x}{x (\ln^2 x - 1)} dx = \frac{1}{2} \ln|\ln^2 x - 1| + C$$

j) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{3x^2 + 6x + 10}{(x+2)^2} dx = 3x - \frac{10}{x+2} - 6 \ln|x+2| + C$$

k) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} + C$$

l) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int (x^3 + 1) \ln x dx = \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \ln x - \frac{x^4}{16} - x + C$$

m) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{2}{\sqrt[4]{x^3 + 3\sqrt{x}}} dx = 8 \sqrt[4]{x} - 24 \ln|\sqrt[4]{x} + 3| + C$$

n) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int (2x - 1) \cdot \operatorname{arctg} x dx = (x^2 - x + 1) \operatorname{arctg} x - x + \ln \sqrt{x^2 + 1} + C$$

o) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{6}{x(\ln^2 x + \ln x)} dx = 6 \ln \left| \frac{\ln x}{1 + \ln x} \right| + C$$

p) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int \frac{5x - 12}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} dx = \int \frac{5x - 12}{\sqrt{9 - (x - 2)^2}} dx = -5 \sqrt{9 - (x - 2)^2} - 2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x - 2}{3} \right) + C$$

q) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int e^{-2x} \cdot (x^2 + 1) dx = \frac{-1}{2} \left(x^2 + x + \frac{3}{2} \right) e^{-2x} + C$$

r) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{2}{e^{2x} - 1} dx = -2x + \ln |(e^x - 1)(e^x + 1)| + C$$

s) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{4x(x-1)}{x^2 - 2x + 5} dx = 4x + 6 \ln(x^2 - 2x + 5) - 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2} \right) + C$$

t) Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x+1}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} + C$$

u) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas y obtenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{3 + \cos^2 x} dx = -\ln(3 + \cos^2 x) + C$$

w) Resolvemos esta integral por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int e^{-x} \cdot \cos 2x \, dx = \frac{2e^{-x} \operatorname{sen} 2x - e^{-x} \cos 2x}{5} + C$$

x) Resolvemos esta integral por el método de integración de integrales inmediatas o por el método de cambio de variable y obtenemos:

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{4 - \operatorname{tg}^2 x}} dx = \operatorname{arcsen} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{2} \right) + C$$

y) Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales y obtenemos:

$$\int \frac{x^5}{x^4 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)} \right| + C$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 322

1. Halla la primitiva de $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4x + 3}$ que valga 1 para $x = 0$

Las primitivas de la función dada se hallan mediante la integral de la misma y son:

$$F(x) = \int \frac{2x^2}{x^2 + 4x + 3} dx = 2x - 9 \ln|x+3| + \ln|x+1| + C$$

Como sabemos que $F(0) = 1$ sustituyendo obtenemos: $C = 1 + 9 \ln 3$.

La primitiva que pide el problema es: $2x - 9 \ln|x+3| + \ln|x+1| + 1 + 9 \ln 3$

2. Halla una función $f(x)$ real de variable real de la que se sabe que $f''(x) = 3x^2 - 4x + 3$ y que su gráfica presenta un mínimo relativo en el punto $\left(1, \frac{11}{12}\right)$.

$$f'(x) = \int (3x^2 - 4x + 3) dx = x^3 - 2x^2 + 3x + C;$$

$$F(x) = \int (x^3 - 2x^2 + 3x + C) dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + Cx + K$$

Como tiene un mínimo relativo en el punto $\left(1, \frac{11}{12}\right)$ se debe verificar:

$$\begin{cases} f(1) = \frac{11}{12} \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -2 \\ K = \frac{11}{6} \end{cases} \text{ por lo que } f(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{11}{6}$$

3. Halla dos primitivas de la función $f(x) = \frac{2}{1 - e^x}$.

Todas las primitivas de la función dada se hallan mediante la integral de la misma y son:

$$F(x) = \int \frac{2}{1 - e^x} dx = 2x - 2 \ln|1 - e^x| + C$$

4. ¿Alguna de las funciones $F(x) = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} + 4$; $G(x) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}} - 5$ **son primitivas de**

$$f(x) = \frac{-1}{1 + \operatorname{sen} x} ?$$

Ambas son primitivas de $f(x)$ puesto que:

$$D\left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} + 4\right) = \frac{-1}{1 + \operatorname{sen} x} \quad \text{y} \quad D\left(\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}} - 5\right) = \frac{-1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

5. Sea $f(x) = \frac{2x - 12}{x^2 - x + 1}$. **Halla** $\int x \cdot f(x) dx$

$$\int x \cdot f(x) dx = \int x \cdot \frac{2x - 12}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{2x^2 - 12x}{x^2 - x + 1} dx = \int 2 + \frac{-10x - 2}{x^2 - x + 1} dx =$$

$$= 2x - 5 \ln|x^2 - x + 1| - \frac{14\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

6. La curva que limita un determinado fractal viene dada por la función $f(t) = 2t \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)$. **Calcula**

$$\int f(t) dt.$$

$$\int f(t) dt = \int 2t \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4t \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) + 8 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

7. Halla $\int \frac{2^x + 4^x}{1 + 4^x} dx$

$$\int \frac{2^x + 4^x}{1 + 4^x} dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot \operatorname{arctg} 2^x + \frac{1}{\ln 4} \cdot \ln(1 + 4^x) + C$$

8. Halla una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si se sabe que $f(1) = 1$; $f'(1) = 2$; $f''(1) = 8$ y $f'''(x) = 24x - 6$.

$$f''(x) = \int (24x - 6) dx = 12x^2 - 6x + C;$$

$$f'(x) = \int (12x^2 - 6x + C) dx = 4x^3 - 3x^2 + Cx + D$$

$$f(x) = \int (4x^3 - 3x^2 + Cx + D) dx = x^4 - x^3 + C \frac{x^2}{2} + Dx + K$$

Imponiendo las condiciones del enunciado tenemos:
$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 2 \\ f''(1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = -1 \\ K = 1 \end{cases} \text{ por lo que}$$

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

9. Calcula, integrando por partes, $\int x \cdot \cos(\ln x) dx$ y comprueba el resultado por derivación.

En primer lugar hacemos un cambio de variable ($\ln x = t$) y después resolvemos la integral por el método de integración por partes:

$$\int x \cdot \cos(\ln x) dx = \int e^{2t} \cdot \cos(t) dt = \frac{e^{2t} \operatorname{sen} t + 2e^{2t} \operatorname{cost}}{5} = \frac{x^2 \operatorname{sen}(\ln x) + 2x^2 \cos(\ln x)}{5} + C$$

Comprobamos derivando esta última función:

$$D \left(\frac{x^2 \operatorname{sen}(\ln x) + 2x^2 \cos(\ln x)}{5} + C \right) = x \cdot \cos(\ln x)$$

10. Resuelve la siguiente integral indefinida con un cambio de variable adecuado: $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} dx$

Resolvemos la integral con el cambio de variable ($\operatorname{sen} x = t$):

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = \int \left(-1 + \frac{1}{1-t^2} \right) dt = -t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = -\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \right| + C$$

11. Halla una función cuya derivada sea la función $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

Todas las funciones cuya derivada es la dada se hallan mediante la integral:

$$\int \operatorname{arcsen} x dx = x \cdot \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Una de estas funciones es $F(x) = x \cdot \arcsen x - \sqrt{1-x^2} + 2$

12. Halla las siguientes integrales trigonométricas:

a) $\int \cos^5 x \, dx$ b) $\int \cos^2 x \, dx$ c) $\int \cos^2 x \cdot \sen^2 x \, dx$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \cos^5 x \, dx &= \int \cos x \cdot (1 - \sen^2 x)^2 \, dx = \\ &= \int \cos x (1 - 2\sen^2 x + \sen^4 x) \, dx = \sen x - \frac{2\sen^3 x}{3} + \frac{\sen^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sen 2x}{4} + C$$

$$\text{c) } \int \cos^2 x \cdot \sen^2 x \, dx = \int \frac{\sen^2 2x}{4} \, dx = \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sen 4x}{8} + C$$

13. Demuestra la siguiente igualdad: $\int \frac{1}{\sen x} \, dx = \ln \left(\frac{1 - \cos x}{\sen x} \right) + C$

$$D \left[\ln \left(\frac{1 - \cos x}{\sen x} \right) + C \right] = \frac{1}{\sen x}$$

14. Halla una función polinómica de segundo grado cuya derivada es la función $g(x) = 4x - 3$ y tiene una tangente en la recta $y = x + 2$.

$$\text{La función es } f(x) = \int (4x - 3) \, dx = 2x^2 - 3x + C$$

Si la recta dada es tangente a la gráfica de la función se verifica que $g(x) = 4x - 3 = 1$; por lo que $x = 1$ e $y = 3$. El punto de tangencia es $(1, 3)$.

La función polinómica $f(x)$ pasa por este punto, de modo que la función es: $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

15. Halla una función real de variable real $f(x)$ que pasa por el origen de coordenadas y de la que se sabe que $f'(x) = x \cdot \ln(x^2 + 1)$.

$$\begin{aligned} \text{La función es: } f(x) &= \int x \cdot \ln(x^2 + 1) \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) - \int \frac{x^3}{x^2 + 1} \, dx = \\ &= \frac{x^2 + 1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Para que pase por el origen de coordenadas se debe verificar que $f(0) = 0$. Por lo que $C = 0$ y la función buscada es:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2}$$

16. Halla la primitiva de la función $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \cos x$ que vale π para $x = \pi$.

Todas las primitivas se hallan mediante la siguiente integral:

$$\int (x^2 + 1) \cdot \cos x \, dx = (x^2 + 1) \operatorname{sen} x - \int 2x \cdot \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= (x^2 + 1) \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$$

La primitiva que pasa por el punto (π, π) es: $F(x) = (x^2 + 1) \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + 3\pi$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 323

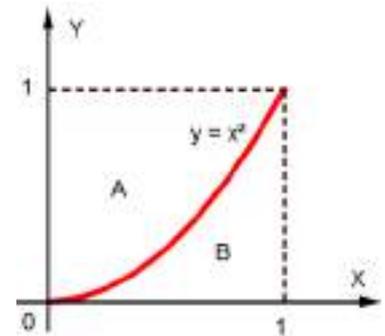
Razones de áreas

Queremos investigar posibles patrones que aparecen si se halla la razón de las áreas que se forman cuando las funciones $y = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Q}$) se representan entre dos valores arbitrarios a y b , con $a < b$.

1. Sea la función $y = x^2$. Consideramos:

- La región B delimitada por $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$ y el eje OX.
- La región A delimitada por $y = x^2$, $y = 0$, $y = 1$ y el eje OY.

Halla la razón: $\frac{\text{Área A}}{\text{Área B}}$.



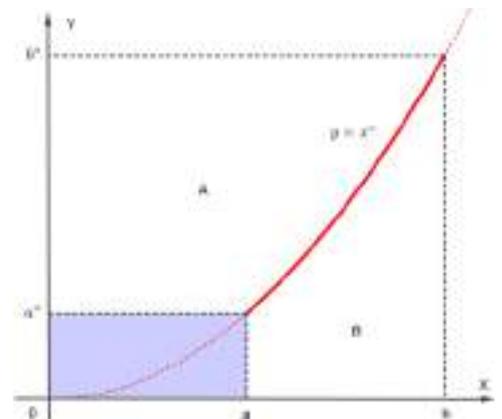
2. Calcula la razón de las áreas para otras funciones del tipo $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, entre $x = 0$ y $x = 1$.

3. Estudia qué ocurre para áreas comprendidas entre $x = 0$ y $x = 2$, entre $x = 1$ y $x = 2$, etc.

4. Analiza el caso general, con $y = x^n$ entre a y b , tal que $a < b$, y para las regiones:

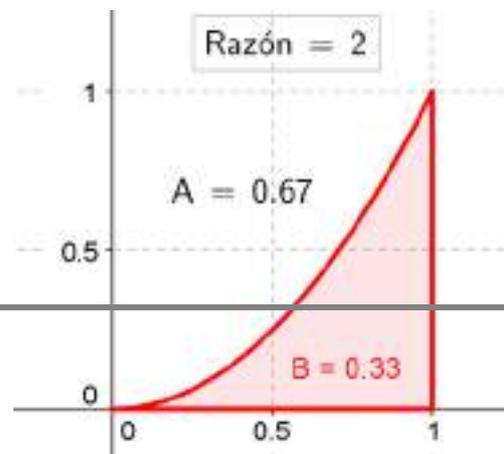
- La región A delimitada por $y = x^n$, $y = a^n$, $y = b^n$ y el eje OY.
- La región B delimitada por $y = x^n$, $x = a$, $x = b$ y el eje OX.

5. Los resultados que obtienes, ¿se mantienen para funciones del tipo $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^-$, entre $x = 0$ y $x = 1$; entre $x = 0$ y $x = 2$; entre $x = 1$ y $x = 2$, etc.? ¿Y para funciones del tipo $y = x^n$, $n \in \mathbb{Q}$, en los mismos intervalos?



1. Para la función $y = x^2$ hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} = 0,33$$



$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0,67$$

La razón de las áreas es: $Razón = \frac{\text{Área } A}{\text{Área } B} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2.$

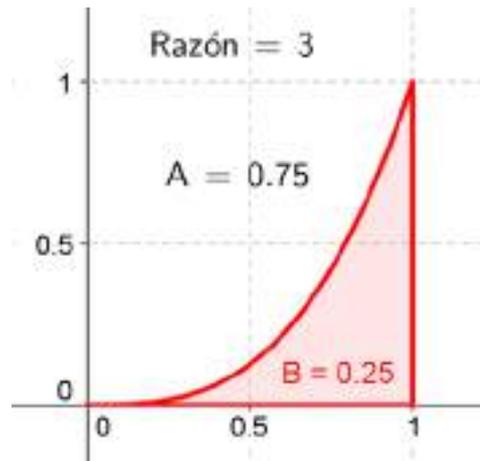
En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

2. Para la función $y = x^3$ hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

La razón de las áreas es: $Razón = \frac{\text{Área } A}{\text{Área } B} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3.$



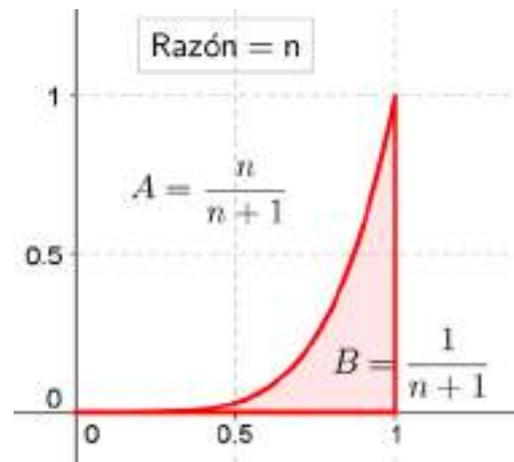
En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Para la función $y = x^n$, con $n \in \mathbb{Z}^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

La razón de las áreas es: $Razón = \frac{\text{Área } A}{\text{Área } B} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = n.$



En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función $y = x^n$.

3. Estudiamos las áreas comprendidas entre $x = 0$ y $x = 2$.

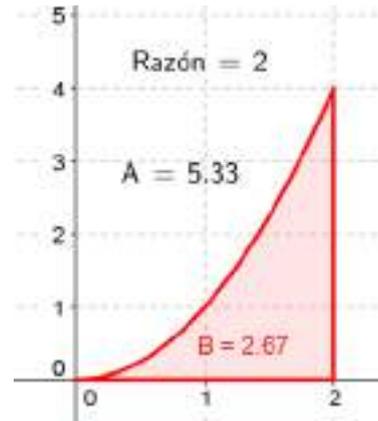
Para la función $y = x^2$ hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} = 2,67$$

$$A = 8 - B = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5,33$$

La razón de las áreas es: $Razón = \frac{\text{Área } A}{\text{Área } B} = \frac{16}{\frac{8}{3}} = 2.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



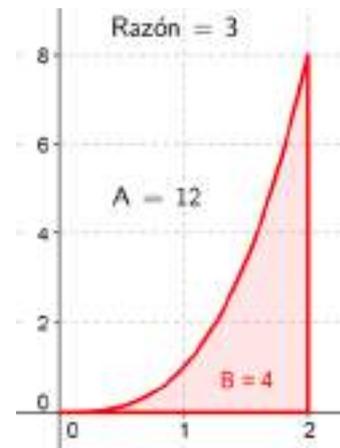
Para la función $y = x^3$ hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{16}{4} = 4$$

$$A = 16 - B = 16 - 4 = 12$$

La razón de las áreas es: $Razón = \frac{\text{Área } A}{\text{Área } B} = \frac{12}{4} = 3.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



Para la función $y = x^n$, con $n \in \mathbb{Z}^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_0^2 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^2 = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

$$A = 2 \cdot 2^n - \frac{2^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot 2^{n+1}$$

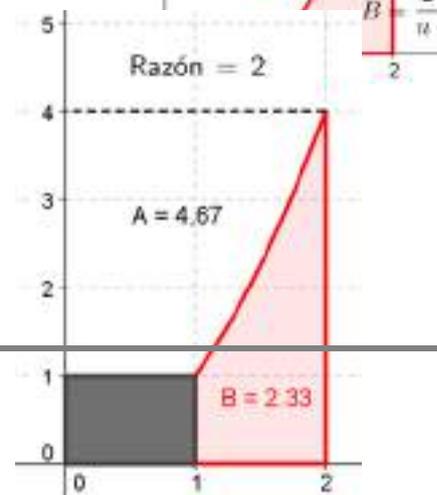
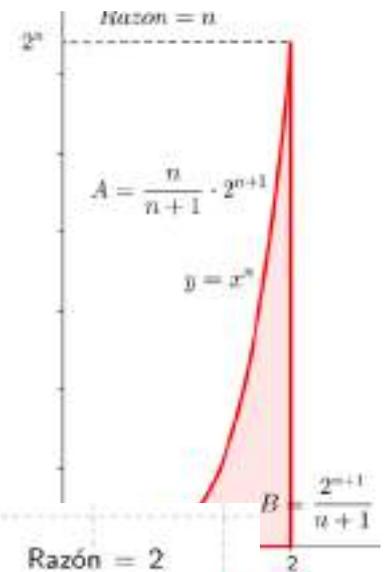
La razón de las áreas es: $Razón = \frac{\text{Área } A}{\text{Área } B} = \frac{\frac{n}{n+1} \cdot 2^{n+1}}{\frac{1}{n+1} \cdot 2^{n+1}} = n.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función $y = x^n$.

Estudiamos las áreas comprendidas entre $x = 1$ y $x = 2$.

Para la función $y = x^2$ hallamos las áreas de las regiones B y A:



$$B = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2,33$$

$$A = 8 - 1 - B = 7 - \frac{7}{3} = \frac{14}{3} = 4,67$$

La razón de las áreas es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{7}{3}} = 2.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.

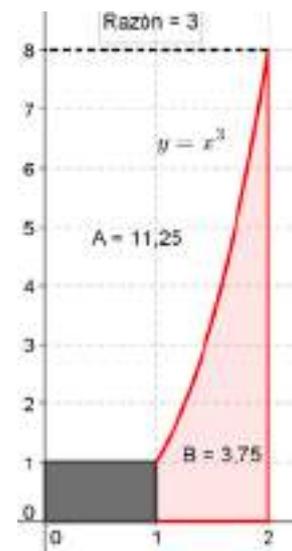
Para la función $y = x^3$ hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$$

$$A = 16 - 1 - B = 15 - \frac{15}{4} = \frac{45}{4} = 11,25$$

La razón de las áreas es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{\frac{45}{4}}{\frac{15}{4}} = 3.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



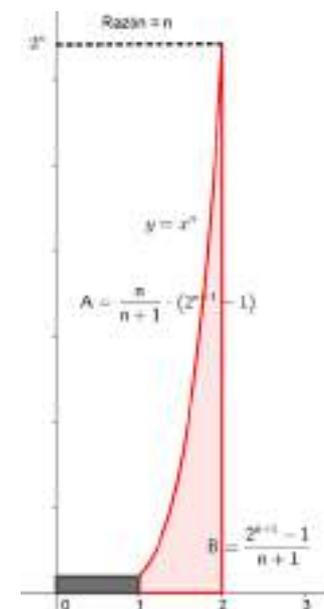
Para la función $y = x^n$, con $n \in \mathbb{Z}^+$, hallamos las áreas de las regiones B y A:

$$B = \int_1^2 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_1^2 = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$A = 2 \cdot 2^n - 1 - \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)$$

La razón de las áreas es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{\frac{n}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)}{\frac{1}{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)} = n.$

En el dibujo pueden verse los resultados obtenidos.



Observamos que la razón de las áreas coincide con el exponente de la función $y = x^n$.

4. Analizamos el caso general, con $y = x^n$ entre a y b , tal que $a < b$, y para las regiones:

- La región A delimitada por $y = x^n$, $y = a^n$, $y = b^n$ y el eje OY.

- La región B delimitada por $y = x^n$, $x = a$, $x = b$ y el eje OX.

El área de la Región B es:

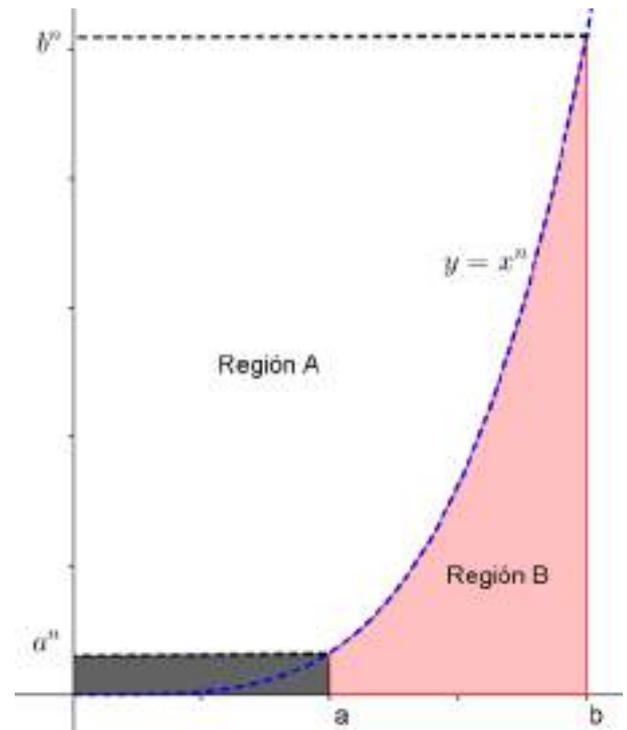
$$B = \int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

El área de la Región A es:

$$A = b^n \cdot b - a^n \cdot a - \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$$

La razón de las áreas es:

$$\text{Razón} = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{\frac{n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})}{\frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})} = n$$



5. Estudiamos las funciones $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^-$.

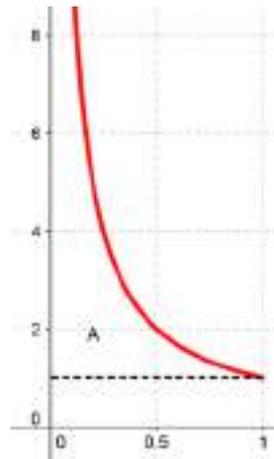
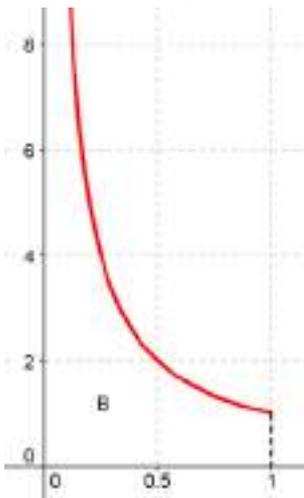
Comenzamos con $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

• Entre 0 y 1:

El área de la región B es: $B = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = 0 - (-\infty) = +\infty$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y} dy = [\ln y]_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - \ln 1 = +\infty - 0 = +\infty$$



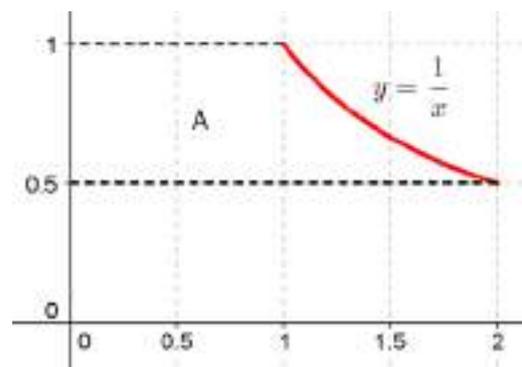
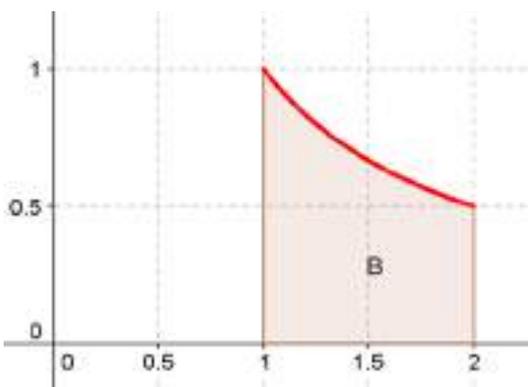
• Entre 0 y a, con $a > 0$, se obtienen los mismos resultados, es decir, las áreas de las regiones A y B son infinitas.

• Entre 1 y 2:

$$B = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0,6931$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y} dy = [\ln y]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - (-\ln 2) = \ln 2 = 0,6931$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{Área A}{Área B} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$

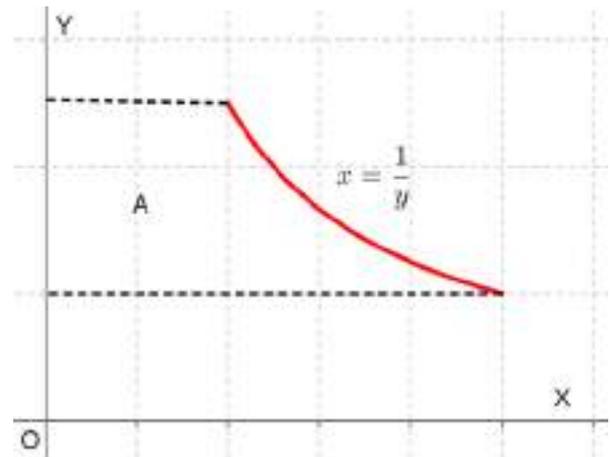
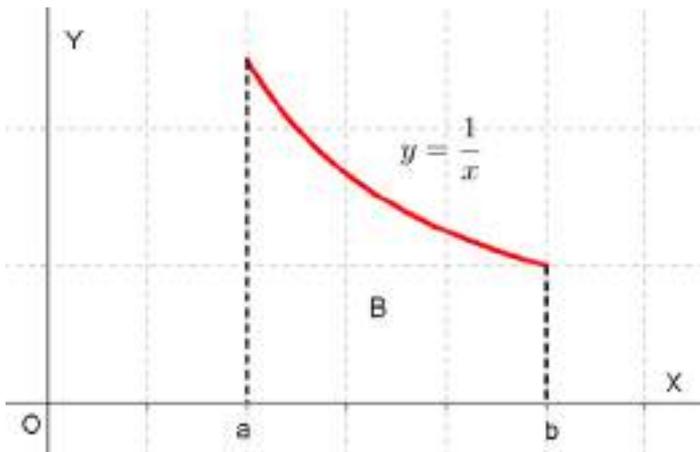


• Entre a y b:

$$B = \int_a^b \frac{1}{x} dx = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

$$A = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{y} dy = [\ln y]_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} = \ln \left(\frac{1}{a} \right) - \ln \left(\frac{1}{b} \right) = -\ln a - (-\ln b) = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{Área A}{Área B} = \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}} = 1$



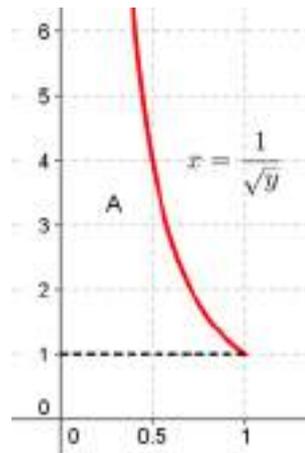
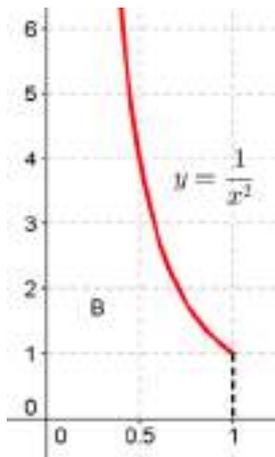
Consideramos $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

• Entre 0 y 1:

El área de la región B es: $B = \int_0^1 x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_0^1 = -1 - \left(-\frac{1}{0} \right) = -1 + \infty = +\infty$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \left[2\sqrt{y} \right]_1^{+\infty} = +\infty - 2 = +\infty$$

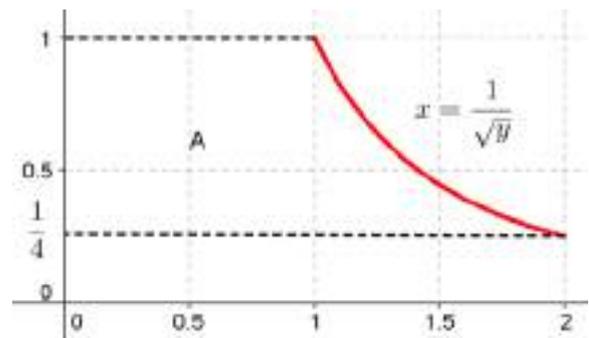
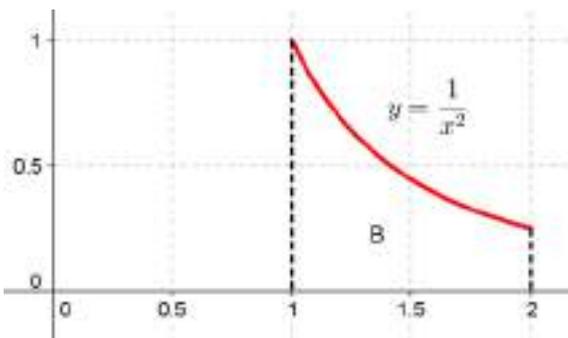


• Entre 0 y a, con $a > 0$, se obtienen los mismos resultados, es decir, las áreas de las regiones A y B son infinitas.

• Entre 1 y 2:

$$B = \int_1^2 x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A = \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \left[2\sqrt{y} \right]_{\frac{1}{4}}^1 = 2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = 2 - 1 = 1$$



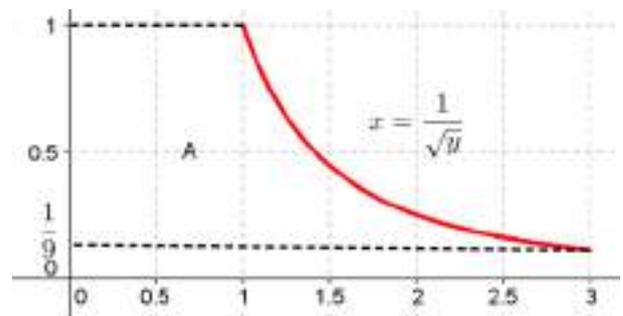
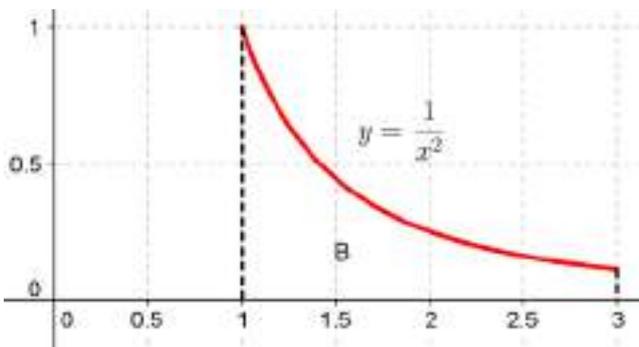
El valor de la razón es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

• Entre 1 y 3:

$$B = \int_1^3 x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3 = -\frac{1}{3} - (-1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$A = \int_{\frac{1}{9}}^1 \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \left[2\sqrt{y} \right]_{\frac{1}{9}}^1 = 2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$

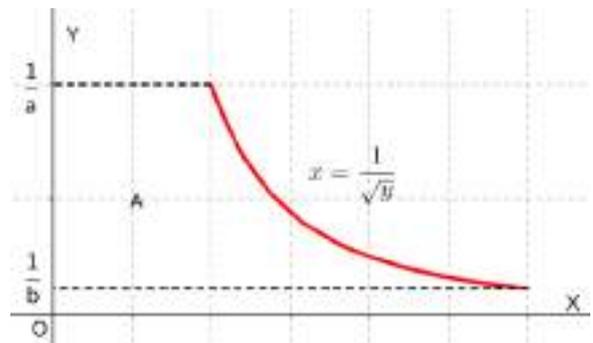
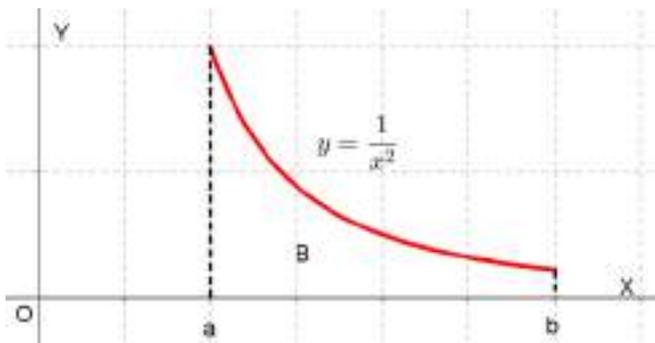


• Entre a y b:

$$B = \int_a^b x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_a^b = -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$A = \int_{\frac{1}{b^2}}^{\frac{1}{a^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \left[2\sqrt{y} \right]_{\frac{1}{b^2}}^{\frac{1}{a^2}} = \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)} = 2$



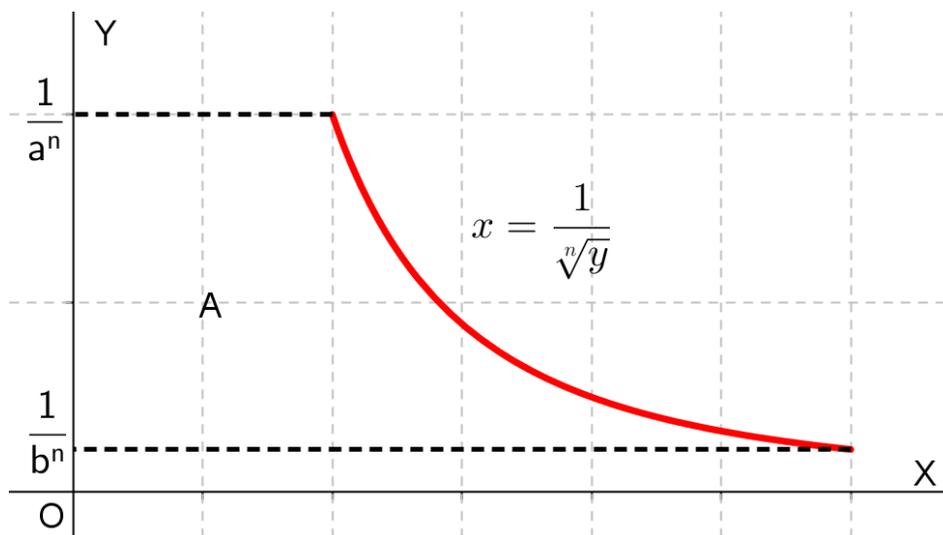
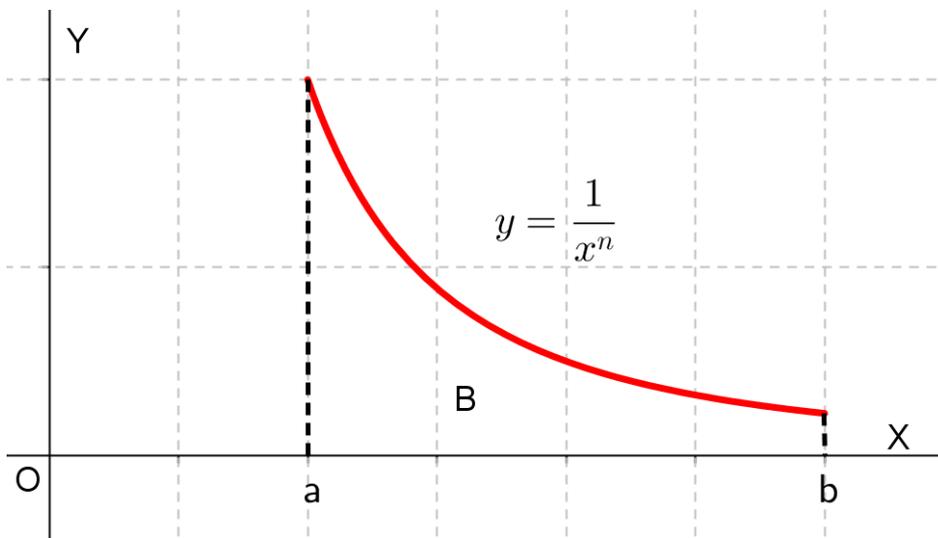
Consideramos $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

• Entre a y b:

$$B = \int_a^b x^{-n} dx = \left[\frac{1}{-n+1} x^{-n+1} \right]_a^b = \frac{1}{-n+1} b^{-n+1} - \frac{1}{-n+1} a^{-n+1} = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}} \right]$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{b^n}}^{\frac{1}{a^n}} y^{-\frac{1}{n}} dy = \left[\frac{n}{n-1} y^{\frac{n-1}{n}} \right]_{\frac{1}{b^n}}^{\frac{1}{a^n}} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{a^n} \right)^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{b^n} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}} \right] \end{aligned}$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{\frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}} \right)}{\frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}} \right)} = n$



Estudiamos las

funciones $y = x^{\frac{p}{q}}$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$. Comenzamos con $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

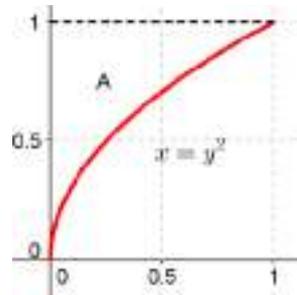
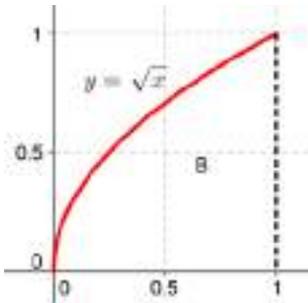
• Entre 0 y 1:

El área de la región B es: $B = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} y^2 dy = \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$



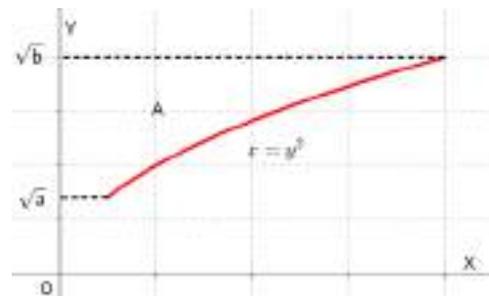
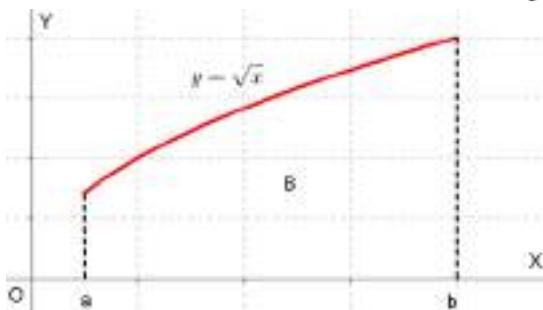
• Entre a y b:

El área de la región B es: $B = \int_a^b x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_a^b = \frac{2}{3} \sqrt{b^3} - \frac{2}{3} \sqrt{a^3} = \frac{2}{3} (\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3})$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} y^2 dy = \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = \frac{1}{3} \sqrt{b^3} - \frac{1}{3} \sqrt{a^3} = \frac{1}{3} (\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3})$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{\frac{1}{3} (\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3})}{\frac{2}{3} (\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3})} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$



Consideramos la función $y = x^{\frac{p}{q}}$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ entre a y b .

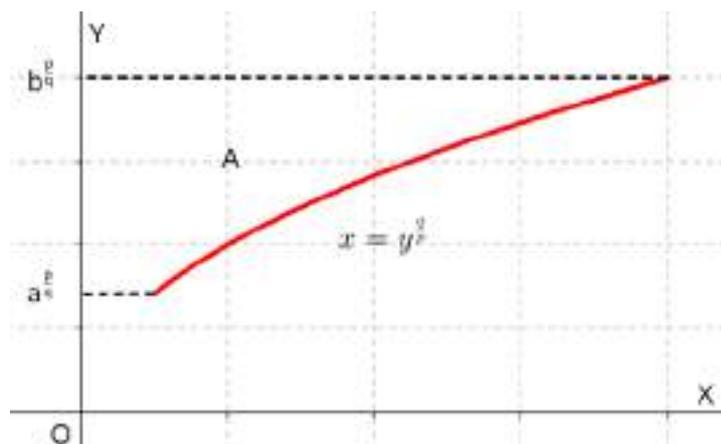
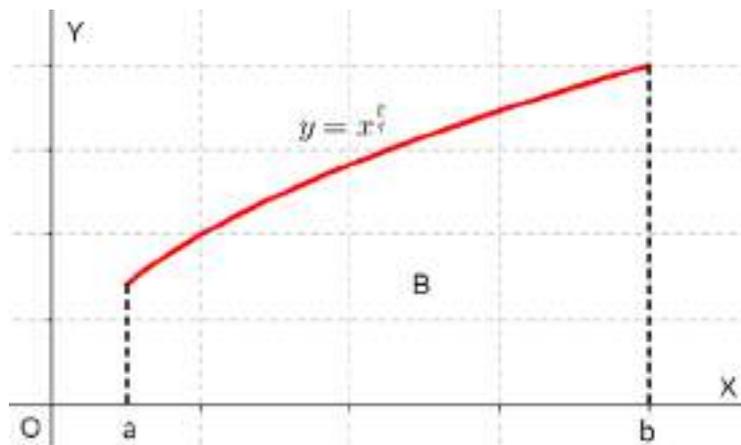
El área de la región B es:

$$B = \int_a^b x^{\frac{p}{q}} dx = \left[\frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}} \right]_a^b = \frac{q}{p+q} b^{\frac{p+q}{q}} - \frac{q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}} = \frac{q}{p+q} \left(b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}} \right)$$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{\frac{p}{a^q}}^{\frac{p}{b^q}} y^{\frac{q}{p}} dy = \left[\frac{p}{p+q} y^{\frac{p+q}{p}} \right]_{\frac{p}{a^q}}^{\frac{p}{b^q}} = \frac{p}{p+q} \left[\left(\frac{p}{b^q} \right)^{\frac{p+q}{p}} - \left(\frac{p}{a^q} \right)^{\frac{p+q}{p}} \right] = \frac{p}{p+q} \left[b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}} \right]$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{Área A}{Área B} = \frac{\frac{p}{p+q} \left[b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}} \right]}{\frac{q}{p+q} \left[b^{\frac{p+q}{q}} - a^{\frac{p+q}{q}} \right]} = \frac{p}{q}$



Estudiamos las funciones $y = x^{\frac{p}{q}}$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^-$. Comenzamos con $y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

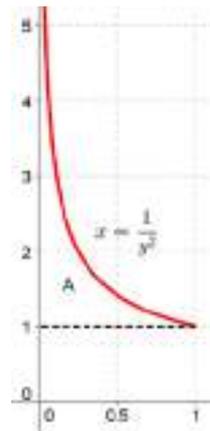
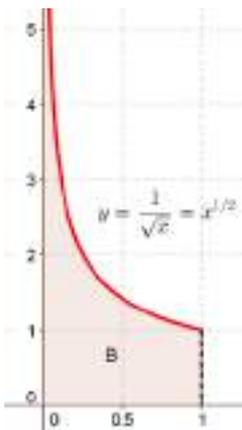
• Entre 0 y 1:

El área de la región B es: $B = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} - (-1) = 0 + 1 = 1$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$



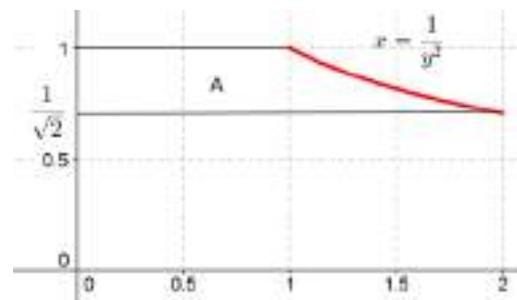
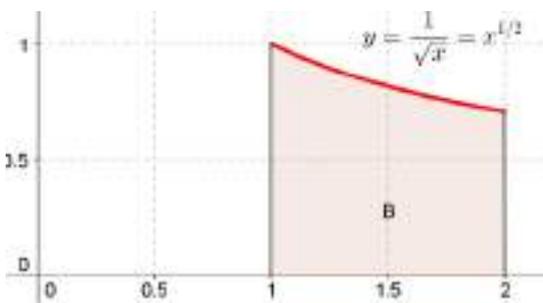
• Entre 1 y 2:

El área de la región B es: $B = \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1} = 2(\sqrt{2} - 1)$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1}{y^2} dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_{1/\sqrt{2}}^1 = -1 - \left(-\frac{1}{1/\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} - 1$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{2}$



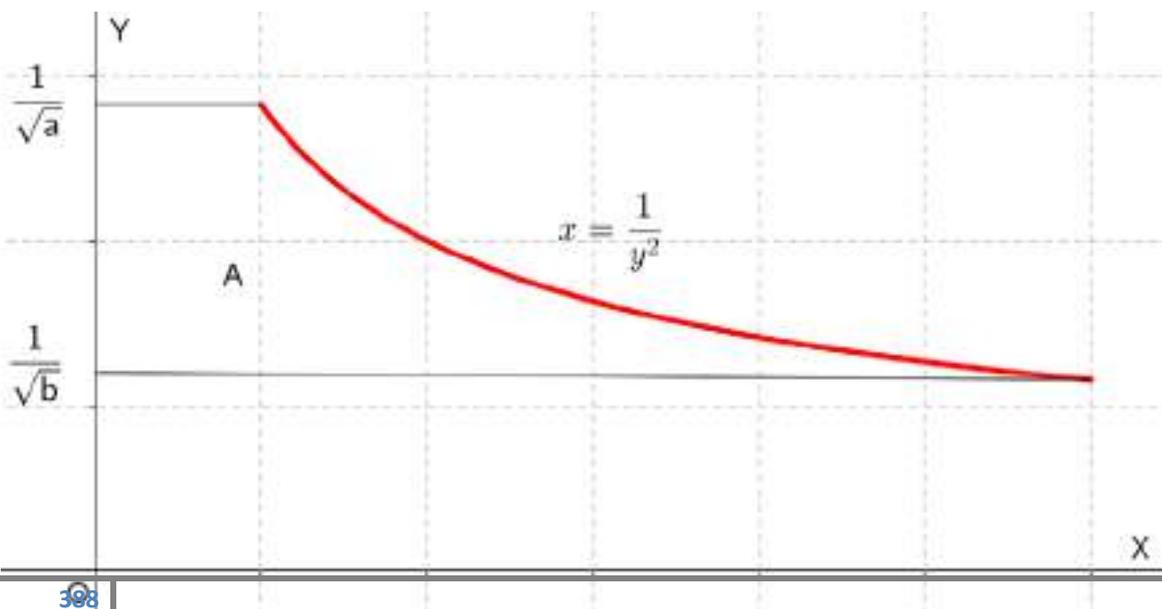
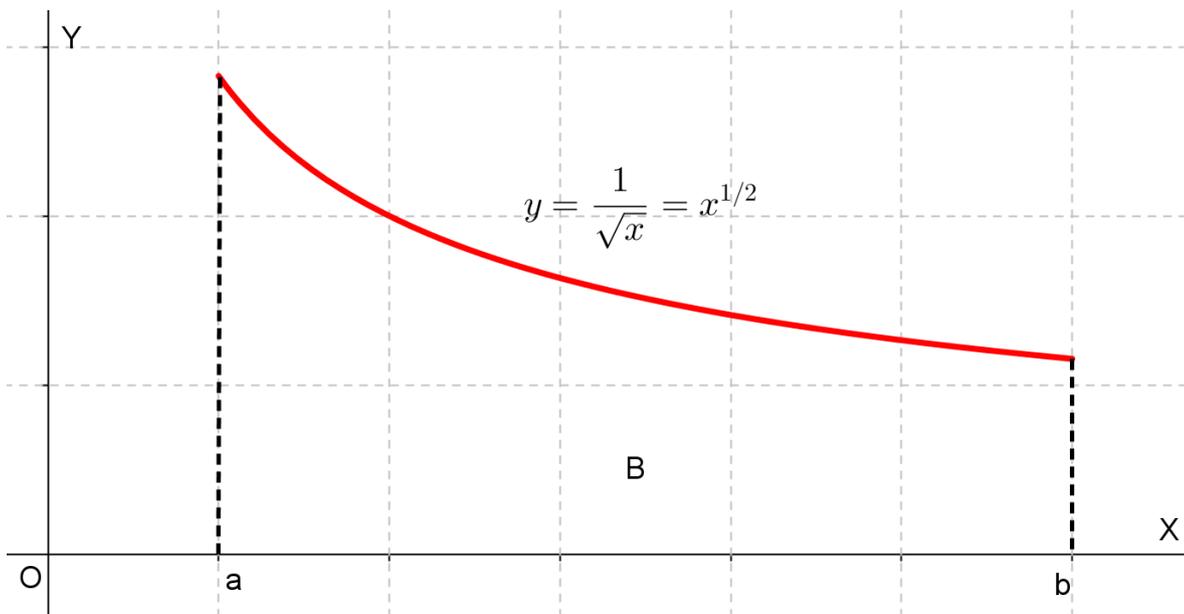
• Entre a y b:

El área de la región B es: $B = \int_a^b x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_a^b = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a} = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a})$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \frac{1}{y^2} dy = \left[-\frac{1}{y} \right]_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}}} - \left(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}} \right) = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{Área A}{Área B} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2(\sqrt{b} - \sqrt{a})} = \frac{1}{2}$



Podemos comprobar con otras funciones del mismo tipo, por ejemplo:

$$y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad y = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \quad \dots$$

que se obtienen resultados análogos al anterior.

Para finalizar, hacemos, **los cálculos para la función** $y = x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{p}}$ **entre a y b.**

El área de la región B es:

$$B = \int_a^b x^{-\frac{p}{q}} dx = \left[\frac{q}{q-p} x^{\frac{q-p}{q}} \right]_a^b = \frac{q}{q-p} b^{\frac{q-p}{q}} - \frac{q}{q-p} a^{\frac{q-p}{q}} = \frac{q}{q-p} \left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}} \right]$$

Integrando sobre el eje OY para calcular el área de la región A, obtenemos:

$$A = \int_{\frac{1}{b^{\frac{p}{q}}}}^{\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}} y^{-\frac{q}{p}} dy = \left[\frac{p}{p-q} y^{\frac{p}{p-q}} \right]_{\frac{1}{b^{\frac{p}{q}}}}^{\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}} = \frac{p}{p-q} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{p}{p-q}} \right]^{\frac{p-q}{p}} - \frac{p}{p-q} \left[\left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{p}{p-q}} \right]^{\frac{p-q}{p}} = \dots =$$

$$= \frac{p}{q-p} \left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}} \right]$$

El valor de la razón es: $Razón = \frac{\text{Área A}}{\text{Área B}} = \frac{\frac{p}{q-p} \left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}} \right]}{\frac{q}{q-p} \left[b^{\frac{q-p}{q}} - a^{\frac{q-p}{q}} \right]} = \frac{p}{q}$