UNIDAD 13: Integrales definidas. Aplicaciones

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 324

1. Halla el área de cada uno de los siguientes recintos:

a) Limitado por la recta y = $\frac{1}{4}$ x, el eje OX y la recta x = 2.

b) Limitado por la recta $y = -\frac{1}{2}x - 2$, el eje OX y las rectas x = 2 y x = 4.

c) Interior a la curva $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

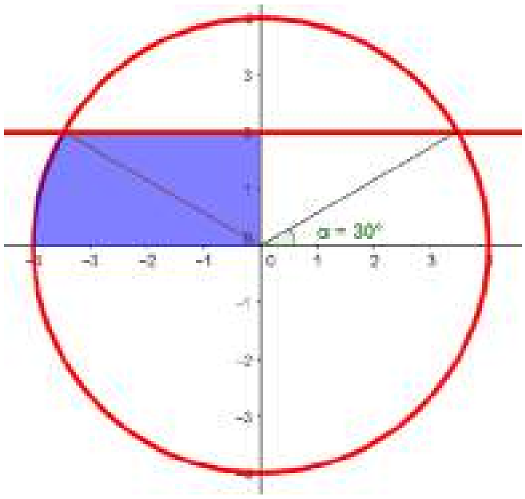
d) Encerrado entre la curva $x^2 + y^2 = 16$, el eje OX y la recta y = 2.

Las áreas pedidas son:

a) 0,5 unidades cuadradas.

b) 7 unidades cuadradas.

c) La curva es una circunferencia de centro C (- 2, 1) y radio 2. Por tanto el área encerrada por esa curva es el área de un círculo y vale 4π unidades cuadradas.



d) En la gráfica vemos que el área a calcular es doble del recinto sombreado.

Esta área viene dada por:

A = 2 · (área del sector de ángulo 30º + área del triángulo) =

$$= 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 4^2}{12} + \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \right) = 15{,}31 \text{ unidades cuadradas.}$$

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 343

1. Con letras. Demuestra que el conjunto de todas las «palabras infinitas» de dos letras X e Y tales como

XYXYXYYYXY…
XYYXXXXYXY…

no puede ser numerable.

Supongamos que todas las palabras indicadas se pueden numerar y por tanto colocar todas, una detrás de otra. La lista de todas ellas es la siguiente:

XYXYXYYYYXXYYXXYYYYX…
Y**Y**XXYXYYYYXXXYYYXYXX…
XX**X**YYXXXXYXYXYXYXYYY…
XYX**Y**XYYXYXYXYXYXYXYX…
YYYY**X**XXYYYXXXYYYYXXXY…

Nos fijamos hora en la palabra infinita XYXYX…, que se obtiene en la lista anterior tomando la primera letra de la primera palabra, la segunda de la segunda, la tercera de la tercera, la cuarta de la cuarta, la quinta de la quinta…, es decir, tomando las letras de la diagonal del cuadro de letras.

A partir de la palabra XYXYX… formamos otra cambiando en ella cada X por Y y cada Y por X, Obtenemos así una palabra que empieza YXYXY…

Esta palabra tendría que ocupar alguna fila de la lista, pues estamos suponiendo que allí están todas, pero por otra parte, difiere de la primera palabra en la primera letra, de la segunda palabra en la segunda, de la tercera palabra en la tercera letra…, de la palabra 538 en la letra 538… Esta contradicción demuestra que nuestro punto de partida es falso.

Podemos afirmar, por consiguiente, que la colección de las palabras infinitas de dos letras no puede ser numerable.

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 345

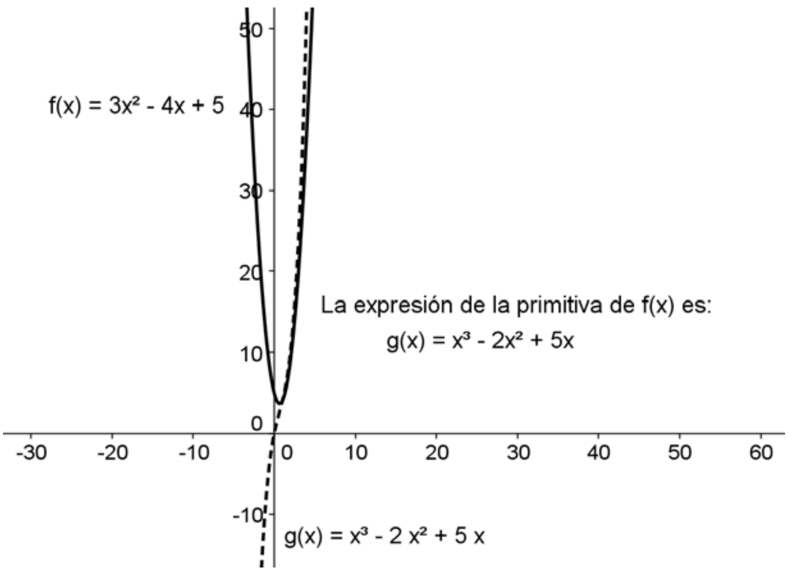
1. Calcula las siguientes integrales: a) $\int (3x^2 - 4x + 5)\, dx$ **b)** $\int \ln x\, dx$

Seguimos los pasos descritos en el epígrafe INTEGRAL INDEFINIDA.

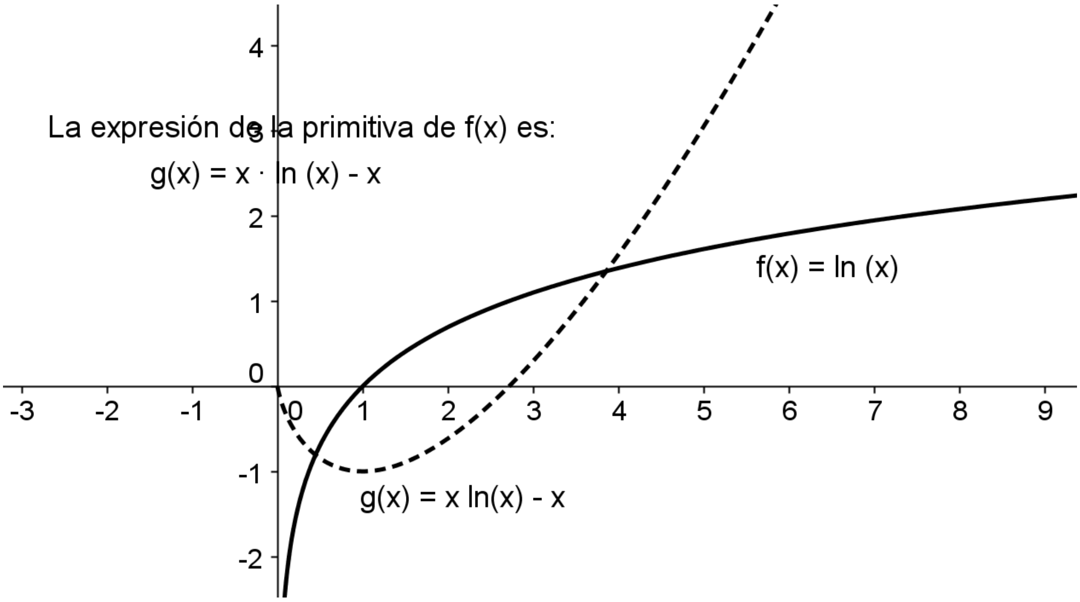
a) Para la integral $\int (3x^2 - 4x + 5)\, dx$:

- Introducimos en el **Campo de Entrada** la expresión de la función que aparece en el integrando, tecleando **f(x)=3x^2-4x^3+5** y pulsando la tecla Enter, observaremos su gráfica.

- Con el comando **Integral [f]** dibujamos la gráfica de la función primitiva (en línea discontinua en el dibujo) y su expresión, g(x) = $x^3 - 2x^2 + 5x$, podemos verla en la ventana algebraica o en el menú contextual de la gráfica.



a) Para la otra integral procedemos de manera análoga y obtenemos la primitiva g(x) = x · ln (x) – x, que puede verse en el dibujo.

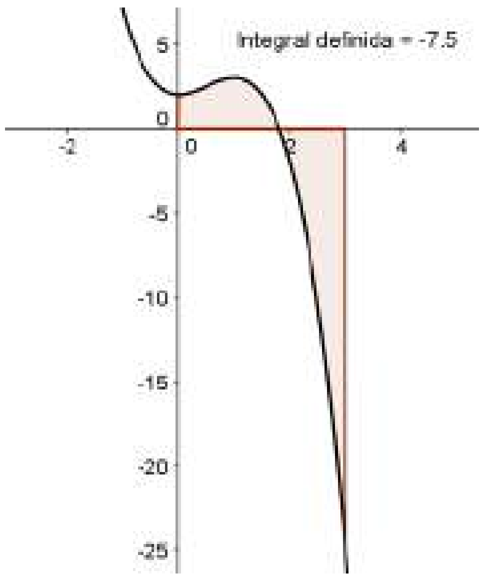


2. Obtén el valor de $\int_0^3 \left(-2x^3 + 3x^2 + 2\right) dx$ **; así como las sumas inferiores y superiores.**

Seguimos los pasos del epígrafe INTEGRAL DEFINIDA. SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES

- Introducimos en el **Campo de Entrada** la expresión de la función integrando, **f(x)=-2x^3+3x^2+2**, y visualizamos su gráfica.

- El comando **Integral [f, 0, 3]** calcula el valor de la integral definida, que es **a = -7.5**; dibuja la región delimitada por la gráfica de la función, el eje OX y las abscisas x = 0, x = 3; además vemos su valor en la ventana algebraica.

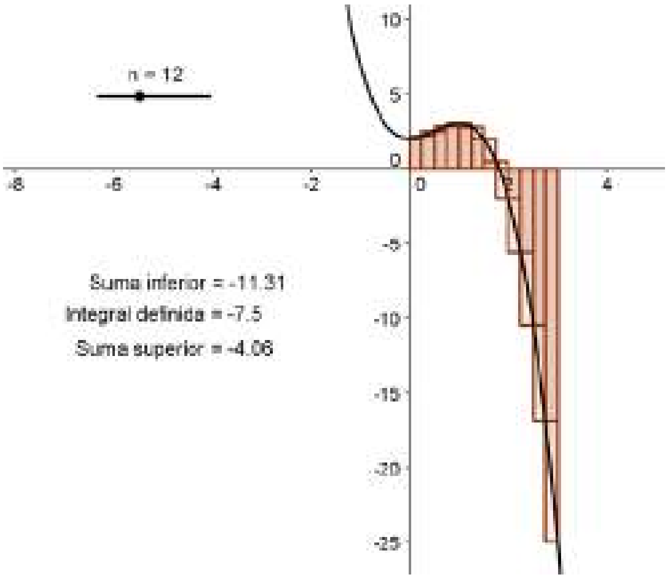


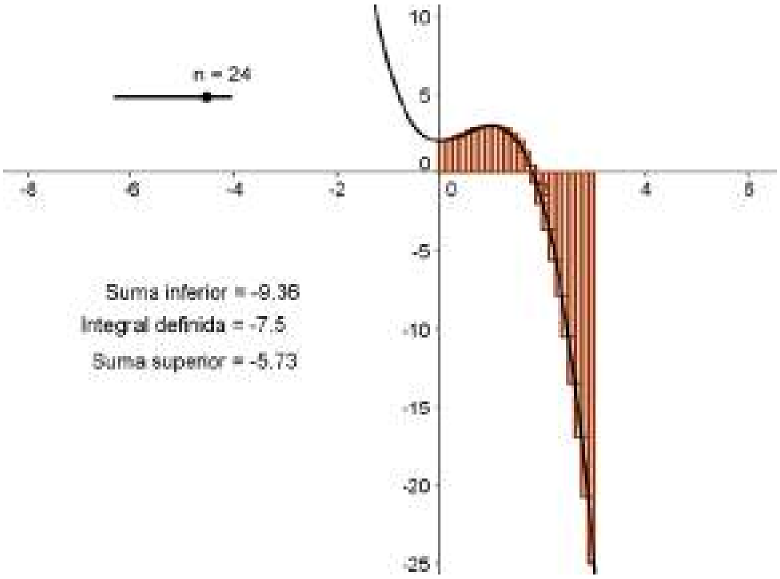
- Creamos un deslizador que llamamos **n** y hacemos que varíe de 1 a 30, con incrementos de una unidad.

- El comando **SumaInferior [f, 0, 3, n]** calcula y representa la suma inferior de la función con una partición del intervalo [0, 3] en n subintervalos. El valor de la citada suma puede verse en la ventana algebraica.

- El comando **SumaSuperior [f, 0, 3, n]** calcula y representa la suma superior de la función con una partición del intervalo [0, 3] en n subintervalos. El valor de la citada suma puede verse en la ventana algebraica.

- Tecleamos los textos “Integral definida =” +a; “Suma inferior =” +b y “Suma superior =” +c y observaremos los citados valores en la Ventana gráfica. Cambiamos el número de particiones desplazando el deslizador.





3. Visualiza el teorema fundamental del cálculo para la función f(x) = 0,5x^2 + 1.

Seguimos los pasos del epígrafe TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL:

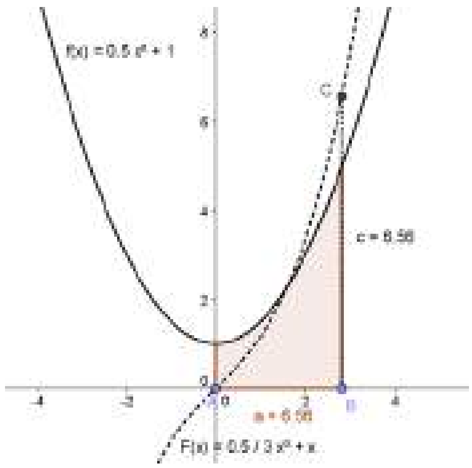
- Sobre el eje de abscisas OX señalamos dos puntos: A, el origen y B otro cualquiera.

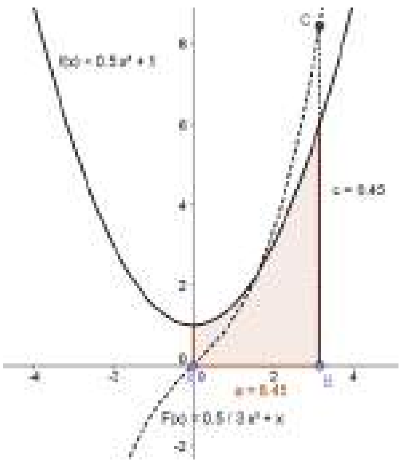
- Representamos gráficamente las funciones f(x) = 0,5x^2 + 1 y $F(x) = 0{,}5 \cdot \dfrac{x^3}{3} + x$, siendo esta la primitiva de f(x) que pasa por el origen de coordenadas, tecleando ambas en el **Campo de Entrada**.

- Calculamos el área de la región limitada por la gráfica de f(x), el eje OX y las abscisas de los puntos A y B, tecleando el comando **Integral [f, 0, x(B)]**. El valor del área aparece en la ventana algebraica.

- Trazamos la recta perpendicular al eje OX que pasa por el punto B. Hallamos el punto C como intersección de esta recta con la gráfica de la función F(x). Ocultamos la recta anterior y trazamos el segmento que une los puntos B y C. En el menú contextual del segmento BC activamos su nombre y su valor.

- Movemos el punto B sobre el eje OX y observamos que en todas las situaciones, el valor del área bajo la gráfica de f(x) coincide con la medida del segmento BC que es el valor de la ordenada del punto C situado sobre la gráfica de la función F(x).



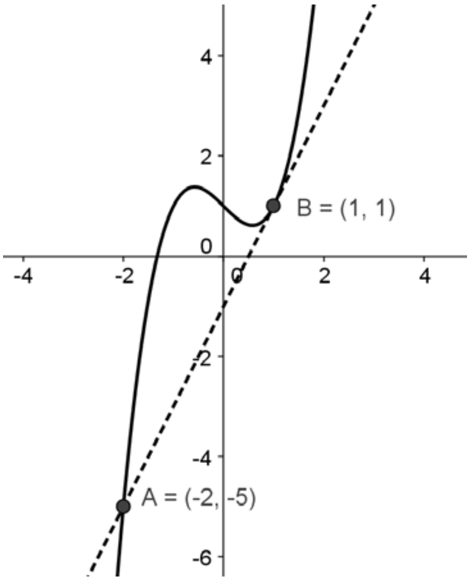


4. Calcula el área de la región finita y limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x + 1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

Seguimos los pasos que siguen.

- Representamos gráficamente la función $f(x) = x^3 - x + 1$ introduciendo sus expresión en el **Campo de Entrada**. Para ello tecleamos **f(x)=x^3-x+1**.

- Con el comando **Tangente [1, f]** calculamos la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 1, que puede verse en la ventana algebraica, y dibujamos la citada tangente. Obtenemos la recta de ecuación y = 2x – 1.

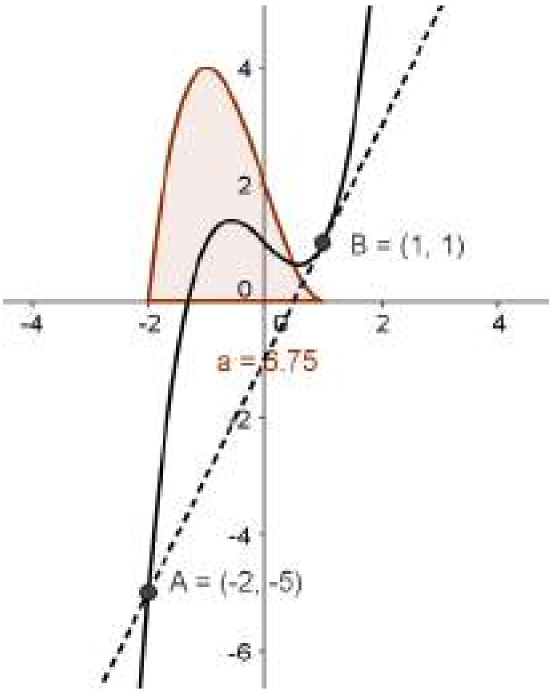


- Introducimos en el Campo de Entrada la función g(x) = 2x – 1, que coincide con la recta tangente anterior. Borramos la tangente trazada con anterioridad.

-Con la herramienta **Intersección de dos objetos**, haciendo clic sobre las gráficas de f(x) y g(x), hallamos los puntos de corte de ambas gráficas. Para estas funciones obtenemos los puntos A (- 2, - 5) y B (1, 1).

- El área buscada la proporciona la función f(x) – g(x) entre las abscisas de los puntos de corte de ambas curvas. Con el comando **Integral [f(x)-g(x),-2, 1**] hallamos el área encerrada entre las gráficas de las funciones. El valor del área es **a = 6.75** unidades cuadradas.

- Como puede verse en la imagen, Geogebra dibuja la región, cuya área calcula, en el semiplano superior. El valor del área también aparece en la ventana algebraica



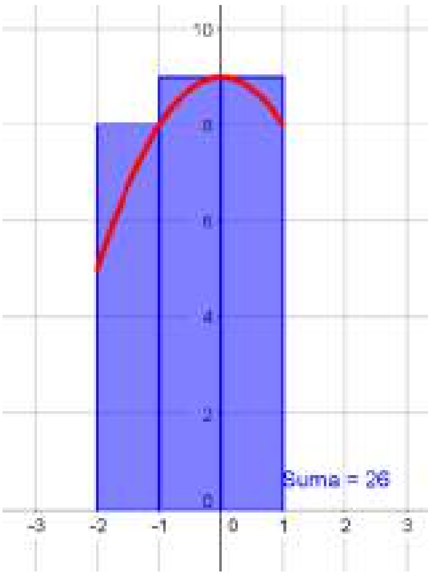
1. Sea la función f(x) = 9 – x^2. Consideremos el intervalo [- 2, 1] y la partición de dicho intervalo dada por P = {- 2, - 1, 0, 1}. Halla, de forma razonada, el valor de las sumas superior e inferior correspondiente a la función dada y a dicha partición.

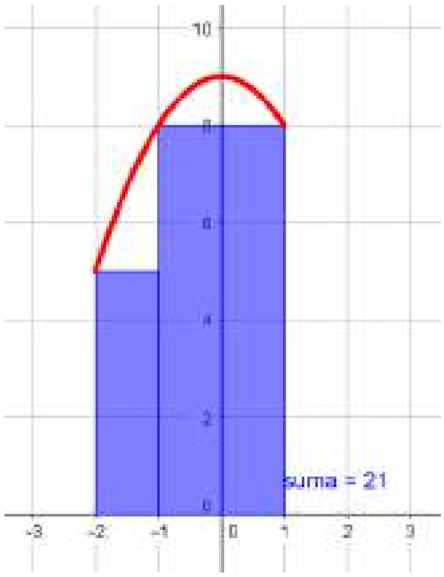
La partición P determina en el intervalo dado los siguientes intervalos [- 2, - 1], [- 1, 0], [0, 1].

Las sumas superiores e inferiores correspondientes a la función f(x) en P son:

S (P) = f (- 1) · (- 1 + 2) + f (0) · (0 + 1) + f (0) · (1 – 0) = 8 + 9 + 9 = 26

s (P) = f (- 2) · (- 1 + 2) + f (- 1) · (0 + 1) + f (1) · (1 – 0) = 5 + 8 + 8 = 21





2. Una partición decreciente verifica que f (- 2) = 64, f (- 1) = 42 y f (1) = 10. Halla, razonadamente, la suma superior y la suma inferior correspondientes a la función y = f(x) en el intervalo [- 2, 1] relativas a la partición P = {- 2, - 1, 1}.

La partición P determina en el intervalo dado los siguientes intervalos [- 2, - 1] y [- 1, 1].

Las sumas superiores e inferiores correspondientes a la función f(x) en P son:

S (P) = f (- 2) · (- 1 + 2) + f (- 1) · (1+ 1) = 64 + 42 · 2 = 148

s (P) = f (- 1) · (- 1 + 2) + f (1) · (1 + 1) = 42 + 10 · 2 = 62

3. Halla el valor medio de la función f(x) = 2x^2 – 5 en el intervalo [3, 6] y el punto en el que se alcanza.

Aplicando este teorema obtenemos: $\int_3^5 \left(2x^2 - 5\right) dx = f\ (c) \cdot (6 - 3)$

Resolviendo la integral y mediante la igualdad obtenemos que el valor medio es f(c) = 37 y se alcanza en 2x^2 – 5 = 37; es decir, $x = \sqrt{21} \in [3,6]$.

4. ¿Se puede aplicar el teorema del valor medio a la función f(x) = $\frac{2}{x+3}$ en el intervalo [- 4, - 2]? ¿Y en el intervalo [-2, 0]? En caso afirmativo aplícalo.

No se puede aplicar en el intervalo [- 4, - 2] pues la función dada no es continua en x = - 3 y pertenece a este intervalo.

Si se puede aplicar en el otro intervalo pues esta función es continua en el.

Aplicando este teorema obtenemos: $\int_{-2}^{0} \frac{2}{x+3}\, dx = f\ (c) \cdot (0 + 2)$.

Resolviendo la integral y mediante la igualdad obtenemos que el valor medio es f (c) = ln 3.

5. ¿Podemos aplicar el teorema del valor medio a la función f(x) = $\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$ en el intervalo [1, 3]? En caso afirmativo halla el valor medio que toma esta función en ese intervalo y el valor de la abscisa en la que se alcanza.

Si se puede aplicar el teorema en este intervalo pues esta función es continua en el.

Aplicando este teorema obtenemos: $\int_{1}^{3} \frac{3}{\sqrt{3+x^2}}\, dx = f\ (c) \cdot (3 - 1)$

Resolviendo la integral y mediante la igualdad obtenemos que el valor medio es f (c) = 0,73 y se alcanza en:

$$\frac{x^2}{3+x^2} = 0{,}73 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}85 \in [1,\ 3]$$

6. Aplica el teorema del valor medio a la función f(x) = $\left|4 - x^2\right|$ en el intervalo [- 3, 2]. ¿Qué observas?

La función del enunciado puede definirse en al forma $f\ (x) = \left|4 - x^2\right| = \begin{cases} 4 - x^2 & si \quad -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & si \quad x \geq 2 \ o \ x \leq -2 \end{cases}$

Aplicamos el teorema y obtenemos:

$$\int_{-3}^{2} f\ (x)\, dx = \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4)\, dx + \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = f\ (c) \cdot 1 + f\ (d) \cdot 4$$

De modo que f(c) = 1, por lo que $x^2 - 4 = 1$; $x = -\sqrt{5} \in [-3, -2]$ y f (d) = 32/12, por lo que

4 - x^2 = 32/12; $x = \sqrt{\frac{4}{3}} \in [-2, 2]$

Observamos que hay dos valores medios.

7. Halla la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) F (x) = $\int_1^x \frac{2e^t}{e^t - 2}\, dt$ **c) H (x) =** $\int_0^x \left| 2t - 3 \right| dt$ **e) J (x) =** $\int_x^{x^2} sen^2\, 2t \cdot \cos\, 2t\, dt$

b) G (x) = $\int_2^x \ln\,(t-1)\, dt$ **d) M (x) =** $\int_1^{3x} \sqrt{t+3}\, dt$ **f) R (x) =** $\int_{3x}^{x^2} \frac{2-t}{t^2+t}\, dt$

Las derivadas pedidas son:

a) F ´ (x) = $\frac{2e^x}{e^x - 2}$

b) G ´ (x) = ln (x – 1)

c) H ´ (x) = (2x – 3)

d) M ´ (x) = $3 \cdot \sqrt{x+3}$

e) J ´ (x) = 2x · sen^2 (2x^2) · cos (2x^2) - sen^2 (2x) · cos (2x)

f) R ´ (x) = $\frac{2-x^3}{x^6+x^3} \cdot 3x^2 - \frac{2-3x}{9x^2+3x} \cdot 3$

8. ¿Para qué valor de m es posible aplicar el teorema fundamental del cálculo integral a la función F (x) = $\int_0^x f\ (t)\ dt$ **siendo f (t) =** $\begin{cases} 5-t & si \quad t \le 1 \\ t^2 + m & si \quad t > 1 \end{cases}$ **en el intervalo [0, 2]? Aplícalo cuando sea posible.**

La función f (t) ha de ser continua en el intervalo dado y esto se verifica para m = 3. En este caso:

$$F´(x) = \begin{cases} 5-x & si \quad x \le 1 \\ x^2 + 3 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

9. Resuelve las siguientes cuestiones utilizando el teorema fundamental del cálculo integral:

a) Sea la función F (x) = $\int_{-2}^x e^{t^2}\ dt$ **. Halla F ´ (x).**

b) Halla $\frac{d}{dx}\left[\int_{-x}^x sen\,\left(t^2 + t\right) dt\right]$**.**

c) Halla las abscisas de los extremos relativos de la función F (x) = $\int_{-4}^x \frac{t}{t^2+4}\, dt$ **en el intervalo [- 4, 0].**

d) Dada la función $F(x) = \int_0^x \left(t^2 - 1\right) e^{-t}\ dt$ **, definida para todo** $x \in R$**. Estudia la monotonía de** $F(x)$ **y halla las abscisas de sus máximos y mínimos relativos.**

e) Estudia si la función F (x) = $\int_0^x \ln\,\left(t^2 + 1\right) dt$ **tiene puntos de inflexión. En caso afirmativo hállalos.**

Las respuestas a las cuestiones aparecen a continuación.

a) F ´ (x) = e^{x^2}

b) $\frac{d}{dx}\left[\int_{-x}^{x} sen\left(t^2+t\right)dt\right]$ = sen (x² + x) – sen (x² - x)

c) F ´ (x) = $\frac{x}{x^2+4}$; F ´´ (x) = $\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$. Esta función tiene un mínimo para x = 0.

d) F ´ (x) = $(x^2 – 1) \cdot e^{-x}$; F ´´ (x) = $(2x – x^2 + 1) \cdot e^{-x}$

Esta función es creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decreciente en el intervalo (- 1, 1).

Tiene un máximo relativo en x = -1 y un mínimo relativo en x = 1.

e) F ´ (x) = ln $(x^2 – 1)$; F ´´ (x) = $\frac{2x}{x^2-1}$. Tiene un punto de inflexión para x = 0.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 349

10. Halla las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^3 \sqrt{x+3}\,dx$

b) $\int_0^{\pi} \frac{2\cos 3x}{4+sen\,3x}\,dx$

c) $\int_0^4 \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int_2^4 \frac{3x^2-3x-2}{x-1}\,dx$

e) $\int_{\pi/8}^{\pi} \cos^3 4x \cdot sen\,4x\,dx$

f) $\int_4^9 \left(3-2\sqrt{x}\right)^3 \cdot \frac{4}{3\sqrt{x}}\,dx$

g) $\int_3^6 \frac{5x-7}{x^2+9}\,dx$

h) $\int_1^e (x+3)\cdot \ln x\,dx$

i) $\int_5^8 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-2}\,dx$

j) $\int_3^5 \frac{5-x}{x^2-x-2}\,dx$

k) $\int_0^2 \frac{x^2+3x-2}{x^3+x^2+x+1}\,dx$

l) $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{(x+2)^2}\,dx$

m) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{6x+5}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

n) $\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{5-e^{-2x}\,dx}$

p) $\int_{-1}^0 \left(e^{-x}-x\cdot e^x\right)dx$

El valor de cada una de las integrales definidas es:

a) $\int_0^3 \sqrt{x+3}\,dx = 4\sqrt{6}-2\sqrt{3}$

b) $\int_0^{\pi} \frac{2\cos 3x}{4+sen3x}\,dx = 0$

c) $\int_0^4 \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\,dx = 0{,}4547$

d) $\int_2^4 \frac{3x^2 - 3x - 2}{x-1}\,dx = 15{,}803$

e) $\int_{\pi/8}^{\pi} \cos^3 4x \cdot sen\ 4x\ dx = -\frac{1}{16}$

f) $\int_4^9 \left(3 - 2\sqrt{x}\right)^3 \cdot \frac{4}{3\sqrt{x}}\,dx - \frac{80}{3}$

g) $\int_3^6 \frac{5x-7}{x^2+9}\,dx = 1{,}54$

h) $\int_1^e (x+3)\cdot \ln x\ dx = \frac{e^2}{4} + \frac{13}{4}$

i) $\int_5^8 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-2}\,dx = 11{,}599$

j) $\int_3^5 \frac{5-x}{x^2-x-2}\,dx = 0{,}2877$

k) $\int_0^2 \frac{x^2+3x-2}{x^3+x^2+x+1}\,dx = 0{,}2169$

l) $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{(x+2)^2}\,dx = 0{,}2274$

m) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{6x+5}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{5\pi}{2}$

n) $\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{5-e^{-2x}\,dx} = 0{,}0979$

p) $\int_{-1}^0 \left(e^{-x} - x\cdot e^x\right) dx = e$

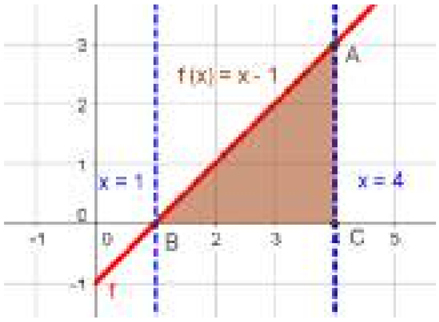
11. Halla, por métodos geométricos y mediante integrales, las áreas de los siguientes recintos:

a) El recinto limitado por la recta y = x – 1, el eje OX y las rectas x = 1 y x = 4.

b) El recinto limitado por la recta 2y = x + 3, el eje OX y las rectas x = -1 y x = 2.

Las áreas pedidas son:

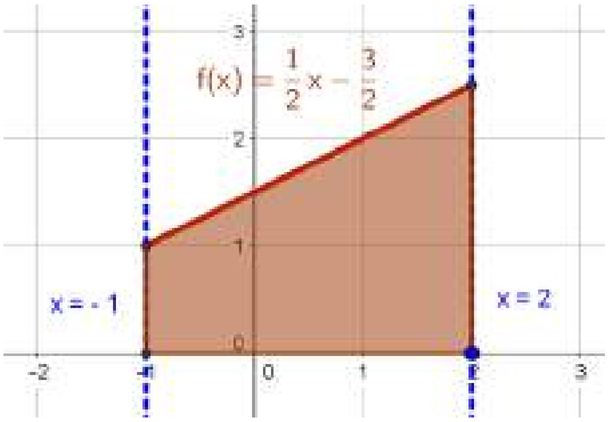
a) Por métodos geométricos es un triángulo ABC, como vemos en la figura. Su área es 4,5 uc.



Por medio de integrales el área es $A = \int_1^4 (x-1)\, dx = 4{,}5\ uc$.

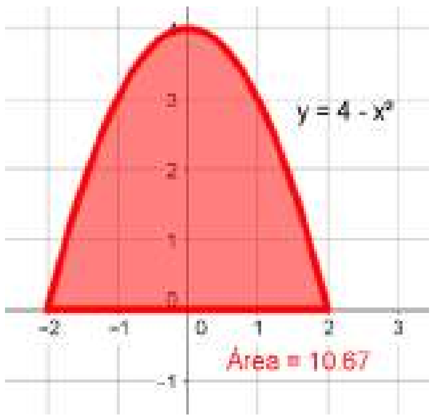
b) Por métodos geométricos es un trapecio ABCD, como vemos en la figura. Su área es 5,25 uc.

Por medio de integrales el área es $A = \int_{-1}^{2} \frac{x+3}{2}\, dx = 5{,}25\ uc$.



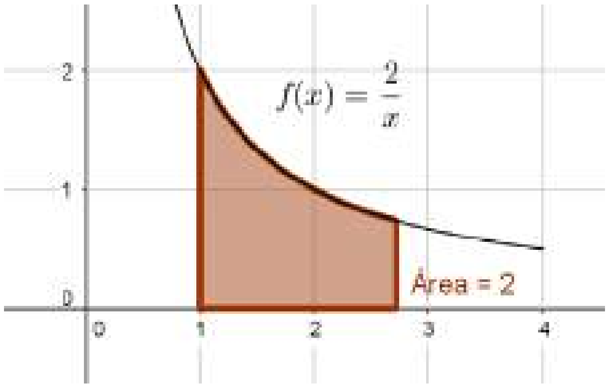
12. Halla el área del recinto limitado por la curva y = 4 – x² y el eje OX.

El área buscada es $\int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \frac{32}{3} = 10{,}67$.



13. Calcula el área del recinto limitado por la curva y = $\frac{2}{x}$, el eje OX y las rectas x = 1 y x = e.

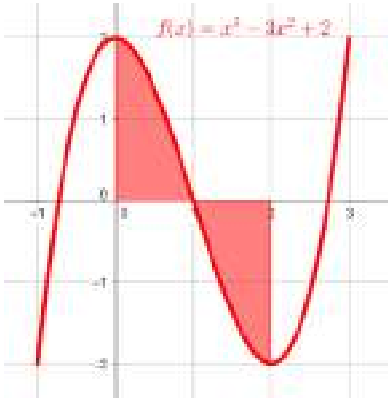
El área pedida es: $\int_1^e \frac{2}{x}\,dx = 2$.



14. Halla el área de la región limitada por la curva y = $x^3 - 3x^2 + 2$, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 2.

El área, A, del recinto sombreado de la figura es:

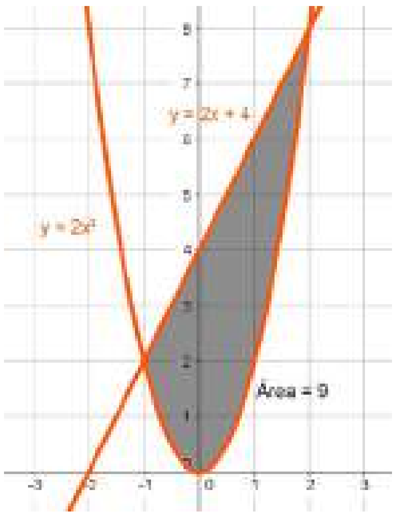
$$A = 2 \cdot \int_0^1 (x^2 - 3x^2 + 2)\,dx = 2{,}5\ uc\ 2{,}5.$$



15. Calcula el área delimitada por la parábola de ecuación y = $2x^2$ y la recta y = 2x + 4.

El área buscada viene dada por las integrales:

$$\int_{-1}^{2} (2x + 4)\,dx - \int_{-1}^{2} 2x^2\,dx = \left[x^2 + 4x - 2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = 9\ uc.$$

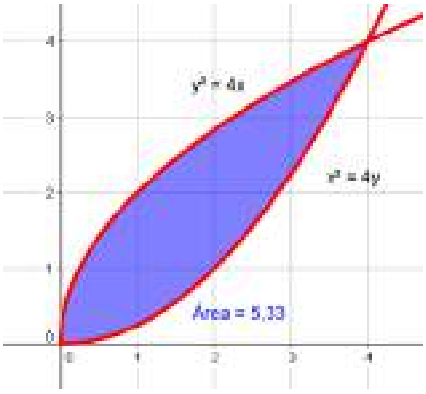


16. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones de los siguientes apartados:

a) $y^2 = 4x$; $x^2 = 4y$ **c)** $y = x \cdot e^{-x}$; $y = x^2 \cdot e^{-x}$

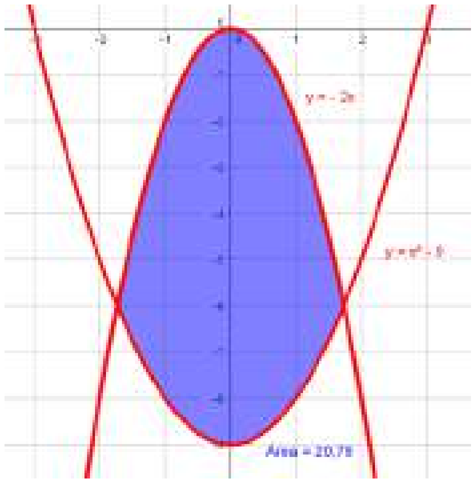
b) y = x² -9; y = - 2x² **d) y = sen x; y = cos $\frac{x}{2}$ en $[0,\ \pi]$**

a) El área del recinto sombreado de la figura es:



$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{4x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{16}{3} = 5{,}33\ uc\ .$$

b) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:



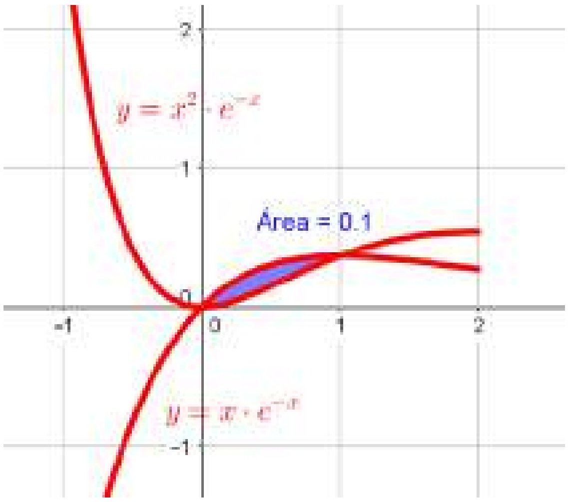
$$\begin{cases} y = x^2 - 9 \\ y = \ -2x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \left(\sqrt{3}, -6\right); \left(-\sqrt{3}\ , -6\right)$$

El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = 2 \cdot \int_{-\sqrt{3}}^{0} \left(x^2 - 9 - (-2x^2)\right) dx = 12\sqrt{3} = 20{,}78\ uc$$ 12

c) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = x \cdot e^{-x} \\ y = \ x^2 \cdot e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \quad (0,\ 0)\ ; \left(1\ , \frac{1}{e}\right)$$

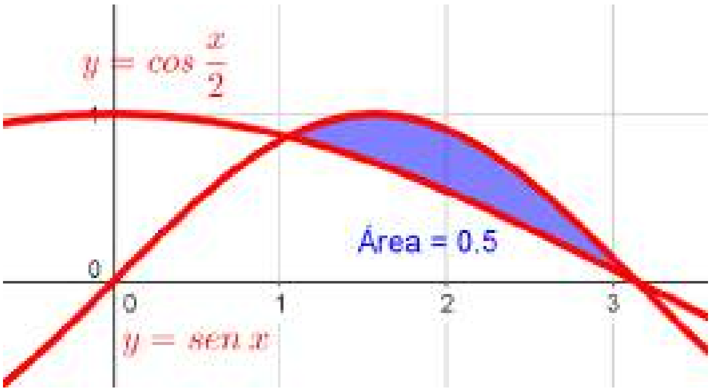


El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = \int_0^1 \left(x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x}\right) dx = \frac{3}{e} - 1 = 0{,}1036\ \ uc\ .$$

d) Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = sen\ x \\ y = \cos\dfrac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad (\pi, 0)\,;\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



El área del recinto sombreado de la figura es:

$$A = \int_{\pi/3}^{\pi} \left(sen\ x - \cos\frac{x}{2} \right) dx = 0{,}5\ uc\,0{,}5$$

17. Calcula las siguientes integrales mediante la interpretación geométrica:

a) $\int_{-100}^{100} \left(x^{25} + x^{51}\right) dx$ **b)** $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 (4x)\ dx$

Ambas integrales valen 0 pues al ser las funciones que en ellas intervienen impares o simétricas respecto al origen se anulan entre sí las áreas de las regiones que encierran.

18. Calcula el volumen engendrado al girar alrededor de OX cada uno de los siguientes recintos:

a) f(x) = 2x – 4; x= 2; x= 6.

b) f(x) = cos x; x = 0; x = $\frac{\pi}{2}$.

c) f(x) = e^{-x}; x = -1; x = 0

d) f(x) = x^2; g(x) = $\sqrt{x}$

18. Los volúmenes pedidos son:

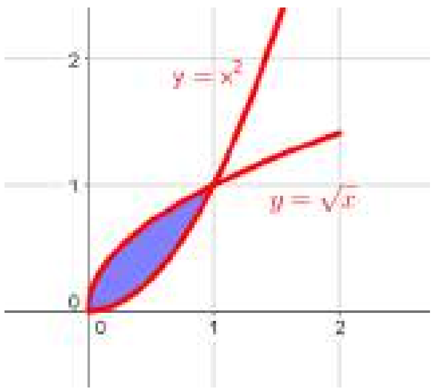
a) $V = \pi \cdot \int_{2}^{6} (2x - 4)^2\ dx = \dfrac{256}{3}\pi = 85{,}33\pi\ unidades\ cúbicas$

b) $V = \pi \cdot \int_{0}^{\pi/2} (\cos x)^2\ dx = \dfrac{\pi}{4} = 2{,}4674\ unidades\ cúbicas$

c) $V = \pi \cdot \int_{-1}^{0} \left(e^{-x}\right)^2\ dx = \dfrac{e^2 - 1}{2}\pi\, unidades\ cúbicas$

d) En la figura está sombreado el recinto que gira alrededor de OX engendrando un cuerpo de volumen:

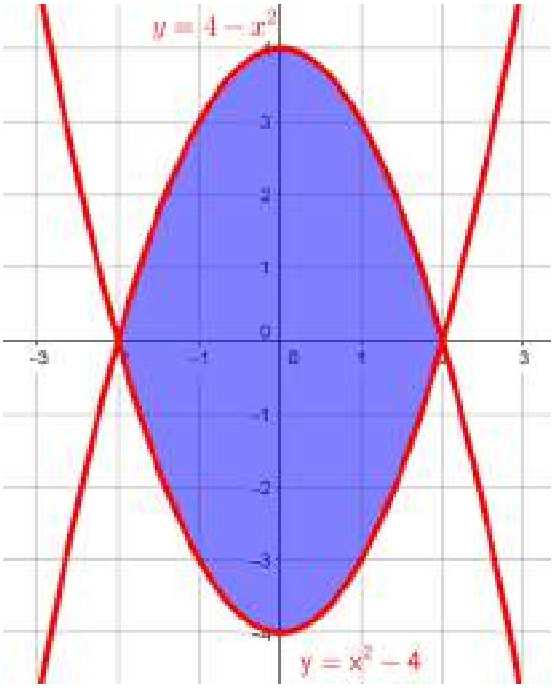
$$V = \pi \cdot \int_{0}^{1} \left(\sqrt{x} - x^2\right)^2\ dx = \frac{9}{70}\pi\ unidades\ cúbicas$$



19. Halla el volumen del sólido engendrado, al girar alrededor de OX, el recinto limitado por las gráficas de las funciones f(x) = x^2 -4; g(x) = 4 – x^2

En el siguiente dibujo esta sombreado el recinto comprendido entre ambas gráficas y que gira alrededor de OX determinando un cuerpo de volumen:

$$V = 2\pi \int_0^2 \left[\left(4 - x^2\right) - \left(x^2 - 4\right)\right] dx = \frac{2048}{15}\pi \ unidades\ cúbicas$$

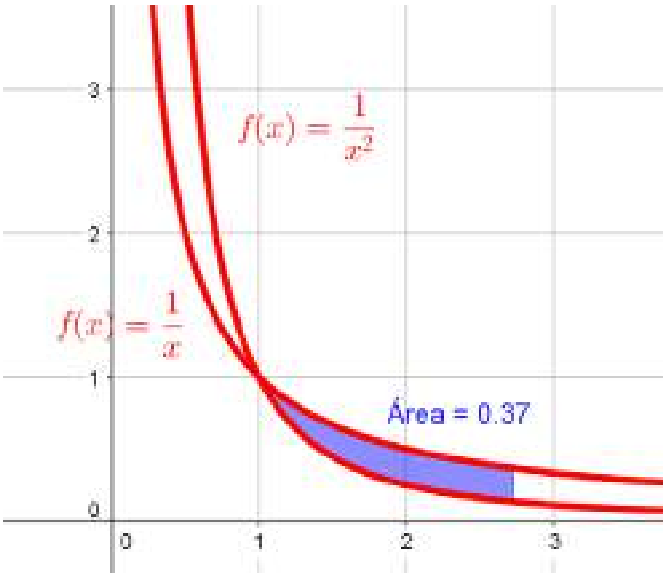


ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 350

1. Encuentra el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$ y la recta x = e.

El área del recinto es:

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{x}\right]_1^e = \left(\ln e + \frac{1}{e}\right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{1}\right) = 1 + \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$$



2. Sea f(x) una función continua en el intervalo [2, 3] y sea F(x) una función primitiva de la anterior y tal que F (2) = 1 y F (3) = 2. Halla:

a) $\int_2^3 f(x)\,dx$ **b)** $\int_2^3 |5f(x) - 7|\,dx$ **c)** $\int_2^3 [F(x)]^2 f(x)\,dx$

En el cálculo de las integrales obtenemos:

a) $\int_2^3 f(x)\,dx = [F(x)]_2^3 = F(3) - F(2) = 2 - 1 = 1$

b) $\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx = 5\int_2^3 f(x)dx - 7\int_2^3 dx = 5 \cdot 1 - 7 \cdot [x]_2^3 = 5 - 7 \cdot (3 - 2) = 5 - 7 = -2$

c) Por ser F (x) una primitiva de f (x), f (x) = F ´ (x). Por tanto, se trata de la integral inmediata de una función potencial.

$$\int_2^3 [F(x)]^2 f(x)\,dx = \int_2^3 [F(x)]^2 \cdot F'(x)\,dx = \left[\frac{(F(x))^3}{3}\right]_2^3 = \frac{[F(3)]^3}{3} - \frac{[F(2)]^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

3. Sea la función f(x) = $\begin{cases} ax + 6 & si \quad x \le -1 \\ bx^2 - 2x + 1 & si \quad -1 < x \le 2 \\ \dfrac{x-5}{(x+1)^2} & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Halla a y b para que esta función sea continua en su dominio.

b) Calcula $\int_3^4 f(x)\,dx$

a) Estudiamos la continuidad en x = - 1 y x = 2. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}(ax+6)=6-a\\ \lim\limits_{x\to -1^+}(bx^2-2x+1)=b+3\end{array}\right\}\Rightarrow\ a+b=3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}(bx^2-2x+1)=4b-3\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-5}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\ 4b-3=-\frac{1}{3}$$

Los valores buscados son a = $\frac{7}{3}$ y b = $\frac{2}{3}$.

b) $\int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^4 \frac{x-5}{(x+1)^2}\,dx = \int_3^4 \frac{1}{x+1}dx - \int_3^4 \frac{6}{(x+1)^2}$ = ln5 – ln4 – 0,3 = - 0,0769

4. Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $x^2 + 25y^2 = 25$ al dar una vuelta completa alrededor de OX.

El volumen del elipsoide que se genera es:

$$V = 2\pi\cdot\int_0^5\left(1-\frac{x^2}{25}\right)dx = \frac{20}{3}\pi\ unidades\ cúbicas.$$

5. Calcula la siguiente integral $\int_{-1}^{2}\left|x^2-3x+2\right|dx$.

La función del integrando puede definirse de la forma:

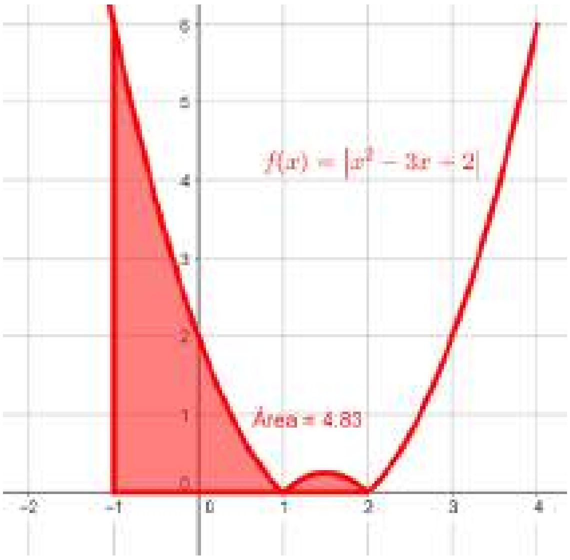
$$f(x)=\left|x^2-3x+2\right|=\begin{cases}x^2-3x+2 & si\ x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)\\ -x^2+3x-2 & si\ x\in(1,2)\end{cases}$$

El valor de la integral coincide con el área del recinto que puede verse en el gráfico. Este valor es:

$$\int_{-1}^{1}(x^2-3x+2)\,dx+\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x\right]_1^2=$$

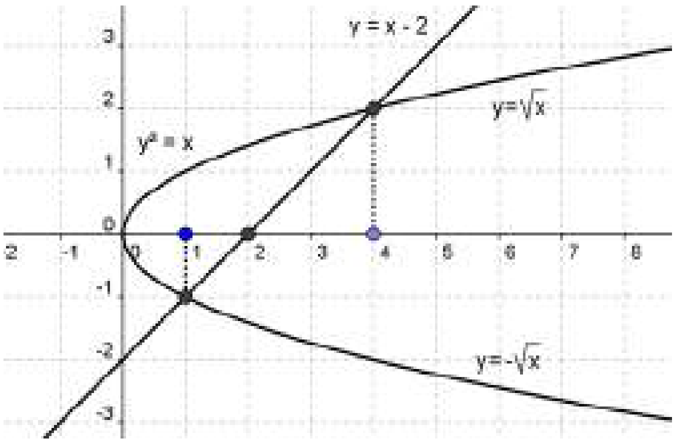
$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-2\right)+\left(-\frac{8}{3}+6-4\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\right)=\frac{29}{6}=4{,}83.$$



6. Determina el área limitada por la parábola de ecuación $y^2 = x$ y la recta de ecuación $y = x - 2$.

Realizamos un dibujo de las ecuaciones del enunciado para encontrar la región limitada por la parábola y por la recta.

Debe observarse que la parábola $y^2 = x$ da lugar a dos funciones de ecuaciones $y = -\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x}$.



Encontramos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1, -1) \\ (4, 2) \end{cases}$$

Observando con detenimiento el dibujo vemos que el área buscada es:

$$A = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx - \int_2^4 (x-2)\, dx - \left[\int_0^1 -\sqrt{x}\, dx + \int_1^2 (x-2)\, dx\right] =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4 - \left\{\left[-\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2\right\} =$$

$$= \frac{16}{3} + 2 - \left\{-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right\} = \frac{16}{3} + 2 + \frac{7}{6} = \frac{17}{2} = 8{,}5 \text{ } unidades\ cuadradas.$$

7. Sea $f\ (t) = \dfrac{1}{1 + e^t}$.

a) Calcula $\int f\ (t)\ dt$.

b) Sea $g\ (x) = \int_0^x f\ (t)\ dt$ **. Calcula** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g\ (x)}{x}$**.**

a) Para calcular la integral $\int \dfrac{1}{1 + e^t} dt$ hacemos el cambio de variable:

$1 + e^t = x \Rightarrow t = \ln (x - 1)$ y $dt = \dfrac{1}{x - 1}\, dx$

y obtenemos:

$$\int \frac{1}{1 + e^t} dt = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x - 1}\, dx$$

La última integral tiene en el integrando una función racional que se descompone en fracciones simples de la forma:

$$\frac{1}{x \cdot (x - 1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x - 1}$$

Llevada esta descomposición a la integral y operando obtenemos:

$$\int \frac{1}{1 + e^t} dt = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x - 1}\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x - 1}\, dx = -\ln |x| + \ln |x - 1| + C = \ln \left| \frac{x - 1}{x} \right| + C$$

Deshaciendo el cambio de variable $1 + e^t = x$, obtenemos:

$$\int \frac{1}{1 + e^t} dt = \ln \left| \frac{e^t}{1 + e^t} \right| + C;\ C \in R.$$

b) En el cálculo del límite se obtiene una indeterminación 0/0. Aplicamos la regla de L´Hôpital y el teorema fundamental del cálculo integral y obtenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g\ (x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_o^x f(t)\ dt}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f\ (x)}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}.$$

8. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\pi^2} sen\left(\sqrt{x}\right)\ dx$ **b)** $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\ dx$ **c)** $\int_0^{\pi} |\cos\ x|\ dx$

a) Resolvemos esta integral $\int sen\left(\sqrt{x}\right)\ dx$ por cambio de variable ($x = t^2$) y después aplicando el método de partes:

$$\int sen\left(\sqrt{x}\right)\ dx\ = \int 2t\cdot sen(t)\ dt = -2\sqrt{x}\ \cos\sqrt{x} + 2\,sen\sqrt{x} + C$$

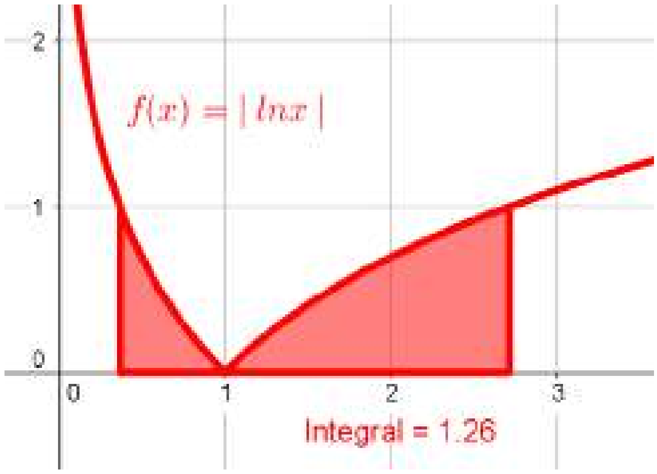
$$\int_0^{\pi^2} sen\left(\sqrt{x}\right)\ dx = \left[-2\sqrt{x}\ \cos\sqrt{x} + 2\,sen\sqrt{x}\ \right]_0^{\pi^2} = 2\pi$$

b) La función del integrando se puede definir de la forma:

$$f(x) = |\ln\ x| = \begin{cases} \ln x & si\ x \geq 1 \\ -\ln x & si\ x \in (0\ ,1) \end{cases}$$

El valor de la integral $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\ dx$ es

$$\int_{1/e}^{1} (-\ln x)\ dx + \int_1^e (\ \ln\ x)\ dx = [x - x\ln x]_{1/e}^{1} + [x\ln x - 1]_1^e = = \frac{2e-2}{2} = 1{,}26$$

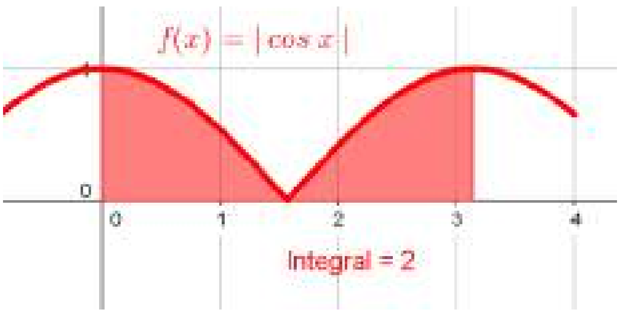


c) La función del integrando se puede definir de la forma:

$$f(x) = |\cos\ x| = \begin{cases} \cos x & si\ x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}\ ,2\pi\right] \\ -\cos x & si\ x \in \left(\frac{\pi}{2}\ ,\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

El valor de la integral $\int_0^{\pi} |\cos\ x|\ dx$ es:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)\ dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos\ x)\ dx = 2$$

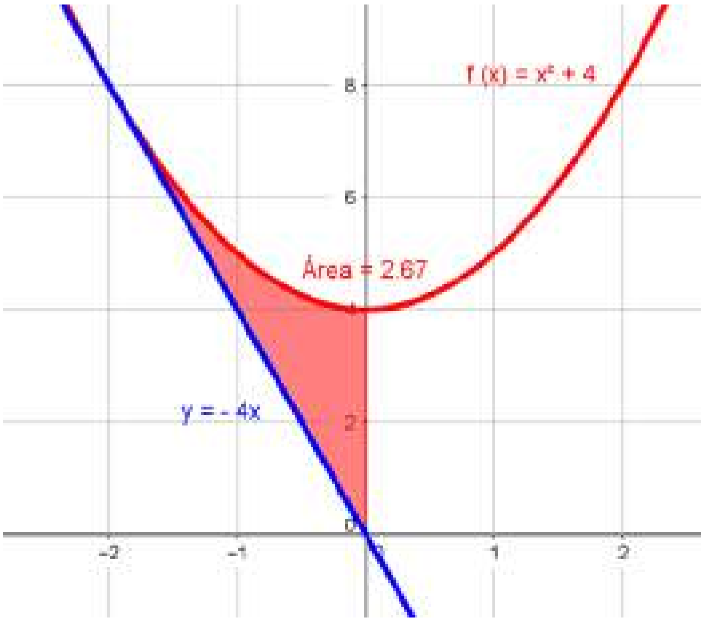


9. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función y = x^2 + 4, la recta tangente a la misma en el punto de abscisa -2 y el eje OY.

La recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto (- 2, 8) tiene por ecuación y = - 4x.

El área del recinto sombreado de la figura que queremos hallar viene dada por:

$$\int_{-2}^{0}\left(x^2+4\right)dx-\int_{-2}^{0}(-4x)\,dx=\frac{8}{3}=2{,}67\ uc\ 8/3.$$



10. Halla la función polinómica de grado 3 cuya gráfica pasa por el punto P (1, 0), tiene por tangente la recta y = 2x + 1en el punto de abscisa x = 0, y su integral entre 0 y 1 vale 3.

Sea f (x) = ax^3 + bx^2 + cx + d la función polinómica de tercer grado buscada.

Su derivada es f ´ (x) = 3ax^2 + 2bx + c.

Las condiciones para determinar los coeficientes a, b, c y d son:

- Su gráfica pasa por el punto P (1, 0), es decir, f (1) = 0.

- La recta tangente hace tangencia en el punto x = 0, y (0) = 2 · 0 + 1 = 1, es decir, pasa por el punto Q (0,1), o lo que es lo mismo, f (0) = 1.

- La pendiente de la tangente es 2 luego f ´ (0) = 2.

- La integral $\int_0^1 f\ (x)\ dx=3$.

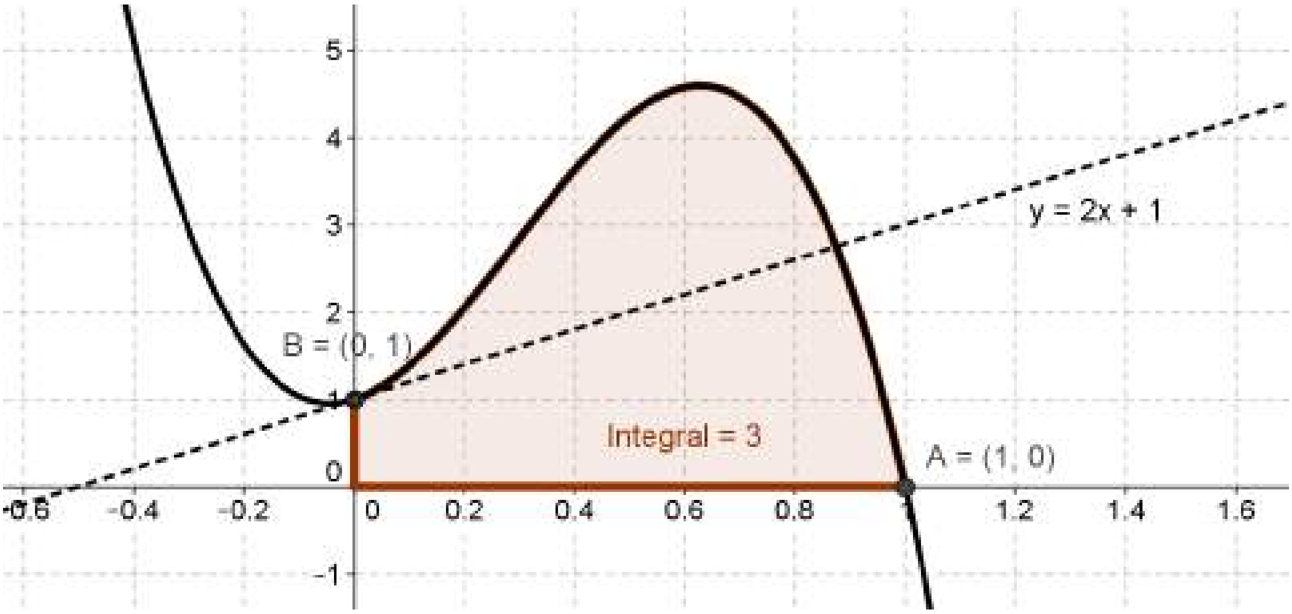
Imponiendo cada una de las condiciones obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ d = 1 \\ c = 2 \\ 3a + 4b + 6c + 12d = 36 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: a = - 24; b = 21; c = 2 y d = 1. La función buscada es:

$$f(x) = -24x^3 + 21x^2 + 2x + 1$$

En el dibujo puede verse la gráfica de la función obtenida cumpliendo todas las condiciones del enunciado.



11. Halla las abscisas de los extremos relativos de la función F(x) = $\int_1^{\pi} \frac{\cos t}{t}\, dt$ siendo x ≥ 1.

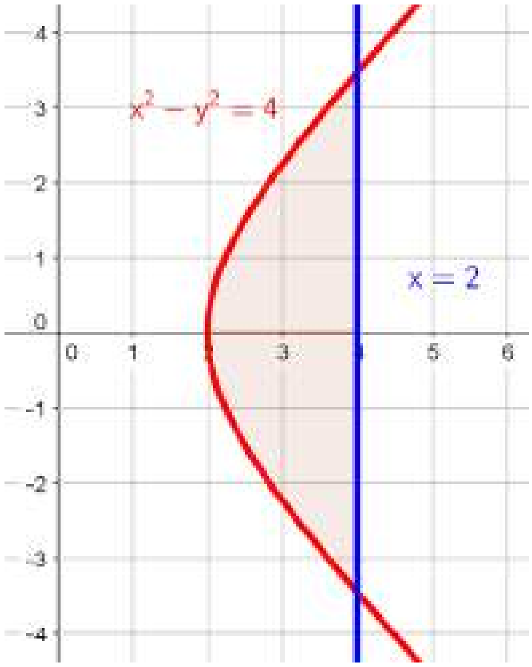
Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral obtenemos que $F'(x) = \frac{\cos t}{t}$ y esta función tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $\frac{\pi}{2}$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $\frac{3\pi}{2}$.

12. ¿El volumen del cuerpo formado al girar alrededor de OX el recinto comprendido entre una de las ramas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$ y la recta x = 4, es el mismo que el de una esfera de radio 2 unidades?

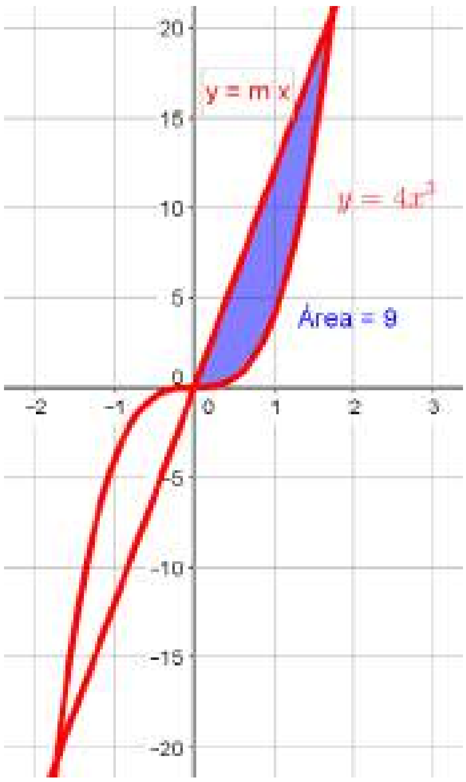
En la gráfica hemos sombreado el recinto que al girar alrededor de OX engendra un cuerpo cuyo volumen hallamos:

$$V = \pi \cdot \int_2^4 (x^2 - 4)\, dx = \frac{32}{3}\pi \text{ unidades cúbicas}.$$

Y este volumen es el mismo que el de la esfera de radio 2 unidades.



13. Hallar el valor de m para que el área delimitada, en el primer cuadrante, por la función $y = 4x^3$ y la recta $y = mx$ sea de 9 unidades cuadradas.



El recinto, cuya área es de 9 unidades cuadradas, es la región sombreada del dibujo.

Encontramos los puntos de corte de ambas curvas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = 4x^3 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow (0,0)\ ;\ \left(\frac{\sqrt{m}}{2}, \frac{m\sqrt{m}}{2}\right)\ ;\ \left(-\frac{\sqrt{m}}{2}, -\frac{m\sqrt{m}}{2}\right)$$

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\int_0^{\sqrt{m}/2} \left(mx - 4x^3\right) dx = 9$$

De aquí obtenemos que $\dfrac{m^2}{16} = 9$, de modo que m = 12.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 351

Razones de Volúmenes

Queremos investigar posibles patrones que aparecen si se halla la razón de los volúmenes de revolución generados por las funciones y = x^n (n $\in$ Z, n $\in$Q), tomadas entre dos valores arbitrarios a y b, con a < b, cuando giran alrededor de los ejes OX y OY.

1. Sea la función y = x^2. Consideramos los volúmenes generados por:

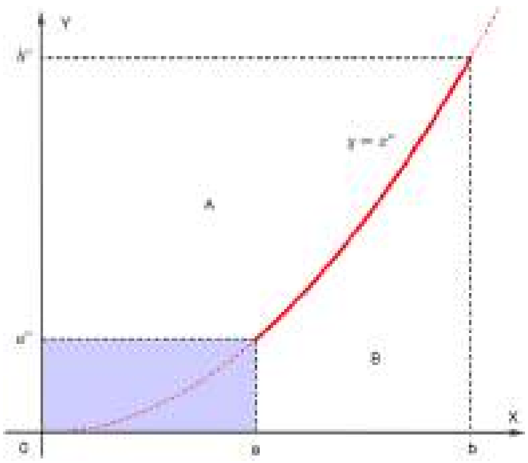
- La región B delimitada por y = x^2, x = 0, x = 1 y el eje OX.

- La región A delimitada por y = x^2, y = 0, y = 1 y el eje OY.

Halla las razones:

$$Razón\ I = \frac{Volumen\ generado\ por\ A\ al\ girar\ sobre\ OX}{Volumen\ generado\ por\ B\ al\ girar\ sobre\ OX}$$

$$Razón\ II = \frac{Volumen\ generado\ por\ A\ al\ girar\ sobre\ OY}{Volumen\ generado\ por\ B\ al\ girar\ sobre\ OY}$$



2. Calcula la razón de los volúmenes para otras funciones del tipo y = x^n, n $\in$ Z^+, entre x = 0 y x = 1.

3. Estudia qué ocurre para los volúmenes comprendidos entre x = 0 y x = 2, entre x = 1 y x = 2, etc.

4. Analiza el caso general, con y = x^n entre a y b, tal que a < b, y para los volúmenes generados por:

- La región A delimitada por y = x^n, y = a^n, y = b^n y el eje OY.

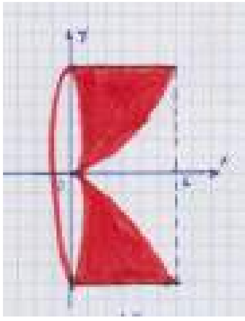
- La región B delimitada por y = x^n, x = a, x = b y el eje OX.

5. Los resultados que obtienes, ¿se mantienen para funciones del tipo y = x^n, $n \in Z^-$, entre x = 0 y x = 1; entre x = 0 y x = 2; entre x = 1 y x = 2, etc.? ¿Y para funciones del tipo y = x^n, $n \in Q$, en los mismos intervalos?

1. Para la función y = x^2:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^2, x = 0, x = 1 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^1 y^2 \ dx = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

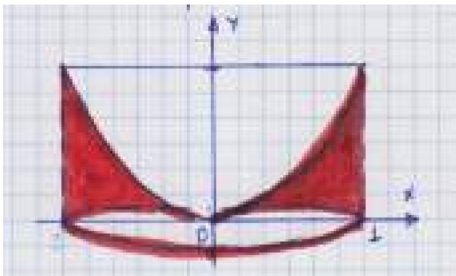


● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1, y = x^2, x = 0, x = 1 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 1^2 \ dx - \pi \int_0^1 y^2 \ dx = \pi \cdot [x]_0^1 - \frac{\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

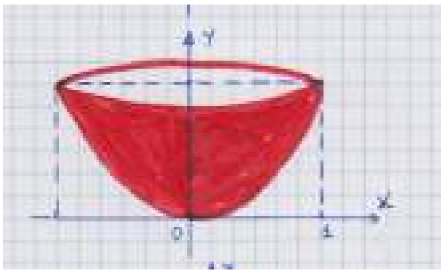
La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{4\pi}{5}}{\frac{\pi}{5}} = 4.$

Para la función y = x^2, es decir, $x = \sqrt{y}$:



● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 1, $x = \sqrt{y}$, y = 0 e y = 1, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^1 1^2 \ dy - \pi \int_0^1 y \ dy = [\pi \, y]_0^1 - \left[\pi \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$



● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = \sqrt{y}$, y = 0, y = 1 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 x^2 \ dy = \pi \int_0^1 y \ dy = \left[\pi \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando “por tubos”.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^2, x = 0, x = 1 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 \ dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1, y = x^2, x = 0, x = 1 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^1 x \cdot 1^2 \ dx - 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 \ dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} - 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

La razón de los volúmenes sigue valiendo 1.

2. Para la función y = x^3:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^3, x = 0, x = 1 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^1 y^2 \ dx = \pi \cdot \int_0^1 x^6 \ dx = \pi \cdot \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{\pi}{7}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1, y = x^3, x = 0, x = 1 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 1^2 \ dx - \pi \int_0^1 x^6 \ dx = \pi \cdot [x]_0^1 - \pi \cdot \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{6\pi}{7}}{\frac{\pi}{7}} = 6.$

Para la función y = x^3, es decir, $x = \sqrt[3]{y}$:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 1, $x = \sqrt[3]{y}$, y = 0 e y = 1, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^1 1^2 \ dy - \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} \ dy = [\pi \ y]_0^1 - \left[\pi \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right]_0^1 = \pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = \sqrt[3]{y}$, y = 0, y = 1 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 x^2 \ dy = \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} \ dy = \left[\pi \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{5}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{3\pi}{5}}{\frac{2\pi}{5}} = \dfrac{3}{2}.$

Para la función y = x^n:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^n, x = 0, x = 1 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^1 y^2 \ dx = \pi \cdot \int_0^1 x^{2n} \ dx = \pi \cdot \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1, y = x^n, x = 0, x = 1 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 1^2 \ dx - \pi \int_0^1 x^{2n} \ dx = \pi \cdot [x]_0^1 - \pi \cdot \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right] = \pi - \frac{\pi}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\dfrac{2n}{2n+1}\pi}{\dfrac{1}{2n+1}\pi} = 2n.$

Para la función y = x^n, es decir, $x = \sqrt[n]{y}$:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 1, $x = \sqrt[n]{y}$, y = 0 e y = 1, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^1 1^2\ dy - \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{n}}\ dy = [\pi\, y]_0^1 - \left[\pi \frac{n}{n+2} y^{\frac{n+2}{n}}\right]_0^1 = \pi - \frac{n}{n+2}\pi = \frac{2}{n+2}\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = \sqrt[n]{y}$, y = 0, y = 1 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 x^2\ dy = \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{n}}\ dy = \left[\pi \frac{n}{n+2} y^{\frac{n+2}{n}}\right]_0^1 = \frac{n}{n+2}\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\dfrac{n}{n+2}\pi}{\dfrac{2}{n+2}\pi} = \dfrac{n}{2}.$

Observamos que la razón de los volúmenes de revolución que se generan cuando giramos alrededor del eje OX es 2n, es decir, el doble del valor del exponente de la función potencial correspondiente.

En el caso de la razón de los volúmenes de revolución que se generan cuando giramos alrededor del eje OY es n/2, es decir, la mitad del valor del exponente de la función potencial correspondiente

3. Estudiamos los volúmenes de revolución comprendidos entre x = 0 y x = 2.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = x^2$, x = 0, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^2 y^2 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 4, $y = x^2$, x = 0 y x = 2, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^2 4^2 \, dx - \pi \int_0^2 x^4 \, dx = 16\pi \cdot [x]_0^2 - \frac{32\pi}{5} = 32\pi - \frac{32\pi}{5} = \frac{128\pi}{5}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{128\pi}{5}}{\frac{32\pi}{5}} = \frac{128}{32} = 4.$

Para la función $y = x^2$, es decir, $x = \sqrt{y}$:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 2, $x = \sqrt{y}$, y = 0 e y = 4, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^4 2^2 \, dy - \pi \int_0^4 y \, dy = [4\pi\, y]_0^4 - \left[\pi \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 16\pi - \frac{16\pi}{2} = 8\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = \sqrt{y}$, y = 0, y = 4 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^4 x^2 \, dy = \pi \int_0^4 y \, dy = \left[\pi \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{8\pi}{8\pi} = 1.$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = x^2$, x = 0, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 \, dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \frac{2\pi}{4} = 8\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 4, $y = x^2$, x = 0, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^2 x \cdot 4^2 \, dx - 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 \, dx = 2\pi \cdot \left[\frac{4x^2}{2} \right]_0^2 - 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 16\pi - 8\pi = 8\pi$$

La razón de los volúmenes sigue valiendo 1.

■ Para la función y = x^3:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^3, x = 0, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^2 y^2 \; dx = \pi \cdot \int_0^2 x^6 \; dx = \pi \cdot \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{7}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 8, y = x^3, x = 0 y x = 2, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^2 8^2 \; dx - \pi \int_0^2 x^6 \; dx = \pi \cdot [64x]_0^2 - \pi \cdot \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 = 128\pi - \frac{128\pi}{7} = \frac{768\pi}{7}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{768\pi}{7}}{\frac{128\pi}{7}} = 6.$

Para la función y = x^3, es decir, $x = \sqrt[3]{y}$:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 2, $x = \sqrt[3]{y}$, y = 0 e y = 8, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^8 2^2 \; dy - \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} \; dy = [4\pi \, y]_0^8 - \left[\pi \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8 = 32\pi - \frac{96\pi}{5} = \frac{64\pi}{5}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = \sqrt[3]{y}$, y = 0, y = 8 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^8 x^2 \; dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} \; dy = \left[\pi \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{96\pi}{5}}{\frac{64\pi}{5}} = \dfrac{3}{2}.$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^3, x = 0, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_0^2 x \cdot x^3 \; dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64\pi}{5}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 8, y = x^3, x = 0 y x = 2, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^2 x \cdot 8 \; dx - 2\pi \int_0^2 x \cdot x^3 \; dx = 16\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - 2\pi \cdot \left[\frac{x^{54}}{5}\right]_0^2 = 32\pi - \frac{64\pi}{5} = \frac{96\pi}{5}$$

La razón de los volúmenes sigue valiendo $\dfrac{3}{2}$.

■ Para la función y = x^n:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^n, x = 0, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^2 (x^n)^2 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^2 = \frac{2^{2n+1}\pi}{2n+1}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 2^n, y = x^n, x = 0 y x = 2, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^2 (2^n)^2 \, dx - \pi \int_0^2 (x^n)^2 \, dx = \pi \cdot \left[2^{2n} x \right]_0^2 - \pi \cdot \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^2 = 2^{2n+1}\pi - \frac{2^{2n+1}\pi}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} 2^{2n+1}\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{2n}{2n+1} 2^{2n+1}\pi}{\frac{1}{2n+1} 2^{2n+1}\pi} = 2n.$

Para la función y = x^n, es decir, $x = \sqrt[n]{y}$:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 2, $x = \sqrt[n]{y}$, y = 0 e y = 2^n, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^{2^n} 2^2 \, dy - \pi \int_0^{2^n} y^{\frac{2}{n}} \, dy = \left[4\pi y \right]_0^{2^n} - \left[\pi \frac{n}{n+2} y^{\frac{n+2}{3n}} \right]_0^{2^n} = 2^{n+2}\pi - \frac{2}{n+2} 2^{n+2}\pi = \frac{2}{n+2} 2^{n+2}\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = \sqrt[n]{y}$, y = 0, y =2^n y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^{2^n} x^2 \, dy = \pi \int_0^{2^n} y^{\frac{2}{n}} \, dy = \left[\pi \frac{n}{n+2} y^{\frac{n+2}{n}} \right]_0^{2^n} = \frac{n}{n+2} 2^{n+2}\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{n}{n+2} 2^{n+2}\pi}{\frac{2}{n+2} 2^{n+2}\pi} = \dfrac{n}{2}.$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando “por tubos”.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^n, x = 0, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_0^2 x \cdot y \, dx = 2\pi \cdot \int_0^2 x \cdot x^n \, dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^2 = \frac{2^{n+2}}{n+2} 2\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 2^n, y = x^n, x = 0 y x = 2, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^2 x \cdot 2^n \; dx - 2\pi \int_0^2 x \cdot x^n \; dx = 2^{n+1}\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - 2\pi \cdot \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^2 = 2^{n+2}\pi - \frac{2^{n+2}}{n+2}2\pi = \frac{n}{n+2}2^{n+2}\pi$$

La razón de los volúmenes sigue valiendo $\frac{n}{2}$.

Se sigue manteniendo los mismos resultados:

Observamos que la razón de los volúmenes de revolución que se generan cuando giramos alrededor del eje OX es 2n, es decir, el doble del valor del exponente de la función potencial correspondiente.

En el caso de la razón de los volúmenes de revolución que se generan cuando giramos alrededor del eje OY es n/2, es decir, la mitad del valor del exponente de la función potencial correspondiente

■ Estudiamos los volúmenes de revolución para la función f (x) = x^2 comprendidos entre x = 1 y x = 2.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^2, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_1^2 y^2 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{32\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{31\pi}{5}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 4 (entre x = 0 y x = 2), y = 1 (entre x = 0 y x = 1), y = x^2 (entre x = 1 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^2 4^2 \, dx - \pi \int_0^1 1^2 \, dx - \pi \int_1^2 x^4 \, dx = 16\pi \cdot [x]_0^2 - \pi \, [x]_0^1 - \frac{31\pi}{5} = 32\pi - \pi - \frac{31\pi}{5} = \frac{124\pi}{5}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{124\pi}{5}}{\frac{31\pi}{5}} = \dfrac{124}{31} = 4.$

Para la función y = x^2, es decir, $x = \sqrt{y}$:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 2 (entre y = 0 e y = 4), x = 1 (entre y = 0 e y = 1), $x = \sqrt{y}$, (entre y = 1 e y = 4), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^4 2^2 \, dy - \pi \int_0^1 1^2 \, dy - \pi \int_0^4 y \, dy = 4\pi [y]_0^4 - \pi \, [y]_0^1 - \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 16\pi - \pi - 8\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = \sqrt{y}$, y = 1, y = 4 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_1^4 x^2 \, dy = \pi \int_{10}^4 y \, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^4 = 8\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{15\pi}{2}}{\frac{15\pi}{2}} = 1.$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando “por tubos”.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^2, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_1^2 x \cdot x^2 \, dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = 8\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 4 (entre x = 0 y x = 2), y = 1 (entre x = 0 y x = 1), y = x^2 (entre x = 1 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^2 x \cdot 4 \, dx - 2\pi \int_0^1 x \cdot 1 \, dx - 2\pi \int_1^2 x \cdot x^2 \, dx = 8\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - 2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 =$$

$$= 16\pi - \pi - 8\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$$

La razón de los volúmenes sigue valiendo 1.

■ Estudiamos los volúmenes de revolución para la función f (x) = x^3 comprendidos entre x = 1 y x = 2.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^3, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_1^2 (x^3)^2\ dx = \pi \cdot \left[\frac{x^7}{7}\right]_1^2 = \frac{128\pi}{7} - \frac{\pi}{7} = \frac{127\pi}{7}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 8 (entre x = 0 y x = 2), y = 1 (entre x = 0 y x = 1), y = x^3 (entre x = 1 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^2 8^2\ dx - \pi \int_0^1 1^2\ dx - \pi \int_1^2 (x^3)^2\ dx = 64\pi \cdot [x]_0^2 - \pi\ [x]_0^1 - \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_1^2 = 128\pi - \pi - \frac{127\pi}{7} = \frac{762\pi}{7}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{762\pi}{5}}{\frac{127\pi}{5}} = \dfrac{762}{127} = 6.$

Para la función y = x^3, es decir, $x = \sqrt[3]{y}$:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 2 (entre y = 0 e y = 8), x = 1 (entre y = 0 e y = 1), $x = \sqrt{y}$, (entre y = 1 e y = 8), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^8 2^2\ dy - \pi \int_0^1 1^2\ dy - \pi \int_0^4 y^{\frac{2}{3}}\ dy = 4\pi [y]_0^8 - \pi\ [y]_0^1 - \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3}\right]_0^8 = 32\pi - \pi - \frac{96\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \frac{62\pi}{5}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = \sqrt[3]{y}$, y = 1, y = 8 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_1^8 y^{2/3}\ dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3}\right]_1^8 = \frac{96\pi}{5} - \frac{3\pi}{5} = \frac{93\pi}{5}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{93\pi}{5}}{\frac{62\pi}{5}} = \dfrac{93}{62} = \dfrac{3}{2}$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^3, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_1^2 x \cdot x^3\ dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{64\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{62\pi}{5}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 4 (entre x = 0 y x = 2), y = 1 (entre x = 0 y x = 1), y = x^3 (entre x = 1 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^2 x \cdot 8\ dx - 2\pi \int_0^1 x \cdot 1\ dx - 2\pi \int_1^2 x \cdot x^3\ dx = 16\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - 2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2\pi \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 =$$

$$= 32\pi - \pi - \frac{64\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{93\pi}{5}$$

La razón de los volúmenes sigue valiendo $\dfrac{3}{2}$.

■ Estudiamos los volúmenes de revolución para la función f (x) = x^n comprendidos entre x = 1 y x = 2.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^n, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_1^2 (x^n)^2\, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_1^2 = \frac{2^{2n+1}\pi}{2n+1} - \frac{\pi}{2n+1} = \frac{2^{2n+1}-1}{2n+1}\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 2^n (entre x = 0 y x = 2), y = 1 (entre x = 0 y x = 1), y = x^n (entre x = 1 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^2 (2^n)^2\, dx - \pi \int_0^1 1^2\, dx - \pi \int_1^2 (x^n)^2\, dx = 2^{2n}\pi \cdot [x]_0^2 - \pi\,[x]_0^1 - \pi \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_1^2 =$$

$$= 2^{2n+1}\pi - \pi - \frac{2^{2n+1}}{2n+1}\pi + \frac{1}{2n+1}\pi = \frac{2n}{2n+1}\left(2^{2n+1}-1\right)\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\dfrac{2n}{2n+1}\left(2^{2n+1}-1\right)\pi}{\dfrac{1}{2n+1}\left(2^{2n+1}-1\right)\pi} = 2n$

Para la función y = x^n, es decir, $x = \sqrt[n]{y}$:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 2 (entre y = 0 e y = 2^n), x = 1 (entre y = 0 e y = 1), $x = \sqrt[n]{y}$, (entre y = 1 e y = 2^n), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^{2^n} 2^2\, dy - \pi \int_0^1 1^2\, dy - \pi \int_0^{2^n} y^{2/n}\, dy = 4\pi\,[y]_0^{2^n} - \pi\,[y]_0^1 - \pi\left[\frac{n}{n+2}\,y^{\frac{n+2}{n}}\right]_0^{2^n} =$$

$$= 4\pi \cdot 2^n - \pi - \frac{n}{n+2}\,2^{n+2}\pi + \frac{n}{n+2}\pi = \frac{2}{n+2}\left(2^{n+2}-1\right)\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = \sqrt[n]{y}$, y = 1, y = 2^n y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_1^{2^n} y^{2/n}\, dy = \pi\left[\frac{n}{n+2}\,y^{\frac{n+2}{n}}\right]_1^{2^n} = \frac{n}{n+2}\,2^{n+2}\pi - \frac{n}{n+2}\pi = \frac{n}{n+2}\left(2^{n+2}-1\right)\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\dfrac{n}{n+2}\left(2^{n+2}-1\right)\pi}{\dfrac{2}{n+2}\left(2^{n+2}-1\right)\pi} = \dfrac{n}{2}$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^n, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_1^2 x \cdot x^n \ dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_1^2 = \frac{2^{n+2}}{n+2} \cdot 2\pi - \frac{1}{n+2} \cdot 2\pi = \frac{2\left(2^{n+2} - 1\right)}{n+2}\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 2^n (entre x = 0 y x = 2), y = 1 (entre x = 0 y x = 1), y = x^n (entre x = 1 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^2 x \cdot 2^n \ dx - 2\pi \int_0^1 x \cdot 1 \, dx - 2\pi \int_1^2 x \cdot x^n \ dx = 2^{n+1}\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - 2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2\pi \cdot \left[\frac{x^{n+2}}{n+1}\right]_1^2 =$$

$$= 2^{n+2}\pi - \pi - \frac{2^{n+2}}{n+2} 2\pi + \frac{1}{n+2} \cdot 2\pi = \frac{n}{n+2}\left(2^{n+2} - 1\right)\pi$$

La razón de los volúmenes es:

$$Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{n}{n+2}\left(2^{n+2} - 1\right)\pi}{\frac{2}{n+2}\left(2^{n+2} - 1\right)\pi} = \frac{n}{2},$$

que coincide con la anterior.

Se sigue manteniendo los mismos resultados:

Observamos que la razón de los volúmenes de revolución que se generan cuando giramos alrededor del eje OX es 2n, es decir, el doble del valor del exponente de la función potencial correspondiente.

En el caso de la razón de los volúmenes de revolución que se generan cuando giramos alrededor del eje OY es n/2, es decir, la mitad del valor del exponente de la función potencial correspondiente

4. Estudiamos los volúmenes de revolución para la función f (x) = x^n comprendidos entre x = a y x = b.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^n, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_a^b (x^n)^2\, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_a^b = \frac{b^{2n+1}\pi}{2n+1} - \frac{a^{2n+1}\pi}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\left(b^{2n+1} - a^{2n+1}\right)\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = b^n (entre x = 0 y x = b), y = a^n (entre x = 0 y x = a), y = x^n (entre x = a y x = b), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^b (b^n)^2\, dx - \pi \int_0^a a^2\, dx - \pi \int_a^b (x^n)^2\, dx = \pi b^{2n} \cdot [x]_0^b - \pi a^{2n}\, [x]_0^a - \pi \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_a^b =$$

$$= \pi b^{2n+1} - \pi a^{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\left(b^{2n+1} - a^{2n+1}\right)\pi = \frac{2n}{2n+1}\left(b^{2n+1} - a^{2n+1}\right)\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\dfrac{2n}{2n+1}\left(b^{2n+1} - a^{2n+1}\right)\pi}{\dfrac{1}{2n+1}\left(b^{2n+1} - a^{2n+1}\right)\pi} = 2n$

Para la función y = x^n, es decir, $x = \sqrt[n]{y}$:

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = b (entre y = 0 e y = b^n), x = a (entre y = 0 e y = a^n), $x = \sqrt[n]{y}$, (entre y = a^n e y = b^n), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^{b^n} b^2\, dy - \pi \int_0^{a^n} a^2\, dy - \pi \int_{a^n}^{b^n} y^{2/n}\, dy = \pi b^2\, [y]_0^{b^n} - \pi a^2\, [y]_0^{a^n} - \pi \left[\frac{n}{n+2}\, y^{\,n+2/n}\right]_{a^n}^{b^n} =$$

$$= \pi \cdot b^{n+2} - \pi \cdot a^{n+2} - \frac{n}{n+2}\left(b^{n+2} - a^{n+2}\right)\pi = \frac{2}{n+2}\left(b^{n+2} - a^{n+2}\right)\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = \sqrt[n]{y}$, y = a^n, y = b^n y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_{a^n}^{b^n} y^{2/n}\, dy = \pi \left[\frac{n}{n+2}\, y^{\,n+2/n}\right]_{a^n}^{b^n} = \frac{n}{n+2}\, b^{n+2}\, \pi - \frac{n}{n+2}\, a^{n+2}\, \pi = \frac{n}{n+2}\left(b^{n+2} - a^{n+2}\right)\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\dfrac{n}{n+2}\left(b^{n+2} - a^{n+2}\right)\pi}{\dfrac{2}{n+2}\left(b^{n+2} - a^{n+2}\right)\pi} = \dfrac{n}{2}$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando “por tubos”.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = x^n$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_a^b x \cdot x^n \, dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_a^b = \frac{b^{n+2}}{n+2} \cdot 2\pi - \frac{a^{n+2}}{n+2} \cdot 2\pi = \frac{2}{n+2} \left(b^{n+2} - a^{n+2} \right) \pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $y = b^n$ (entre x = 0 y x = b), $y = a^n$ (entre x = 0 y x = a), $y = x^n$ (entre x = a y x = b), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^b x \cdot b^n \, dx - 2\pi \int_0^a x \cdot a^n \, dx - 2\pi \int_a^b x \cdot x^n \, dx = 2 b^n \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b - 2 a^n \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a - 2\pi \cdot \left[\frac{x^{n+2}}{n+1} \right]_a^b =$$

$$= b^{n+2} \pi - a^{n+2} \pi - \frac{2}{n+2} b^{n+2} \pi + \frac{2}{n+2} \cdot a^{n+2} \pi = \frac{n}{n+2} \left(b^{n+2} - a^{n+2} \right) \pi$$

La razón de los volúmenes es:

$$Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{n}{n+2} \left(b^{n+2} - a^{n+2} \right) \pi}{\frac{2}{n+2} \left(b^{n+2} - a^{n+2} \right) \pi} = \frac{n}{2}$$

que coincide con la anterior.

Para las funciones f (x) = x^n, con n natural, se siguen manteniendo los mismos resultados:

Observamos que la razón de los volúmenes de revolución que se generan cuando giramos alrededor del eje OX es 2n, es decir, el doble del valor del exponente de la función potencial correspondiente.

En el caso de la razón de los volúmenes de revolución que se generan cuando giramos alrededor del eje OY es n/2, es decir, la mitad del valor del exponente de la función potencial correspondiente

5. Estudiamos las funciones y = x^n, $n \in Z^-$.

Comenzamos con $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

■ **Entre 0 y a, con a > 0,** se obtienen volúmenes de revolución infinitos ya que las áreas de las regiones A y B son infinitas.

■ Estudiamos los volúmenes de revolución para la función $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ comprendidos entre x =1 y x= 2.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = $\frac{1}{x}$, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_1^2 x^{-2}\, dx = \pi \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \pi \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\pi}{2}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1 (entre x = 0 y x = 1), y = 0,5 (entre x = 0 y x = 2), y = $\frac{1}{x}$ (entre x = 1 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 1^2\, dx - \pi \int_1^2 x^{-2}\, dx - \pi \int_0^2 0{,}5^2\, dx = \pi \cdot [x]_0^1 - \frac{\pi}{2} - 0{,}25\pi\, [x]_0^2 = \pi + \frac{\pi}{2} - 0{,}5\pi = \pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$

Para la función $y = \frac{1}{x}$, es decir, $x = \frac{1}{y}$

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 2 (entre y = 0 e y = 0,5), x = 1 (entre y = 0 e y = 1), $x = \frac{1}{y}$, (entre y = 0,5 e y = 1), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^{0,5} 2^2\, dy + \pi \int_{0,5}^1 y^{-2}\, dy - \pi \int_0^1 1^2\, dy = 4\pi [y]_0^{0,5} + \pi \left[-\frac{1}{y}\right]_{0,5}^1 - \pi [x]_0^1 = 2\pi + \pi - \pi = 2\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = \frac{1}{y}$, y = 0,5, y = 1 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_{0,5}^1 y^{-2}\, dy = \pi \left[-\frac{1}{y}\right]_{0,5}^{21} = \pi[-1 - (-2)] = \pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = \frac{1}{x}$, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\, dx = 2\pi \cdot [x]_1^2 = 2\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1 (entre x = 0 y x = 1), $y = \frac{1}{x}$ (entre x = 1 y x = 2), y = 0,5 (entre x = 0 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^2 x \cdot 1\, dx + 2\pi \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x}\, dx - 2\pi \int_0^2 x \cdot 0{,}5\, dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 2\pi - \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \pi + 2\pi - 2\pi = \pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ que coincide con la anterior.

■ Estudiamos los volúmenes de revolución para la función $f\ (x)=\dfrac{1}{x}$ comprendidos entre x = a y x = b.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = $\dfrac{1}{x}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi\int_a^b x^{-2}\ dx = \pi \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \pi \cdot \left(-\frac{1}{b}-\left(-\frac{1}{a}\right)\right) = \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $y=\dfrac{1}{a}$ (entre x = 0 y x = a), $y=\dfrac{1}{x}$ (entre x = a y x = b), $y=\dfrac{1}{b}$ (entre x = 0 y x = b), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi\int_0^a \frac{1}{a^2}\ dx + \pi\int_a^b x^{-2}\ dx - \pi\int_0^b \frac{1}{b^2}\ dx = \frac{\pi}{a^2}\cdot[x]_0^a + \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\pi - \frac{\pi}{b^2}[x]_0^b =$$

$$= \frac{\pi}{a} + \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\pi - \frac{\pi}{b} = 2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\pi}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\pi} = 2$

Para la función $y=\dfrac{1}{x}$, es decir, $x=\dfrac{1}{y}$

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = b (entre y = 0 e $y=\dfrac{1}{b}$), $x=\dfrac{1}{y}$, (entre $y=\dfrac{1}{b}$ e $y=\dfrac{1}{a}$), x = a (entre y = 0 e $y=\dfrac{1}{a}$), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi\int_0^{1/b} b^2\ dy + \pi\int_{1/b}^{1/a} y^{-2}\ dy - \pi\int_0^{1/a} a^2\ dy = b^2\pi[y]_0^{1/b} + \pi\left[-\frac{1}{y}\right]_{1/b}^{1/a} - a^2\pi[x]_0^{1/a} =$$

$$= b\pi + (b-a)\pi - a\pi = 2(b-a)\ \pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x=\dfrac{1}{y}$, $y=\dfrac{1}{b}$, $y=\dfrac{1}{a}$ y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi\int_{1/b}^{1/a} y^{-2}\ dy = \pi\left[-\frac{1}{y}\right]_{1/b0,5}^{1/a} = \pi[-a-(-b)] = (b-a)\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{(b-a)\pi}{2(b-a)\pi} = \dfrac{1}{2}$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = \frac{1}{x}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_a^b x \cdot \frac{1}{x}\, dx = 2\pi \cdot [x]_a^b = 2(b-a)\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $y = \frac{1}{a}$ (entre x = 0 y x = a), $y = \frac{1}{x}$ (entre x = a y x = b), $y = \frac{1}{b}$ (entre x = 0 y x = b), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^2 x \cdot \frac{1}{a}\, dx + 2\pi \int_a^b x \cdot \frac{1}{x}\, dx - 2\pi \int_0^b x \cdot \frac{1}{b}\, dx = \frac{2\pi}{a} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a - 2(b-a)\pi - \frac{2\pi}{b} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b =$$

$$= a\pi + 2(b-a)\pi - b\pi = (b-a)\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{(b-a)\pi}{2(b-a)\pi} = \frac{1}{2}$, que coincide con la anterior.

Estudiamos los volúmenes de revolución para la función $f\ (x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ comprendidos entre x = 1 y x= 2.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^{-2}, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_1^2 \left(x^{-2}\right)^2\ dx = \pi \cdot \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = \pi \cdot \left(-\frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{7\pi}{24}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1 (entre x = 0 y x = 1), y = x^{-2} (entre x = 1 y x = 2), y = $\frac{1}{4}$ (entre x = 0 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 1^2\ dx + \pi \int_1^2 \left(x^{-2}\right)^2\ dx - \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2\ dx = \pi \cdot [x]_0^1 + \frac{7\pi}{24} - \frac{1}{16}\pi\ [x]_0^2 = \pi + \frac{7\pi}{24} - \frac{1}{8}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{7}{6}\pi}{\frac{7}{24}\pi} = \frac{24}{6} = 4$

Para la función $y = \frac{1}{x^2}$, es decir, $x = \frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-\frac{1}{2}}$

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 2 (entre y = 0 e y = $\frac{1}{4}$), x = 1 (entre y = 0 e y = 1), $x = y^{-\frac{1}{2}}$, (entre y = $\frac{1}{4}$ e y = 1), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^{1/4} 2^2\ dy + \pi \int_{1/4}^1 y1\ dy - \pi \int_0^1 1^2\ dy = 4\pi\,[y]_0^{1/4} + \pi\ [\ln\ y]_{1/4}^1 - \pi\,[x]_0^1 =$$

$$= \pi + \ln\ 4 \cdot \pi - \pi = \ln\ 4 \cdot \pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = y^{-2}$, y = $\frac{1}{4}$, y = 1 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_{1/4}^1 y^{-1}\ dy = \pi\ [\ln\ x]_{1/4}^1 = \pi \cdot \ln\ 4$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\pi \cdot \ln\ 4}{\pi \cdot \ln\ 4} = 1$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = \frac{1}{x^2}$, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = 2\pi \cdot [\ln x]_1^2 = 2 \cdot \ln 2 \cdot \pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1 (entre x = 0 y x = 1), $y = \frac{1}{x^2}$ (entre x = 1 y x = 2), y = $\frac{1}{4}$ (entre x = 0 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^2 x \cdot 1\, dx + 2\pi \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx - 2\pi \int_0^2 x \cdot \frac{1}{4} dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 2 \cdot \ln 2 \cdot \pi - 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \pi + 2 \cdot \ln 2 \cdot \pi - \pi = 2 \cdot \ln 2 \cdot \pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{2 \cdot \ln 2 \cdot \pi}{2 \cdot \ln 2 \cdot \pi} = 1$ que coincide con la anterior.

Estudiamos los volúmenes de revolución para la función $f\,(x)=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$ comprendidos entre x = 1 y x= 3.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^{-2}, x = 1, x = 3 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_1^3 \left(x^{-2}\right)^2 \, dx = \pi \cdot \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^3 = \pi \cdot \left(-\frac{1}{81} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{26\pi}{81}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1 (entre x = 0 y x = 1), y = x^{-2} (entre x = 1 y x = 3), y = $\frac{1}{9}$ (entre x = 0 y x = 3), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 1^2 \, dx + \pi \int_1^3 \left(x^{-2}\right)^2 \, dx - \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \, dx = \pi \cdot [x]_0^1 + \frac{26\pi}{81} - \frac{1}{81}\pi\,[x]_0^3 = \pi + \frac{26\pi}{81} - \frac{1}{27}\pi = \frac{104}{81}\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{104}{81}\pi}{\frac{26}{81}\pi} = \dfrac{104}{26} = 4$

Para la función $y = \dfrac{1}{x^2}$, es decir, $x = \dfrac{1}{\sqrt{y}} = y^{-1/2}$

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 3 (entre y = 0 e y = $\frac{1}{9}$), x = 1 (entre y = 0 e y = 1), $x = y^{-1/2}$, (entre y = $\frac{1}{9}$ e y = 1), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^{1/9} 3^2 \, dy + \pi \int_{1/9}^1 \left(y^{-1/2}\right)^2 \, dy - \pi \int_0^1 1^2 \, dy = 9\pi\,[y]_0^{1/9} + \pi\,[\ln y]_{1/9}^1 - \pi\,[x]_0^1 =$$

$$= \pi + \ln 9 \cdot \pi - \pi = \ln 9 \cdot \pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = y^{-1/2}$, y = $\frac{1}{9}$, y = 1 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_{1/9}^1 \left(y^{-1/2}\right)^2 \, dy = \pi\,[\ln y]_{1/9}^1 = \pi \cdot \ln 9$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\pi \cdot \ln 9}{\pi \cdot \ln 9} = 1$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = \frac{1}{x^2}$, x = 1, x = 3 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_1^3 x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = 2\pi \cdot [\ln x]_1^3 = 2 \cdot \ln 3 \cdot \pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1 (entre x = 0 y x = 1), $y = \frac{1}{x^2}$ (entre x = 1 y x = 3), y = $\frac{1}{9}$ (entre x = 0 y x = 3), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^1 x \cdot 1\, dx + 2\pi \int_1^3 x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx - 2\pi \int_0^3 x \cdot \frac{1}{9} dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 2 \cdot \ln 3 \cdot \pi - 2\pi \cdot \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \pi + 2 \cdot \ln 3 \cdot \pi - \pi = 2 \cdot \ln 3 \cdot \pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{2 \cdot \ln 3 \cdot \pi}{2 \cdot \ln 3 \cdot \pi} = 1$ que coincide con la anterior.

Estudiamos los volúmenes de revolución para la función $f\ (x)=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$ comprendidos entre x = a y x= b.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^{-2}, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_a^b \left(x^{-2}\right)^2\ dx = \pi \cdot \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_a^b = \pi \cdot \left(-\frac{1}{3b^3} - \left(-\frac{1}{3a^3}\right)\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = $\dfrac{1}{a^2}$ (entre x = 0 y x = a), y = x^{-2} (entre x = a y x = b), y = $\dfrac{1}{b^2}$ (entre x = 0 y x = b), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^a \left(\frac{1}{a^2}\right)^2\ dx + \pi \int_a^b \left(x^{-2}\right)^2\ dx - \pi \int_0^b \left(\frac{1}{b^2}\right)^2\ dx = \frac{1}{a^4}\pi \cdot [x]_0^a + \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) - \frac{1}{b^4}\pi\ [x]_0^b =$$

$$= \frac{1}{a^3}\pi + \frac{1}{3}\pi\ \frac{1}{a^3} - \frac{1}{3}\pi\ \frac{1}{b^3} - \frac{1}{b^3}\pi = \frac{4}{3}\ \frac{1}{a^3}\ \pi - \frac{4}{3}\ \pi\ \frac{1}{b^3} = \frac{4}{3}\ \pi \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)\pi}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)\pi} = 4$

Para la función $y = \dfrac{1}{x^2}$, es decir, $x = \dfrac{1}{\sqrt{y}} = y^{-1/2}$

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = b (entre y = 0 e y = $\dfrac{1}{b^2}$), x = a (entre y = 0 e y = $\dfrac{1}{a^2}$), $x = y^{-1/2}$, (entre y = $\dfrac{1}{b^2}$ e y = $\dfrac{1}{a^2}$), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^{1/b^2} b^2\ dy + \pi \int_{1/b^2}^{1/a^2} \left(y^{-1/2}\right)^2\ dy - \pi \int_0^{1/a^2} a^2\ dy = b^2\pi [y]_0^{1/b^2} + \pi\ [\ln\ y]_{1/b^2}^{1/a^2} - \pi\ a^2\ [x]_0^{1/a^2} =$$

$$= \pi + 2\pi \cdot (\ln\ b - \ln\ a) - \pi = 2 \cdot (\ln b - \ln\ a) \cdot \pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = y^{-1/2}$, y = $\dfrac{1}{b^2}$, y = $\dfrac{1}{a^2}$ y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_{1/b^2}^{1/a^2} \left(y^{-1/2}\right)^2\ dy = \pi\ [\ln\ y]_{1/b^2}^{1/b^2} = 2 \cdot (\ln\ b - \ln\ a) \cdot \pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{2\pi \cdot (\ln\ b - \ln\ a)}{2\pi \cdot (\ln\ b - \ln\ a)} = 1$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando “por tubos”.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = \frac{1}{x^2}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_a^b x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = 2\pi \cdot [\ln x]_a^b = 2 \cdot (\ln b - \ln a) \cdot \pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = $\frac{1}{a^2}$ (entre x = 0 y x = a), $y = \frac{1}{x^2}$ (entre x = a y x = b), y = $\frac{1}{b^2}$ (entre x = 0 y x = b), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^a x \cdot \frac{1}{a^2} 1\, dx + 2\pi \int_a^b x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx - 2\pi \int_0^b x \cdot \frac{1}{b^2}\, dx = \frac{2\pi}{a^2} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a + 2 \cdot (\ln b - \ln a) \cdot \pi - \frac{2\pi}{b^2} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b =$$

$$= \pi + 2 \cdot (\ln b - \ln a) \cdot \pi - \pi = 2 \cdot (\ln b - \ln a) \cdot \pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{2 \cdot (\ln b - \ln a) \cdot \pi}{2 \cdot (\ln b - \ln a) \cdot \pi} = 1$ que coincide con la anterior.

Estudiamos los volúmenes de revolución para la función $f\ (x)=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ comprendidos entre x = a y x=

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = x^{-n}, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi\int_a^b \left(x^{-n}\right)^2\ dx = \pi\cdot\left[-\frac{x^{-2n+1}}{-2n+1}\right]_a^b = \pi\cdot\left(\frac{b^{-2n+1}-a^{-2n+1}}{-2n+1}\right) = \frac{1}{1-2n}\cdot\left(\frac{1}{b^{2n-1}}-\frac{1}{a^{2n-1}}\right)\cdot\pi$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = $\dfrac{1}{a^n}$ (entre x = 0 y x = a), y = x^{-n} (entre x = a y x = b), y = $\dfrac{1}{b^n}$ (entre x = 0 y x = b), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi\int_0^a \frac{1}{a^{2n}}\ dx + \pi\int_a^b \left(x^{-n}\right)^2\ dx - \pi\int_0^b \frac{1}{b^{2n}}\ dx = \frac{\pi}{a^{2n}}\cdot[x]_0^a + \frac{b^{-2n+1}-a^{-2n+1}}{-2n+1}\pi - \frac{\pi}{b^{2n}}[x]_0^b =$$

$$= \frac{1}{a^{2n-1}}\pi + \frac{1}{1-2n}\left(\frac{1}{b^{2n-1}}-\frac{1}{a^{2n-1}}\right)\pi - \frac{1}{b^{2n-1}}\pi = \frac{2n}{1-2n}\left(\frac{1}{b^{2n-1}}-\frac{1}{a^{2n-1}}\right)\pi$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\dfrac{2n}{1-2n}\left(\dfrac{1}{b^{2n-1}}-\dfrac{1}{a^{2n-1}}\right)\pi}{\dfrac{1}{1-2n}\left(\dfrac{1}{b^{2n-1}}-\dfrac{1}{a^{2n-1}}\right)\pi} = 4$

Para la función $y = \dfrac{1}{x^n}$, es decir, $x = \dfrac{1}{\sqrt[n]{y}} = y^{-1/n}$

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = b (entre y = 0 e y = $\dfrac{1}{b^n}$), x = a (entre y = 0 e y = $\dfrac{1}{a^n}$), $x = y^{-1/n}$, (entre y = $\dfrac{1}{b^n}$ e y = $\dfrac{1}{a^n}$), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi\int_0^{1/b^n} b^2\ dy + \pi\int_{1/b^n}^{1/a^n}\left(y^{-1/n}\right)^2\ dy - \pi\int_0^{1/a^n} a^2\ dy = b^2\pi[y]_0^{1/b^n} + \pi\left[\frac{n}{n-2}\,y^{\frac{n-2}{n}}\right]_{1/b^n}^{1/a^n} - \pi\ a^2\ [x]_0^{1/a^n} =$$

$$= \ldots = \frac{2}{n-2}\,\pi\left(\frac{1}{a^{n-2}}-\frac{1}{b^{n-2}}\right)$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = y^{-1/n}$, y = $\dfrac{1}{b^n}$, y = $\dfrac{1}{a^n}$ y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi\int_{1/b^n}^{1/a^n}\left(y^{-1/n}\right)^2\ dy = \pi\,\frac{n}{n-2}\left[y^{\frac{n-2}{n}}\right]_{1/b^n}^{1/a^n} = \frac{n}{n-2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{a^{n-2}}-\frac{1}{b^{n-2}}\right)$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\dfrac{n}{n-2}\cdot\pi\cdot\left(\dfrac{1}{a^{n-2}}-\dfrac{1}{b^{n-2}}\right)}{\dfrac{2}{n-2}\cdot\pi\cdot\left(\dfrac{1}{a^{n-2}}-\dfrac{1}{b^{n-2}}\right)} = \dfrac{n}{2}$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = \frac{1}{x^n}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_a^b x \cdot \frac{1}{xn}\, dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^{2-n}}{2-n}\right]_a^b = 2\pi \cdot \left(\frac{b^{2-n}}{2-n} - \frac{a^{2-n}}{2-n}\right) = \frac{2}{n-2} \cdot \pi \cdot \left(a^{2-n} - b^{2-n}\right)$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = $\frac{1}{a^n}$ (entre x = 0 y x = a), $y = \frac{1}{xn}$ (entre x = a y x = b), y = $\frac{1}{b^n}$ (entre x = 0 y x = b), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^a x \cdot \frac{1}{a^n} 1\, dx + 2\pi \int_a^b x \cdot \frac{1}{x^n}\, dx - 2\pi \int_0^b x \cdot \frac{1}{b^n}\, dx = \frac{2\pi}{a^n} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a + \frac{2\pi}{n-2}\left(a^{2-n} - b^{2-n}\right) - \frac{2\pi}{b^n} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b =$$

$$= \ldots = \frac{n}{n-2} \cdot \pi \cdot \left(a^{2-n} - b^{2-n}\right)$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{n}{n-2} \cdot \pi \cdot \left(a^{2-n} - b^{2-n}\right)}{\frac{2}{n-2} \cdot \pi \cdot \left(a^{2-n} - b^{2-n}\right)} = \frac{n}{2}$ que coincide con la anterior.

Consideramos las funciones $y = x^{\frac{p}{q}}$ $con\ \frac{p}{q} \in Q^{+}$.

Estudiamos los volúmenes de revolución para la función $f\ (x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ comprendidos entre x = 0 y x= 1.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = $x^{\frac{1}{2}}$, x = 0, x = 1 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} \right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1 (entre x = 0 y x = 1) e y = $x^{\frac{1}{2}}$ (entre x = 0 y x = 1), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 1^2\ dx + \pi \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} \right)^2 dx = \pi \cdot [x]_0^1 - \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 1$

Para la función $y = \frac{1}{x^2}$, es decir, x = y^2

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 1 (entre y = 0 e y = 1) e x = y^2 (entre y = 0 e y = 1), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^1 1^2\ dy - \pi \int_0^1 \left(y^2 \right)^2 dy = \pi\ [y]_0^1 - \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = y^2$, y =0, y = 1 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 \left(y^2 \right)^2 dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{\pi}{5}}{\frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{4}$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = x^{\frac{1}{2}}$, x = 0, x = 1 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^{\frac{1}{2}}\ dx = 2\pi \cdot \frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{5}$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1 (entre x = 0 y x = 1) e $y = x^{\frac{1}{2}}$ (entre x = 0 y x = 1), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^1 x \cdot 1\ dx + -2\pi \int_0^1 x \cdot x^{\frac{1}{2}}\ dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2\pi \cdot \frac{2}{5} \cdot \left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{\pi}{5}}{\frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{4}$ que coincide con la anterior.

Estudiamos los volúmenes de revolución para la función $f\ (x)=\sqrt{x}\ =\ x^{\frac{1}{2}}$ comprendidos entre x = a y x= b.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = $x^{\frac{1}{2}}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi\int_a^b \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx = \pi\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{\pi}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = $\sqrt{b}$ (entre x = 0 y x = b), y = $x^{\frac{1}{2}}$ (entre x = a y x = b) e y = $\sqrt{a}$ (entre x = 0 y x = a), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi\int_0^b \left(\sqrt{b}\right)^2 dx - \pi\int_a^b \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx\ - \pi\int_0^a\left(\sqrt{a}\right)^2 = \pi\cdot[x]_0^b - \pi\ (b^2 - a^2) - \pi a[x]_0^a =$$

$$= \pi b^2 - \frac{\pi}{2}b^2 + \frac{\pi}{2}a^2 - \pi a^2 = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)}{\frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)} = 1$

Para la función $y = \dfrac{1}{x^2}$, es decir, x = y^2

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = b (entre y = 0 e y = $\sqrt{b}$); x = y^2 (entre y = $\sqrt{a}$ e y = $\sqrt{b}$) y x = a (entre y = 0 e y = $\sqrt{a}$), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi\int_0^{\sqrt{b}} b^2\ dy - \pi\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \left(y^2\right)^2\ dy\ - \pi\int_0^{\sqrt{a}} a^2\ dy = \pi b^2\ [y]_0^{\sqrt{b}} - \frac{\pi}{5}\left(b^{5/2} - a^{5/2}\right) - \pi a^2\ [y]_0^{\sqrt{a}} =$$

$$= \ldots = \frac{4\pi}{5}(b^{5/2} - a^{5/2})$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = y^2$, y = $\sqrt{a}$, y = $\sqrt{b}$ y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \left(y^2\right)^2\ dy = \pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = \frac{\pi}{5}\left(b^{5/2} - a^{5/2}\right)$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{\pi}{5}\left(b^{5/2} - a^{5/2}\right)}{\frac{4\pi}{5}\left(b^{5/2} - a^{5/2}\right)} = \dfrac{1}{4}$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = x^{\frac{1}{2}}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^{\frac{1}{2}}\, dx = 2\pi \cdot \frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_a^b = \frac{4\pi}{5}\left(b^{5/2} - a^{5/2}\right)$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = $\sqrt{b}$ (entre x = 0 y x = b) e $y = x^{\frac{1}{2}}$ (entre x = a y x = b) e y = $\sqrt{a}$ (entre x = y x = a), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^b x \cdot \sqrt{b}\, dx - 2\pi \int_a^b x \cdot x^{\frac{1}{2}}\, dx - 2\pi \int_0^a x \cdot \sqrt{a}\, dx =$$

$$= 2\pi\sqrt{b}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b - \frac{4\pi}{5} \cdot \left(b^{5/2} - a^{5/2}\right) - 2\pi\sqrt{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{4\pi}{5}\left(b^{5/2} - a^{5/2}\right)$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{\pi}{5}\left(b^{5/2} - a^{5/2}\right)}{\frac{4\pi}{5}\left(b^{5/2} - a^{5/2}\right)} = \dfrac{1}{4}$ que coincide con la anterior.

Consideramos los volúmenes de revolución para la función $f\ (x) = x^{\frac{p}{q}}$, con $\frac{p}{q} \in Q^{+}$, comprendidos entre x = a y x= b.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = $x^{\frac{p}{q}}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_a^b \left(x^{\frac{p}{q}} \right)^2 dx = \frac{q}{2p+q} \pi \cdot \left[x^{\frac{2p+q}{q}} \right]_a^b = \frac{q\pi}{2p+q} \left[b^{\frac{2p+q}{q}} - a^{\frac{2p+q}{q}} \right]$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = $b^{\frac{p}{q}}$ (entre x = 0 y x = b), y = $x^{\frac{p}{q}}$ (entre x = a y x = b) e y = $a^{\frac{p}{q}}$ (entre x = 0 y x = a), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^b \left(b^{\frac{p}{q}} \right)^2 dx - \pi \int_a^b \left(x^{\frac{p}{q}} \right)^2 dx - \pi \int_0^a \left(a^{\frac{p}{q}} \right)^2 = \ldots = \frac{2p\pi}{2p+q} \left[b^{\frac{2p+q}{q}} - a^{\frac{2p+q}{q}} \right]$$

La razón de los volúmenes es: $$Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{2p\pi}{2p+q} \left[b^{\frac{2p+q}{q}} - a^{\frac{2p+q}{q}} \right]}{\frac{q\pi}{2p+q} \left[b^{\frac{2p+q}{q}} - a^{\frac{2p+q}{q}} \right]} = \frac{2p}{q}$$

Para la función $y = x^{\frac{p}{q}}$, es decir, $x = y^{\frac{q}{p}}$

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = b (entre y = 0 e y = $b^{\frac{p}{q}}$); x = $y^{\frac{q}{p}}$ (entre y = $a^{\frac{p}{q}}$ e y = $b^{\frac{p}{q}}$) y x = a (entre y = 0 e y = $a^{\frac{p}{q}}$), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^{b^{\frac{p}{q}}} b^2\ dy - \pi \int_{a^{\frac{p}{q}}}^{b^{\frac{p}{q}}} \left(y^{\frac{q}{p}} \right)^2 dy - \pi \int_0^{a^{\frac{p}{q}}} a^2\ dy = \ldots = \frac{2q\pi}{p+2q} \left[b^{\frac{p+2q}{q}} - a^{\frac{p+2q}{9}} \right]$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = y^{\frac{q}{p}}$, y = $a^{\frac{p}{q}}$, y = $b^{\frac{p}{q}}$ y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por discos”, obtenemos:

$$V_A = \pi \int_{a^{\frac{p}{q}}}^{b^{\frac{p}{q}}} \left(y^{\frac{q}{p}} \right)^2 dy = \pi\ \frac{p}{p+2q} \left[y^{\frac{p+2q}{p}} \right]_{a^{\frac{p}{q}}}^{b^{\frac{p}{q}}} = \frac{p\pi}{p+2q} \left(b^{\frac{p+2q}{q}} - a^{\frac{p+2q}{q}} \right)$$

La razón de los volúmenes es: $$Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{p\pi}{p+2q} \left[b^{\frac{p+2q}{q}} - a^{\frac{p+2q}{q}} \right]}{\frac{2q\pi}{p+2q} \left[b^{\frac{p+2q}{q}} - a^{\frac{p+2q}{q}} \right]} = \frac{p}{2q}$$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = x^{\frac{p}{q}}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^{\frac{p}{q}}\, dx = 2\pi \cdot \frac{q}{p+2q}\left[x^{\frac{p+2q}{q}}\right]_a^b = \frac{2q\pi}{p+2q}\left[b^{\frac{p+2q}{q}} - a^{\frac{p+2q}{q}}\right]$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = $b^{\frac{p}{q}}$ (entre x = 0 y x = b) e $y = x^{\frac{p}{q}}$ (entre x = a y x = b) e y = $a^{\frac{p}{q}}$ (entre x = 0 y x = a), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^b x \cdot b^{\frac{p}{q}}\, dx - 2\pi \int_a^b x \cdot x^{\frac{p}{q}}\, dx - 2\pi \int_0^a x \cdot a^{\frac{p}{q}}\, dx = \ldots = \frac{p\pi}{p+2q}\left[b^{\frac{p+2q}{q}} - a^{\frac{p+2q}{q}}\right]$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\dfrac{p\pi}{p+2q}\left[b^{\frac{p+2q}{q}} - a^{\frac{p+2q}{q}}\right]}{\dfrac{2q\pi}{p+2q}\left[b^{\frac{p+2q}{q}} - a^{\frac{p+2q}{q}}\right]} = \dfrac{p}{2q}$ que coincide con la anterior.

Estudiamos las funciones $y = x^{\frac{p}{q}},\ \frac{p}{q} \in Q^-$.

Comenzamos con $y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ entre x = 1 y x = 2.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = $x^{-\frac{1}{2}}$, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_1^2 \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)^2 dx = \pi \cdot [\ln x]_1^2 = \pi \ln 2$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = 1 (entre x = 0 y x = 1); y = $x^{-\frac{1}{2}}$ (entre x = 1 y x = 2) e $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (entre x = 0 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^1 1^2\, dx + \pi \int_0^1 \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)^2 dx - \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 dx = \pi \cdot [x]_0^1 + \pi \ln 2 - \frac{\pi}{2} [x]_0^2 = \pi \ln 2$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\pi \ln 2}{\pi \ln 2} = 1$

Para la función $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, es decir, x = y^{-2}

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = 2 (entre y = 0 e y = $\frac{1}{\sqrt{2}}$), x = y^{-2} (entre y = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e y = 1) y x = 1 (entre y = 0 e y = 1) cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2^2\, dy + \pi \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(y^{-2} \right)^2 dy - \int_0^1 1^2\, dy = \ldots = \frac{4\pi}{3} \left(2\sqrt{2} - 1 \right)$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = y^{-2}$, y = $\frac{1}{\sqrt{2}}$, y = 1 y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(y^{-2} \right)^2 dy = \pi \left[\frac{y^{-3}}{-3} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{\pi}{3} \left(2\sqrt{2} - 1 \right)$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)}{\frac{4\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)} = \frac{1}{4}$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando “por tubos”.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = x^{-\frac{1}{2}}$, x = 1, x = 2 y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_1^2 x \cdot x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 2\pi \cdot \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{4\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por por y = 1 (entre x = 0 y x = 1); y = $x^{-\frac{1}{2}}$ (entre x = 1 y x = 2) e $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (entre x = 0 y x = 2), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando “por tubos”, obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^1 x \cdot 1\, dx + -2\pi \int_1^2 x \cdot x^{-\frac{1}{2}}\, dx - 2\pi \int_0^2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \ldots = \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)}{\frac{4\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)} = \frac{1}{4}$, que coincide con la anterior.

Consideramos $y = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ entre x = a y x = b.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = $x^{-\frac{1}{2}}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_a^b \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)^2 dx = \pi \cdot [\ln x]_a^b = \pi \ (\ln b - \ln a)$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $y = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ (entre x = 0 y x = a); y = $x^{-\frac{1}{2}}$ (entre x = a y x = b) e $y = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$ (entre x = 0 y x = b), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_0^a \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 dx + \pi \int_a^b \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)^2 dx - \pi \int_0^b \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 dx = ... = \pi \cdot (\ln b - \ln a9$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\pi \ (\ln b - \ln a)}{\pi \ (\ln b - \ln a)} = 1$

Para la función $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, es decir, x = y^{-2}

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = b (entre y = 0 e y = $\dfrac{1}{\sqrt{b}}$), x = y^{-2} (entre y = $\dfrac{1}{\sqrt{b}}$ e y = $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$) y x = a (entre y = 0 e y = $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$) cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{b}}} b^2 \ dy + \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \left(y^{-2} \right)^2 dy \ - \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} 1^2 \ dy = ... = \frac{4\pi}{3} \left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a} \right)$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x = y^{-2}$, y = $\dfrac{1}{b}$, y = $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A = \pi \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \left(y^{-2} \right)^2 dy = \pi \left[\frac{y^{-3}}{-3} \right]_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{\pi}{3} \left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a} \right)$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\frac{\pi}{3}\left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a} \right)}{\frac{4\pi}{3}\left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a} \right)} = \dfrac{1}{4}$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = x^{-\frac{1}{2}}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi \int_a^b x \cdot x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 2\pi \cdot \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_a^b = \frac{4\pi}{3}\left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a}\right)$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $y = \frac{1}{\sqrt{a}}$ (entre x = 0 y x = a); y = $x^{-\frac{1}{2}}$ (entre x = a y x = b) e $y = \frac{1}{\sqrt{b}}$ (entre x = 0 y x = b), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi \int_0^a x \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\, dx + 2\pi \int_a^b x \cdot x^{-\frac{1}{2}}\, dx - 2\pi \int_0^b x \cdot \frac{1}{\sqrt{b}}\, dx = \ldots = \frac{\pi}{3}\left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a}\right)$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{\pi}{3}\left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a}\right)}{\frac{4\pi}{3}\left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{4}$, que coincide con la anterior.

Consideramos los volúmenes de revolución para la función $f\ (x)=x^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$, comprendidos entre x = a y x= b.

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por y = $x^{-\frac{p}{q}}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B=\pi\int_a^b\left(x^{-\frac{p}{q}}\right)^2 dx=\frac{q}{q-2p}\pi\cdot\left[x^{\frac{q-2p}{q}}\right]_a^b=\frac{q\pi}{q-2p}\left[b^{\frac{q-2p}{q}}-a^{\frac{q-2p}{q}}\right]$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $y=\frac{1}{a^{p/q}}$ (entre x = 0 y x = a), y = $x^{-\frac{p}{q}}$ (entre x = a y x = b) e $y=\frac{1}{b^{p/q}}$ (entre x = 0 y x = b), cuando giramos alrededor del eje OX. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A=\pi\int_0^a\left(\frac{1}{a^{p/q}}\right)^2 dx+\pi\int_a^b\left(x^{-\frac{p}{q}}\right)^2 dx-\pi\int_0^b\left(\frac{1}{b^{p/q}}\right)^2=\ldots=\frac{2p\pi}{q-2p}\left[b^{\frac{q-2p}{q}}-a^{\frac{q-2p}{q}}\right]$$

La razón de los volúmenes es: $Razón=\frac{V_A}{V_B}=\frac{\frac{2p\pi}{q-2p}\left[b^{\frac{q-2p}{q}}-a^{\frac{q-2p}{q}}\right]}{\frac{q\pi}{q-2p}\left[b^{\frac{q-2p}{q}}-a^{\frac{q-2p}{q}}\right]}=\frac{2p}{q}$

Para la función $y=x^{-\frac{p}{q}}$, es decir, $x=y^{-\frac{q}{p}}$

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por x = b (entre y = 0 e y = $b^{-\frac{p}{q}}$); x = $y^{-\frac{q}{p}}$ (entre y = $b^{-\frac{p}{q}}$ e y = $a^{-\frac{p}{q}}$) y x = a (entre y = 0 e y = $a^{-\frac{p}{q}}$), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_B=\pi\int_0^{b^{-\frac{p}{q}}} b^2\ dy+\pi\int_{b^{-\frac{p}{q}}}^{a^{-\frac{p}{q}}}\left(y^{-\frac{q}{p}}\right)^2 dy-\pi\int_0^{a^{-\frac{p}{q}}} a^2\ dy=\ldots=\frac{2q\pi}{p-2q}\left[b^{\frac{2q-p}{q}}-a^{\frac{2q-p}{9}}\right]$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por $x=y^{-\frac{q}{p}}$, y = $b^{-\frac{p}{q}}$, y = $a^{-\frac{p}{q}}$ y el eje OY, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por discos", obtenemos:

$$V_A=\pi\int_{b^{-\frac{p}{q}}}^{a^{-\frac{p}{q}}}\left(y^{-\frac{q}{p}}\right)^2 dy=\pi\ \frac{p}{p\ \ 2q}\left[y^{\frac{p-2q}{p}}\right]_{b^{-\frac{p}{q}}}^{a^{-\frac{p}{q}}}=\frac{p\pi}{p-2q}\left(a^{\frac{2q-p}{q}}-b^{\frac{2q-p}{q}}\right)$$

La razón de los volúmenes es: $Razón=\frac{V_A}{V_B}=\frac{\frac{p\pi}{p-2q}\left[a^{\frac{2q-p}{q}}-b^{\frac{2q-p}{q}}\right]}{\frac{2q\pi}{p-2q}\left[a^{\frac{2q-p}{q}}-a^{\frac{2q-p}{q}}\right]}=\frac{p}{2q}$

Hallamos el valor de la razón anterior, la de los volúmenes engendrados al girar las regiones sobre el eje OY integrando "por tubos".

● Hallamos el volumen generado por la región B delimitada por $y = x^{-\frac{p}{q}}$, x = a, x = b y el eje OX, cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_B = 2\pi\int_0^1 x \cdot x^{-\frac{p}{q}}\, dx = 2\pi \cdot \frac{q}{2q-p}\left[x^{\frac{2q-p}{q}}\right]_a^b = \frac{2q\pi}{p-2q}\left[a^{\frac{2q-p}{q}} - b^{\frac{2q-p}{q}}\right]$$

● Hallamos el volumen generado por la región A delimitada por y = $a^{-\frac{p}{q}}$ (entre x = 0 y x = a) e $y = x^{-\frac{p}{q}}$ (entre x = a y x = b) e y = $b^{-\frac{p}{q}}$ (entre x = 0 y x = b), cuando giramos alrededor del eje OY. Integrando "por tubos", obtenemos:

$$V_A = 2\pi\int_0^b x \cdot a^{-\frac{p}{q}}\, dx - 2\pi\int_a^b x \cdot x^{-\frac{p}{q}}\, dx - 2\pi\int_0^a x \cdot b^{-\frac{p}{q}}\, dx = \ldots = \frac{p\pi}{p-2q}\left[a^{\frac{2q-p}{q}} - b^{\frac{2q-p}{q}}\right]$$

La razón de los volúmenes es: $Razón = \dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{\dfrac{p\pi}{p-2q}\left[a^{\frac{2q-p}{q}} - b^{\frac{2q-p}{q}}\right]}{\dfrac{2q\pi}{p-2q}\left[a^{\frac{2q-p}{q}} - a^{\frac{2q-p}{q}}\right]} = \dfrac{p}{2q}$ que coincide con la anterior.

Recogemos los resultados obtenidos en una tabla.

Función	Intervalo	Razón de volúmenes Giro sobre OX	Razón de volúmenes Giro sobre OY
$y = x^2$	x = 0, x = 1	4	1
$y = x^3$	x = 0, x = 1	6	$\frac{3}{2}$
$y = x^n$	x = 0, x = 1	2n	$\frac{n}{2}$
$y = x^2$	x = 1, x = 2	4	1
$y = x^3$	x = 1, x = 2	6	$\frac{3}{2}$
$y = x^n$	x = 1, x = 2	2n	$\frac{n}{2}$
$y = x^n$	x = a, x = b	2n	$\frac{n}{2}$
$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$	x = 1, x = 2	2	$\frac{1}{2}$
$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$	x = a, x = b	2	$\frac{1}{2}$
$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$	x = 1, x = 2	4	1
$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$	x = 1, x = 3	4	1
$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$	x = a, x = b	4	1
$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$	x = a, x = b	2n	$\frac{n}{2}$
$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$	x = 0, x = 1	1	$\frac{1}{4}$
$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$	x = a, x = b	1	$\frac{1}{4}$
$y = \sqrt{x} = x^{p/q}$	x = a, x = b	$\frac{2p}{q}$	$\frac{p}{2q}$
$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$	x = 1, x = 2	1	$\frac{1}{4}$
$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$	x = a, x = b	1	$\frac{1}{4}$
$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-p/q}$	x = a, x = b	$\frac{2p}{q}$	$\frac{p}{2q}$

Concluimos que:

- La razón de los volúmenes generados por las regiones delimitadas por las funciones $y = x^n$ siendo n un número real cualquiera cuando giran sobre el eje OX vale 2n.

- La razón de los volúmenes generados por las regiones delimitadas por las funciones $y = x^n$, siendo n un número real cualquiera, cuando giran sobre el eje OY vale n/2.