UNIDAD 5: Geometría euclídea. Producto escalar

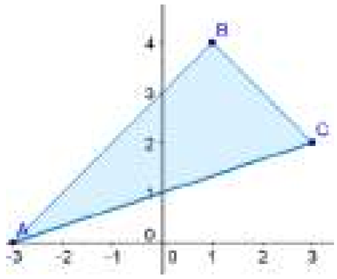
ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 118

1. Halla la proyección del punto A (- 6, 4) sobre la recta de ecuación 5x – 3y + 8 = 0.

El punto buscado es la intersección de la recta dada con la recta perpendicular a ella pasando por el punto A (- 6, 4):

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2 = 0 \\ 5x - 3y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

El punto proyección es A´ (- 1, 1).



2. Sea el triángulo de vértices A (- 3, 0); B (1, 4) y C (3, 2). Halla:

a) La ecuación de la altura que pasa por C.

b) El área del triángulo.

a) La recta pedida pasa por C y es perpendicular al lado AB y tiene de ecuación x + y – 5 = 0.

b) La medida de la base AB es $\sqrt{32}$. La medida de la altura BC es $\sqrt{8}$.

El área del triángulo mide $\dfrac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{8}}{2} = 8\ u.\ c.$

3. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla la distancia entre ellas:

3x – 4y + 7 = 0; 8y – 6x = 0

Las rectas son paralelas.

La distancia entre ellas es la distancia del punto (4, 3) de la segunda recta a la primera. Esta distancia vale:

$$\frac{|3\cdot 4 - 4\cdot 3 + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{7}{5} = 1{,}4\ u.\ l.$$

4. Dados los vectores $\vec{v} = (12, -5)$ y $\vec{w} = (10, 24)$. Halla su producto escalar, el modulo de estos vectores y el ángulo que forman.

El producto escalar es: $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$.

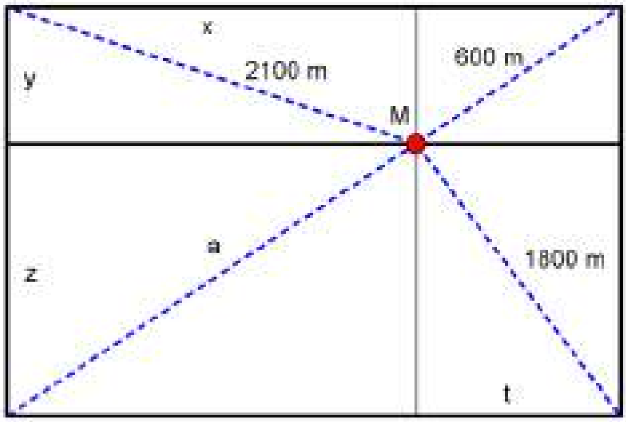
Los módulos de los vectores son: $|\vec{v}| = 13$ y $|\vec{w}| = 26$.

El ángulo que forman es 90º.

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 132

1. El manantial oculto. En una antigua ciudad amurallada, de forma rectangular, existía en un punto intramuros un manantial que se encontraba a 2100 m de la esquina superior izquierda, a 600 m de la esquina superior derecha y a 1800 m de la esquina inferior derecha. El manantial actualmente ha desaparecido. ¿A qué distancia se encontraría de al esquina inferior izquierda?

Denotando con **x, y, z, t** los lados de los distintos triángulos rectángulos que se formen y con **a** la distancia que queremos hallar, al aplicar el teorema de Pitágoras, obtenemos:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2100^2 \\ y^2 + t^2 = 600^2 \\ z^2 + t^2 = 1800^2 \\ x^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2100^2 \\ -y^2 - t^2 = -600^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - t^2 = 2100^2 - 600^2 \\ z^2 + t^2 = 1800^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + z^2 = 2100^2 - 600^2 + 1800^2$$

Entre esta última igualdad obtenida y la última igualdad del sistema, obtenemos:

$a^2 = 2100^2 - 600^2 + 1800^2$, entonces a = 2700 metros.

2. Número oculto. La siguiente expresión esconde un número conocido. ¿Sabes cuál es?

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

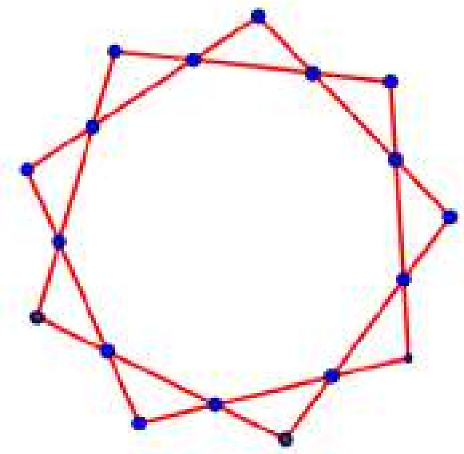
Llamando x a la expresión dada, obtenemos:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Luego $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$, es el número de oro.

3. Monedas. ¿Es posible colocar 18 monedas en 9 filas de manera que cada fila contenga 4 monedas?

En la figura pueden verse 18 monedas colocadas en 9 filas y con 4 monedas en cada fila.



4. Tantos por ciento. Parte de los 8 000 habitantes de un pueblo se va de vacaciones en verano. De los que quedan, el 63,636363…% les gusta la música y al 27,297297297… les gusta usar pantalones vaqueros. ¿Cuántos habitantes de fueron de vacaciones en verano?

Observamos que:

$$63{,}6363\ldots = \frac{6300}{99} = \frac{700}{11} \quad \text{y} \quad 22{,}297297\ldots = \frac{22\,275}{999} = \frac{2\,475}{111} = \frac{825}{37}$$

Al 63,63% de los que queden les gusta la música, es decir al $\frac{700}{11}\%$ les gusta la música.

Al 22,297% de los que queden les gusta usar pantalones vaqueros, es decir al $\frac{825}{37}\%$ les gusta usar pantalones vaqueros.

Les gusta la música: $\frac{700}{1100}\cdot x = \frac{7}{11}\cdot x$. Les gusta usar vaqueros: $\frac{825}{37}\cdot x = \frac{33}{148}\cdot x$.

Por lo tanto, x ha de ser múltiplo de 11 y de 48.

Puede ser x = 1628; x = 3256; x = 4884; x = 6512.

Se fueron de vacaciones. 6372 si x = 1628 o 4744 si x = 3256; así sucesivamente.

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 134

1. Halla un vector que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{w} = (0, 2, -1)$ y cuyo módulo sea 12 unidades.

Introducimos los vectores dados y definimos el vector que queremos hallar como $\vec{v}=(a,\, b,\, c)$. Imponiendo las condiciones del enunciado y resolviendo el sistema resultante obtenemos, como vemos en la imagen, que hay dos vectores que cumplen las condiciones y son:

$$\vec{v}=(-8,\, 4,\, 8) \text{ y } \vec{v}=(8,\, -4,\, -8)$$

$$u:=[1,2,0] \rightarrow [1,2,0]$$
$$w:=[0,2,-1] \rightarrow [0,2,-1]$$
$$v:=[a,b,c] \rightarrow [a,b,c]$$
$$u\cdot v \rightarrow a+2\cdot b$$
$$w\cdot v \rightarrow 2\cdot b-c$$
$$\text{norma}(v) \rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$\text{resolver}\left\{\begin{bmatrix} a+2\cdot b=0 \\ 2\cdot b-c=0 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}=12 \end{bmatrix}\right. \rightarrow \{\{a=-8,b=4,c=8\},\{a=8,b=-4,c=-8\}\}$$

2. Halla el simétrico del punto P (3, 2, 0) respecto a la recta de ecuación $\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ 2x+y+z+4=0 \end{cases}$**.**

Hallamos el simétrico del punto dado respecto a la recta utilizando la expresión **simetría(recta,punto(, ,))** como vemos en la imagen y obtenemos que el punto simétrico buscado es $\left(\frac{-31}{7},\frac{-6}{7},\frac{-44}{7}\right)$

$$r=\text{recta}(x+y-z-3=0,2\cdot x+y+z+4=0) \rightarrow 3\cdot x+2\cdot y+1=0 \cap -10\cdot x-7\cdot y+z=0$$
$$\text{simetría}(r,\text{punto}(3,2,0)) \rightarrow \left(-\frac{31}{7},-\frac{6}{7},-\frac{44}{7}\right)$$

3. Halla el punto de la recta $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=-1 \end{cases}$ **que equidista de los puntos P (0, 3, 1) y Q (- 1, 2, 1).**

Hallamos el plano mediatriz del segmento PQ, para lo cual hallamos el punto medio de PQ, que llamamos A y el vector PQ, que llamamos n.

Para hallar el plano mediatriz utilizamos la expresión **plano(A, n),** como vemos en la imagen, y obtenemos el plano - x – y + 2 = 0.

Por ultimo, cortamos este plano con la recta, resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones, y obtenemos el punto pedido (3, -1, -1).

$$P=\text{punto}(0,3,1) \rightarrow (0,3,1)$$
$$Q=\text{punto}(-1,2,1) \rightarrow (-1,2,1)$$
$$A=\text{punto\_medio}(P,Q) \rightarrow \left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2},1\right)$$
$$n=\text{vector}(P,Q) \rightarrow [-1,-1,0]$$
$$p=\text{plano}(A,n) \rightarrow -x-y+2=0$$
$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix}-x-y+2=0\\ z+1=0\\ x+2\cdot y=1\end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=3,y=-1,z=-1\}\}$$

4. Dadas las rectas $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ **;** $s \equiv \begin{cases} x = 3-6t \\ y = 2t \\ z = -2+4t \end{cases}$ **y** $m \equiv \begin{cases} x-2z-5=0 \\ x+y-6z+19=0 \end{cases}$**.**

a) Halla la distancia entre las rectas r y s.

b) Halla el ángulo que forman las rectas r y m.

a) Como estas rectas son paralelas, por tener los vectores proporcionales, hallamos la distancia entre ellas tomando un punto de una de las rectas, por ejemplo de s, y hallando la distancia a la otra, en este caso a r, como vemos en la imagen y obtenemos que esta distancia es $\frac{\sqrt{1946}}{14}$ unidades.

$$r=\text{recta}(x+3\cdot y+6=0,2\cdot y-z+5=0) \rightarrow x+3\cdot y+6=0 \cap 5\cdot x+3\cdot y+6\cdot z=0$$
$$\text{distancia}(\text{punto}(3,0,-2),r) \rightarrow \frac{\sqrt{1946}}{14}$$

b) Para hallar el ángulo que forman las rectas r y m comenzamos definiendo las rectas, en forma general y con la expresión **ángulo3d(r, m**) obtenemos que estas rectas forman un ángulo de 90º como vemos en la imagen.

$r = recta(x+3\cdot y+6=0, 2\cdot y-z+5=0) \rightarrow x+3\cdot y+6=0 \cap 5\cdot x+3\cdot y+6\cdot z=0$

$m = recta(x-2\cdot z-5=0, x+y-6\cdot z+19=0) \rightarrow -2\cdot x+y+34=0 \cap -24\cdot x-5\cdot y+68\cdot z=0$

$ángulo3d(r,m) \rightarrow \frac{\pi}{2}$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 138

1. Sean los vectores libres $\vec{u} = (3, 1, 4)$ y $\vec{v} = (3, 4, 0)$. Halla $\vec{u} \cdot \vec{v}$; el módulo de cada uno de estos vectores y el ángulo que forman.

El producto escalar es $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = 13.

Los módulos de los vectores son: $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{26} = 5{,}10\ u.\ l.$ y $\left|\vec{w}\right| = 5\ u.\ l.$

El ángulo que forman los vectores es: $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0{,}5099$, es decir, el ángulo es 59º 20´ 57,23´´.

2. Halla un vector $\vec{v}$ de R^3 en cada uno de los siguientes apartados:

a) Que sea proporcional al vector (- 2, 1, 2) y de módulo 9.

b) Que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 0, -1)$ y $\vec{w} = (3, 2, 1)$.

c) Que sea perpendicular al eje OY y tal que $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = 2 siendo $\vec{u} = (4, 1, -2)$.

a) Todos los vectores proporcionales al dado son de la forma (- 2t, t, 2t). Haciendo que el módulo sea 9 obtenemos $\sqrt{4t^2 + t^2 + 4t^2} = 9$; de donde $t = \pm 3$ y los vectores pedidos son (- 6, 3, 6) y (6, - 3, - 6).

b) Sean (a, b, c) las coordenadas del vector pedido. Obligándole a ser perpendicular a los dados obtenemos:

$$\begin{cases} 2a - c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

es decir, a = 2t, b = -5 t y c = 4t. Los vectores son (2t, - 5t, 4t) con t un número real cualquiera.

c) Sean (a, b, c) las coordenadas del vector pedido. Imponiéndole las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2a - c = 1 \end{cases}$$

es decir, a = t, b = 0 y c = 2t - 1. Los vectores son (t, 0, 2t - 1) con t un número real cualquiera.

3. Halla un vector de R³ que sea linealmente dependiente con los vectores $\vec{u} = (1,\ 2,\ 0)$, $\vec{w} = (0,\ 1,\ -1)$ y perpendicular al vector de coordenadas (2, 3, 1).

Sean (a,b,c) las coordenadas del vector pedido. Imponiéndole las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\begin{cases} -2a + b + c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

es decir, a = t, b = - 2t y c = 4t. Los vectores son (t, - 2t, 4t) con t un número real cualquiera.

Un vector sería el (1, - 2, 4).

4. Halla los ángulos del triángulo de vértices A (4, - 2, 2); B (1, - 5, 2) y C (- 2, 1, 1). ¿Qué tipo de triángulo es el ABC?

Hallamos los ángulos y obtenemos:

Ángulo en A: $\cos A = \dfrac{9}{\sqrt{828}} = 0{,}3128 \quad \Rightarrow \quad A = 71^{\circ}\ 46'\ 25{,}17''.$

Ángulo en B: $\cos B = \dfrac{9}{\sqrt{828}} = 0{,}3128 \quad \Rightarrow \quad B = 71^{\circ}\ 46'\ 25{,}17''.$

Ángulo en C: $\cos C = \dfrac{37}{46} = 0{,}8043 \quad \Rightarrow \quad C = 36^{\circ}\ 27'\ 9{,}65''.$

Es un triángulo isósceles por tener dos ángulos iguales.

5. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores perpendiculares al vector $\vec{w}$. Demuestra que el vector $\left(a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}\right)$ es también perpendicular al vector $\vec{w}$.

Hallamos $\left(a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}\right) \cdot \vec{w}$ = a · $\vec{u}$ · $\vec{w}$ + a · $\vec{v}$ · $\vec{w}$ = 0, por lo que son perpendiculares.

6. Halla el ángulo que forma el vector $\vec{u} = \left(0,\ \sqrt{3},\ 1\right)$ con los ejes coordenados OX, OY y OZ.

El ángulo con OX es 90º; con OY es de 30º y con OZ es de 60º.

7. Halla el ángulo que forman las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 4x + y + z = 8 \end{cases}$$

Para calcular el ángulo entre las dos rectas:

$\cos(r,\ s) = \left| \dfrac{(4,\ -3,\ 0) \cdot (-1,\ 7,\ -3)}{5 \cdot \sqrt{59}} \right| = \dfrac{5}{\sqrt{59}} = 0{,}6509,$ entonces el ángulo mide 49º 23´ 13,72´´.

8. Halla el ángulos que forma el plano 3x – 2y + z – 2 = 0 con la recta $r \equiv x+3 = y-2 = -z$**.**

Para calcular el ángulo entre la recta y el plano:

$sen\,(r,\pi) = \left|\dfrac{(3,\,-2,\,1)\cdot(1,\,1,\,-1)}{\sqrt{3}\,\cdot\sqrt{14}}\right| = 0,$ entonces el ángulo es 0º y la recta es paralela al plano.

9. Halla el ángulo que forman los planos $\pi_1 \equiv x-2z-3=0$ **y** $\pi_2 \equiv 2x+3y-6=0$

Para calcular el ángulo entre los dos planos:

$\cos\,(\pi_1,\pi_2) = \left|\dfrac{(1,\,0,\,-2)\cdot(2,\,3,\,0)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{65}} = 0{,}2481,$ entonces el ángulo es 75º 38´ 12,11´´.

10. Halla la distancia entre el punto P (1, 2, 3) y el plano 4x – 2y + 4z – 3 = 0.

La distancia es $\dfrac{3}{2} = 1{,}5$ unidades lineales

11. Halla la distancia entre los planos $\pi_1 \equiv x-2y+3z=2$ **y** $\pi_2 \equiv 4y-6z=2x+3$**.**

Como los planos son paralelos tomamos un punto del primer plano y hallamos la distancia desde el punto anterior al otro plano, y obtenemos: $\dfrac{\sqrt{14}}{4} = 0{,}94$ unidades lineales.

12. Halla las siguientes ecuaciones:

a) Recta que pasa por el punto P (1, 3, 0) y es perpendicular al plano de ecuación 3x + 4y – z = 6.

b) Plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la recta de ecuación:

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$$

c) Plano mediatriz del segmento de extremos P (- 2, 3, 5) y Q (6, -1, 3).

d) Plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x=2t \\ y=4 \\ z=-t \end{cases}$ **y es perpendicular al plano x - 3y - 2z + 5 = 0.**

a) La recta tiene por ecuación $\begin{cases} x=1+3t \\ y=3+4t. \\ z=-t \end{cases}$

b) El plano tiene por ecuación x – z = 0.

c) El plano pasa por el punto medio del segmento (2, 1, 4) y tiene como vector normal el vector PQ.

Su ecuación es 4x – 2y – z – 2 = 0.

d) El plano pedido, por contener a la recta, contiene sus puntos y un vector director, y por ser perpendicular al plano dado contiene uno de sus vectores normales. El plano pedido tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y-4 & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$, es decir, x – y + 2z + 4 = 0.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 139

13. Halla la ecuación del plano perpendicular a los planos x - y + z = 3, OXZ y que pase por el punto (3, 2, 1).

La ecuación del plano es $\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, es decir, x – z - 2 = 0.

14. Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 2 = 0$; la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$ y el punto A (1, 2, 1). Halla el plano perpendicular al plano π, paralelo a la recta r y que pase por A.

La ecuación del plano es $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, es decir, x –y + z = 0.

15. Halla el valor de t para que los puntos A (1, - 5, t), B (2, t, - 1) y C (t, - 5, 2) sean los vértices del triángulo ABC rectángulo en A.

Se debe verificar que el vector AB ha de ser perpendicular al vector AC, de modo que:

(1, t + 5, - 1 – t) · (t - 1, 0, 2 - t) = 0 $\Rightarrow$ $t = \pm\sqrt{3}$

16. Halla la proyección de:

a) El punto P (1, - 1, 0) sobre el plano x – 2y + z + 9 = 0.

b) El punto A (1, - 1, 0) sobre la recta $r \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$

c) La recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = -y-3 = z$ **sobre el plano x + 2y – 3z + 5 = 0.**

a) Cortamos la recta, que pasa por el punto P y es perpendicular al plano dado, con el mismo y obtenemos el punto pedido.

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = z \\ x-2y+z+9=0 \end{cases} \Rightarrow P'(-1, 3, 2).$$

b) Cortamos el plano, que pasa por el punto A y es perpendicular la recta dada, con la misma recta y obtenemos el punto pedido.

$$\begin{cases} z=0 \\ x+y=2 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow A'(2, 0, 0).$$

c) La proyección de la recta dada sobre el plano es la recta que viene dada como intersección del plano dado con el plano que contiene a la recta dada y es perpendicular al plano dado.

La ecuación del plano es $\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$, es decir, x +7y + 5z + 20 = 0.

La recta proyección viene dada por: $\begin{cases} x+7y+5z+20=0 \\ x+2y-3z+5=0 \end{cases}$.

17. Halla los siguientes puntos simétricos:

a) Del punto P (3, - 2, 5) respecto al origen de coordenadas.

b) Del punto Q (1, 0, 2) respecto al plano x – y + z = 6.

c) Del punto A (0, 3, 4) respecto a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = 2-2t \end{cases}$$

a) El origen de coordenadas es el punto medio entre P y su simétrico P´. Por tanto el punto simétrico es P´ (- 3, 2, - 5).

b) Hallamos la intersección del plano dado con la recta perpendicular al plano pasando por Q y de este modo obtenemos el punto medio M entre Q y su simétrico Q´.

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = z-2 \\ x-y+z=6 \end{cases} \Rightarrow$$ M (2, - 1, 3) por lo que Q´ (3, - 2, 4)

c) El punto dado pertenece a la recta por lo que su simétrico es el mismo.

18. Halla el plano mediatriz del segmento de extremos A (2, - 1, 5) y B (- 4, 3, 1).

El plano mediatriz pasa por el punto medio de AB y tiene como vector normal el vector AB. La ecuación es 3x – 2y + 2z – 1 = 0.

19. Ecuación de la recta que se apoya en las rectas $r \equiv \begin{cases} y-3z=-2 \\ x+z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=4-2t \\ y=-2 \\ z=t \end{cases}$ y pasa por el punto P (1, 0, 1).

La recta buscada vine dada como intersección de dos planos, el que contiene a la recta r y al punto P y el que contiene a la recta s y al punto P.

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ 2x+y+4z-6=0 \end{cases}$$

20. Halla un punto de la recta $r \equiv \begin{cases} z=-1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ que equidiste de los puntos A (2, 0, 3) y B (4, 4, - 1).

Hallamos el plano mediatriz del segmento AB y lo cortamos con la recta dada para obtener el punto pedido:

$$\begin{cases} z=-1 \\ x+y+z=2 \\ x+2y-2z=5 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{P (3, 0, - 1).}$$

21. Halla la ecuación del plano simétrico del plano x – y + z = 3 respecto al origen de coordenadas.

El plano simétrico es paralelo al dado y pasa por el simétrico del origen de coordenadas respecto al plano dado.

La ecuación del plano es x – y + z + 3 = 0.

22. Ecuación del plano de vector normal $\vec{v} = (1,1,0)$ y que diste 8 unidades del origen de coordenadas.

Todos los planos con ese vector normal son de la forma x + y + D = 0. Hallamos D para que verifique las condiciones del enunciado y obtenemos:

$$\left|\frac{D}{\sqrt{2}}\right| = 8 \ ; \ D = \pm 8 \cdot \sqrt{2}. \ .$$

Los planos son: x + y + $8\sqrt{2}=0$ y x + y - $8\sqrt{2}=0$.

23. Encuentra la ecuación de la recta que se apoya en las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=5+t \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x=2 \\ 3y+z+1=0 \end{cases}$ y es paralela a la recta uno de cuyos vectores directores es $\vec{v}=(1,3,-2)$.

La recta buscada vine dada como intersección de dos planos, el que contiene a la recta r y al vector dado y el que contiene a la recta s y al vector dado.

La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y-4z+25=0 \\ 7x-3y-z-15=0 \end{cases}$$

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 140

1. Sean $\vec{u}=(1,1,2)$ y $\vec{v}=(a,1,-1)$ dos vectores. Halla el valor de a para el cual los vectores ($\vec{u}$ + $\vec{v}$) y ($\vec{u}$ - $\vec{v}$) son ortogonales.

Se debe verificar que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=0$, es decir, (1+ a, 2, 1) · (1 - a, 0, 3) = 0, entonces $a=\pm 2$.

2. Sea el cubo de base ABCD con A (2, 0, 0), B (2, 2, 0), C (0, 2, 0) y D (0, 0, 0). El vértice H de la base paralela EFGH tiene de coordenadas (0, 0, 2).

a) Halla los restantes vértices del cubo y la ecuación del plano que los contiene.

b) Halla el ángulo que forma la diagonal AH con la diagonal AF.

c) Halla el volumen del cubo.

a) Los vértices del cubo son los puntos E (2, 0, 2); F (2, 2, 2) y G (0, 2, 2).

b) Estas diagonales forman un ángulo de 60º.

c) El lado del cubo mide 2 unidades, por lo que su volumen es de 8 unidades cúbicas

3. Halla puntos de la recta $\begin{cases} x-z+2=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$ que disten una unidad del plano 2x + 2y + z + 5 = 0.

Un punto cualquiera de la recta tienen de coordenadas (t, 2t + 3, t + 2). Imponiendo la condición de que su distancia al plano sea 1 unidad obtenemos:

$$\left|\frac{2t+4t+6+t+5}{3}\right| = 1 \Rightarrow t = -\frac{16}{7} \text{ y } t = -\frac{11}{7}.$$

Este problema tiene dos soluciones que son los puntos: $P\left(-\frac{17}{7}, -\frac{11}{7}, -\frac{2}{7}\right)$ y $Q\left(-\frac{10}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}\right)$.

4. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 1, 1), es paralela al plano de ecuación 2x- 4y – 2z + 3 = 0 y está en el mismo plano que la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ **.**

La recta pedida vendrá dada como intersección de dos planos, el paralelo al dado pasando por el punto y el plano que contiene a la recta y al punto.

La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} 2x-4y-2z+4=0 \\ \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-z+2=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$$

5. Sea el triángulo de vértices A (2, 0, 0), B (0, 0, 2) y C (0, 2, 0). Halla la ecuación de la altura que pasa por A.

La altura que pasa por A es la recta que pasa por A (2, 0, 0) y es perpendicular a la recta BC.

Sean (a, b, c) las coordenadas de un vector director de la recta:

(a, b, c) · (0, 2, -2) = 0 por ser perpendicular al lado BC.

La recta buscada está en el plano que contiene al triángulo y tiene por ecuación x + y + z = 2, por lo que:

(a, b, c) · (1, 1, 1) = 0.

De estas dos condiciones obtenemos $\begin{cases} 2b-2c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2b \\ b=c \end{cases}$.

La altura tiene por ecuación $\frac{x-2}{-2} = y = z$.

6. Sea la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = z$ **. Halla la ecuación de la recta que pasando por P (1, 1, - 7) corte perpendicularmente a la recta dada.**

Hallamos el plano perpendicular a la recta pasando por P. Cortamos este plano con la recta y nos da el punto Q. La recta buscada es la que pasa por P y Q.

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = z \\ 2x - 2y + z + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Q (0, 3, - 1).}$$

La recta que pasa por P y Q es $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+7}{-6}$.

7. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 3$**, que pasa por el punto P (3, 1, 2) y que corta al eje OZ.**

La ecuación de la recta viene dada como intersección de dos planos, el que nos dan y el que contiene al eje OZ y al punto P, es decir:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases}.$$

8. Sean A (- 1, 12, 4) y B (- 4, 12, 8) dos vértices de un triángulo ABC. El vértice C es el punto de la recta $\begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = 11 - 4t \end{cases}$ **que está más próximo al punto A. Halla este punto y estudia cómo es el triángulo ABC.**

El punto C es el punto de corte de la recta dada con el plano perpendicular a la misma pasando por A.

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = 11 - 4t \\ 3x - 4z + 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ C (3, 0, 7).}$$

El triángulo ABC es rectángulo en A pues los vectores AB y AC son perpendiculares.

9. a) Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases}$ **que equidiste del origen de coordenadas y del punto A (- 2, 4, 0).**

b) Halla el ángulo que forma esa recta con el plano OXZ.

a) Hallamos el plano mediatriz de OA y donde se corten este plano con la recta dada es el punto P buscado.

$$\begin{cases} x-2y+5=0 \\ y+1=0 \\ x-y-2z=3 \end{cases} \Rightarrow \quad P\left(-7,\,-1,\,-\frac{9}{2}\right).$$

b) La recta es paralela al plano. El ángulo que forman es 0º.

10. Sea el punto R (3, 5, 1), la recta $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=-1+t \end{cases}$ **y el plano** $\pi \equiv 3x-2y+z+5=0$**. Halla el punto P del plano π tal que la recta RP sea paralela a la recta dada.**

El punto buscado lo obtenemos como intersección del plano dado con la recta paralela a la dada y pasando por R:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=y-5=z-1 \\ 3x-2y+z+5=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{P (1, 4, 0).}$$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 141

Hipatia de Alejandría

Proponemos unas pautas a seguir en la realización de un trabajo sobre Hipatia de Alejandría.

El escenario: Descripción de la época histórica. ¿Cómo era el mundo occidental en la época? La ciudad donde se desarrolla la historia: orígenes, ¿cómo era en los siglos IV y V? ¿Cómo es en la actualidad? Relaciones de la ciudad con el resto del mediterráneo.

Las instituciones: La Biblioteca y el Museo: ¿Qué eran? ¿Qué funciones cumplían? ¿Por qué las destruyen? Las “escuelas”: ¿Cómo era la enseñanza en la época? ¿Qué estilos de enseñanza se practicaban?