

ACTIVIDADES

1. Página 114

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = 1$$

2. Página 114

$$\left| \frac{3x}{x-5} - 3 \right| = \left| \frac{3 \cdot \frac{x}{x-5} - 3}{1} \right| = 3 \left| \frac{5}{x-5} \right| < \frac{15}{|x-5|} < \frac{15}{|x| - 5} < \frac{15}{|x|} < \frac{15}{5} = 3$$

Para $\epsilon = 0,001$:

$$x_0 = \frac{15}{0,001} = 15005$$

Tomando $x = 15006$:

$$|f(15006) - 3| = 0,00099 < 0,001$$

3. Página 115

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4. Página 115

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$

d) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = x - x^2$

e) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = x^2 + x - 4$

f) $f(x) = 1 - \sin 2x$

5. Página 116

a) $2 + (+\infty) = +\infty$

c) $2 \cdot (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

b) $2 + (-\infty) = -\infty$

d) $2 \cdot (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

6. Página 116

a) $2^{+\infty} + (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

b) $2^{-\infty} + (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

c) $(+\infty)^2 + (+\infty) = +\infty$

d) $(-\infty)^2 \cdot (+\infty) = +\infty$

7. Página 117

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 8 + 8 = 16$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{8}{+\infty} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{g(x)} = \sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \sqrt[4]{+\infty} = +\infty$$

8. Página 117

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty - \frac{4}{9} = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty \cdot \left(\frac{4}{9}\right) = \infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{f(x)} = \sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \sqrt[4]{-\infty} \text{ (No existe en } \mathbb{R} \text{)}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

9. Página 118

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = (+\infty)^5 = \infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = (-\infty)^5 = -\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{\lim_{x \rightarrow -\infty} x} = -\infty$$

10. Página 118

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x = 5^{+\infty} = \infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{\frac{1}{x}} = 5^{\frac{1}{+\infty}} = 5^0 = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x = 5^{-\infty} = \frac{1}{5^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5}^x = \sqrt{5}^{+\infty} = \infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5}^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x = 5^{+\infty} = +\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5}^{\frac{1}{x}} = \sqrt{5}^{\frac{1}{+\infty}} = \sqrt{5}^0 = 1$$

11. Página 119

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - 7}{x - 13} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2x}{x^2 - 1} = \frac{2}{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x}{9 - 2x^2} = \frac{4}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{4x^2} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \infty$$

12. Página 119

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 - x - 2}{5x - 1} \right]^2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2}{5x} \right]^2 = \frac{9}{25} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \frac{9}{25} \cdot (+\infty) = +\infty \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 2}{2x^2 - 15} \right]^{-3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 - 15}{x^2 - 2} \right]^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2}{x^2} \right]^3 = 2^3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6}{x^6} = 8 \cdot 1 = 8 \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{2x} \cdot \frac{3x}{1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{2x} = \frac{a}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} \quad \begin{cases} \infty & \text{si } a > 0 \\ \infty & \text{si } a < 0 \end{cases} \\
 \text{Si } a = 0 &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{2x} \cdot \frac{3x}{1} = \frac{3}{2} \\
 \text{d) Si } a = -2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4x - a - 2} &= \frac{1}{-(a-2)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = -\frac{1}{a-2} \\
 \text{Si } a = -2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4x - a - 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4x} = +\infty
 \end{aligned}$$

13. Página 120

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{2x - 1} &= \frac{1}{2} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 - 3}} &= +\infty \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 - 3}} &= +\infty \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 12x - 9}{\sqrt[3]{x^5 - 5x - 2}} &= +\infty
 \end{aligned}$$

14. Página 120

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - x}{x} &= 1 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} \cdot \frac{\sqrt{6x}}{4} &= 1 \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x - \sqrt{3x - 2}}{2x} &= \frac{7}{2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + 2x}{6x} &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

15. Página 121

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x} \cdot \frac{2x}{3} \cdot \frac{3x^2 - 1}{1 + 3x} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 3x^3 - 2x}{x} \cdot \frac{6x^2 - (3x^3 - 9x^2 - x - 3)}{3 - 9x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{16x^2}{3x^2} \right] = \frac{16}{3} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{4x^3 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (4x^3 - x - 1)}{x + \sqrt{4x^3 - x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^3}{\sqrt{4x^3}} = -\infty \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - x + 1} - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - x + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2 - (x^2 - 2x)}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = 1
 \end{aligned}$$

16. Página 121

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - ax} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - ax - x^2}{\sqrt{x^2 - ax} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2 - ax} - x} = \frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2 \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - bx - 3} - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - bx - 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - bx - 3} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx - 3}{\sqrt{4x^2 - bx - 3} + 2x} = \frac{b}{4} = -\frac{1}{4} \rightarrow b = -1 \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - 7} - cx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - 7 - c^2x^2}{\sqrt{9x^2 - 7} + cx} = 0 - c = 3 \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{dx^2 - x - 5} - 2x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{dx^2 - x - 5 - 4x^2}{\sqrt{dx^2 - x - 5} + 2x} = -\frac{1}{4} \rightarrow d = 4 \end{aligned}$$

17. Página 122

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x-3} \right)^{x+2} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x-3} - 1 \right)(x+2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+4}{x-3} \right)} = e^2 \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2x}{x^2-1} \right)^{x+2} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2x}{x^2-1} - 1 \right)(x+2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2x^2+4x}{x^2-1} \right)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{4x}{2x-1} \right)^{x-3} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{4x}{2x-1} - 3 \right)(x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x}{2x-1} \right)(x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{2x-1} \right)(x-3)} = e^1 = e \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{3x^2-9}{6x^2-5} \right)^{2x+1} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{3x^2-9}{6x^2-5} - \frac{1}{2} \right)(2x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2-9}{6x^2-5} - \frac{1}{2} \right)(2x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-23}{12x^2+10} \right)(2x+1)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

18. Página 122

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2-5} \right)^{\frac{x^2}{2-x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2-5} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{2-x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{x^2-5} \right) \left(\frac{x^2}{2-x} \right)} = e^0 = 1 \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2-5} \right)^{\frac{x^3}{2-x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2-5} - 1 \right) \left(\frac{x^3}{2-x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{x^2-5} \right) \left(\frac{x^3}{2-x} \right)} = e^{-8} = \frac{1}{e^8} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2-3x}{7-3x^2} \right)^{\frac{x^4+x}{x^3-1}} &= e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2-3x}{7-3x^2} - 1 \right) \left(\frac{x^4+x}{x^3-1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-7}{7+3x^2} \right) \left(\frac{x^4+x}{x^3-1} \right)} = e^1 = e \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2-3x}{7-3x^2} \right)^{\frac{x^2+x}{x^3-1}} &= e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2-3x}{7-3x^2} - 1 \right) \left(\frac{x^2+x}{x^3-1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-7}{7+3x^2} \right) \left(\frac{x^2+x}{x^3-1} \right)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

19. Página 123

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$$

20. Página 123

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= 0 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= +\infty \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= 2 & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= 2 \end{aligned}$$

21. Página 124

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{1} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{2}{4} = \frac{2}{1} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \frac{\sqrt{2}-2}{1} = \sqrt{2}-2$$

22. Página 124

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1 - \sqrt{4} = 3$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 1 - \sqrt{9} = 4$$

$$d) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)^{-1} = \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \sqrt{x} = 1 + 0 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

23. Página 125

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x^2-2x+1}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-6x^2-12x-8}{x^3-2x^2-4x-8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x^2-4x-4)}{(x-2)(x^2-4x-4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+4x-4}{x^2-4x-4} = \frac{0}{16} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2-2x}{x^2-4x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2-x)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = \frac{2}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2-2x}{x^2-4x-4}.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-2x^2-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x-1}{x+1} = \frac{-1}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x-3} = \frac{2}{-3}$$

24. Página 125

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{1-x} = \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^{1/2}}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{-\sqrt{x-1}} = \text{No existe} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{-\sqrt{x-1}} = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{1-x}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-x}{\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x-3}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x-3}} = -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)^{1/2}} = -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-3)^{1/2}}{(x-3)} = -\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^{1/2} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}}{-x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{6}}{0} = \infty. \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x-3}}{-x\sqrt{x-3}} \rightarrow \text{No existe} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{-x\sqrt{x-3}} = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1+x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1+\sqrt{x}} = -\frac{1}{4}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{(x-2)^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)(x-2)^{1/2}}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)(x-2)^{1/2} = 0$$

25. Página 126

$$\nexists f(-2) = \frac{1}{0} \rightarrow \text{La función no es continua en } x = -2.$$

$$\nexists f(2) = \frac{5}{0} \rightarrow \text{La función no es continua en } x = 2.$$

26. Página 126

Expresamos la función como una función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq -1 \\ 2(x-1) & \text{si } -1 < x \end{cases}$

$$f(-1) = 2(-1-1) = 0 \rightarrow \text{Existe } f(-1).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -2x + 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x - 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$f(-1) = 0 = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow \text{La función es continua en } x = -1.$$

27. Página 127

Si $x < 0 \rightarrow f(x) = 1 - x^2 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$.

Si $0 < x < 2 \rightarrow f(x) = \sqrt{4x-1} \rightarrow f(x)$ no está definida en $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. Es continua en $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$.

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = x + 1 \rightarrow f(x)$ es continua en $(2, +\infty)$.

Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 1 - 0 = 1 \rightarrow$ Existe $f(0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4x-1} \rightarrow \text{No existe} \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

La función no es continua en $x = 0$.

Si $x = 2 \rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3 \rightarrow$ Existe $f(2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4x-1} = \sqrt{7} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 1 = 3 \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

La función no es continua en $x = 2$.

28. Página 127

Si $x < 3 \rightarrow f(x) = x^2 - 4 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 3)$.

Si $x > 3 \rightarrow f(x) = \frac{x-m}{x} \rightarrow f(x)$ es continua en $(3, +\infty)$.

Si $x = 3 \rightarrow f(3) = 9 - 4 = 5 \rightarrow$ Existe $f(3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-m}{x} = 1 - \frac{m}{3}$$

$f(x)$ es continua en $x = 3$ si:

$$f(3) = 5 = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow 5 = 1 - \frac{m}{3} \rightarrow m = 12$$

SABER HACER

29. Página 128

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{1+t^2} = 0 \quad \text{Cuando pasan muchos años, los beneficios se reducen a cero.}$$

30. Página 128

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - ax + 1} = x + \left(\frac{-ax + 1}{2x} \right) \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - ax + 1} = x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ax + 1}{2x} = x - \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4$$

31. Página 128

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4 - ax^3}{2 - x^4} \right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}} \rightarrow 1^{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4 - ax^3}{2 - x^4} \right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4 - ax^3}{2 - x^4} - 1 \right) \left(\frac{3x^3+1}{x^2-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax^3 - 2}{2 + x^4} \right) \left(\frac{3x^3+1}{x^2-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3ax^6}{x^6}} = e^{3a}$$

$$e^{3a} = e^3 \Rightarrow a = 1$$

32. Página 129

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{3x} - 7e^{-5x}}{2e^{-5x} - 4e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-e^{3x} + 7e^{-5x}}{e^{3x}}}{\frac{2e^{-5x} - 4e^{3x}}{e^{3x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + 7e^{-8x}}{2e^{-8x} - 4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{3x} - 7e^{-5x}}{2e^{-5x} - 4e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-e^{3x} + 7e^{-5x}}{e^{-5x}}}{\frac{2e^{-5x} - 4e^{3x}}{e^{-5x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{8x} + 7}{2 - 4e^{8x}} = \frac{7}{2}$$

33. Página 129

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}} 2^{\frac{2x}{5x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}} 2^{\frac{2}{5x+1}} = 2^{\infty}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}^-} \frac{2x}{5x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}^-} \frac{2}{5x+1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}^+} \frac{2x}{5x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}^+} \frac{2}{5x+1} = +\infty \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{No existe } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}} \frac{2x}{5x^2+x} \\ &\text{No existe } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}} 2^{\frac{2x}{5x^2+x}} \end{aligned}$$

34. Página 129

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x-25}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x-25}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5(x-5)}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 5} 5 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 20$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} \cdot \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{2-x}+1} = -2$$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{\sqrt{3-x}-2} \cdot \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{\sqrt{3-x}-2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(\sqrt{3-x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{3-x}+2} = -4$$

d) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{\sqrt{2x}-6} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{0}{0}$

35. Página 130

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x - 16} = \frac{14 - 2a}{0}$$

Si $a > 7$ entonces:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x - 16} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x - 16} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

Si $a < 7$ entonces:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x - 16} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x - 16} &= -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

Si $a = 7$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^3 - 4x^2 - 4x - 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x - 8} = -\frac{5}{8}$$

36. Página 130

$$f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 1 = -4 \rightarrow \text{Existe } f(-1).$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 3x - 2 = -5 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 4x - 1 = -4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow f(x) \text{ es discontinua en } x = -1.$$

37. Página 131

$$\text{Si } x < 0 \rightarrow f(x) = ax^2 + b$$

Por ser una función polinómica, es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, en el intervalo $(-\infty, 0)$.

$$\text{Si } 0 \leq x < 1 \rightarrow f(x) = x - a$$

Por ser una función polinómica, es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, en el intervalo $(0, 1)$.

$$\text{Si } x \geq 1 \rightarrow f(x) = \frac{a}{x} + b$$

Es una función racional. No está definida en $x = 0$. Es continua en $(1, +\infty)$.

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow f(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ax^2 + b = b \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - a = -a$$

$$\text{Para } x = 1 \rightarrow f(1) = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - a = 1 - a \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{a}{x} + b \right) = a + b$$

$$\text{Para } x = 0 \quad f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow b = -a$$

$$\text{Para } x = 1 \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow a + b = 1 - a$$

$$\left. \begin{aligned} b &= -a \\ a + b &= 1 - a \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

38. Página 131

$P(t) = t^2 \rightarrow$ Función polinómica $\rightarrow P(t)$ es continua en $(0, 5)$.

$P(t) = \frac{50t - 62,5}{0,5t - 5} \rightarrow$ Definida en $\mathbb{R} - \{-10\} \rightarrow P(t)$ es continua en $5, \neq -10$.

$$P(5) = 25$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 5^-} P(t) = 25 \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} P(t) = 25 \end{array} \right\} - \lim_{t \rightarrow 5} P(t) = 25 = P(5) \rightarrow P(t) \text{ es continua en } t = 5.$$

Luego la función es continua en $[0, +\infty)$.

ACTIVIDADES FINALES

39. Página 132

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

40. Página 132

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3}\right]^x = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3}\right]^x = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x = +\infty$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{x^2} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x = 0$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{x^2} = +\infty$

41. Página 132

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 - 2x - 1} = -\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 - 2x - 1} = -\infty$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5} = 1$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x - 2} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5} = 1$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16}{x - 2} = 0$

42. Página 132

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 3}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 3}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 3}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 3}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 3}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2} = -\infty$

43. Página 132

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 2}}{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = 2$$

44. Página 132

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} 0,7^{3x+2} = 0,7^{+\infty} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = 0,01x^2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 0,01x^2 = \infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = 7^{2-x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^{-x} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x = 2^2 = x^2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = 4 = \infty$$

45. Página 132

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x - \sqrt{x^2 - 6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x + \sqrt{x^2}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x - \sqrt{x^2 - 6x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x + \sqrt{x^2}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \sqrt{x^2 - 6x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \sqrt{x^2 - 6x} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 6x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^2} = \infty$$

46. Página 132

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4 - 2x^2} - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^4 - 2x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^4} + x^2} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^4 - 2x^2} - x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^4 - 2x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^4} + x^2} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - x^4}{\sqrt{x^2 - 3x} - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4}{2x^2} = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x - x^4}{\sqrt{x^2 - 3x} - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{2x^2} = -\infty$$

47. Página 132

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{3}{x} \right]^{x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x} \right) x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-3}{x}} = e^3 \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{3}{x} \right]^{1-x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{3}{x} \right) 1-x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-3x}{x}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{3}{x} \right]^{x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x} \right) x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3x-3}{x} \right)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \quad d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{3}{x} \right]^{1-x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{3}{x} \right) 1-x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3+3x}{x}} = e^3$$

48. Página 132

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 2} - \sqrt{x^2 + x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x - 2}{2\sqrt{x^2 - 3x - 2} - \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{2\sqrt{x^2}} = -1$$

49. Página 132

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 2x^3 - 5} - \sqrt{x^4 - 3x}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5 - 3x}{x - 4\sqrt{x^4 - 2x^3 - 5} - \sqrt{x^4 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x\sqrt{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x\sqrt{x^4}} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 3}} = 2$$

50. Página 132

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4 - 3x^2 - 2} - x^2 + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4 - 3x^2 - 2} - (x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - 11}{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 2} - (x^2 - 3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2}{2x^2} = \frac{9}{2}$$

51. Página 132

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-4} - \sqrt{x-4}}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{8}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}}}{\frac{4}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{4} \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 2$$

52. Página 132

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x} - \frac{x^2 - 2x}{x - 3} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 3 - 2x^3 + 6x^2}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2$$

53. Página 132

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x - \sqrt{2x}} - \sqrt{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x - \sqrt{2x}} + \sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{2}$$

54. Página 132

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 8} - \sqrt{x^2 + mx - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-m)x - 15}{\sqrt{x^2 - 3x - 8} + \sqrt{x^2 + mx - 7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-m)x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{3-m}{2} \cdot 1 = \frac{3-m}{2}$$

55. Página 132

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-mx^2 + 5}{2x^2 - \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5}} = \frac{-m}{4} = 2 \rightarrow m = -8$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - 4x} - 3x + m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - 4x} - (3x - m) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - 4x - (9x^2 - 6mx - m^2)}{\sqrt{9x^2 - 4x} + (3x - m)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-6m)x}{6x} = \frac{4-6m}{6} = \frac{1}{2} \cdot m = \frac{1}{6}$$

56. Página 132

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3-2x}{1-2x} \right]^{x-6} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1+2x} \right) x-6} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-12}{1+2x} \right)} = e^1 = e \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2-3x-2}{x^2-3x} \right]^{\frac{x}{2}} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6x+2}{x^2+3x} \right) \left(\frac{x}{2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6x^2}{2x^2} \right)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^3-3x}{1-2x^3} \right]^{\frac{x^2-3}{3}} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x-1}{1+2x^3} \right) \left(\frac{x^2-3}{3} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^3}{6x^3} \right)} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1-4x}{4x-7} \right]^{\frac{x^3+1}{x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6}{4x+7} \right) \left(\frac{x^3+1}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6x^3}{4x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x}{2} \right)} = e^{-\infty} = 0 \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2-6}{6x-3x^2} \right]^{\frac{x}{4}} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6-6x}{6x+3x^2} \right) \left(\frac{x}{4} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x^2}{12x^2} \right)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x^4-2}{2x^2-1} \right]^{\frac{x^3-3x}{x^2+2}} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2-4}{4x^4-4x^2+2} \right) \left(\frac{x^3-3x}{x^2+2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^5}{4x^5} \right)} = e^1 = e
 \end{aligned}$$

57. Página 133

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2-3}{mx-2x^2} \right]^{x+2} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{+3-mx}{mx+2x^2} \right) x+2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-mx^2}{2x^2} \right)} = \frac{1}{e} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-mx^2}{2x^2} \right] = -1 \rightarrow m=2 \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{5x-3}{2-5x} \right]^{\frac{x^2-2}{8+mx}} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2+5x} \right) \left(\frac{x^2-2}{8+mx} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{5mx^2} \right)} = e^{\frac{1}{5m}} = \frac{7}{10} - \frac{1}{5m} = \ln \left[\frac{7}{10} \right] \rightarrow m = \frac{1}{5 \ln \left[\frac{7}{10} \right]}
 \end{aligned}$$

58. Página 133

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x-10}{3^{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3^x}{3^{x+1}} - \frac{10}{3^{x+1}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} - \frac{10}{3^{x+1}} \right] = \frac{1}{3} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1}}{3^x-10} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1}}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \cdot 3}{3^x} = 3
 \end{aligned}$$

59. Página 133

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= \begin{cases} x-2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x-2 = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x-2 = -\infty \\
 \text{b) } f(x) &= \begin{cases} x-(3-2x) & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \\ x-(-3+2x) & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-3 & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \\ -x-3 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases} \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x-3 = -\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x-3 = -\infty
 \end{aligned}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x-2} & \text{si } x < -\frac{3}{2} \\ -\frac{2x-3}{x-2} & \text{si } -\frac{3}{2} < x < 2 \\ \frac{2x-3}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{x-2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x-2} = 2$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -\frac{x-3}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-3}{1-x} & \text{si } 1 < x < 3 \\ -\frac{x-3}{1-x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-3}{1-x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{1-x} \right) = 1$$

60. Página 133

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

61. Página 133

a) $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = 0,7$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2,9$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

62. Página 133

a) $\lim_{x \rightarrow 1} 2^{\ln x} = 2^{\ln 1} = 2^0 = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} 3^{\ln x-1} = 3^{\ln 1} = 3^0 = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow e} 2^{\ln x} = 2^{\ln e} = 2^1 = 2$

e) $\lim_{x \rightarrow e+1} 3^{\ln x-1} = 3^{\ln e} = 3^1 = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} 2^{\ln x} = 2^{\ln \frac{1}{e}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \rightarrow \frac{e+1}{e}} 3^{\ln x-1} = 3^{\ln \left(\frac{e+1}{e} \right)} = 3^{\ln \left(\frac{1}{e} \right)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

63. Página 133

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{4-1}{\sqrt{4-3}} = 5$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{-4-1}{\sqrt{4-3}} = -3$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{6-1}{\sqrt{9-3}} = \frac{7}{\sqrt{6}}$

64. Página 133

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2(x-3) + 1 = \log_2(1) + 1 = 0 + 1 = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}} \log_2(x-3) + 1 = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 11} \log_2(x-3) + 1 = \log_2(8) + 1 = 3 + 1 = 4$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{13}{4}} \log_2(x-3) + 1 = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = -2 + 1 = -1$

65. Página 133

$$a) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \left[\frac{1}{x-2} - \log_{\frac{1}{2}} x \right] = \frac{1}{-\frac{1}{4}-2} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{7} - 2 = -\frac{10}{7}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 8} \left[\frac{1}{x-2} - \log_{\frac{1}{2}} x \right] = \frac{1}{6} - \log_{\frac{1}{2}} 8 = \frac{1}{6} - 3 = -\frac{17}{6}$$

66. Página 133

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = \frac{-18}{0} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = \frac{12}{0} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 4} f(x).$$

67. Página 133

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} m(x) - n(x) - p(x) = -\infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{p(x)}{m(x)} = \infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} m(x) \cdot n(x) - p(x) = -\infty$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{n(x)}{p(x)} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 5} m(x) \cdot p(x) = -\infty$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 5} m(x)^{n(x)} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{n(x)}{m(x)} = 0$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 5} m(x)^{p(x)} = +\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{m(x)}{n(x)} = \frac{4}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 5} n(x)^{p(x)} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 5} n(x) \cdot p(x) = 0 \cdot (+\infty) \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 5} p(x)^{n(x)} = +\infty^0 \rightarrow \text{Indeterminación}$$

68. Página 133

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} m(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} m(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} m(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = -\infty$$

69. Página 134

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5$

70. Página 134

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9} = \infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 + 8x - 12} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2 + x + 3}{x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = \infty$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = 1$

f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \infty$

g) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9} = \infty$

h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x + 6}{x^3 - x^2 + 8x - 12} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2 + x + 3}{x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = \infty$

71. Página 134

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x - 1} \cdot \frac{x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2}{x + 1} = \frac{-3}{0} = \infty$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{4x^2 - 4x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2 \left(x - \frac{1}{2} \right)}{4 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x + 1} = \frac{1}{0} = \infty$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{1}{2x + 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{1}{2x + 1} = \infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{4x^2 - 4x - 1}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x - 3} \cdot \frac{x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x - 3} = \frac{6}{0} = \infty$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{x - 3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 3}{x - 3} = \infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{3x^2 - x - 10}{9x^2 - 30x + 25} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{3x - 5}{3x - 5} \cdot \frac{x - 2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{x - 2}{x - 5} = \frac{11}{-10} = -\frac{11}{10}$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}^-} \frac{x - 2}{3x - 5} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}^+} \frac{x - 2}{3x - 5} = \infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{3x^2 - x - 10}{9x^2 - 30x + 25}.$

72. Página 134

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x - 1} \cdot \frac{x - 2}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2}{x + 3} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{x - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{x(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{x} = 2$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x}{2x^3 - x^2 - 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot x - 1^2}{x - 1^2} \cdot \frac{x - 1}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2x - 3} = \frac{1}{5}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x + 3}{x - 3} \cdot \frac{x - 3}{x + 2} = - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x + 2} = -\frac{6}{5}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{3x^2 - x - 10}{9x - 15} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{3x - 5}{3} \cdot \frac{x + 2}{3} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{x + 2}{3} = \frac{11}{9}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3}{x^3 - 2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3}{x^3(1 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{1 - 2x} = 5$$

73. Página 134

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot x - 2}{x - 2} \cdot \frac{x - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x - 3} = -2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} \cdot \frac{x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{x^2} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 1}{x^2} = +\infty \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^2}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 3x^2}{3x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(4 - 3x)}{x(3 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 3x}{3 - x} = \frac{4}{3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{4-2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4-2x} = -\frac{1}{4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^3 - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x^3 - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^3 - 3} = \frac{4}{5}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2 - 4x + 3} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x-3} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x - 4}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x - 4}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{x-3} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x - 4}{x-3} = -\infty \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{x-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2 - 4x + 3} \right].$$

74. Página 134

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{3x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{6}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x-2} + 2}{\sqrt{x-2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2} - 2 = 4$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(1 - \sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(2 - \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 - \sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{1} = 4\sqrt{3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x+3}{x-3} \cdot \frac{1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{12}$$

75. Página 134

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{2x - 1} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{2x - 1} - 3} \cdot \frac{x - 4}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{2x - 1} + 3}{\sqrt{2x - 1} + 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(\sqrt{2x - 1} + 3)}{2} = 24 \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 5}{8x - \sqrt{9x^2 - 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{8 - \frac{1}{\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{8 - 1} = 1 \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 16} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x - 3}}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{2(x - 4)\sqrt{x - 3}} = -\frac{1}{16} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x - 1}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x - 1}} = 0 \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}} = -1 \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x - 2} - 2}{\sqrt{2x - 5} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x - 2} - 2}{2} \cdot \frac{\sqrt{x - 2} + 2}{\sqrt{x - 2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{2} \cdot \frac{\sqrt{x - 2} + 2}{\sqrt{x - 2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x - 2} + 2}{\sqrt{x - 2} - 2} = \frac{3}{4} \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{13 - 4x} - \sqrt{28 + x}}{\sqrt{x - 3}} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-5(x + 3)}{\sqrt{x - 3}(\sqrt{13 - 4x} + \sqrt{28 + x})} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-5(x + 3)\sqrt{x - 3}}{\sqrt{x - 3}(\sqrt{13 - 4x} + \sqrt{28 + x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-5\sqrt{x - 3}}{\sqrt{13 - 4x} + \sqrt{28 + x}} = 0 \\
 \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{1}{\sqrt{x - 2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} \right| &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x - 2}\sqrt{x + 2}}{x\sqrt{x - 2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2}}{x} = 1
 \end{aligned}$$

76. Página 134

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x - 6}{x^3 - x^2 - 8x - 12} &= \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x - 6}{x^3 - x^2 - 8x - 12} &= \frac{12}{-4} = -3 \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x - 6}{x^3 - x^2 - 8x - 12} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 2}{x - 2} \cdot \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 3} = \frac{19}{0} = \infty \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 3} = -\infty \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 3} = \infty \quad \left| \begin{array}{l} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x - 6}{x^3 - x^2 - 8x - 12} \end{array} \right. \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x - 6}{x^3 - x^2 - 8x - 12} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2}{x - 2} \cdot \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 3} = 1 \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x - 6}{x^3 - x^2 - 8x - 12} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2 \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x - 6}{x^3 - x^2 - 8x - 12} &= 2
 \end{aligned}$$

77. Página 134

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 - 3} - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2-3} - 2x^2)}{x^2 - 3 - 4x^4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+3} - 2x^2)}{x(x-1)(x+1)(-4x^2-3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(\sqrt{x^2+3} - 2x^2)}{-4x^2-3} = \frac{4}{7} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 - 3} - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2-3} - 2x^2)}{x^2 - 3 - 4x^4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)(x-1)(\sqrt{x^2-3} - 2x^2)}{x(x-1)(x+1)(-4x^2-3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{x^2-3} - 2x^2)}{-4x^2-3} = -\frac{4}{7} \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 - 3} - 2x^2} &= \frac{0}{\sqrt{3}} = 0 \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 - 3} - 2x^2} &= \frac{6}{\sqrt{7} - 8} = \frac{6(\sqrt{7} + 8)}{-57} = -\frac{2\sqrt{7} + 16}{19} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 - 3} - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-2} = -\infty \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 - 3} - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-2} = -\infty
 \end{aligned}$$

78. Página 134

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[6]{x} = 0 \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{1}{0} = \infty. \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \text{No existe} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[6]{x}}. \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-3x-2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2} \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-1}} = 0 \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x-4} &= -\frac{\sqrt{2}-2}{2} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2}}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x-4} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{4} \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{x-9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x}-3 = 6
 \end{aligned}$$

79. Página 134

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{1}{x^4} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 - \frac{1}{x^4} \right) = -\infty \quad \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{1}{x^4} \right) = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x-1} \right)^{x-3} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{x^2} = 1^0 = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-2}{4x-3} \right)^{4x^2-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4x-3} \right) 4x^2-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2-1}{4x-3} \right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-3}{3x} \right)^{3x} = \left(\frac{4}{3} \right)^{+\infty} = +\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-5} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-5}{x-5} \right) x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{x-5}} = e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

80. Página 134

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-2}{x-2} \right)^{-x^2+3} = 3^{-\infty} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-2}{x^2-3x} \right)^{x^2+4} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2-3x}{x^2+3x} \right) x^2+4} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x^3}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x} = e^{-\infty} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2-1}{3x^2-1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3x^2-1} \right) \left(\frac{x^2+1}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{3x^2} \right)} = e^0 = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{3-2x} \right)^{\frac{2x^2-1}{1+3x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6}{3+2x} \right) \left(\frac{2x^2-1}{1+3x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-12x^2}{6x^2} \right)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-x^2}{x^2-6x-2} \right)^{\frac{1-x^3}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8x+2}{x^2-6x-2} \right) \left(\frac{1-x^3}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-8x^4}{x^4} \right)} = e^{-8} = \frac{1}{e^8}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{7x^2-1}{2-7x^2}} \right)^{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x^2+1}{2+7x^2} \right)^{\frac{x^2+3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2+7x^2} \right) \left(\frac{x^2+3}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2}{7x^3} \right)} = e^0 = 1$$

81. Página 134

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x \frac{1}{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos^2 x - 1 \right) \left(\frac{1}{\sin x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\sin x} = e^0 = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} 2x - \frac{1}{x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} 2x \left(\frac{1}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{x} \right)} = e^2$$

82. Página 134

Si $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - ax + 3}{x - 3} = 0$, $(x-3)$ divide a $x^2 - ax + 3 - 3^2 - 3a - 3 - 0 = a - \frac{12}{3} = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} 1 = 1$$

83. Página 135

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - ax + 3}{x^2 - 1} = \frac{7 + 2a}{5} = 5 \rightarrow 2a = 25 - 7 \rightarrow a = 9$$

84. Página 135

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1 - 2x}{x - 4} \right)^{\frac{m}{3-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-3}{x+4} \right) \left(\frac{m}{3-x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-m}{x+4} \right)} = e^{-\frac{m}{7}} = e \rightarrow m = -7$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 2}{3x - 4} \right)^{\frac{m}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{3x - 4} \right) \left(\frac{m}{x-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{m(x-2)(x-1)}{3x-4}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{m(x-1)}{3x-4}} = e^{\frac{m}{2}} = e^2 \rightarrow m = 4$

85. Página 135

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - ax} - \sqrt{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ax - 2}{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ax}{2\sqrt{x^2}} = \frac{-a}{2} = 3 \Rightarrow a = -6$$

86. Página 135

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{mx+6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-m}{x-2} \frac{x-4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{mx+6}} = \infty \rightarrow 2 \text{ es raíz de } 1-m \cdot x-4 \rightarrow 1-m \cdot 2-4=0 \rightarrow m=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{-x+6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-2} \frac{x-2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{-x+6}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{-x+6}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

87. Página 135

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1 + \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x = 0$

88. Página 135

a) $\lim_{x \rightarrow -2} -x^2 + 1 = -3$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x-1} = 1$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} = \sqrt{3}$

b) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} -x^2 + 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} - \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$

f) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} 3x - 7 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x-1} = 2 \end{cases} - \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

89. Página 135

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x - 1 = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} -3x + 2 = -1$

b) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^x - 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -3x - 2 = -2 \end{cases} - \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$

e) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x}{x-1} = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} -3x - 2 = -4 \end{cases} - \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} 2^x - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x-1} = -2$

90. Página 135

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x - 2} = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x + 2} = \frac{-3}{0} = \infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 4}{x-1-x+2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4}{x-1-x+2} = +\infty \end{cases} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x + 2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x + 2} = \frac{-4}{2} = -2$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-1} = -\frac{4}{3};$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x+1} = -\frac{4}{3} \rightarrow \text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{4}{3}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x - 2} = -\frac{5}{4}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x - 2} = -1$

91. Página 135

Respuesta abierta, por ejemplo:



92. Página 135

a) $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = 0$.

$f(2) = 4 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = 2$.

b) No existe $f(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,5 \rightarrow \text{Existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,5.$$

La función no es continua en $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable.

$$f(2) = 2,5 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

La función es continua en $x = 2$.

c) No existe $f(1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

La función no es continua en $x = 1$ tiene una discontinuidad de salto finito.

d) $f(-1) = 1 = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow$ La función es continua en $x = -1$.

$$f(2) = 1,5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2,5 \rightarrow \text{Existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2,5.$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2,5$$

La función no es continua en $x = 2$ tiene una discontinuidad evitable.

e) No existe $f(-2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

La función no es continua en $x = -2$ tiene una discontinuidad de salto infinito.

$$f(2) = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

La función no es continua en $x = -2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

f) $f(1) = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

La función no es continua en $x = 1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

93. Página 135

a) La función es polinómica; por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{2, 3\}$. Estudiamos la discontinuidad en los ceros del denominador, $x = 2$ y $x = 3$.

$$\text{No existe } f(2). \text{ Además, } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

La función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

$$\text{No existe } f(3). \text{ Además, } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

La función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

$$c) x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$$

La función es continua en su dominio, el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

$$d) 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

La función es continua en su dominio, el intervalo $[-2, 2]$.

$$e) \text{ No existe } f(0). \text{ Además, } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{no existe}.$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

$$f) 2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$$

La función es continua en su dominio, el intervalo $(-\infty, 2)$.

$$g) y = 2|x - 1| = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2 - 2x & \text{si } x < 1 \end{cases} \rightarrow \text{Es continua en todos los puntos salvo, quizás, en } x = 1:$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2|x - 1| = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 - 2x = 0; \lim_{x \rightarrow 1^+} 2|x - 1| = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2|x - 1| = 0 = y(0)$$

La función es continua en $\mathbb{R}$.

$$g) y = |x - 3| - |x - 3| = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -3 \\ 6 & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 2x & \text{si } x > 3 \end{cases} \text{ Es continua en todos los puntos salvo quizás en } x = -3 \text{ o } x = 3.$$

En $x = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} |x - 3| + |x - 3| = \lim_{x \rightarrow -3^-} -2x = 6; \lim_{x \rightarrow -3^+} |x - 3| + |x - 3| = \lim_{x \rightarrow -3^+} 6 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} |x - 3| + |x - 3| = 6 = y(-3) \rightarrow \text{La función es continua en } x = -3.$$

En $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |x - 3| + |x - 3| = \lim_{x \rightarrow 3^-} 6 = 6; \lim_{x \rightarrow 3^+} |x - 3| - |x - 3| = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} |x - 3| + |x - 3| = 6 = y(3)$$

La función es continua en $x = 3$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

94. Página 135

a) Estudiamos la continuidad en $x = 2$, ya que la función es continua en el resto de puntos.

$$\text{No existe } f(2). \text{ Además, } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 2$.

b) $x^2 - 2x + 3 \neq 0$ para cualquier x real $\rightarrow$ La función es continua en $\mathbb{R}$.

c) Estudiamos la continuidad en $x = 1$, que es el único cero del denominador.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty.$$

La función tiene en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

d) Estudiamos la continuidad en $x = -1$ y $x = 3$, que anulan el denominador.

No existe $f(-1)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x - 3} = -\frac{1}{2}.$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$.

$$\text{No existe } f(3). \text{ Además, } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

e) Estudiamos la continuidad en $x = -3$ y $x = 1$, que anulan el denominador.

$$\text{No existe } f(-3). \text{ Además, } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -3$.

No existe $f(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 1}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2x - 3} = \frac{1}{8}.$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$.

f) Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$, que anulan el denominador.

No existe $f(0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

No existe $f(1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

95. Página 135

$$a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} = \frac{x-1}{-x-2}$$

El único punto donde $f(x)$ puede ser discontinua es en $x = 2$:

No existe $f(2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} -x-1 = -3$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

$$b) \text{ Si definimos } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} & \text{si } x \neq 2 \\ -3 & \text{si } x = 2 \end{cases}, g(x) \text{ contiene a } f(x) \text{ y además es continua en } \mathbb{R}.$$

96. Página 136

a) El dominio de la función es $[-5, 4) \cup (4, \infty)$, $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{18 - 6\sqrt{x-5}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6(3 - \sqrt{x-5})}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-6}{3 - \sqrt{x-5}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-6}{3 - \sqrt{x-5}} = -1$$

$$b) \text{ Respuesta abierta. Por ejemplo: } g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -5 \\ f(x) & \text{si } -5 < x < 4 \\ -1 & \text{si } x = 4 \\ f(x) & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

97. Página 136

a) $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x^2 - 2x - 1)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x - 1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

98. Página 136

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 - 3x - 2} = \frac{-(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)} \rightarrow \text{La función es continua en } \mathbb{R} - \{-2, -1\}.$$

$$\text{En } x = -2: \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x-2)}{x-1} = -4$$

$f(x)$ es discontinua evitable en $x = -2$.

$$\text{En } x = -1: \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 - x^2}{x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 - x^2}{(x+2)(x-1)} = \frac{3}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4 - x^2}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4 - x^2}{x-2} = \infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

$f(x)$ es discontinua de salto infinito en $x = -1$.

99. Página 136

Las funciones tienen la misma gráfica salvo en el punto $x = -2$. La primera es una recta y es continua, la segunda está formada por dos semirrectas y no es continua en $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -2} 2x-1 = -5$$

La discontinuidad de la segunda función en $x = -2$ es evitable.

$$\text{Así, la segunda función es: } g(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \neq -2 \\ 2x-1 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

100. Página 136

a) En $x = -1$, la función $f(x) = -x$; por tanto, es continua.

En $x = 0$: Existe $f(0) = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x-2 = 2$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

En $x = 3$: No existe $f(3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x-2 = 5; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 5 = 5$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 3$.

b) En $x = -1$: Existe $f(-1) = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 5x-2 = -3; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{x-6}{x^2} \right] = 5$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = -1$.

En $x = 0$: No existe $f(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-6}{x^2} = \frac{6}{0} = \infty \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-6}{x^2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-6}{x^2} = +\infty \end{array} \right|$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

En $x = 3$: Existe $f(3) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-6}{x^2} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2-2x-2 = 1$$

$f(x)$ es continua en $x = 3$.

101. Página 136

Existe $f(2)$: $f(2) = -\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-5}-3}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(2-x)(\sqrt{x^2-5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x-2}{\sqrt{x^2-5}+3} = \frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{2}{3} = f(2) \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

102. Página 136

Las tres funciones son polinómicas, y por tanto, continuas en su dominio.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 2$:

En $x = 0$: Existe $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

En $x = 2$: Existe $f(2) = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 1 = 3;$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

103. Página 136

No existe $f(0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$$f(3) = 2 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

104. Página 136

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 3$:

En $x = 0$: Existe $f(0) = e^0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - 1 = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1;$$

$f(x)$ es continua en $x = 0$.

En $x = 2$: Existe $f(2) = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^x = e^2; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{3-x} = 2;$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

En $x = 3$: No existe $f(3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{3-x} = \frac{2}{0} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{3-x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{3-x} = +\infty \end{array} \right\}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

105. Página 136

$$a) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x = 0$.

$$f(0) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \rightarrow \text{Es continua en } x = 0.$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \leq -5 \\ x + 5 & \text{si } x > -5 \end{cases}$$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x = -5$.

$$f(-5) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = f(-5) \rightarrow \text{Es continua en } x = -5.$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \\ 2x - 3 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x = \frac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow \text{Es continua en } x = \frac{3}{2}.$$

$$d) x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = -2; x = 3 \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + x - 6 & \text{si } -2 < x < 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Las funciones de cada trozo son continuas en $\mathbb{R}$. Solo puede ser discontinua en $x = -2$ o en $x = 3$.

$$f(-2) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \rightarrow \text{Es continua en } x = -2.$$

$$f(3) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \rightarrow \text{Es continua en } x = 3.$$

$$e) 6 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{si } x \leq -\sqrt{6} \\ 6 - x^2 & \text{si } -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \\ x^2 - 6 & \text{si } x \geq \sqrt{6} \end{cases}$$

Las funciones de cada trozo son continuas en $\mathbb{R}$. Solo puede ser discontinua en $x = -\sqrt{6}$ o en $x = \sqrt{6}$.

$$f(-\sqrt{6}) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}} f(x) = f(-\sqrt{6}) \rightarrow \text{La función es continua en } x = -\sqrt{6}.$$

$$f(\sqrt{6}) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \sqrt{6}^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{6}^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \sqrt{6}} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \sqrt{6}} f(x) = f(\sqrt{6}) \rightarrow \text{La función es continua en } x = \sqrt{6}.$$

106. Página 136

La función será continua en $x = 2$ si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

Entonces la función es continua en $x = 2$ si:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

107. Página 136

a) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 4$:

$$\text{Existe } f(4) = 12. \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 = 4^2 = 16; \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} x - a = 4 - a;$$

$$f(x) \text{ es continua} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 16 = 4 - a = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) - a = 8$$

b) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 1$:

$$\text{Existe } f(1) = 3 - a. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 - ax = 3 - a; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 - a \ln x = 2;$$

$$f(x) \text{ es continua} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 - a = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - a = 1$$

c) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = -2$.

$$\text{Existe } f(-2) = 2. \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{2-x} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 - 3x - a = 10 - a;$$

$$f(x) \text{ es continua} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2 = 10 - a = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) - a = -8$$

d) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = -1$.

$$\text{Existe } f(-1) = -a. \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{a}{x} = -a; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 1 = 2$$

$$f(x) \text{ es continua} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -a = 2 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) - a = -2$$

e) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 2$.

$$\text{Existe } f(2) = 3a^2. \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3a^x = 3a^2; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{12}{x-1} = 12$$

$$f(x) \text{ es continua} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3a^2 = 12 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - a = 2$$

f) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 0$ o $x = 2$.

$$\text{Existe } f(0) = 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 1 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - a^2 = a^2$$

$$f(x) \text{ es continua} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 = a^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - a = 1$$

$$\text{Existe } f(2) = 2a + 1. \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + a^2 = 2 + a^2; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} ax + 1 = 2a + 1$$

$$f(x) \text{ es continua} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 + a^2 = 2a + 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - a = 1$$

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 1$.

g) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = a$.

$$\text{Existe } f(a) = 2^a + 1. \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} 2^x + 1 = 2^a + 1; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} 5 = 5$$

$$f(x) \text{ es continua} \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2^a + 1 = 5 = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \iff a = 2$$

h) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 0$.

$$\text{Existe } f(0) = 2 + a. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 - a \cos x = 2 - a; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-x} - 6x - 3 = 2$$

$$f(x) \text{ es continua} \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 - a = -2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - a = -4$$

i) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 4$.

$$\text{Existe } f(4) = 1. \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \cos x = 4 \neq 1; \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 2^{x-2a} = 2^{4-2a}$$

$$f(x) \text{ es continua} \iff \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1 = 2^{4-2a} = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = a = 2$$

108. Página 136

a) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = 0$ y $x = 3$.

$$\text{En } x = 0, \text{ la función será continua si: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\text{Existe } f(0) = b.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x + 1 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = b$$

$$\text{Por tanto, } b = -1.$$

$$\text{En } x = 3, \text{ la función será continua si: } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$$\text{Existe } f(3) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} ax + b = 3a + 1; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1$$

$$\text{Por tanto, } a = \frac{2}{3}.$$

b) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = -1$ y $x = 2$.

$$\text{En } x = -1, \text{ la función será continua si: } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\text{Existe } f(-1) = a - 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} ax^2 + 3x + a = 3; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^3 + a = 1 + a$$

$$\text{Por tanto, } a = 1.$$

$$\text{En } x = 2, \text{ la función será continua si: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\text{Existe } f(2) = 8 - a = 7.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 + a = 8 + a = 7; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} bx + 3 = 2b + 3$$

$$\text{Por tanto, } b = 5.$$

109. Página 137

a) La función $\frac{2}{2-x}$ no es continua en $x=2$, sean cuales sean los valores de a y b .

b) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x=-1$ y $x=1$.

En $x=-1$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

Existe $f(-1) = -a + 3$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} ax - 3 = a - 3;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} bx^2 + 5 = b + 5$$

Por tanto, $b = -a - 2$.

En $x=1$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Existe $f(1) = b + 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} bx^2 - 5 = b - 5;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{x+3} + a = 4 + a$$

Por tanto, $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$.

c) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x=0$ y $x=\pi$.

En $x=0$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Existe $f(0) = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + 2x - 3 = -3;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} a \cdot \sin x - b = -b$$

Por tanto, $b = 3$.

En $x=\pi$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi)$

Existe $f(\pi) = b = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} a \cdot \sin x - b = -b = -3;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} x - \pi^2 + a = a$$

Por tanto, $a = 3$.

d) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x=-2$ y $x=2$.

En $x=-2$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$

Existe $f(-2) = -7$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 3x - 1 = -7;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} ax^2 + bx = 4a + 2b$$

En $x=2$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

Existe $f(2) = 4a + 2b$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 + bx = 4a + 2b;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2^x - 5 = -1$$

Entonces: $\begin{cases} 4a - 2b = -7 \\ 4a - 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1; b = \frac{3}{2}$

110. Página 137

$$a) f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ -1-2x & \text{si } \frac{1}{2} < x < 3 \\ a^x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x = \frac{1}{2}$ y $x = 3$.

En $x = \frac{1}{2}$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

Existe $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 1-2x = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} -1-2x = 0$$

$f(x)$ es continua en $x = \frac{1}{2}$.

En $x = 3$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

Existe $f(3) = a^3 - 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} -1-2x = -5;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} a^x - 3 = a^3 - 3$$

Entonces, $a = 2$.

$$b) f(x) = \begin{cases} 4-3x & \text{si } x < \frac{4}{3} \\ 3x-4 & \text{si } \frac{4}{3} < x < 2 \\ a^x - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x = \frac{4}{3}$ y $x = 2$.

En $x = \frac{4}{3}$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} f(x) = f\left(\frac{4}{3}\right)$

Existe $f\left(\frac{4}{3}\right) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^-} 4-3x = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^+} 3x-4 = 0$$

$f(x)$ es continua en $x = \frac{4}{3}$.

En $x = 2$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

Existe $f(2) = a^2 - 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x-4 = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} a^x - x = a^2 - 2$$

Entonces, $a = 2$.

$$c) f(x) = \begin{cases} 4 - 5x & \text{si } x \leq \frac{4}{5} \\ 5x - 4 & \text{si } \frac{4}{5} < x < 1 \\ |a - 2| & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Cada una de las funciones es continua en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x = \frac{4}{5}$ y $x = 1$.

En $x = \frac{4}{5}$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}} f(x) = f\left(\frac{4}{5}\right)$

$$\text{Existe } f\left(\frac{4}{5}\right) = 0. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^-} 4 - 5x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^+} 5x - 4 = 0$$

$f(x)$ es continua en $x = \frac{4}{5}$.

En $x = 1$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\text{Existe } f(1) = |a - 2|. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 5x - 4 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} |a - 2| = |a - 2|$$

Entonces, $a = 1$ o $a = 3$.

$$d) \text{ Supongamos que } a \leq 4, \text{ entonces: } f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{si } x \leq a \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > a \end{cases}$$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x = a$.

En $x = a$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Existe $f(a) = a^2 - 6a + 8$.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} -x - 4 = -a - 4; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} x^2 - 6x + 8 = a^2 - 6a + 8$$

$$-a - 4 = a^2 - 6a + 8 \Rightarrow a^2 - 5a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ o } a = -1$$

$$\text{Supongamos que } a > 4, \text{ entonces: } f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{si } x \leq 4 \\ x - 4 & \text{si } 4 < x \leq a \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > a \end{cases}$$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio.

$f(x)$ es continua en $x = 4$ porque proviene del valor absoluto; $f(x)$ será continua si lo es en $x = a$.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} x - 4 = a - 4; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} x^2 - 6x + 8 = a^2 - 6a + 8$$

$$a - 4 = a^2 - 6a + 8 \Rightarrow a^2 - 7a + 12 = 0 \Rightarrow a = 3 \text{ o } a = 4, \text{ pero hemos supuesto que } a \text{ es mayor que } 4.$$

Se deduce que la función es continua para $a = 1$ y $a = 4$.

e) Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x = a$.

En $x = a$, la función será continua si: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Existe $f(a) = \sin^2 a$.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \sin^2 x = \sin^2 a; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \cos^2 x = \cos^2 a$$

$$\sin^2 a = \cos^2 a \Rightarrow a = a \Rightarrow \sin^2 a = \cos^2 a \Rightarrow a = a \Rightarrow a = 1$$

111. Página 137

La población inicial es $f(0) = \frac{18 - 0^2}{(0 - 3)^2} = 2$ millones de individuos.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{18 - t^2}{(t - 3)^2} = 1 \rightarrow$ A largo plazo, la población tiende a ser de un millón de individuos.

112. Página 137

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{36x - 8}{x - 2} = 36$ flexiones.

113. Página 137

$R(x) = 0 \rightarrow$ Función constante $\rightarrow R(x)$ es continua en $(0, 600)$.

$R(x) = 40 + \frac{400 - 56x}{1640 - 0,1x} \rightarrow$ Está definida en $\mathbb{R} \setminus \{16400\} \rightarrow R(x)$ es continua en $200, -\infty$.

$R(600) = 60$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 600^-} R(x) = 60 \\ \lim_{x \rightarrow 600^+} R(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$ No existe $\lim_{x \rightarrow 600} R(x)$.

Luego la función no es continua en $x = 600$, y tiene una discontinuidad de salto finito.

114. Página 137

$$f(x) = \begin{cases} 10,50x & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 7,50x & \text{si } 10 \leq x \leq 20 \\ 5,50x & \text{si } 20 \leq x \end{cases}$$

La función está formada por funciones polinómicas, que son continuas en los intervalos donde están definidas.

Estudiamos los puntos donde cambia su expresión algebraica.

En $x = 10$: $f(10) = 75$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 105 \\ \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 75 \end{array} \right\} \rightarrow$ No existe $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) \rightarrow$ En $x = 10$ tiene una discontinuidad de salto finito.

En $x = 20$: $f(20) = 110$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = 150 \\ \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) = 110 \end{array} \right\} \rightarrow$ No existe $\lim_{x \rightarrow 20} f(x) \rightarrow$ En $x = 20$ tiene una discontinuidad de salto finito.

Al estar formada por funciones polinómicas, $\text{Dom } f = [0, +\infty)$.

115. Página 137

$G(x) = 6 + 2x - \frac{x^2}{6} \rightarrow$ Función polinómica $\rightarrow G(x)$ es continua en $[0, 9]$.

$G(x) = 3 + \frac{75x - 5400}{10x^2} \rightarrow$ Definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow G(x)$ es continua en $(9, +\infty)$.

Estudiamos la función en el punto donde cambia su expresión algebraica: $x = 9$.

$G(9) = 10,5$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 9^-} G(x) = 10,5 \\ \lim_{x \rightarrow 9^+} G(x) = 10,5 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 9} G(x) = 10,5 = G(9) \rightarrow$ La función es continua en $[0, +\infty)$.

116. Página 137

$P(t) = 50 - t^2$ · Función polinómica $\rightarrow P(t)$ es continua en $0, 9$.

$P(t) = 56 - \frac{20t}{t-1}$ Definida en $t = -1 \rightarrow P(t)$ es continua en $3, -\infty$.

Estudiamos la función en el punto donde cambia su expresión algebraica: $x = 3$.

$$P(3) = 41 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} P(t) = 41 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} P(t) = 41 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} P(t) = 41 = P(3) \rightarrow \text{La función es continua en } 0, -\infty.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[56 - \frac{20t}{t-1} \right] = 56 - 20 = 36$$

Por tanto, con el paso del tiempo, la plancha soportará un peso de 36 toneladas.

117. Página 137

a) Las funciones que componen $P(x)$ son continuas en los intervalos donde están definidas, en los que también $P(x)$ es continua. Solo tenemos que estudiar lo que ocurre en $x = 20$, donde cambia su expresión algebraica.

Para que la función sea continua: $\lim_{x \rightarrow 20^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 20^+} P(x) = 41 = P(20)$

$$P(20) = 60 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 20^-} P(x) = 60 \\ \lim_{x \rightarrow 20^+} P(x) = \sqrt{a \cdot 20^2 - 2000} \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt{a \cdot 20^2 - 2000} = 60 \rightarrow 400a - 2000 = 3600 \rightarrow a = 4.$$

b) El precio de cada litro sería: $\frac{P(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{ax^2 - 2000}}{x} = \sqrt{a}$ €/litro costaría el aceite.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 138

No, el ejemplo anterior se trata de un caso concreto, son términos de una serie geométrica con razón $\frac{1}{2}$, por eso la suma de sus términos es un valor finito.

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares, su suma no es un valor finito: $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots = +\infty$

2. Página 138

Sí, si trabajamos con un recorrido de cualquier distancia $d > 0$ las distancias recorridas en cada zancada serían los términos de la siguiente sucesión:

$$\left\{ a_1 = \frac{d}{2}, a_2 = \frac{d}{4}, a_3 = \frac{d}{8}, a_4 = \frac{d}{16}, \dots, a_n = \frac{d \cdot 1}{2 \cdot 2^{n-1}}, \dots \right\} \rightarrow \text{Serie geométrica con } r = \frac{1}{2}.$$

3. Página 138

Se trata de un límite cuando n tiende a infinito.

4. Página 138

El término general de la sucesión es $a_n = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$. Tal y como se ha estudiado en cursos anteriores, podemos sumar

los infinitos términos de una serie geométrica usando la siguiente fórmula si $0 < r < 1$: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{d}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{1}{2}} = d$