## UNIDAD 14: Probabilidad

### ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 354

**1. Un test consta de cuatro preguntas a las que hay que contestar verdadero (V) o falso (F). Si una persona contesta al azar, escribe todas las posibles respuestas que puede obtener.**

Las posibles respuestas son:

{(VVVV),(VVVF),(VVFV),(VFVV),(FVVV),(VVFF),(VFVF),(FVFV),(VFFV),(FVVF),(FFVV),(VFFF),(FVFF),(FFVF),(FFFV),(FFFF)}

**2. Lanzamos dos dados al aire y anotamos la suma de los puntos de sus caras superiores. ¿Qué es más probable obtener suma 7 u obtener suma 8?**

Los sucesos asociados a suma 7 son {(1,6)(2,5)(3,4)(4,3)(5,2)(6,1)}y los asociados a suma 8 son {(2,6)(3,5)(4,4)(5,3)(6,2)}. Por lo cual es más probable sacar suma 7.

**3. La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara y cruz al lanzar dos monedas?**

La probabilidad de obtener cara y cruz es 1/2 · 1/2 · 2 = 1/2

**4. Una urna tiene 12 bolas blancas y 8 negras. Sacamos dos bolas, una detrás de otra y devolviendo la primera a la urna, halla la probabilidad de sacar una bola de cada color.**

La probabilidad de obtener una bola de cada color es $\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{20}\cdot 2=\frac{12}{25}$

**5. En un conservatorio de música el 60% de los alumnos estudian piano, el 50% violín y el 30% ninguno de estos instrumentos. ¿Qué probabilidad hay de elegir un alumno que estudie piano y violín a la vez?**

El 70% estudian alguno de estos instrumentos. Por tanto hay un 40% que estudian ambos a la vez.

### ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 373

**1. Matrices. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Demuestra que $A^n = 3^{n-1} \cdot A$.**

Siguiendo el método de inducción y sabiendo que la igualdad es cierta para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostraremos que también lo es para el siguiente.

● Para n = 1 vemos que la igualdad es cierta, pues $A = 3^º \cdot A$.

● Para n = 2 calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot A$.

● Suponemos que es cierta para n = p: $A^p = 3^{p-1} \cdot A$, hemos de ver que también es cierta para n = p + 1, es decir, hemos de probar que $A^{p+1} = 3^p \cdot A$.

Para ello calculamos esta matriz $A^{p+1} = A^p \cdot A = 3^{p-1} \cdot A \cdot A = 3^{p-1} \cdot 3 \cdot A = 3^p \cdot A$, que es lo que queríamos demostrar.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para p + 1. Por tanto, podemos afirmar que es cierta para cualquier número natural.

**2. Múltiplo de 5. Demuestra que $n^5 – n$ es múltiplo de 5 para cualquier valor de n.**

Siguiendo el método de inducción y sabiendo que $n^5 – n$ es múltiplo de 5 es cierto para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostraremos que también lo es para el siguiente.

● Para n = 1 vemos que la igualdad es cierta, pues $1^5 - 1 = 0$ es múltiplo de 5.

● Para n = 2, tenemos $2^5 – 2 = 30$, que se múltiplo de 5.

● Suponemos que es cierta para n = p, $p^5 – p$ es múltiplo de 5.Hemos de ver que también es cierta para n = p + 1, es decir, hemos de probar que $(p + 1)^5 – (p + 1)$ es múltiplo de 5.

Para ello operamos y obtenemos:

$$(p + 1)^5 – (p + 1) = p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1 – p – 1 = (p^5 – p) + 5(p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p)$$

La última expresión es suma de dos múltiplo de 5, por tanto, es múltiplo de 5.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para p + 1. Por tanto, podemos afirmar que es cierta para cualquier número natural.

**3. Suma de cubos. Demuestra que para cualquier número natural n se verifica: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 \, (n+1)^2}{4}$**

Siguiendo el método de inducción y sabiendo que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 \, (n+1)^2}{4}$ es múltiplo de 5 es cierto para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostraremos que también lo es para el siguiente.

● Para n = 1 la igualdad es cierta: $1^3 = \frac{1^2 \, (1+1)^2}{4}$.

● Para n = 2, la igualdad es cierta: $1^3 + 2^3 = \dfrac{2^2\,(2+1)^2}{4}$.

● Suponemos que es cierta para n = p, es decir:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 = \frac{p^2\,(p+1)^2}{4}$$

Hemos de ver que también es cierta para n = p + 1, hemos de probar que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{(p+1)^2\,(p+2)^2}{4}$$

Para ello, utilizamos lo anterior y obtenemos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{p^2\,(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 =$$

$$= (p+1)^2\left(\frac{p^2}{4} + p + 1\right) = \frac{(p+1)^2\,(p+2)^2}{4}$$

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para p + 1. Por tanto, podemos afirmar que es cierta para cualquier número natural.

## ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 375

**1.** Busca en Wikipedia los conceptos y resultados que se citan a continuación:

a) Números amigos
b) Número áureo
c) Sucesión de Fibonacci
d) Axiomas de Kolmogorov
e) Regla de Laplace
f) Teorema de Bayes

**2.** Mediante un buscador, intenta encontrar todas las palabras que aparecen en cursiva en estas dos páginas y visita las direcciones que aparecen en estas páginas.

## ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 378

**1. Encuentra el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:**

**a) Distribución por sexo de los hijos en familias de tres hijos.**

**b) Suma de los puntos obtenidos al extraer una ficha de un domino.**

**c) Extracción de dos CDs de una caja que contiene siete en buen estado y tres defectuosos.**

Los espacios muestrales pedidos son:

a) E = {(vvv), (vvm), (vmv), (mvv), (vmm), (mvm), (mmv), (mmm)} siendo v, varón y m, mujer.

b) E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

c) E = {DD, DB, BD, BB} siendo D, defectuoso y B en buen estado.

**2. Consideremos el experimento aleatorio de tirar dos dados cúbicos al aire y anotar la suma de los puntos de sus caras superiores. Sean los sucesos: A = "obtener suma múltiplo de 5" ; B = " obtener suma mayor que 8" ; C = "obtener por suma un número primo" . Halla:**

**a)** $A \cap B$ **b)** $A \cap B \cap C$ **c)** $A \cup B$ **d)** $\overline{A} \cap C$

Los sucesos pedidos tienen por elementos los siguientes:

a) $A \cap B$ = "obtener suma múltiplo de 5 y mayor de 8" = {(4, 6), (6, 4), (5, 5)}

b) $A \cap B \cap C$ = "obtener suma múltiplo de 5 y mayor de 8 y suma número primo" = {φ}

c) $A \cup B$ = "obtener suma múltiplo de 5 o mayor de 8" = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 6), (4, 1), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

d) $\overline{A} \cap C$ = "obtener suma no múltiplo de 5 y número primo" =
= {(1, 1), (1, 2), (1, 6), (2, 1), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)}

**3. En el espacio muestral E = {A, B, C}. ¿Cuál de las siguientes funciones es una probabilidad?**

**a) P (A) =** $\frac{1}{3}$**, P (B) =** $\frac{1}{2}$**, P (C) =** $\frac{1}{6}$

**b) P (A) =1, P (B) =** $-\frac{1}{5}$**, P (C) =** $\frac{1}{5}$

**c) P (A) =** $\frac{1}{4}$**, P (B) =** $\frac{1}{2}$**, P (C) =** $\frac{5}{8}$

a) Es una probabilidad porque verifica los 3 axiomas.

b) No es una probabilidad pues falla el 2º axioma ya que P (B) = $-\frac{1}{5} < 0$

c) No es una probabilidad pues falla el 1º axioma ya que P (A) + P (B) + P (C) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8} \neq 1$

**4. En la prueba final de una carrera de atletismo participan cuatro atletas que denotamos por M, C, R y S y solo uno de ellos puede ser el ganador. La probabilidad de que gane M es doble de la de que gane C, la probabilidad de que gane C es triple de la de que gane R y la probabilidad de que gane S es la misma que la de que gane R. ¿Cuál es la probabilidad de ganar C?**

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

P (M) = 2 · P (C); P (C) = 3 · P (R) y P (S) = P (R).

Como P (M) + P (C) + P (R) + P (S) = 1 $\Rightarrow$ 6 · P (R) + 3 · P (R) + P (R) + P (R) = 1 $\Rightarrow$ P (R) = $\frac{1}{11}$

Por lo tanto P(C) = $\frac{3}{11}$

**5. Un dado tetraédrico esta trucado de modo que la probabilidad de obtener cualquier número es la misma excepto la de obtener un 4 que es doble de cualquiera de las demás. Halla la probabilidad de obtener un cuatro.**

Como P (1) + P (2) + P (3) + P (4) = 1 y haciendo P (1) = x $\Rightarrow$ x + x + x + 2x = 1 $\Rightarrow$ x = $\frac{1}{5}$

Por lo que P (4) = $\frac{2}{5}$

**6. En las familias de cuatro hijos, atendiendo al sexo de estos, halla las siguientes probabilidades:**

**a) Encontrar una familia con 2 varones y dos mujeres.**

**b) Tener una familia con al menos dos varones.**

**c) Encontrar una familia con una mujer como máximo.**

a) P (2 varones y 2 mujeres) = $\frac{6}{16}$ = 0,375

b) P (al menos 2 varones) = $\frac{11}{16} = 0{,}6875$

c) P (como máximo 1 mujer) = $\frac{4}{16} = 0{,}3125$

**7. Sean A y B dos sucesos tales que P (A) = $\frac{1}{4}$, P (B) = $\frac{1}{3}$ y $P\,(A \cup B) = \frac{5}{12}$. Halla:**

**a)** $P(A \cap B)$ **b)** $P(\overline{A \cap B})$ **c)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ **d)** $P(A \cap \overline{B})$

a) $P(A \cap B)$ = P(A) + P(B) - $P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}$

b) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{5}{6}$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{7}{12}$

d) $P(A \cap \overline{B})$ = P (A) - $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

**8. Lanzamos tres monedas al aire. Halla la probabilidad de no obtener ninguna cara y la de obtener dos caras y una cruz.**

El espacio muestral asociado al experimento de lanzar tres monedas al aire es

E = {(ccc), (ccx), (cxc), (xcc), (cxx), (xcx), (xxc), (xxx)} siendo c = cara y x = cruz

Por tanto, P (no obtener ninguna cara) = P (tres cruces) = $\frac{1}{8}$ y P (obtener 2 caras y 1 cruz) = $\frac{3}{8}$

**9. Se consideran dos sucesos incompatibles X e Y asociados a un determinado experimento aleatorio y tal que P (X) = $\frac{2}{5}$ y P (Y) = $\frac{1}{2}$. Halla:**

**a)** $P(X \cup Y)$ **b)** $P(X \cup \overline{Y})$ **c)** $P(\overline{X} \cup \overline{Y})$ **d)** $P(\overline{X \cup Y})$

Como los sucesos son incompatibles se verifica que $P(X \cap Y) = 0$. Utilizando las propiedades de la probabilidad y las leyes de Morgan obtenemos:

a) $P(X \cup Y)$ = P (X) + P (Y) - $P(X \cap Y) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

b) $P(X \cup \overline{Y})$ = $P(X) + P(\overline{Y}) - P(X \cap \overline{Y}) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - P(X) = \frac{1}{2}$

c) $P(\overline{X} \cup \overline{Y})$ = $P(\overline{X \cap Y}) = 1$

d) $P(\overline{X \cup Y})$ = $1 - P(X \cup Y) = \frac{1}{10}$

**10. El 75% de los alumnos de un instituto practican algún deporte, el 30% tocan un instrumento musical y el 15% hacen deporte y tocan un instrumento musical. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un alumno que no realiza ninguna de estas actividades? ¿Cuál es la probabilidad de elegir un alumno que practique algún deporte y no toque ningún instrumento musical?**

Llamamos D a hacer deporte y M a instrumento musical. Las condiciones del enunciado son:

P (D) = 0,75; P (M) = 0,30 y $P(D \cap M) = 0{,}15$

Utilizando las propiedades de la probabilidad obtenemos:

La probabilidad de elegir un alumno que no realiza ninguna de estas actividades, es:

$$P(\overline{D} \cap \overline{M}) = P(\overline{D \cup M}) = 1 - (0{,}75 + 0{,}30 - 0{,}15) = 0{,}10$$

La probabilidad de elegir un alumno que practique algún deporte y no toque ningún instrumento musical, es:

$$P(D \cap \overline{M}) = P(D) - P(D \cap M) = 0{,}75 - 0{,}15 = 0{,}60$$

**11. Un cofre tiene 12 monedas de oro, 8 de plata y 5 de cobre. Halla la probabilidad de que al extraer dos monedas, una detrás de la otra y sin devolver la primera al cofre, salgan del mismo material.**

P (dos de igual material) = P (dos oro) + P (dos plata) + P (dos cobre) =

$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \frac{208}{600} = \frac{26}{75} = 0{,}347$$

## ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 379

**12. De una baraja española de 40 cartas sacamos 3 cartas una detrás de la otra y sin reintegrar las cartas al mazo. Halla las siguientes probabilidades:**

**a) De sacar tres bastos.**

**b) De sacar dos bastos y una espada.**

**c) De sacar una carta de cada palo.**

a) P (tres bastos) = $\dfrac{V_{10,3}}{V_{40,3}} = \dfrac{720}{59280} = 0{,}012$

b) P (dos bastos y una espada) = $\dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} \cdot \dfrac{10}{38} \cdot 3 = \dfrac{2700}{59280} = 0{,}046$

c) P (una de cada palo) = $\dfrac{V_{10,1} \cdot V_{10,1} \cdot V_{10,1}}{V_{40,3}} \cdot P_3 = \dfrac{6000}{59280} = 0{,}1012$

**13. En un parque de atracciones hay, un día determinado, doble número de mujeres que de hombres. Hay niños, jóvenes y adultos que se distribuyen según la siguiente tabla:**

| | NIÑOS | JÓVENES | ADULTOS | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| MUJERES | 80 | | 50 | |
| HOMBRES | | 30 | | |
| TOTAL | | | 70 | 300 |

**a) Completa la tabla en tu cuaderno.**

**b) Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un niño o una niña.**

**c) Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un hombre adulto.**

a) La tabla quedaría del siguiente modo:

| | NIÑOS | JÓVENES | ADULTOS | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| MUJERES | 80 | 70 | 50 | 200 |
| HOMBRES | 50 | 30 | 20 | 100 |
| TOTAL | 130 | 100 | 70 | 300 |

b) P (niño o niña) = $\dfrac{130}{300} = 0{,}433$

c) P (hombre adulto) = $\dfrac{20}{300} = 0{,}067$

**14. Lanzamos dos dados al aire y anotamos los números de sus caras superiores.**

**a) Si se sabe que salió suma 7 ¿cuál es la probabilidad de que en uno de ellos aparezca un 3?**

**b) Si se sabe que en uno de ellos salió un 5, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia de sus puntos, en valor absoluto, sea 2?**

Los casos posibles son 36.

a) Los casos posibles en los que la suma es 7 son 6: {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)} y de ellos hay 2 en los que sale un 3; por lo tanto P (un 3/suma 7) = $\dfrac{2}{6} = 0{,}33$.

b) Los casos posibles en los que en uno de ellos sale un 5 son 11:
{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)}

y de ellos hay 2 en los que la diferencia, en valor absoluto, es 2; por tanto, P (dif. 2/salió 5) = $\dfrac{2}{11} = 0{,}18$

**15. Tres fabricas A, B, C producen respectivamente el 45%, el 30% y el 25% del total de cierta pieza de automóvil. Los porcentajes de piezas defectuosas en la producción son del 4%, el 5% y el 6% respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que cierta pieza no sea defectuosa?**

P (no defectuosa) = 0,45 · 0,96 + 0,30 · 0,95 + 0,25 · 0,94 = 0,952

**16. En una Universidad hay 400 estudiantes de los que 100 son chicos. Hay 110 que hablan francés de los que 105 son chicas. Elegida una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que no hable francés? ¿Y de que sea un chico que hable francés? Si hemos elegido un estudiante que habla francés ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?**

**16.** Con los datos del enunciado completamos la siguiente tabla:

| | Chicas | Chicos | Total |
|---|---|---|---|
| Habla francés | 105 | 5 | 110 |
| No habla francés | 195 | 95 | 290 |
| Total | 300 | 100 | 400 |

P (no hable francés) = $\dfrac{290}{400} = 0{,}725$ P (sea chico y hable francés) = $\dfrac{5}{400} = 0{,}0125$

P (sea chica/ habla francés) = $\dfrac{105}{110} = 0{,}95$

**17. En una clase hay 7 calculadoras gráficas y 3 programables. La probabilidad de que en una sesión de trabajo se agoten las pilas en las primeras es 0,05 y en las segundas 0,02.**

**a) Elegida una calculadora al azar halla la probabilidad de que se agoten las pilas.**

**b) Sabiendo que a una calculadora se le han agotado las pilas ¿qué probabilidad hay de que fuera una calculadora gráfica?**

a) P(se agoten las pilas) = $\frac{7}{10}\cdot 0{,}05+\frac{3}{10}\cdot 0{,}02=0{,}041$

b) P(gráfica/ se han agotado las pilas) = $\dfrac{\frac{7}{10}\cdot 0{,}05}{0{,}041}=0{,}854$

**18. El Ayuntamiento de una ciudad ha inaugurado una nueva piscina cubierta. Se pasa una encuesta a 2000 personas sobre si las instalaciones de la piscina son o no adecuadas. A un 35 % de los encuestados no les parecen adecuadas. De los 2000 encuestados, 1600 viven habitualmente en la ciudad. Además, el porcentaje de los que viven en la ciudad y les han parecido adecuadas es del 60 %.**

**a) Si se elige una encuesta ¿cuál es la probabilidad de que le parezca adecuada la piscina y viva en la ciudad?**

**b) Si hemos elegido una encuesta de una persona que no vive habitualmente en la ciudad ¿cuál es la probabilidad de que no le parezcan adecuadas las instalaciones de la piscina?**

Con los datos del enunciado completamos la siguiente tabla:

| | Viven habitualmente | No viven habitualmente | Total |
|---|---|---|---|
| Adecuadas | 960 | 340 | 1300 |
| No adecuadas | 640 | 60 | 700 |
| Total | 1600 | 400 | 2000 |

a) P (Adecuada y viva) = $\frac{960}{2000}=0{,}48$

b) P (No adecuadas/ no vive) = $\frac{60}{400}=0{,}15$

**19. Un alumno va a clase el 85% de los días en autobús y el resto en coche con sus padres. Cuando va en autobús llega tarde a clase el 30% de los días. Cuando va con sus padres llega puntual 60% de los días. Halla:**
**a) ¿Cuál es la probabilidad de que un día llegue tarde?**

**b) Si un día llega puntual ¿cuál es la probabilidad de que haya ido en autobús?**

a) P (llegue tarde) = 0,85 · 0,30 + 0,15 · 0,40 = 0,315

b) P (autobús/ llega puntual) = $\frac{0{,}85\cdot 0{,}70}{1-0{,}315}=0{,}869$

**20. Una moneda esta trucada de forma que la probabilidad de sacar cara es triple que la de cruz. Lanzamos la moneda y si sale cara sacamos una bola de una caja que contiene 10 bolas rojas y 6 blancas y si sale cruz sacamos una bola de otra urna que contiene 8 bolas rojas y 5 blancas. Lanzamos la moneda al aire, halla:**

**a) La probabilidad de sacar una bola blanca.**

**b) Sabiendo que hemos sacado una bola blanca ¿cuál es la probabilidad de haber sacado cara al lanzar la moneda?**

Con las condiciones del problema sabemos que P(cara) = 0,75 y P(cruz) = 0,25.

a) P (sacar bola blanca) = $0{,}75 \cdot \frac{6}{16} + 0{,}25 \cdot \frac{5}{13} = 0{,}377$

b) P (cara/ sacado bola blanca) = $\frac{0{,}75 \cdot \frac{6}{16}}{0{,}377} = 0{,}746$

## ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 380

**1. Se estima que el 8% de la población española padece diabetes. Una nueva prueba diagnostica correctamente el 95% de los pacientes que sufren esta enfermedad, pero produce un 3% de falsos positivos. Sabiendo que una persona ha dado positivo en dicha prueba, ¿qué probabilidad hay de que realmente sea diabético?**

P (Diabético/ +) = $\frac{0{,}08 \cdot 0{,}95}{0{,}08 \cdot 0{,}95 + 0{,}92 \cdot 0{,}03} = 0{,}7336$

**2. Los dos sucesos de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad, 0,5. La probabilidad de que ocurra uno de ellos sabiendo que ha ocurrido el otro es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos?**

Sean A y B los sucesos que verifican P (A) = P (B) = 0,5 y P (A/B) = 0,3. Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [0{,}5 + 0{,}5 - 0{,}15] = 0{,}15$$

**3. En una granja hay patos de dos tipos con pico rojo o con pico amarillo. Se observa que el 40% son machos con pico amarillo; el 20% de todos tienen el pico rojo mientras que el 35% de los que tienen el pico rojo son machos.**

**a) Elegido un pato al azar, halla la probabilidad de que sea macho.**

**b) Si el pato elegido es una hembra, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el pico rojo?**

Con los datos del enunciado completamos la siguiente tabla:

| | Pico rojo | Pico amarillo | Total |
|---|---|---|---|
| Machos | 7 | 40 | 47 |
| Hembras | 13 | 40 | 53 |
| Total | 20 | 80 | 100 |

a) P (Macho) = $\frac{47}{100} = 0{,}47$

b) P (Pico rojo/ Hembra) = $\frac{13}{53} = 0{,}245$

**4. Si el ocupante de un coche sufre un choque frontal a 80 km/h sin llevar puesto el cinturón de seguridad suele ser mortal en el 98% de los casos. Según datos de la Dirección General de Tráfico, el 88,3% de los usuarios de coche utilizan cinturón, elemento que reduce a la mitad el riesgo de muerte en un accidente. Si una persona sufre un accidente que no le cuesta la vida a 80 km/h, ¿qué probabilidad hay de que llevara puesto el cinturón de seguridad?**

P (Cinturón/ no muere) = $\frac{0{,}883 \cdot 0{,}51}{0{,}883 \cdot 0{,}51 + 0{,}117 \cdot 0{,}02} = 0{,}9948$

**5. La probabilidad de que un alumno de Bachillerato apruebe Matemáticas es 0,5, de que apruebe Inglés es 0,375 y de que no apruebe ninguna es 0,25.**

**a) Halla la probabilidad de que apruebe al menos una de las dos asignaturas.**

**b) Calcula la probabilidad de que apruebe las dos asignaturas.**

**c) Sabiendo que ha aprobado Inglés, cuál es la probabilidad de que apruebe Matemáticas.**

Los datos del problema son: P(M) = 0,5 ; P(I) = 0,375 ; $P\left(\overline{M} \cap \overline{I}\right) = 0{,}25$

a) $P\left(M \cup I\right) = 1 - P(\overline{M \cup I}) =$ 1 - $P\left(\overline{M} \cap \overline{I}\right) = 0{,}75$

b) $P\left(M \cap I\right) = P(M) + P(I) - P\left(M \cup I\right) = 0{,}5 + 0{,}375 - 0{,}75 = 0{,}125$

c) P (M / I) = $\frac{P\left(M \cap I\right)}{P(I)} = \frac{0{,}125}{0{,}375} = 0{,}33$

**6. Calcula $P(\overline{A} / B)$, sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$**

Utilizando las propiedades de la probabilidad y la definición de probabilidad condicionada obtenemos:

$P\left(A \cap B\right)$ = P (A) + P (B) - $P\left(A \cup B\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}$

$$P(\overline{A}/\ B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

**7. En una empresa el 72,5% de los trabajadores tienen teléfono móvil. De estos el 70% tienen tablet. Por otro lado el 33,3% de los que no tienen teléfono móvil si tienen tablet.**

**a) ¿Qué tanto por ciento tienen ambos aparatos?**

**b) ¿Qué tanto por ciento tienen tablet?**

**c) Si un trabajador elegido al azar no dispone de tablet, ¿qué probabilidad hay de que tenga teléfono móvil?**

Las probabilidades pedidas son:

a) Tienen ambos aparatos: 0,725· 0,70 = 0,5075, es decir el 50,75%.

b) Tienen tablet: 0,725 · 0,7 + 0,275 · 0,333 = 0,5991, es decir el 59,91%.

c) P (Teléfono móvil /No tablet) = $\frac{0{,}725 \cdot 0{,}30}{1 - 0{,}5991} = 0{,}5425$. Por tanto la probabilidad de que no teniendo tablet si tenga teléfono móvil es 0,5425.

**8. Los miembros de una sociedad de Amigos del Camino de Santiago son el 30% españoles, el 60% franceses y el resto de otras nacionalidades. Los franceses de la sociedad son peregrinos en la proporción de uno de cada mil, los españoles en la proporción de uno de cada cien, mientras que el resto de los miembros de la sociedad es peregrino en la proporción de uno de cada diez mil. Se elige al azar un miembro de la sociedad**

**a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea peregrino?**

**b) Si el miembro elegido resultó ser peregrino del Camino de Santiago, ¿cuál es la probabilidad de que no sea español ni francés?**

Las probabilidades pedidas son:

a) P (peregrino) = 0,3 · 0,01 + 0,6 · 0,001 + 0,1 · 0,0001 = 0,00361.

b) P (Ni español ni francés / peregrino) = $\frac{0{,}1 \cdot 0{,}0001}{0{,}00361} = 0{,}00277$.

**9. El pasado invierno una ciudad disponía de una vacuna para proteger a la población frente al virus de la gripe. Si una persona se ha vacunado, la probabilidad de que se infecte con el virus es de 0,1; sin la vacuna, dicha probabilidad es de 0,3. El 40% de la población se vacunó.**

**a) Halla la probabilidad de que una persona elegida al azar se infecte con el virus.**

**b) Si la persona elegida al azar se ha infectado con el virus ¿cuál es la probabilidad de que esté vacunada?**

Las probabilidades pedidas son:

a) P (se infecte con el virus) = P (vacunado) · P (infecte con virus/ vacunado) + P (no vacunado) · P (infecte con virus/ no vacunado) = 0,40 · 0,1 + 0,60 · 0,3 = 0,22

b) P (vacunada / infectada con el virus) = $\frac{0{,}40 \cdot 0{,}1}{0{,}22} = 0{,}1818$

## PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 381

**La paradoja del cumpleaños**

**Una *paradoja* es un enunciado que tiene apariencia verdadera pero que, analizándolo en detalle, lleva a una situación que contradice el sentido común. La teoría de la probabilidad es un campo de las matemáticas extremadamente rico en paradojas. Algunas paradojas reciben el nombre de su creador: Bertarnd, Blyth, Yule-Simpson, Monty Hall, etc. y otras el del tema al que hacen referencia.**

**Entre estas últimas una de las paradojas más conocidas y curiosas es la paradoja del cumpleaños, aunque en sentido estricto no es una paradoja ya que no presenta contradicción lógica, pero si es una paradoja en el sentido de que es una verdad matemática que contradice la intuición común.**

**Su enunciado puede ser uno de los siguientes:**

- ***¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de n personal al menos dos de ellas cumplan años el mismo día?***

- ***¿Cuál es el número mínimo de personas que tiene que haber para que el porcentaje de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día sea mayor del 50%?***

**Si se plantean estas preguntas a un grupo de personas piensan que la probabilidad es pequeñísima a no ser que hubiera en el grupo al menos 360/2 = 180 personas y así la posibilidad de encontrar al menos dos que cumplan años el mismo día será un número mayor que el 50%. Pero en la realidad con menos personas ya se cumple el enunciado, esta es la razón de que se considere una paradoja que contradice lo que la intuición nos indica.**

**Investiga sobre esta paradoja y haz un estudio matemático de la misma.**

Consideramos el año de 365 días, no tenemos en cuenta los años bisiestos ni las personas que son mellizas. Estos serían otros problemas.

a) Vamos a solucionar el primer enunciado:

Llamamos A al suceso "al menos dos cumplen los años el mismo día" y vamos a considerar el suceso contrario $\overline{A}$ es decir el suceso "no existen dos personas que cumplan años el mismo día"

Vamos a simplificar el problema para verlo mejor:

- Supongamos que tenemos n = 1 persona. P ( A) = 0

- Supongamos que tenemos n = 2 personas. P ( $\overline{A}$ ) = $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} = \frac{V_{365,2}}{VR_{365,2}}$ ; P (A) = 1- $\frac{V_{365,2}}{VR_{365,2}}$

- Supongamos que tenemos n = 3 personas. P ( $\overline{A}$ ) = $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = \frac{V_{365,3}}{VR_{365,3}}$ ; P (A) = 1- $\frac{V_{365,3}}{VR_{365,3}}$

- Supongamos que tenemos n = 5 personas. P ( $\overline{A}$ ) = $\frac{V_{365,5}}{VR_{365,5}}$ ; P (A) = 1 - $\frac{V_{365,5}}{VR_{365,5}}$

- Para n-personas : P ( $\overline{A}$ ) = $\frac{V_{365,n}}{VR_{365,n}}$ ; P (A) = 1 - $\frac{V_{365,n}}{VR_{365,n}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-n+1)}{365^n}$

Esta es la fórmula que nos da la probabilidad de que en un grupo de n personas al menos dos de ellas cumplan años el mismo día.

b) A partir de la fórmula anterior mediante un programa de ordenador construimos la siguiente tabla:

| Personas | 5 | 10 | 15 | 20 | 23 | 25 | 27 | 30 | 40 | 50 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | 0,027 | 0,117 | 0,25 | 0,411 | 0,507 | 0,569 | 0,627 | 0,814 | 0,891 | 0,97 | 0,999 |

Y la gráfica que se ajusta a ella es:


Por lo cual el número mínimo de personas que tiene que haber para que la probabilidad de que al menos dos de ellas cumplan años el mismo día sea mayor del 50% es 23 personas.