UNIDAD 7: Límites de funciones

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 170

1. Dadas las sucesiones:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ **b) 1, 3, 9, 27, …**

Para cada una de ellas, halla el valor de la suma de sus infinitos términos.

Las respuestas a los apartados son:

a) La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2} < 1$.

La suma de sus infinitos, S, términos es $S = \frac{a_1}{1-r}$, es decir, $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

b) La sucesión 1, 3, 9, 27, … es una progresión geométrica de razón r = 3 > 1.

La suma de n términos S_n, viene dada por la expresión $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$, es decir, $S_n = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3-1} = \frac{3^n - 1}{2}$.

El valor del límite de la expresión anterior cuando n tiende a $+\infty$ es $+\infty$, es decir:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n - 1}{2} = +\infty.$$

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$**, halla:**

a) $\lim_{x \to -2} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to 0} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

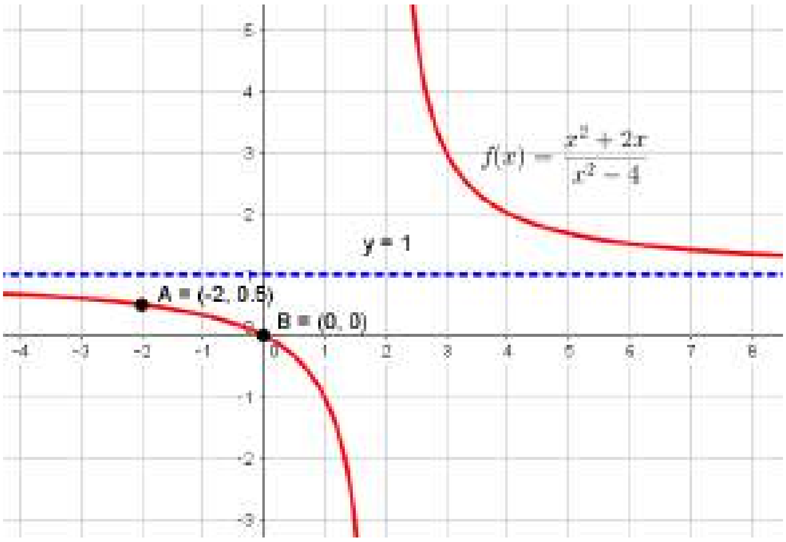
Los límites pedidos son:

a) $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{x \cdot (x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x}{x-2} = \frac{-2}{-2-2} = \frac{1}{2}$.

b) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \frac{0}{-4} = 0$.

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot (x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} = 1$.

En el gráfico pueden verse los resultados anteriores.



ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 187

1. Lentejas y garbanzos. En un puesto del mercado tiene 5 sacos de garbanzos y uno de lentejas. Un cliente se lleva una cierta cantidad de garbanzos; después, otro cliente se lleva el doble de garbanzos que el cliente anterior, quedándose sólo el saco de lentejas. El vendedor sólo vende sacos completos. Sabiendo que los diferentes sacos son de 19, 18, 31, 16, 15 y 20 kg, ¿de cuántos kilogramos es el asco de lentejas?

Sumando los kilos de todos los sacos, obtenemos 119 kg. Como un cliente se lleva cierta cantidad y otro se lleva el doble de esa cantidad quedan do sólo el saco de lentejas, entonces al quitar a 119 kg, el saco de lentejas debe quedar un número que es múltiplo de 3, esto se cumple con:

$$119 - 20 = 99.$$

Un cliente lleva 33 kg en los sacos de 18 kg y 15 kg y el otro cliente se lleva 66 kg en los sacos de 19 kg, 31 kg y 16 kg. El saco de lentejas peso 20 kg.

2. Tres cartas. De una baraja española de 40 cartas, extraemos 3 y las colocamos en una fila horizontal. Las cartas verifican las condiciones siguientes: a la derecha del *caballo* hay 1 o dos *sotas*; a la izquierda de la *sota*, hay 1 o 2 *sotas*; a la izquierda de un oro, hay una o dos *copas;* y a la derecha de de una *copa*, hay una o dos *copas.* ¿De qué tres caratas se trata?

El caballo y las sotas las señalaremos con C S S. Para que se verifiquen las condiciones han de ser:

$$C_c\ S_o\ S_c$$

Por tanto, las cartas son:

● Caballo de copas ● Sota de oros ● Sota de copas.

3. Primas. Dos amigos, Pedro y Luisa, se encuentran una tarde y Pedro le dice a Luisa: «Ayer estuve con mis tres primas». Luisa le pregunta: «¿qué edad tienen?», a lo que Pedro contesta: «el producto de sus edades es 2450 y la suma de las mismas es el doble de tu edad». Luisa dijo que con estos datos no podía saber las edades. Pedro añadió: «yo soy por lo menos un año más joven que la más vieja». Por supuesto, Luisa conoce la edad de Pedro. ¿Cuáles son las edades de las primas de Pedro y cuál es la edad de Luisa?

Descomponemos 2450 en factores, obtenemos $2450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

Las posibles edades de las tres primas son:

Prima 1	Prima 2	Prima 3	Suma	Luisa
2	25	49	76	38
5	5	98	108	54
5	10	49	64	32
7	7	50	64	32
2	35	35	72	36
1	49	50	100	50
7	14	25	46	23
7	14	35	52	26
5	14	35	54	27

Una vez hecha la tabla con todas las posibilidades, observamos que hay un resultado suma repetido, por tanto ahí está la razón de que Luisa le dijera a Pedro que con esos datos no podía saber las edades.

La edad de Luisa es de 32 años. Luisa sabe la edad de Pedro. Si Pedro hubiera tenido 48 años o menos, no quedaría claro, por tanto Pedro ha de tener 49 años y las primas 7, 7 y 50 años.

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 188

1. Calcula los siguientes límites:

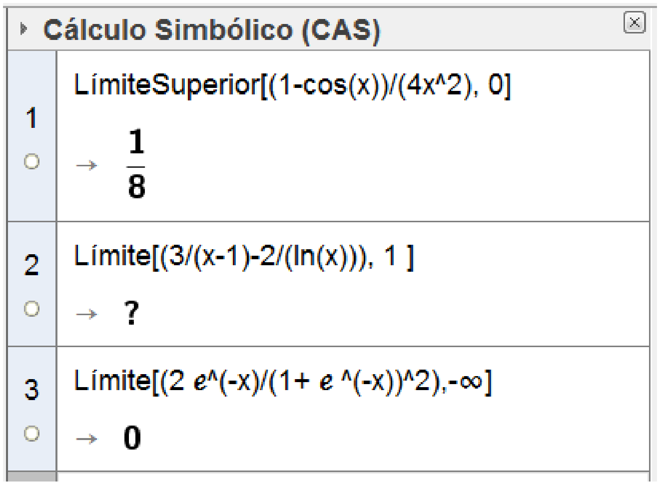
a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos x}{4x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{\ln (x)} \right)$ **c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2e^{-x}}{\left(1 + e^{-x}\right)^2}$.

Calculamos límites en la Vista Cálculo Simbólico (CAS) mediante los comandos **Límite**, **LimiteSuperior** y **LímteInferior** como se ha indicado en el texto y obtenemos:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos x}{4x^2} = \dfrac{1}{8}$

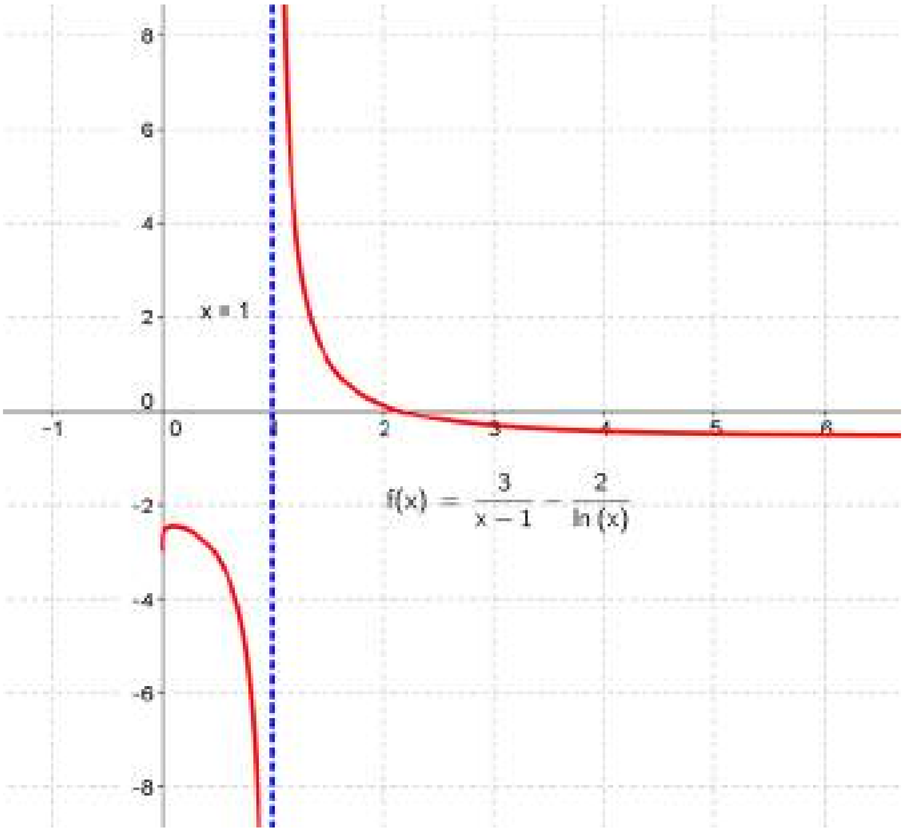
b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{\ln (x)} \right)$ no existe

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2e^{-x}}{\left(1 + e^{-x}\right)^2} = 0$.



Observamos que en el límite $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{\ln(x)} \right)$ no aparece la solución. Esto es debido a que este límite no existe, ya que $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{\ln(x)} \right) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{\ln(x)} \right) = +\infty$.

Podemos ver la situación anterior en la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{\ln x}$ y de su asíntota x = 1.



2. Halla, mediante la gráfica correspondiente, los límites: $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ **y** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$.

Calculamos límites en la Vista Cálculo Simbólico (CAS) mediante los comandos **Límite**, **LimiteSuperior** y **LímteInferior** como se ha indicado en el texto y obtenemos:

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

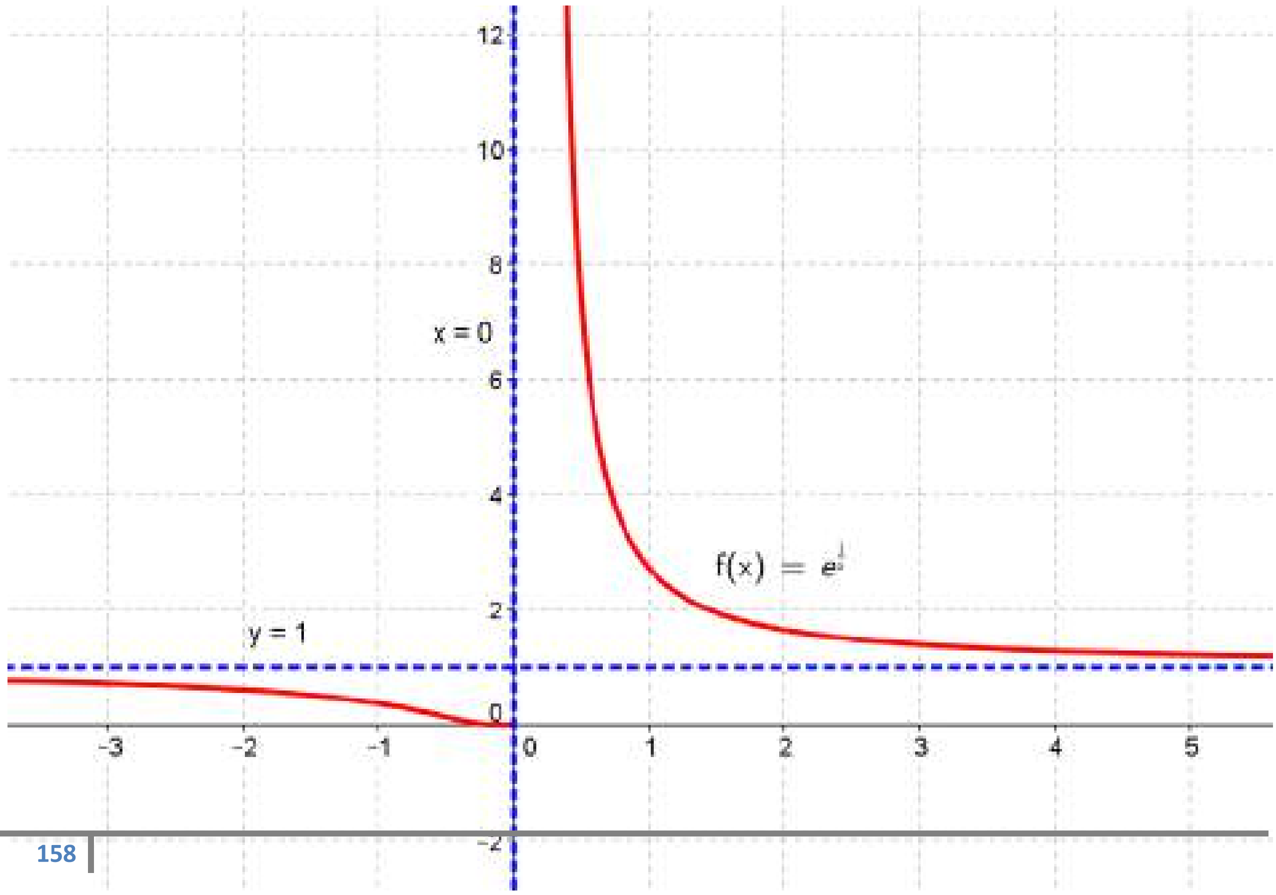
$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

Cálculo Simbólico (CAS)

1	LímiteSuperior[e^(1/x),0] → ∞
2	LímiteInferior[e^(1/x), 0] → **0**
3	Límite[e ^(1/x), +∞] → **1**

Todo lo anterior puede verse en la representación gráfica de la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, así como las asíntotas x = 0 e y = 1



ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 189

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3^+}\left(2x^2-6x+1\right)^{\frac{2}{x^2-6x+9}}$ **b)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}-\frac{6}{sen\ 2x}\right)$

En la imagen podemos ver el resultado de estos límites hechos con las opciones del menú **Análisis** de Wiris.

$$\lim_{x\to 3^+}(2\cdot x^2-6\cdot x+1)^{\frac{2}{x\wedge 2-6x+9}} \to +\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}-\frac{6}{\sin(2\cdot x)}\right) \to 0$$

2. Halla las asíntotas de la función f(x) = $\frac{x^2}{2\cdot \ln x}$

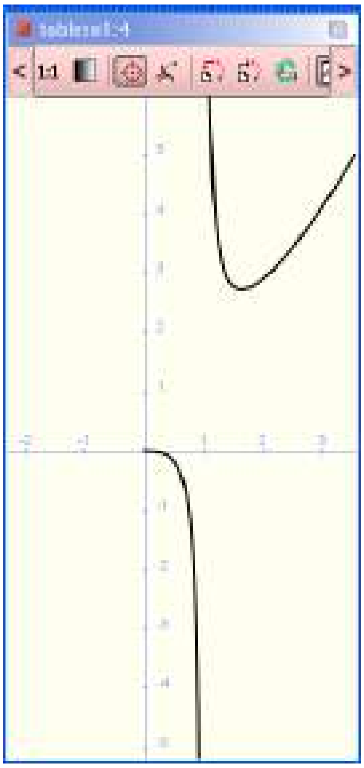
Mediante Wiris obtenemos las asíntotas de esta función que podemos ver en la gráfica de la misma.
La asíntota es x = 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\wedge 2}{2\cdot \ln(x)} \to \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\wedge 2}{2\cdot \ln(x)} \to 0$$

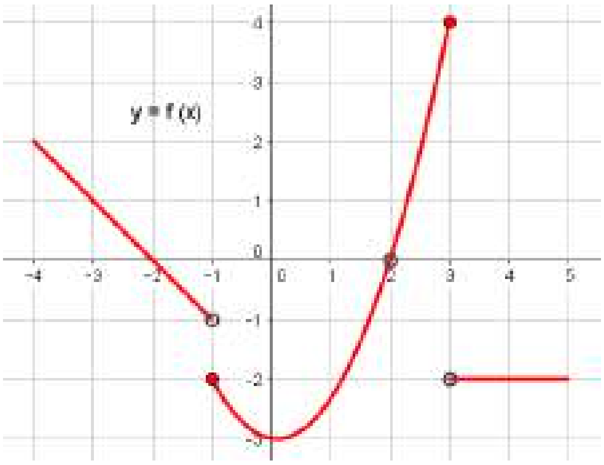
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x\wedge 2}{2\cdot \ln(x)} \to +\infty$$

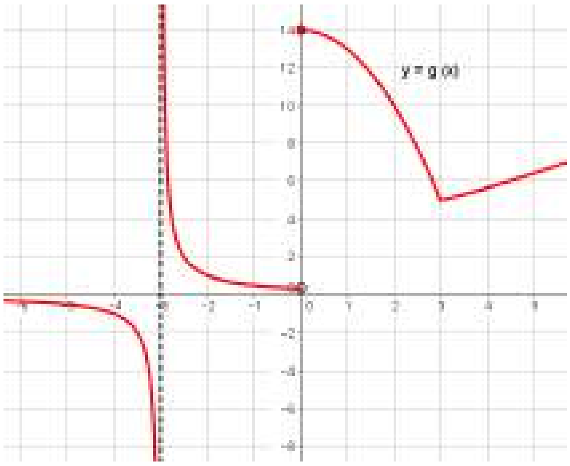
$$\text{representar}\left(\frac{x\wedge 2}{2\cdot \ln(x)}\right) \to \text{tablero1}$$



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 192

1. En cada una de las gráficas de las siguientes funciones, halla los límites y valores pedidos:





- **f (- 1)** • $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ • $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ • $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ • $\lim_{x \to -3} g(x)$ • $\lim_{x \to 0} g(x)$
- **f (2)** • $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ • $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ • $\lim_{x \to -3^-} g(x)$ • $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ • $\lim_{x \to 3} g(x)$
- **f (3)** • $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ • $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ • $\lim_{x \to -3^+} g(x)$ • $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ • $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

Las respuestas para la función y = f (x) son:

- f (- 1) = - 2 • $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1$ • $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$
- f (2) no existe • $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -2$ • $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$
- f (3) = 4 • $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$ • $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -2$

Las respuestas para la función y = g (x) son:

- $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$ • $\lim_{x \to -3} g(x)$ no existe • $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe
- $\lim_{x \to -3^-} g(x) = -\infty$ • $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \frac{1}{3}$ • $\lim_{x \to 3} g(x) = 5$
- $\lim_{x \to -3^+} g(x) = +\infty$ • $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 14$ • $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

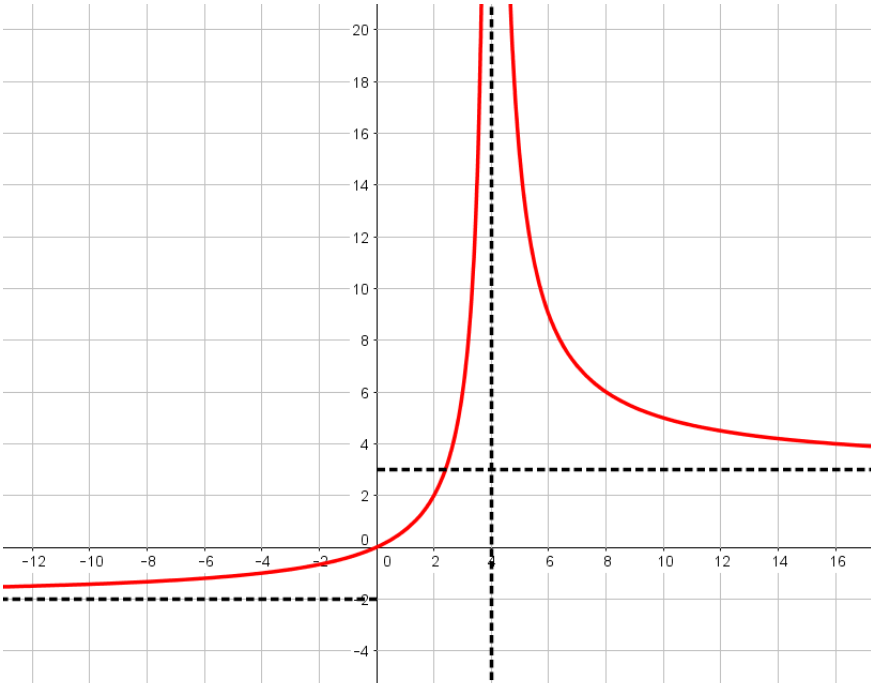
a) f (0) = 0, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 4^4} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

b) g (0) = 0, g (2) = 0, g (3) = 3, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 3$, $\lim_{x \to 3} g(x) = 2$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

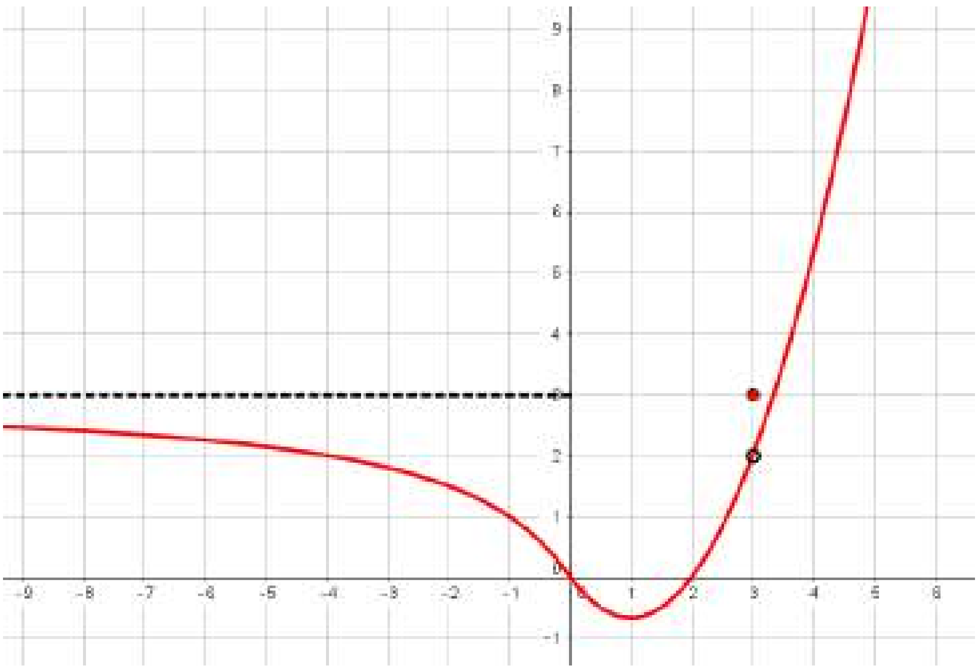
c) h (- 2) = 0, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^4} h(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

Las gráficas que cumplen las condiciones del enunciado son:

a) f (0) = 0, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 4^4} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

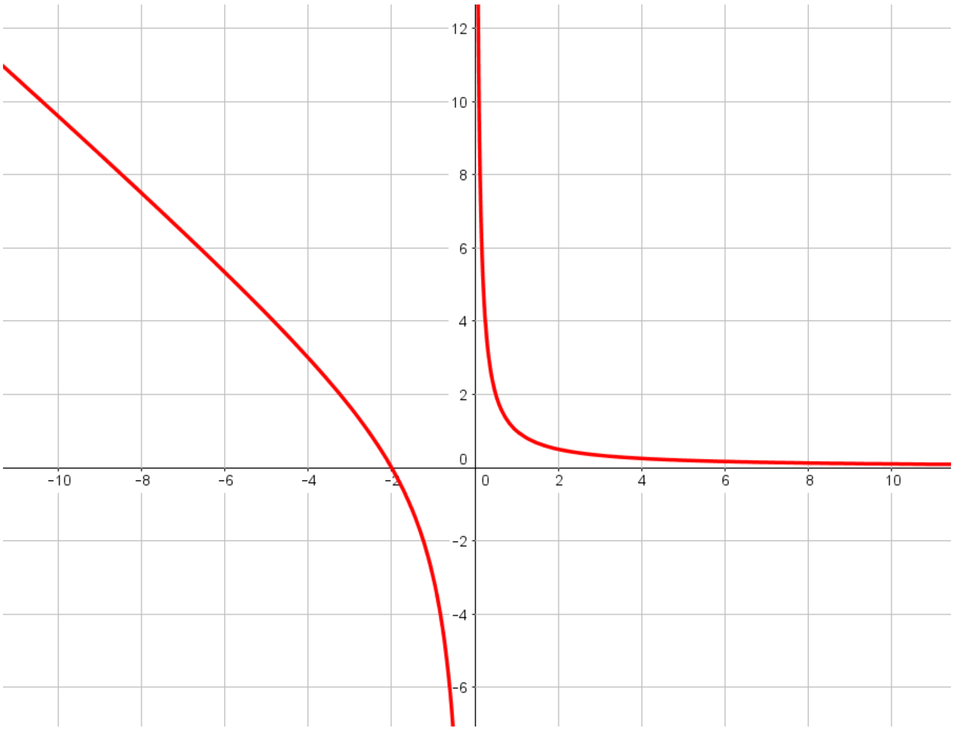


b) g (0) = 0, g (2) = 0, g (3) = 3, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



c) h (- 2) = 0,

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.



3. Explica el significado de las expresiones que siguen y realiza la representación gráfica adecuada:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x+1}{x^2} = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-4}{x^2} = 2$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+4}{x} = +\infty$

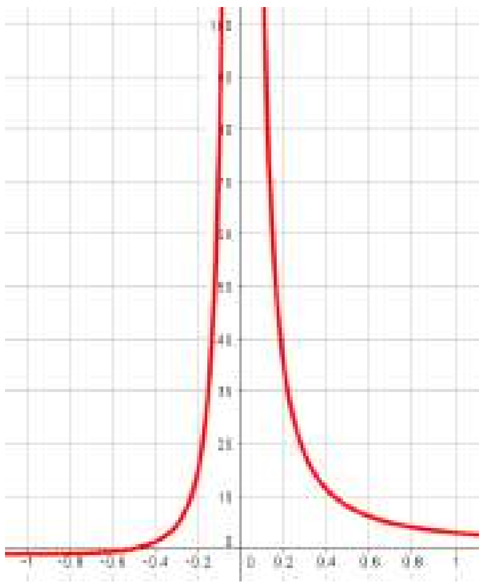
A continuación aparece el significado de los límites y las representaciones gráficas pedidas.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x+1}{x^2} = +\infty$

Podemos conseguir que el valor $\dfrac{2x+1}{x^2}$ sea tan grande como queramos dando a x valores suficientemente pequeños. Estos valores de x pueden ser tanto positivos como negativos.

Con más precisión, podemos decir que dado un número K, tan grande como queramos, podemos encontrar un número h, tan pequeño como sea necesario, tal que si x < h, entonces $\dfrac{2x+1}{x^2} > K$.

Geométricamente, la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2}$ tiene como asíntota vertical la recta x = 0.

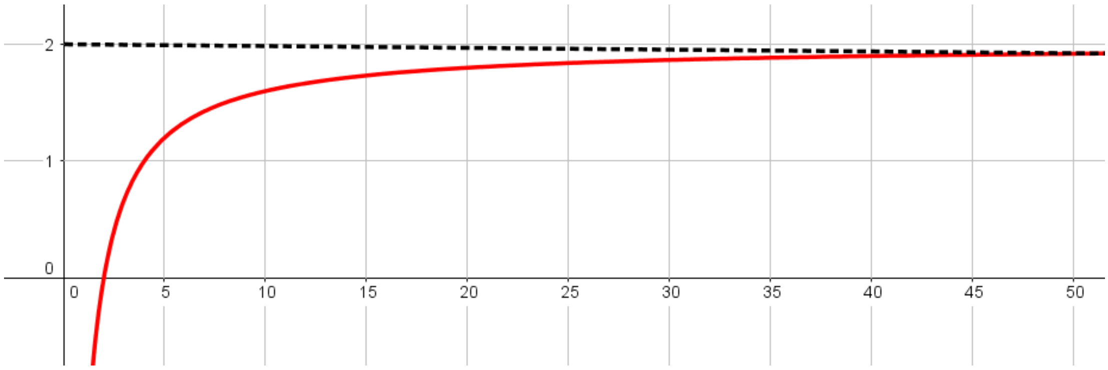


b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-4}{x^2} = 2$

Podemos conseguir que el valor $\dfrac{2x-4}{x}$ esté tan próximo a 2 como queramos dando a x valores suficientemente grandes.

Con más precisión, dado ε > 0 podemos encontrar un número h tal que si x > h, entonces $\left|\dfrac{2x-4}{x} - 2\right| < \varepsilon$.

Geométricamente, la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x-4}{x}$ tiene como asíntota horizontal la recta y = 2.

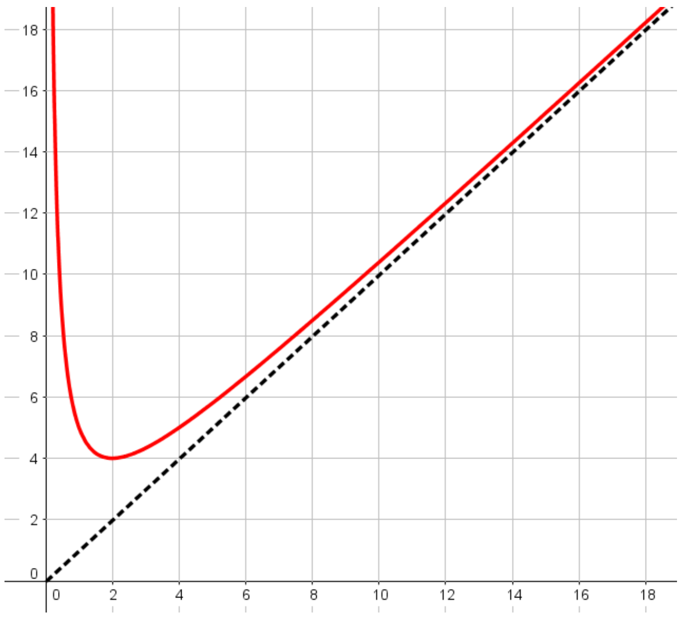


c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+4}{x} = +\infty$

Podemos conseguir que el valor $\dfrac{x^2-1}{x}$ sea tan grande como queramos sin más que tomar x tan grande como sea necesario.

Con más precisión, dado un número K, tan grande como queramos, podemos encontrar un número h, tan pequeño como sea necesario, tal que si x > h, entonces $\dfrac{x^2+4}{x} > K$.

Geométricamente, la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ tiene asíntota oblicua de ecuación y = x.



4. Determina las asíntotas verticales de las funciones:

a) $f\ (x) = \frac{x+1}{x^2 - 4}$ **b)** $f\ (x) = \ln\ (x-3)$ **c)** $f\ (x) = tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Debemos buscar los valores finitos de a tales que $\lim\limits_{x \to a} f\ (x) = \pm\ \infty$

a) En este caso hay dos asíntotas verticales, las rectas x = - 2 y x = 2.

b) La función logaritmo neperiano tiende a $-\infty$ cuando la expresión x – 3 se anula, por tanto, la recta x = 3 es la asuntota vertical.

c) La función trigonométrica tangente, f (x) = tg x se hace infinita en los puntos cuyas abscisas son múltiplos de π/2. Para la función del enunciado, las rectas x = k · π, con k $\in$ Z, con asíntotas verticales.

5. Calcula las asíntotas horizontales de las funciones:

a) $f\ (x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ **b)** $f\ (x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ **c)** $f\ (x) = e^{-x^2}$

Debemos calcular, en cada caso, $\lim\limits_{x \to -\infty} f\ (x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f\ (x)$.

a) $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 1$. La recta y = 1 es la asíntota horizontal.

b) $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \ln\left[\lim\limits_{x \to \mp\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right] = \ln 1 = 0$. La recta y = 0 es la asíntota horizontal.

c) $\lim\limits_{x \to \mp\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$. La recta y = 0 es la asíntota horizontal

6. Encuentra las ecuaciones de las asíntotas oblicuas de las funciones:

a) $f\ (x) = \frac{2x^2}{x+2}$ **b)** $f\ (x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}$ **c)** $f\ (x) = \frac{x^2 - 3}{x-2}$

Debemos determinar, en cada caso, los parámetros m y n de la ecuación y = mx + n, hallando los límites:

$$m = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{f\ (x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \left[f\ (x) - mx\right]$$

a) $m = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 2x} = 2$ y $n = \lim\limits_{x \to \mp\infty}\left[\frac{2x^2}{x+2} - 2x\right] = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{-4x}{x+2} = -4$.

La asíntota es la recta y = 2x – 4.

b) $m = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^3 - 3} = 1$ y $n = \lim\limits_{x \to \mp\infty}\left[\frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} - x\right] = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{-4x^2 + x}{2x^2 - 1} = -2$.

La asíntota es la recta y = x – 2.

c) $m = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 2x} = 1$ y $n = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \left[\dfrac{x^2 - 3}{x - 2} - x\right] = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{2x - 3}{x - 2} = 2$.

La asíntota es la recta y = x + 2.

7. Calcula el límite de las funciones f (x) y g (x) cuando $x \to -\infty$, $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$ y $x \to +\infty$.

$$f\ (x) = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} \qquad\qquad g\ (x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$$

Representa gráficamente los resultados.

Para la función $f\ (x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$ los límites buscados son:

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = 0$, la función y = f (x) tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 0.

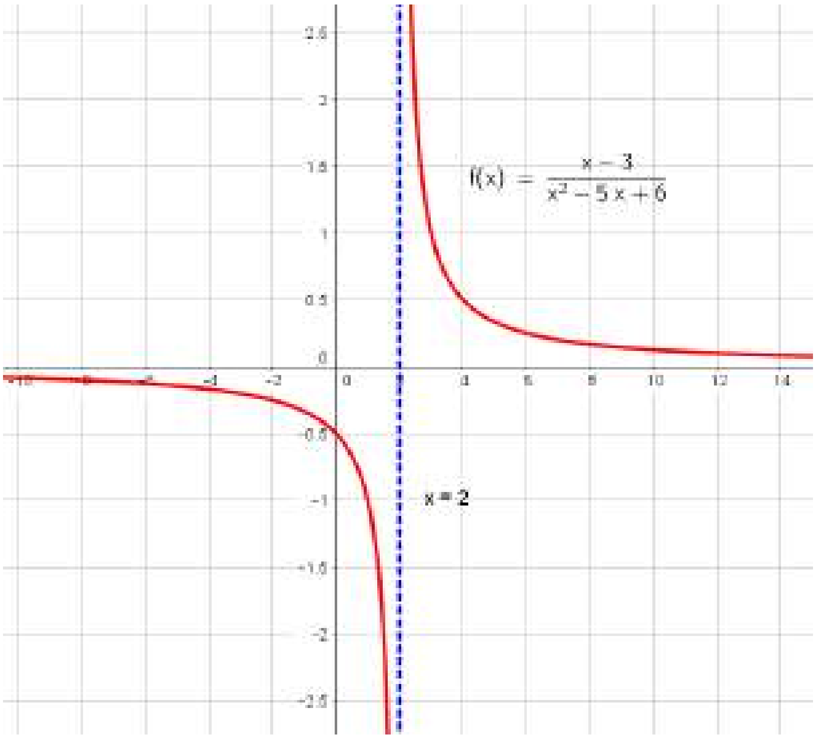
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{-1}{0} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$, la función y = f (x) tiene una asíntota vertical de ecuación x = 2.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{(x - 3)\ (x - 2)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x - 2} = 1$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = 0$, la función y = f (x) tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 0.

Todos los resultados anteriores pueden verse en la gráfica de la función.



Para la función $g\ (x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ los límites buscados son:

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 1$, la función y = g (x) tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 1.

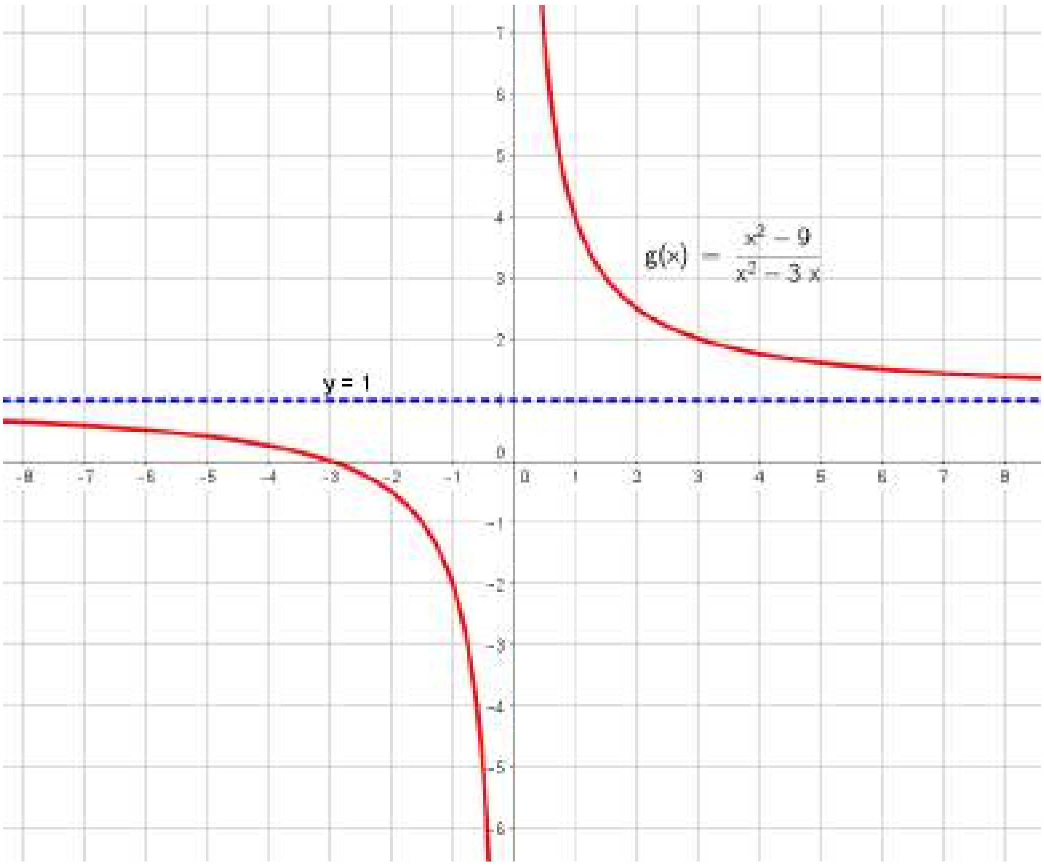
Como $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \dfrac{-9}{0} = -\infty$ y, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \dfrac{-9}{0^-} = +\infty$ la función y = f (x) tiene una asíntota vertical de ecuación x = 0.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x\ (x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 1$, la función y = g (x) tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 1.

Todos los resultados anteriores pueden verse en la gráfica de la función.



ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 193

8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^2 + x}$ **g) f)** $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ **m)** $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+4}\right)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x + 2}{2x^3 + 3x^2 - 3}$ **h)** $\lim_{x \to 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4-x}}$ **n)** $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 2x} - \sqrt{3x^2 + x}\right)$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^3 + x}$ **i)** $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{9x}$ **ñ)** $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$ **j)** $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 2}$ **o)** $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+2}{x^2 + x + 2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

e) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - x}$ **k)** $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 4x - 3}{x^2 - 5x}$ **p)** $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

f) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 1}$ **l)** $\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 5x + 4}$ **q)** $\lim_{x \to 0} (1 + 4x)^{\frac{2}{x^3}}$

Los límites quedan:

a) Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, nos quedamos con el término principal de cada polinomio y hallamos el límite resultante:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

b) Procedemos como en el anterior:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x + 2}{2x^3 + 3x^2 - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

c) Procedemos como en los dos anteriores:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^3 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

d) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, factorizamos los polinomios, simplificamos y hallamos el límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

e) Procedemos como en el apartado anterior:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - x} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x^2 - x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 3}{x^2 - x} = \frac{-4}{2} = -2$$

f) Primero es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, factorizando y simplificando, pasa a ser del tipo $\frac{k}{0}$:

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+3}{x-1}$ no existe, ya que se cumple:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+3}{x-1} = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} \frac{x+3}{x-1} = +\infty$$

g) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada del denominador, operamos y hallamos el límite:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \to 4} \left(\sqrt{x}+2\right) = 4$$

h) Procedemos como en el apartado anterior:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{2-\sqrt{4-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2-\sqrt{4-x}} \cdot \frac{2+\sqrt{4-x}}{2+\sqrt{4-x}} = \lim_{x \to 0} \left(2+\sqrt{4-x}\right) = 4$$

i) Procedemos como en el caso anterior:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}\right)\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}{9x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{9x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{9\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)} = \frac{2}{54} = \frac{1}{27}$$

j) Es una indeterminación del tipo $\frac{k}{0}$ y el valor del límite es:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x-2} = \frac{6}{0} = +\infty$$

k) Es una indeterminación del tipo $\frac{k}{0}$ y el valor del límite no existe ya que se cumple:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3x^2 - 4x - 3}{x^2 - 5x} = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2 - 4x - 3}{x^2 - 5x} = +\infty$$

l) Es una indeterminación del tipo $\frac{k}{0}$ y el valor del límite es:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 5x + 4} = -\infty$$

m) Es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada. Operamos y la expresión resultante pasa a ser una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que ya se ha resuelto con anterioridad: El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+4}\right)\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4}\right)}{\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-8}{\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4}\right)} = 0$$

n) Procedemos como en el apartado anterior:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2 + 2x} - \sqrt{3x^2 + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2 + 2x} - \sqrt{3x^2 + x}\right)\left(\sqrt{3x^2 + 2x} + \sqrt{3x^2 + x}\right)}{\sqrt{3x^2 + 2x} + \sqrt{3x^2 + x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 2x} + \sqrt{3x^2 + x}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

ñ) Procedemos como en el caso anterior:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)\left(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}\right)}{\left(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)\left(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}\right)}{\left(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x}} = +\infty$$

o) Es una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+2}{x^2 + x + 2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x+2}{x^2+x+2} - 1\right)} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{-x^2}{x^2+x+2}\right)} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^2+x+2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

p) Es una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} = e^{\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(2-x)} \left(\frac{1}{3-x} - 1\right)} = e^{\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(2-x)^2} \left(\frac{x-2}{3-x}\right)} = e^{\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(2-x)(x-3)}} = e^{\frac{1}{0}} = e^{+\infty} = +\infty$$

q) Es una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x \to 0} (1 + 4x)^{\frac{2}{x^3}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{2}{x^3} \cdot (1 + 4x^3 - 1)} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{8x^3}{x^3}} = e^{\lim_{x \to 0} 8} = e^8$$

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^2 - 1}{x + 3} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - x}\right]$

e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

i) $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{3x - 9}}{x - 3}$

b) $\lim_{x \to 3} (x - 2)^{\frac{2}{x-3}}$

f) $\lim_{x \to 4} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}}$

j) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{9x^2 - 5} - (3x - 2)\right]$

g) $\lim_{x \to 2} \left[\frac{x+2}{x-2} - \frac{x+14}{x^2 - 4}\right]$

k) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

d) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{3x^2 - 12}{x^2 + 4x + 4}$ **h)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2 + x}{3x^2 - 5}\right)^{x^2 - 1}$ **l)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x-3} - 1}$.

Resolviendo los límites, obtenemos:

a) Es una indeterminación $0 \cdot \infty$. Si operamos las fracciones se convierte en una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Factorizamos, simplificamos y hallamos el límite resultante.

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^2 - 1}{x + 3} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - x}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x+3) \cdot x} = \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 1} = 1$$

b) Es una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x \to 3} (x-2)^{\frac{2}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x \to 3} \frac{2}{x-3} \cdot (x - 2 - 1)} = e^2$$

c) Es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada se transforma en otra del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, que resolvemos.

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{9x^2 - 5} - (3x - 2)\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{9x^2 - 5} - (3x - 2)\right] \cdot \left[\sqrt{9x^2 - 5} + (3x + 2)\right]}{\left[\sqrt{9x^2 - 5} + (3x - 2)\right]} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{12x - 9}{\left[\sqrt{9x^2 - 5} + (3x - 2)\right]} = \frac{12}{3 + 3} = 2$$

d) Es una indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Factorizando y simplificando pasa a ser del tipo $\dfrac{k}{0}$, posteriormente calculamos el límite.

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{3x^2 - 12}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \to -2^-} \frac{3(x+2)\,(x-2)}{(x+2)^2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{3x - 6}{x + 2} = +\infty$$

e) Es una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\dfrac{x}{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{x}}} = 1$$

f) Hallamos los límites de la base y del exponente de la potencia:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{5}{6}}$$ ya que se cumple:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = \frac{5}{6} \text{ y } \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x} + 2\right)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

g) Es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Operando pasa a ser del tipo $\frac{0}{0}$. Calculamos ésta última.

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{x+2}{x-2} - \frac{x+14}{x^2 - 4} \right] = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x+2} = \frac{7}{4}$$

h) Es una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 + x}{3x^2 - 5} \right)^{x^2 - 1} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 1\right) \cdot \left[\frac{3x^2 + x}{3x^2 - 5} - 1 \right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - x - 1}{3x^2 - 5}} = e^{+\infty} = +\infty$$

i) Es una indeterminación $\frac{0}{0}$. Operamos en la expresión y calculamos el límite:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{3x - 9}}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{x-3}}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}} = +\infty$$

j) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada del numerador, operamos y simplificamos, volviendo a calcular el límite de la expresión resultante. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)}{x\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 - x^2)}{x\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = 0$$

k) Es una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{3}{x-1} \cdot \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} - 1 \right)} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2}{x^2 + 1}} = e^{3/2}$$

l) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Multiplicamos y dividimos por las expresiones conjugadas del numerador y denominador, operamos y simplificamos, volviendo a calcular el límite de la expresión resultante.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x - 3} - 1} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2} - 2\right)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)\left(\sqrt{2x-3} + 1\right)}{\left(\sqrt{2x-3} - 1\right)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)\left(\sqrt{2x-3} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2-4)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}{2\,(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}{2\,(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}+1}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

10. Calcula, utilizando infinitésimos equivalentes, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ 3x}{sen\ 4x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{1-\cos 3x}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x}-1}{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{tg^2\ (x-1)}{x^2-1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\ln\,(x-2)}{3x-9}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{sen^2\ 4x}$

Utilizando los infinitésimos equivalentes correspondientes a cada caso, obtenemos:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ 3x}{sen\ 4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{4x} = \dfrac{3}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{tg^2\ (x-1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x+1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{1-\cos 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{\dfrac{9x^2}{2}} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\ln\,(x-2)}{3x-9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\ln\left[1+(x-3)\right]}{3(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{3\,(x-3)} = \dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x}-1}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x \cdot \ln 3}{2x} = \ln 3$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{sen^2\ 4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{4x^2}{2}}{(4x)^2} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$

11. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} (1-2x)^{3/x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-x}{3x^2+5}\right)^{x/4}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x-5}\right)^{\sqrt{x^2-3x}-x}$

Los límites quedan:

a) Es una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x \to 0^+} (1-2x)^{3/x} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} \cdot (1-2x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-6x}{x}} = e^{-6}$$

b) Hallamos los límites de la base y del exponente de la potencia.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x}{3x^2 + 5} \right)^{x/4} = \left(\frac{1}{3} \right)^{+\infty} = 0 \text{, ya que se cumple:}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x}{3x^2 + 5} \right) = \frac{1}{3} \text{ y } \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$$

c) Hallamos los límites de la base y del exponente de la potencia.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x + 2}{3x - 5} \right)^{\sqrt{x^2 - 3x} - x} = 1^{-\frac{3}{2}} = 1 \text{, ya que se cumple:}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x + 2}{3x - 5} \right) = 1 \text{ y}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 3x} - x \right)\left(\sqrt{x^2 - 3x} + x \right)}{\left(\sqrt{x^2 - 3x} + x \right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = -\frac{3}{2}$$

12. Los habitantes de una pequeña ciudad industrial deciden poner en marcha un plan de descontaminación de los acuíferos de sus alrededores, cuyo coste, en euros, por habitante y año viene dado por la función:

$$C(x) = \frac{0{,}1x^2 + 10}{0{,}02x^2 + 0{,}01}$$

¿Cuánto dinero por habitante habrá que invertir los primeros años? ¿En cuántos años el coste por habitante será menor de 10 euros? ¿Cuál será el coste a largo plazo, por habitante y año, del plan de descontaminación?

El coste en el momento de poner en marcha el plan, t = 0 será:

$$C(0) = \frac{0{,}1 \cdot 0^2 + 10}{0{,}02 \cdot 0^2 + 0{,}01} = \frac{10}{0{,}01} = 1000 \textit{ euros}$$

El coste en el primer año, t = 1 será:

$$C(1) = \frac{0{,}1 \cdot 1^2 + 10}{0{,}02 \cdot 1^2 + 0{,}01} = \frac{10{,}1}{0{,}03} = 366{,}67 \textit{ euros}$$

El coste en el segundo año, t = 2 será:

$$C(2) = \frac{0{,}1 \cdot 2^2 + 10}{0{,}02 \cdot 2^2 + 0{,}01} = \frac{10{,}4}{0{,}09} = 115{,}56 \textit{ euros}$$

El coste en el tercer año, t = 2 será:

$$C(3) = \frac{0{,}1 \cdot 3^2 + 10}{0{,}02 \cdot 3^2 + 0{,}01} = \frac{10{,}9}{0{,}19} = 57{,}37 \textit{ euros}$$

El coste va disminuyendo con el paso del tiempo y para saber en cuántos años el coste por habitante será menor de 10 euros, resolvemos la inecuación C (x) < 10. Operando, obtenemos:

$$C\ (x) < 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}1x^2\ + 10}{0{,}02x^2\ + 0{,}01} < 10 \quad \Rightarrow \quad 0{,}1x^2\ + 10 < 0{,}2x^2\ + 0{,}01 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 0{,}1x^2\ - 0{,}2x^2\ < 0{,}1 - 10 \ \Rightarrow \ - 0{,}1x^2\ < - 9{,}9 \ \Rightarrow \ 0{,}1x^2\ > 9{,}9 \ \Rightarrow \ x^2\ > 99 \ \Rightarrow \ x\ > 9{,}95$$

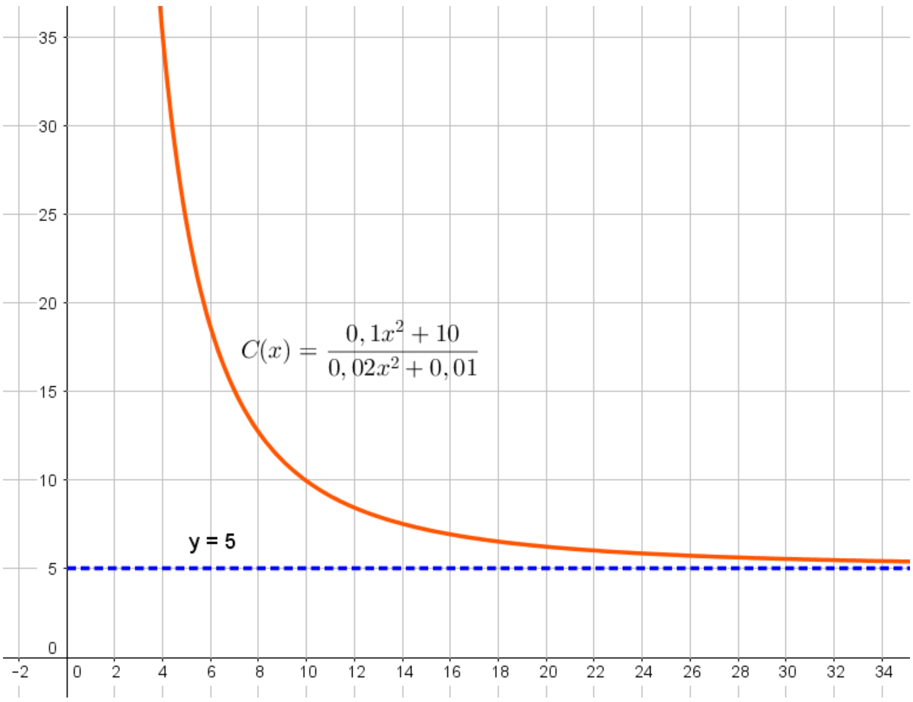
Deben pasar 10 años para que el coste por habitante sea menor de 10 euros. Puede comprobarse que es así calculando el valor del coste en el décimo año:

$$C\ (10) = \frac{0{,}1 \cdot 10^2\ + 10}{0{,}02 \cdot 10^2\ + 0{,}01} = \frac{20}{2{,}01} = 9{,}95\ euros$$

Para determinar el coste a largo plazo calculamos el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} C\ (x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} C\ (x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{0{,}1x^2\ + 10}{0{,}02 \cdot x^2\ + 0{,}01} = \lim_{x \to +\infty} \frac{0{,}1 + \dfrac{10}{x^2}}{0{,}02 + \dfrac{0{,}01}{x^2}} = \frac{0{,}1}{0{,}02} = 5\ euros\,.$$

Vemos que a largo plazo el coste por habitante y año va a ser de 5 euros. También puede comprobarse en la gráfica de la función.



ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 194

1. Determina, en cada caso, qué valor debe tomar k (k ≠0) para que se cumplan las igualdades siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(1-kx)\,(2x+3)}{x^2+4} = 6$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2+kx-5}\right) = 1$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right]^{kx^2} = e^{\frac{1}{2}}$

a) El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(1-kx)\,(2x+3)}{x^2+4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2kx^2+(2-3k)x+3}{x^2+4} = -2k\,.$$

Si – 2k = 6, entonces k = - 3.

b) El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2+kx-5}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{4x^2+kx-5}\right)\left(2x + \sqrt{4x^2+kx-5}\right)}{\left(2x + \sqrt{4x^2+kx-5}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - \left(4x^2+kx-5\right)}{\left(2x + \sqrt{4x^2+kx-5}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-kx+5}{2x+\sqrt{4x^2+kx-5}} = \frac{-k}{2+2}$$

Imponemos que la solución sea 1: $-\dfrac{k}{4} = 1$, entonces k = - 4.

c) El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right]^{kx^2} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} kx^2 \cdot \left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k(1-\pi)x^2}{4x^2+\pi}} = e^{\frac{k(1-\pi)}{4}}$$

Si $e^{\frac{k(1-\pi)}{4}} = e^{\frac{1}{2}}$, entonces $k = \dfrac{2}{1-\pi}$.

2. El número de plantas, P, de una especie que ha colonizado la ladera de una montaña, a lo largo del tiempo, t, viene dado por la función:

$$P(t) = \frac{1200 + 12\,000t}{1+2t}\text{, donde } t \geq 0.$$

a) ¿Cuál es el número de plantas inicial? ¿Y después de 2 años?
b) ¿De qué forma afectará el paso del tiempo a dicha población?

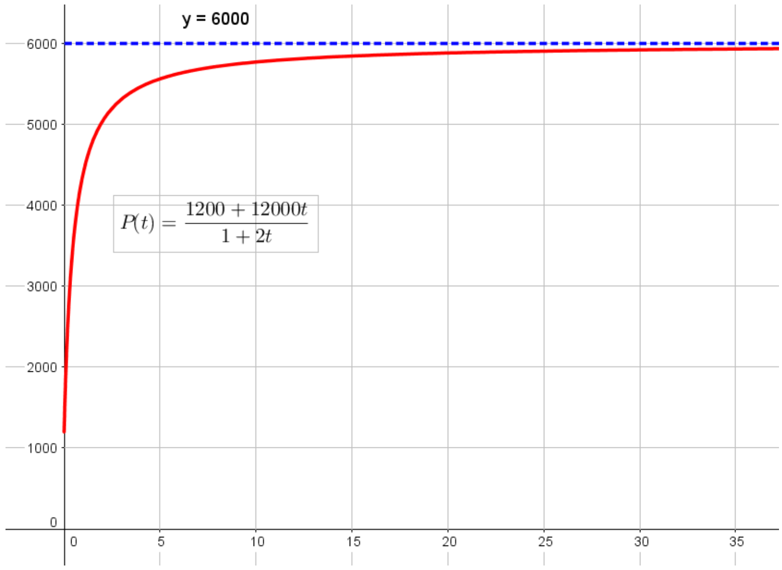
a) El número de plantas inicial es: $P(0) = \dfrac{1200 + 12\,000 \cdot 0}{1 + 2 \cdot 0} = 1200\,.$

Después de 2 años el número de plantas será: $P(2) = \dfrac{1200 + 12\,000 \cdot 2}{1 + 2 \cdot 2} = \dfrac{25\,000}{5} = 5\,040\,.$

b) Con el paso del tiempo se cumplirá:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1200 + 12000t}{1 + 2t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{12\,000t}{2t} = 6000$$

La población se estabilizará en 6000 plantas con el paso del tiempo. Puede observarse en la gráfica.



3. Comprueba que los resultados de los límites que siguen son correctos.

a) $\lim_{x \to +\infty} [\ln(x+1) - \ln x] = 0$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} x \cdot [\ln(x+1) - \ln x] = 1$

a) Hallamos el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} [\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x}\right) = \ln 1 = 0$$

Hemos intercambiado el límite con la función logaritmo neperiano al ser ésta una función continua.

b) Hallamos el límite

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot [\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \ln\left(\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln e = 1$$

Hemos intercambiado el límite con la función logaritmo neperiano al ser ésta una función continua.

4. ¿Cuántas asíntotas oblicuas puede tener una función racional? ¿Cuántas horizontales? ¿Cuántas verticales? Encuentra las asíntotas de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ **b)** $g(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$

Las respuestas son:

● Una función racional puede tener como máximo 2 asíntotas oblicuas correspondientes a los límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to +\infty$.

● Una función racional puede tener como máximo 2 asíntotas horizontales correspondientes a los límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to +\infty$.

● Una función racional puede tener tantas asíntotas verticales como ceros del denominador que no lo sean del numerador.

a) Las asíntotas de la función f (x) son:

● La recta x = 1 ya que se cumple: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \infty$.

● La recta y = x – 2 ya que se cumplen los límites:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} - x \right) = -2$$

b) Las asíntotas de la función g (x) son:

● La recta x = - 3, ya que: $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{(x-3)^2}{x+3} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{(x-3)^2}{x+3} = +\infty$

● La recta y = x - 9, ya que:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{g\,(x)}{x} = \operatorname{Lím}_{x \to \pm\infty} \frac{(x-3)^2}{x^2 + 3x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [g\,(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 - 6x + 9}{x + 3} - 1 \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-9x + 9}{x + 3} = -9$$

5. Estudia los siguientes límites según los valores del parámetro a:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{a x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{3x + 4} - \sqrt{ax} \right]$

a) Hallamos el límite:

Sea $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{a x^2 + 4x + 8} \right)^{(x+1)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)\left(1 + \frac{1}{a x^2 + 4x + 8} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{a x^2 + 4x + 8}}$

Si a = 0, entonces $L = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{4x+8}} = e^{1/4} = \sqrt[4]{e}$

Si a ≠ 0, entonces L = e^0 = 1

b) La solución queda:

● Si a = 0, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{3x+4}\right] = +\infty.$

● Si a > 0, entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax}\right)\left(\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax}\right)}{\left(\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+4-ax}{\left(\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3-a)x+4}{\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax}} = \begin{cases} 0 & si\ a = 3 \\ -\infty & si\ a > 3 \\ +\infty & si\ 0 < a < 3 \end{cases}$$

6. Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2 \ln x}{\ln\left(7x^2\right)}\right)^{\ln x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{12x^2\sqrt{x^2-7x}}{\sqrt{9x^6+5x}}\right)$

El resultado de los límites es:

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25} = \left(\frac{\sqrt[3]{-8}}{2}\right)^{25} = \left(\frac{-2}{2}\right)^{25} = -1$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2 \ln x}{\ln\left(7x^2\right)}\right)^{\ln x} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x \left(\frac{2 \ln x}{\ln 7 + 2 \ln x} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x \left(\frac{2 \ln x - \ln 7 - 2 \ln x}{\ln 7 + 2 \ln x}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\ln 7 \cdot \ln x}{\ln 7 + 2 \ln x}} = e^{\frac{-\ln 7}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\ln 7}}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{12x^2\sqrt{x^2-7x}}{\sqrt{9x^6+5x}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{144x^6 - 1008x^5}{9x^6+5x}} = \sqrt{\frac{144}{9}} = \frac{12}{3} = 4$$

7. En una ciudad se realiza un censo y se descubre que el número de habitantes, P (t), en millones viene dado por la función:

$$P(t) = \frac{t^2 + 500t + 2500}{(t+50)^2}$$

siendo t el número de años transcurridos desde que se realiza el censo.

a) ¿Cuántos habitantes hay cuando se realiza el censo?
b) ¿Cuántos habitantes habrá dentro de 25 años? ¿Y de 50 años?
c) Como evoluciona la población con el paso del tiempo.

a) Cuando se realiza el censo hay $P(0) = \dfrac{0^2 + 500 \cdot 0 + 2500}{(0+50)^2} = \dfrac{2\ 500}{2\ 500} = 1$ millón de habitantes.

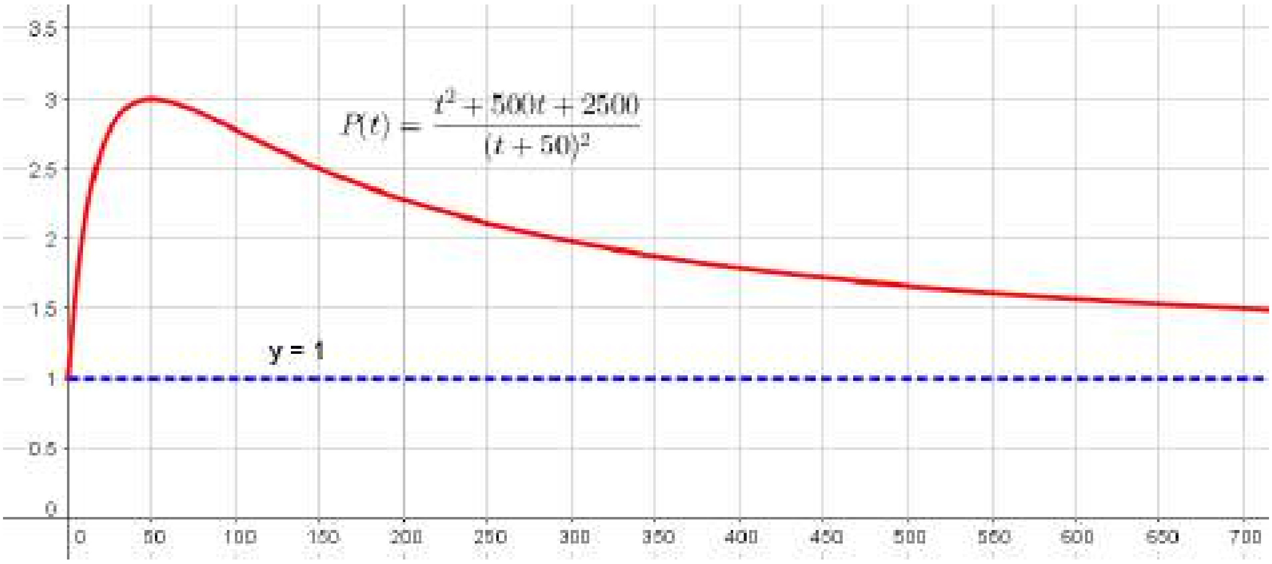
b) Dentro de 25 años habrá $P\ (25) = \dfrac{0^2 + 500 \cdot 25 + 2500}{(25 + 50)^2} = \dfrac{15\ 625}{5\ 625} = 2{,}78$ millones de habitantes.

Dentro de 50 años habrá $P\ (50) = \dfrac{50^2 + 500 \cdot 50 + 2500}{(50 + 50)^2} = \dfrac{30\ 000}{10\ 000} = 3$ millones de habitantes.

c) Con el paso del tiempo la población de la ciudad acabará siendo:

$$\lim_{t \to +\infty} P\ (t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 + 500t + 2500}{t^2 + 100t + 2500} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1 + \frac{500}{t} + \frac{2500}{t^2}}{1 + \frac{100}{t} + \frac{2500}{t^2}} = 1$$ millón de habitantes.

El resultado puede observarse en la gráfica.



8. Una empresa produce tarjetas de sonido para ordenadores en grandes cantidades. Atendiendo a diversos factores, la producción de x tarjetas tiene un coste total, en euros, de C (x) = 10x + 20 000.

a) Encuentra la expresión de la función C_m (x) que nos da el precio unitario medio de una tarjeta al fabricar x unidades.

b) Calcula C_m (10), C_m (100) y C_m (1000). ¿A qué es debido que haya tanta diferencia entre un coste y otro?

c) Calcula $\lim_{x \to +\infty} C_m\ (x)$ y da una interpretación económica del resultado.

a) El precio unitario medio, C_m (x), al fabricar x unidades es:

$$C_m\ (x) = \frac{C\ (x)}{x} = \frac{10x + 20\ 000}{x}$$, con x > 0

b) Los valores pedidos son:

$C_m\ (10) = \dfrac{10 \cdot 10 + 20\ 000}{10} = 2\ 010$ euros.

$C_m\ (100) = \dfrac{10 \cdot 100 + 20\ 000}{100} = 210$ euros.

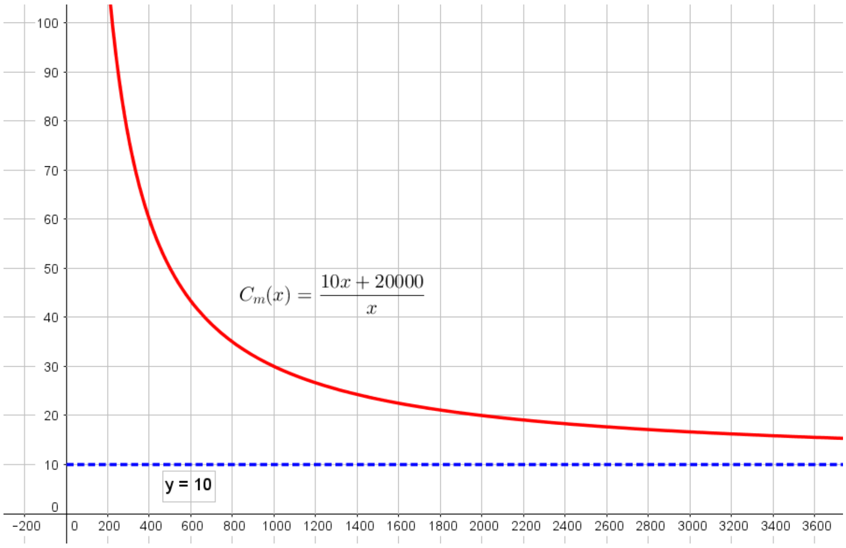
$$C_m\ (1000) = \frac{10 \cdot 1000 + 20\ 000}{1000} = 30 \text{ euros.}$$

La diferencia de precios es debida al valor tan alto, 20 000 euros, que tiene los costes fijos.

c) Cuando el número de tarjetas fabricadas se hace indefinido se obtiene:

$$\underset{x \to +\infty}{lím} C_m\ (x) = \underset{x \to +\infty}{lím} \frac{10x + 20\ 000}{x} = \underset{x \to +\infty}{lím} \frac{10 + \dfrac{20\ 000}{x}}{1} = 10 \text{ euros.}$$

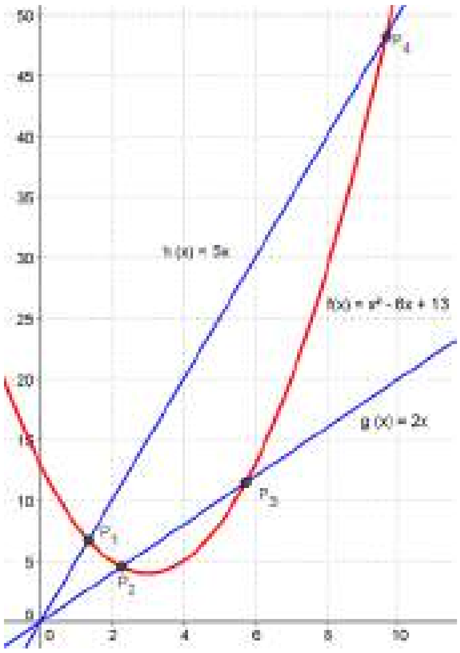
Para un gran número de tarjetas fabricadas el precio mínimo será de 10 euros. Véase el gráfico de la función.



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 195

Parábolas y rectas

Queremos investigar posibles patrones que aparecen cuando se estudia la intersección de funciones polinómicas con funciones lineales.



1. Consideramos las funciones cuadráticas de expresión y = $(x - p)^2 + q$ cuyas gráficas son parábolas de vértice V (p, q) y las funciones lineales y = mx e y = nx.

a) Sea la parábola $y = (x - 3)^2 + 4$ y las rectas y = 2x e y = 5x.

Utilizando medios tecnológicos, hallamos las cuatro intersecciones P_1, P_2, P_3, P_4, que pueden verse en el dibujo.

Llamamos x_1, x_2, x_3 y x_4 a las abscisas de estas intersecciones en el orden en el que aparecen, de izquierda a derecha, sobre el eje OX.

Calculamos los valores de las expresiones:

$$D_1 = x_2 - x_1; \qquad D_2 = x_4 - x_3 \quad \text{y} \quad V = |D_1 - D_2|.$$

b) Considera otras parábolas de la forma $y = k(x - p)^2 + q$, con k > 0, que tengan el vértice en el primer cuadrante, cuando se cortan con las rectas y = 2x e y = 5x. Comienza estudiando los casos en los que k = 1.

c) Investiga lo que sucede para cualquier valor de k y para cualquier posición del vértice. Si cambiamos las rectas, ¿qué resultados obtenemos?

d) ¿Encontraremos resultados similares para funciones polinómicas de grado tres? ¿Y para funciones polinómicas de grado superior?

1. a) Las intersecciones son los puntos de la parábola $y = (x - 3)^2 + 4$ con las rectas y = 2x e y = 5x, son los puntos:

$$\begin{cases} y = (x-3)^2 + 4 \\ y = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 11x + 13 = 0 \\ y = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 9{,}65; \quad y_4 = 48{,}27 \quad (P_4) \\ x_1 = 1{,}35; \quad y_1 = 6{,}73 \quad (P_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = (x-3)^2 + 4 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 13 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 5{,}73; \quad y_4 = 11{,}46 \quad (P_3) \\ x_2 = 2{,}27; \quad y_1 = 4{,}54 \quad (P_2) \end{cases}$$

Los valores pedidos son:

$D_1 = 2{,}27 - 1{,}35 = 0{,}92$; $\quad D_2 = 9{,}65 - 5{,}73 = 3{,}92 \quad$ y $\quad V = |0{,}92 - 3{,}92| = 3$.

En las imágenes que siguen pueden verse las cuatro intersecciones:

P_1 (1,35; 6,73); P_2 (2,27; 4,54); P_3 (5,73; 11,46) y P_4 (9,65; 48,27)

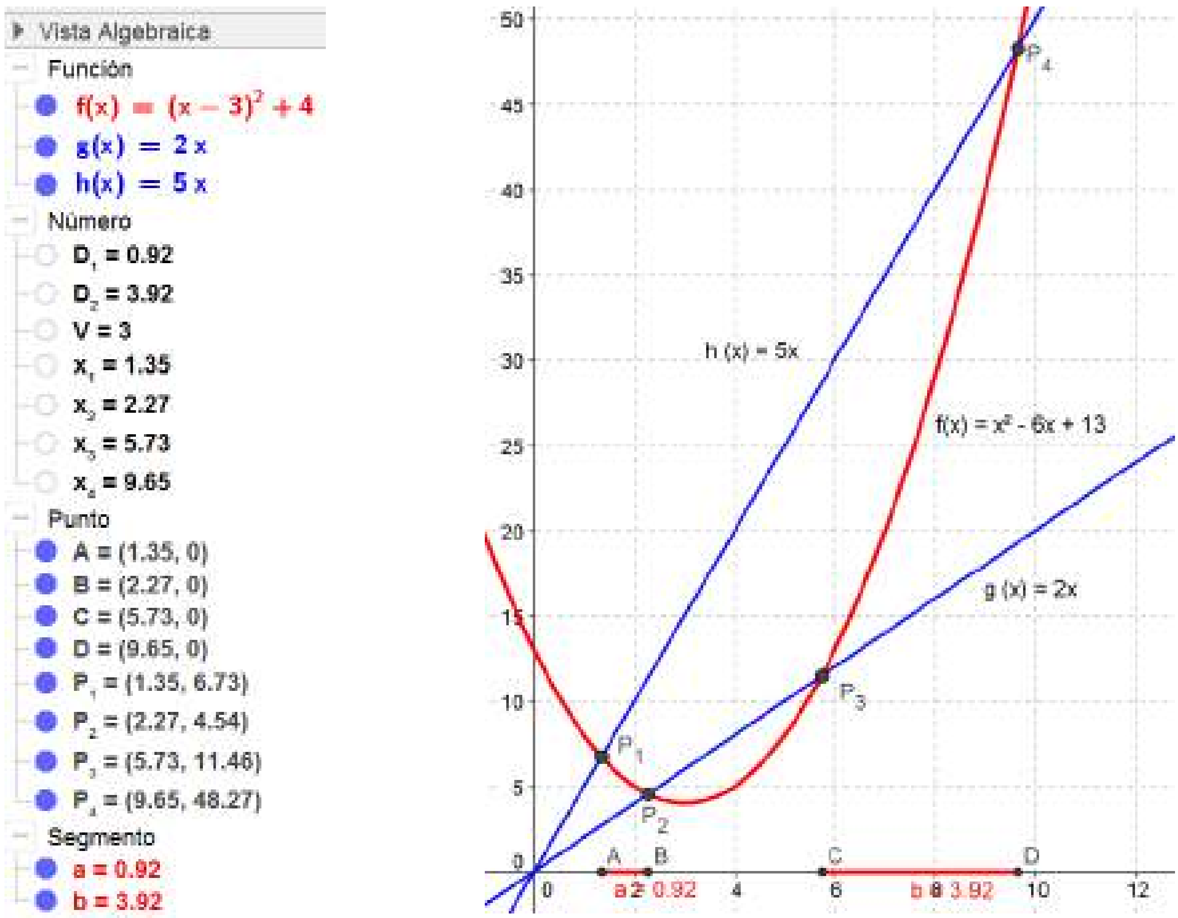
Además aparecen dibujados los puntos A (1,35; 0); B (2,27; 0); C (5,73; 0) y D (9,65; 0) sobre el eje OX, que tienen las mismas abscisas que los puntos intersección

En el recuadro de la Vista Algebraica aparecen calculadas las expresiones:

$$D_1 = x_2 - x_1 = 0{,}92; \qquad D_2 = x_4 - x_3 = 3{,}92 \quad \text{y} \quad V = |D_1 - D_2| = |0{,}92 - 3{,}92| = 3.$$

También pueden verse, sobre el eje OX, los segmentos a = AB y b = CD, de medidas 0,92 y 3,92 respectivamente.

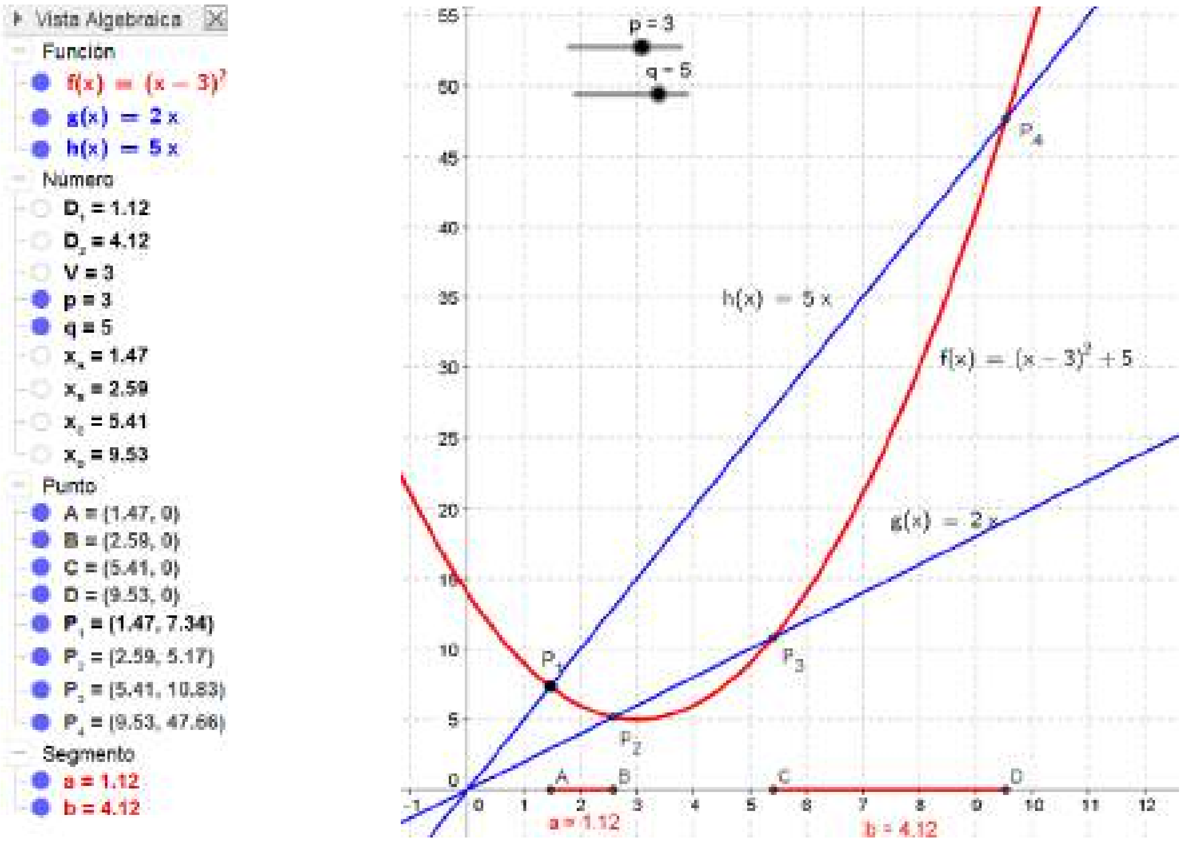
El valor V = 3 es el valor absoluto de la diferencia de las pendientes de la rectas y = 5x e y = 2x.

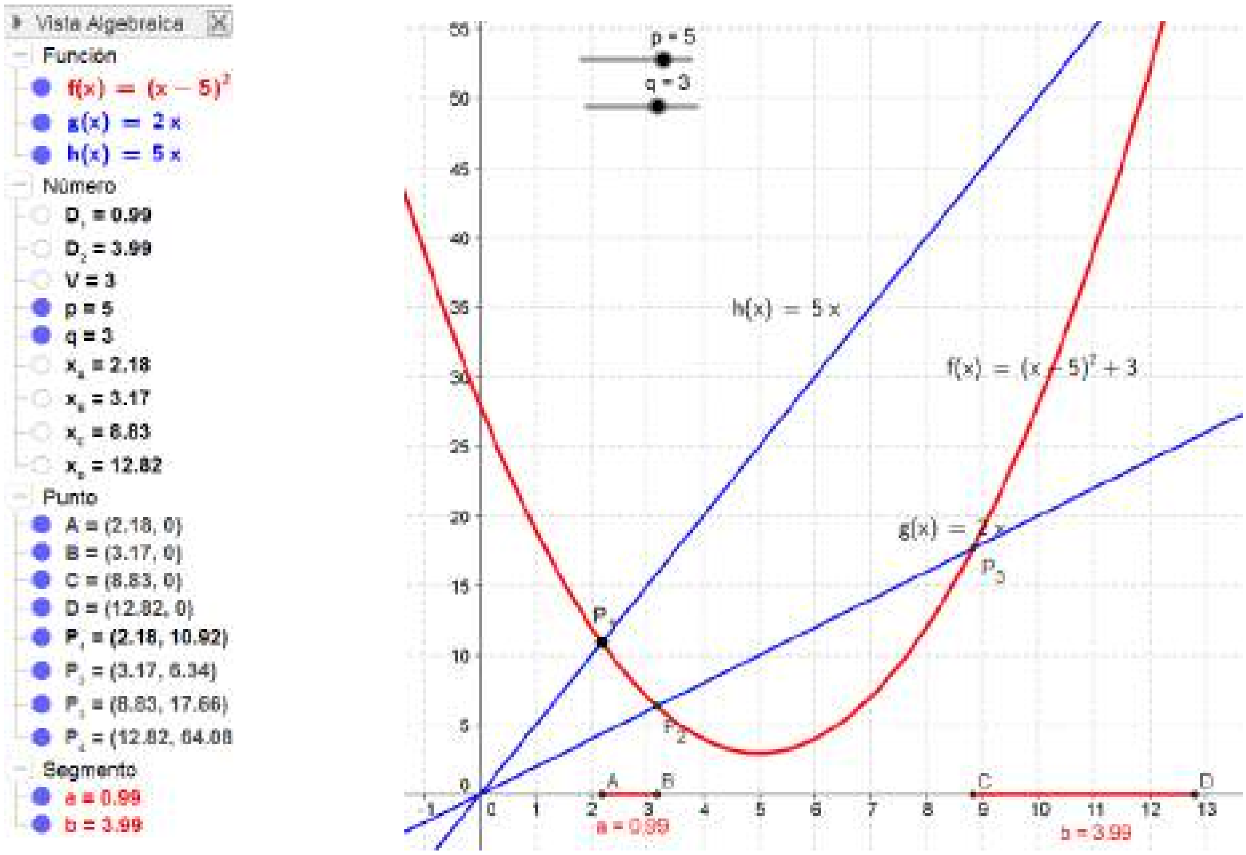


b) Analizamos las situaciones para parábolas de la expresión $y = (x - p)^2 + q$, con p y q positivos y las rectas y = 2x e y = 5x.

Trabajando en el programa GeoGebra, creamos dos deslizadores denominados p y q. Introducimos la función $f(x) = (x - p)^2 + q$ y observamos que al variar los valores de p y q, es decir, la posición del vértice de la parábola, el valor de V se mantiene fijo en 3.

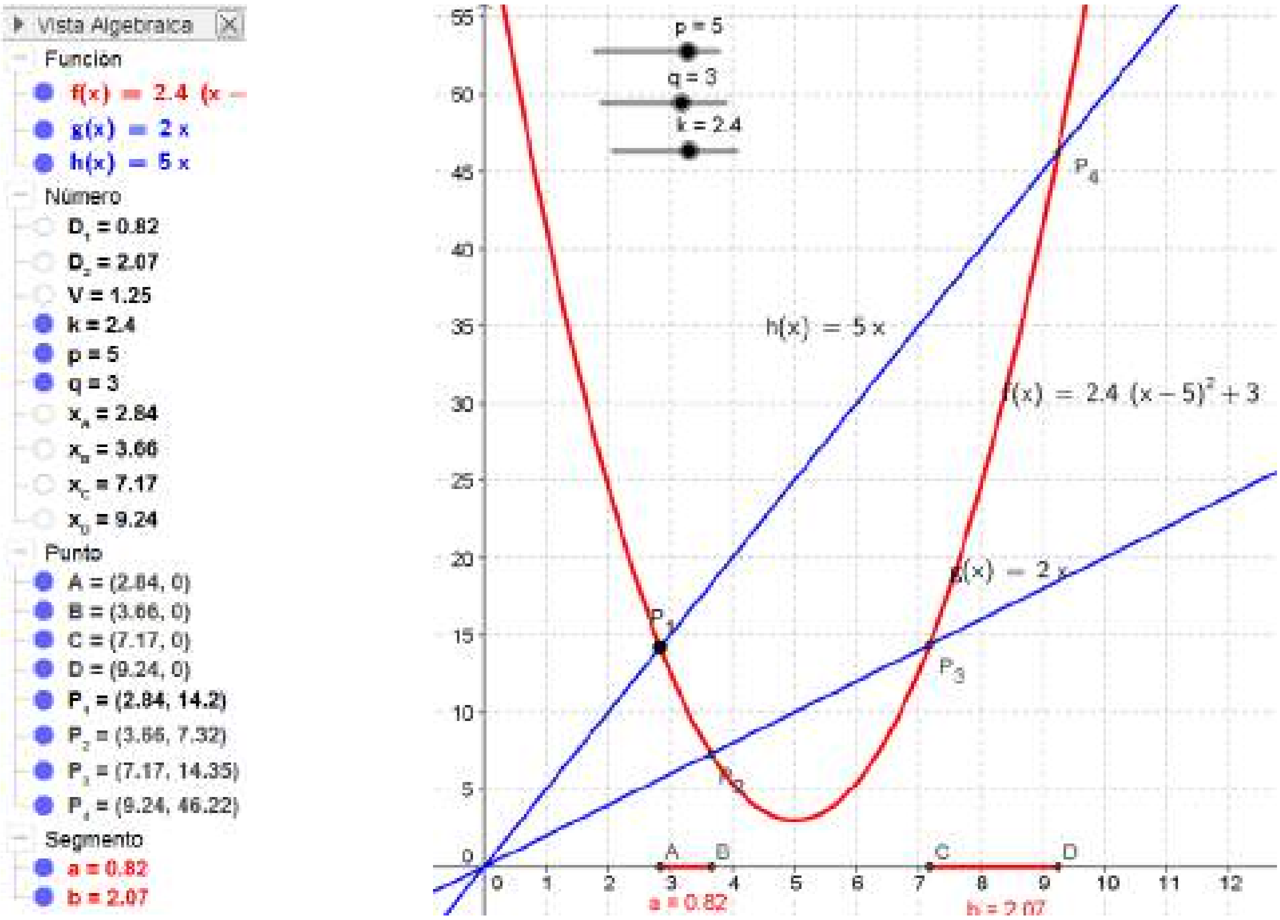
En las imágenes pueden verse los casos de los vértices V (3, 5) y V (5, 3)


Vista Algebraica
Función
f(x) = (x − 3)²
g(x) = 2 x
h(x) = 5 x
Número
D₁ = 1.12
D₂ = 4.12
V = 3
p = 3
q = 5
x_A = 1.47
x_B = 2.59
x_C = 5.41
x_D = 9.53
Punto
A = (1.47, 0)
B = (2.59, 0)
C = (5.41, 0)
D = (9.53, 0)
P₁ = (1.47, 7.34)
P₂ = (2.59, 5.17)
P₃ = (5.41, 10.83)
P₄ = (9.53, 47.66)
Segmento
a = 1.12
b = 4.12
p = 3
q = 5
h(x) = 5 x
f(x) = (x − 3)² + 5
g(x) = 2 x
P₁
P₂
P₃
P₄
A
B
C
D
a = 1.12
b = 4.12


Vista Algebraica
Función
f(x) = (x − 5)²
g(x) = 2 x
h(x) = 5 x
Número
D₁ = 0.99
D₂ = 3.99
V = 3
p = 5
q = 3
x_A = 2.18
x_B = 3.17
x_C = 8.83
x_D = 12.82
Punto
A = (2.18, 0)
B = (3.17, 0)
C = (8.83, 0)
D = (12.82, 0)
P₁ = (2.18, 10.92)
P₂ = (3.17, 6.34)
P₃ = (8.83, 17.66)
P₄ = (12.82, 64.08)
Segmento
a = 0.99
b = 3.99
p = 5
q = 3
h(x) = 5 x
f(x) = (x − 5)² + 3
g(x) = 2 x
P₁
P₂
P₃
A
B
C
D
a = 0.99
b = 3.99

c) Introducimos un nuevo deslizador k y lo hacemos variar, observando los resultados.

En la imagen puede verse el valor V = 1,25 que es el resultado de operar $V = \left|\frac{m-n}{k}\right| = \left|\frac{5-2}{2{,}4}\right| = 1{,}25.$



Obtenemos otros valores de V haciendo cambios en los tres deslizadores.

Para cambiar las rectas, creamos dos nuevos deslizadores llamados m y n e introducimos las funciones g (x) = mx y h (x) = nx. También podemos analizar las intersecciones de rectas que no pasan por el origen, es decir, funciones de la forma g (x) = mx + m_1 y h (x) = nx + n_1.

Variamos todos los deslizadores y observamos que, en las situaciones que haya intersecciones, el valor buscado es $V = \left|\frac{m-n}{k}\right|$.

El hecho de obtener el valor anterior lo podemos encontrar en el razonamiento que sigue.

Sean y = ax^2 + bx + x, con a ≠ 0, y = mx + m_1 e y = nx + n_1 las ecuaciones de una parábola y dos rectas que se cortan en cuatro puntos.

Hallamos las abscisas de esos cuatro puntos:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + m_1 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = mx + m_1 \Rightarrow ax^2 + (b - m)x + (c - m_1) = 0$$

Si llamamos x_1 y x_4 a las soluciones de la ecuación anterior, una de las relaciones de Cardano puede expresarse en la forma:

$$x_1 + x_4 = -\frac{b - m}{a}$$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = nx + n_1 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = nx + n_1 \Rightarrow ax^2 + (b - n)x + (c - n_1) = 0$$

Si llamamos x_2 y x_3 a las soluciones de la ecuación anterior, una de las relaciones de Cardano puede expresarse en la forma:

$$x_2 + x_3 = -\frac{b - n}{a}$$

El valor buscado V será:

$$V = \left|(x_2 - x_1) - (x_4 - x_3)\right| = \left|(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)\right| = \left| -\frac{b - n}{a} - \left(-\frac{b - m}{a}\right)\right| = \left|\frac{n - m}{a}\right|$$

El valor anterior depende de las pendientes de las rectas, m y n, y del coeficiente a del término x^2 de la parábola.

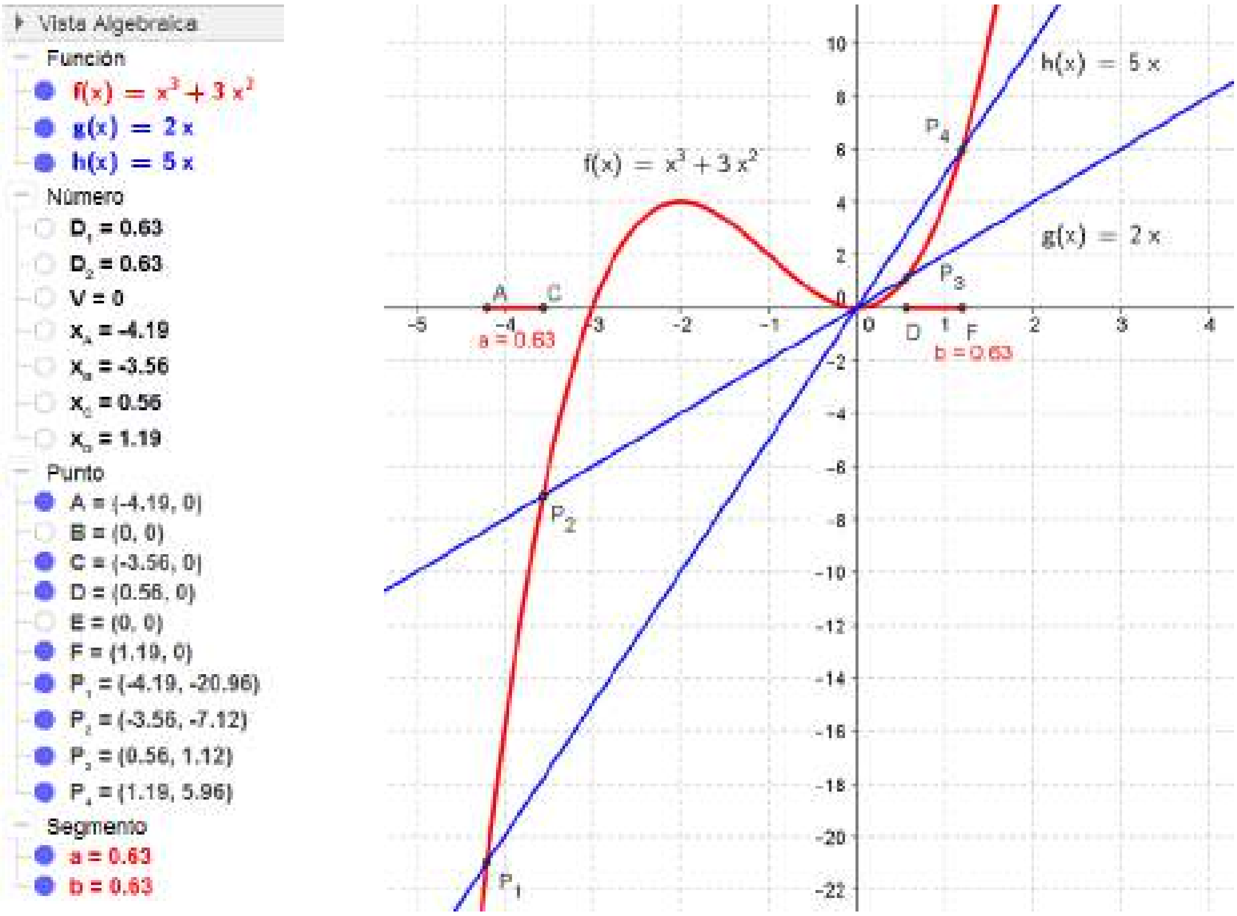
d) Veamos qué ocurre cuando cortamos la curva cúbica de ecuación $f(x) = x^3 + 3x^2$ con las rectas $g(x) = 2x$ y $h(x) = 5x$.

En las imágenes que siguen pueden verse las intersecciones denominadas P_1, P_2, P_3 y P_4, además del origen de coordenadas y en la Vista Algebraica sus coordenadas.

Pueden verse los puntos proyección de los puntos anteriores sobre el eje OX: A, C, D y F, con sus coordenadas en la Vista Algebraica.

Hallamos las diferencias:

$D_1 = x_C - x_A = 0,63$ $\qquad$ $D_2 = x_F - x_D = 0,63$ $\quad$ $V = |D_1 - D_2| = |0,63 - 0,63| = 0$



Veamos qué ocurre cuando cortamos la curva cúbica de ecuación f (x) = $x^3 - x^2 - x + 2$ con las rectas g (x) = 2x y h (x) = 5x.

En las imágenes que siguen pueden verse las intersecciones denominadas P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6, y en la Vista Algebraica sus coordenadas.

Pueden verse los puntos proyección de los puntos anteriores sobre el eje OX: A, C, D, F, G y H, con sus coordenadas en la Vista Algebraica.

Hallamos las diferencias:

$$D_1 = x_B - x_C = 0{,}56 \quad D_2 = x_D - x_C = 0{,}86 \quad D_3 = x_H - x_G = 0{,}3$$

$$V = |D_1 - D_2 + D_3| = |0{,}56 - 0{,}86 + 0{,}3| = 0$$

Punto

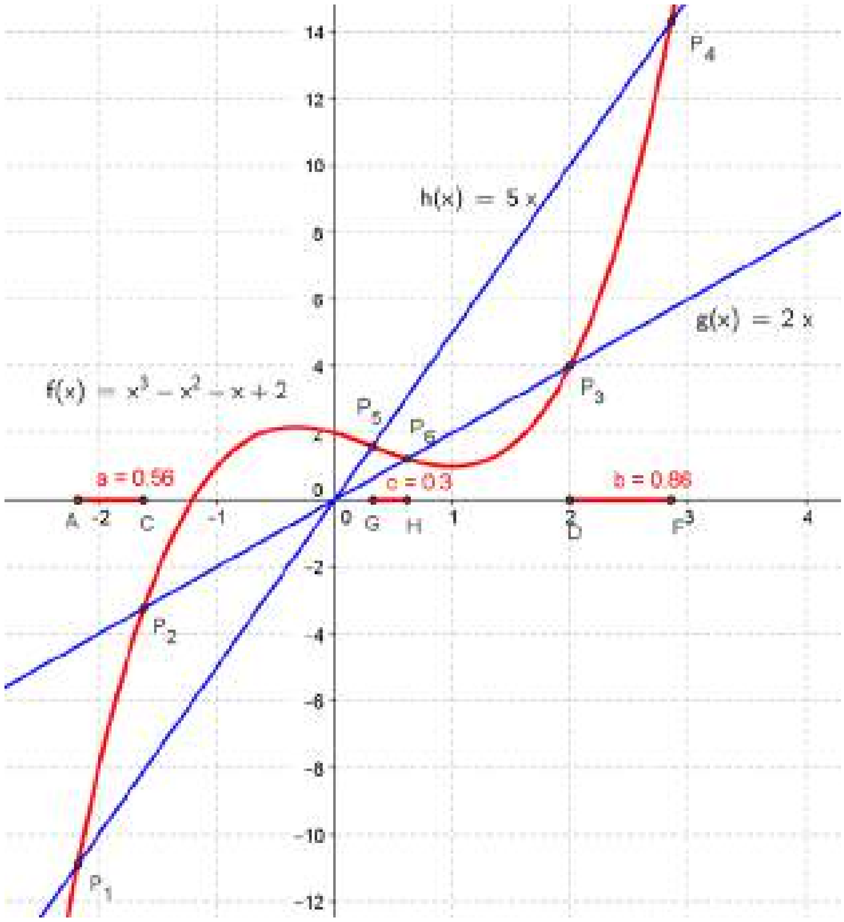
- A = (-2.18, 0)
- C = (-1.62, 0)
- D = (2, 0)
- F = (2.86, 0)
- G = (0.32, 0)
- H = (0.62, 0)
- P_1 = (-2.18, -10.89)
- P_2 = (-1.62, -3.24)
- P_3 = (2, 4)
- P_4 = (2.86, 14.28)
- P_5 = (0.32, 1.61)
- P_6 = (0.62, 1.24)

Recta

- c_1: x = 0.32
- d: x = 0.62

Segmento

- a = 0.56
- b = 0.86
- c = 0.3



El hecho de obtener el valor anterior, V = 0, lo podemos encontrar en el razonamiento que sigue.

Sean $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$, $y = mx + m_1$ e $y = nx + n_1$ las ecuaciones de una cúbica y dos rectas que se cortan en seis.

Hallamos las abscisas de esos seis puntos:

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y = mx + m_1 \end{cases} \Rightarrow \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = mx + m_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ax^3 + bx^2 + (c - m)x + (d - m_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{cases}$$

Las soluciones x_1, x_3 y x_6 cumplen una de las relaciones de Cardano que puede expresarse en la forma:

$$x_1 + x_3 + x_6 = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y = nx + n_1 \end{cases} \Rightarrow \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = nx + n_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ax^3 + bx^2 + (c - n)x + (d - n_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{cases}$$

Las soluciones x_2, x_4 y x_5 cumplen una de las relaciones de Cardano que puede expresarse en la forma:

$$x_2 + x_4 + x_5 = -\frac{b}{a}$$

El valor buscado V será:

$$V = \left| (x_2 - x_1) + (x_4 - x_3) - (x_6 - x_5) \right| = \left| (x_2 + x_4 + x_5) - (x_1 + x_3 + x_6) \right| =$$

$$= \left| -\frac{b}{a} - \left(-\frac{b}{a} \right) \right| = \left| \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \right| = 0$$

El valor anterior siempre es nulo.

Los mismo ocurre para funciones polinómicas de grado superior.