Derivadas

6

ACTIVIDADES

1. Página 140

Función $f(x) = x^2 + 1$: $T.V.M.([0,1]) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{2 - 1}{1} = 1$ $\qquad T.V.M.([-2,-1]) = \dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \dfrac{2 - 5}{1} = -3$

Función $g(x) = x^3 + 7$: $T.V.M.([0,1]) = \dfrac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \dfrac{8 - 7}{1} = 1$ $\qquad T.V.M.([-2,-1]) = \dfrac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} = \dfrac{6 - (-1)}{1} = 7$

2. Página 140

$$T.V.M.([1,5]) = \frac{e(5) - e(1)}{5 - 1} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 25 - 5 - \frac{1}{3}\cdot 1 - 1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ m/s}$$

3. Página 141

a) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2 - h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{7(2 + h) - 1 - 15}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{7h}{h} = 7$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2 - h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{(2 - h)^2} - \frac{1}{4}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-4h - h^2}{4h(2 - h)^2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-4 - h}{4(2 - h)^2} = -\dfrac{1}{4}$

4. Página 141

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1 - h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1 - h)^3 - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h - 3h^2 + h^3}{h} = 3$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2 - h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2 - h)^3 - 8}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{12h + 6h^2 - h^3}{h} = 12$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1 - h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - h} - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{1 - h} - 1\right)\left(\sqrt{1 + h} - 1\right)}{h\left(\sqrt{1 - h} - 1\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1 + h - 1}{h\left(\sqrt{1 + h} - 1\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1 - h} - 1} = \dfrac{1}{2}$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2 - h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{2 + h} - \sqrt{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{2 - h} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2 - h} + \sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2 - h} - \sqrt{2}\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2 - h - 2}{h\left(\sqrt{2 + h} - \sqrt{2}\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{2 - h} - \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

5. Página 142

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ -\dfrac{4}{x} & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$f'(-2^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(-2 - h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-\frac{4}{-2 + h} - 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{4 - 4\cancel{h}}{(-2 - h)\cdot \cancel{h}} = -\infty \to$ No existe.

$f'(-2^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(-2 - h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{(-2 - h)^2 - 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2 - 4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} (h - 4) = -4$

6. Página 142

a) $f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = -\infty$

$f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = -\infty$

Las derivadas laterales no existen, por lo que la función no es derivable en $x = 0$.

b) $f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^{\frac{1}{4}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = -\infty$

$f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^{\frac{1}{4}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = \nexists$

$f'(0^-)$ no existe ya que h es un número negativo y la función no está definida para números negativos. Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$.

7. Página 143

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 3 \\ 12x - x^2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

- Si $x < 3$ $\longrightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 3)$.
- Si $x > 3$ $\longrightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(3, +\infty)$.
- Si $x = 3$:

$f(3^+) = \lim\limits_{x\to 3^+} (12x - x^2) = 27$ $\qquad$ $f(3^-) = \lim\limits_{x\to 3^-} (2x - 3) = 3$

La función no es continua en $x = 3$ por no coincidir los límites laterales.

Como la función no es continua en $x = 3$, se puede afirmar que tampoco es derivable en ese punto.

8. Página 143

$f(x) = 2x - |x+2| \rightarrow f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x < -2 \\ 3x-2 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -4$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -4$ $\longrightarrow$ La función es continua en $x = -2$ $\longrightarrow$ Es continua en toda la recta real.

$f'(-2^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(-2-h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{3(-2-h) - 2 - 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3$

$f'(-2^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(-2-h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{(-2+h) - 2 - 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = -2$.

9. Página 144

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x-h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x-h)^3 + 2(x-h)^2 - x^3 - 2x^2}{h} = 3x^2 - 4x$

$f''(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x-h) - f'(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(x+h)^2 - 4(x-h) - 3x^2 - 4x}{h} = 6x + 4$

$$f'''\ x\ = \lim_{h\to 0} \frac{f''\ x-h\ - f''\ x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6\ x-h\ -4-6x-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6\cancel{h}}{\cancel{h}} = 6$$

$$f^{IV}\ x\ = \lim_{h\to 0} \frac{f'''\ x-h\ - f'''\ x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6-6}{h} = 0$$

A partir de la cuarta derivada todas las derivadas son iguales a 0.

10. Página 144

$$f'\ x\ - \lim_{h\to 0}\frac{f\ x-h\ - f\ x}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x-h}-\frac{1}{x}}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot x\cdot\ x+h} - - \frac{1}{x^2}$$

$$f''\ x\ = \lim_{h\to 0}\frac{f'\ x-h\ - f'\ x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1}{x+h\ ^2}-\frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-x^2+\ x-h\ ^2}{h\cdot x^2\cdot\ x-h\ ^2} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''\ x\ = \lim_{h\to 0}\frac{f''\ x-h\ - f''\ x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{x-h\ ^3}-\frac{2}{x^3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-6h^2x-6hx^2-2h^3}{h\cdot x^3\cdot\ x+h\ ^3} = \frac{-6x^2}{x^6} = \frac{-6}{x^4}$$

$$f^{n)}\ x\qquad 1\ ^n\ \frac{n!}{x^{n+1}}$$

11. Página 145

a) $f(x)\quad x^2$ y $g\ x\ - x$

$$h'\ x\ - 7\cdot f'\ x\ + 3\cdot g'\ x$$

$$h'\ x\ = 7\cdot\lim_{h\to 0}\frac{x^2-2hx-h^2-x^2}{h} - 3\lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 7\ \lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}x-h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} - 3\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 14x-3$$

b) $f\ x\ - x$ y $g\ x\ - x-1$

$$h\ x\ = \frac{g\ x}{f\ x} - 2\cdot f\ x\ - h'\ x\ = \frac{g'\ x\ \cdot f\ x\ - g\ x\ \cdot f'\ x}{f^2\ x} + 2\cdot f'\ x$$

Así: $f'\ x\ = \lim_{h\to 0}\frac{x-h\ - x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$

$$g'\ x\ = \lim_{h\to 0}\frac{x-h-1\ -\ x+1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

Entonces: $h'\ x\ = \frac{1\cdot x -\ x-1\ \cdot 1}{x^2} - 2\cdot 1 = \frac{-1}{x^2} + 2$

c) $f\ x\ - x$ y $g\ x\ - x-1$

$$h\ x\ = \frac{g\ x}{f\ x} \rightarrow h'\ x\ = \frac{g'\ x\ \cdot f\ x\ - g\ x\ \cdot f'\ x}{f^2\ x}$$

Entonces: $h'\ x\ = \frac{1\cdot x -\ x-1\ \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$

d) $f\ x\ - \frac{1}{x^2}$ y $g\ x\ - x^2$

$$h\ x\ - f\ x\ - 5\cdot g\ x \longrightarrow h'\ x\ - \lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h}x-h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}\cdot x^2\cdot\ x+h\ ^2} + 5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}x-h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} - - \frac{2}{x^3} + 10x$$

12. Página 145

$$[f(x) - g(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x-h) - g(x-h)] - [f(x) - g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) - g'(x)$$

Sean $f(x) - x$ y $g(x) - x^2$.

Entonces: $h(x) - 3\cdot f(x) - g(x) \;—\; h'(x) - 3f'(x) - g'(x)$

Así: $h'(x) = 3\lim_{h\to 0} \frac{x-h-x}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{(x-h)^2 - x^2}{h} = 3\lim_{h\to 0} \frac{h}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{2\cancel{h}x - h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = 3 - 2x$

13. Página 146

Aplicamos la derivada de las funciones potenciales: $(x^4)' = 4x^3$ $(x^2)' = 2x$

Teniendo en cuenta las operaciones con derivadas: $f'(x) = 5 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x = 20x^3 + 6x$

14. Página 146

$$f'(x) = 4\left(\frac{x-2}{x^5}\right)^3 \cdot \frac{1\cdot x^5 - (x-2)5x^4}{(x^5)^2} = \frac{4(x-2)^3}{x^{15}} \frac{x^5 - 5x^5 - 10x^4}{x^{10}} = \frac{(x-2)^3(-16x-40)}{x^{21}}$$

15. Página 147

$$[(g\circ f)(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(x-h) - (g\circ f)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x-h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x-h) - f(x)} \cdot \frac{f(x-h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x-h)) - g(f(x))}{f(x-h) - f(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = g'(f(x))\ f'(x)$$

16. Página 147

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x-h) - k(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)-5} - \sqrt{2x-5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2(x-h)+5} - \sqrt{2x-5}\right)\left(\sqrt{2(x+h)-5} - \sqrt{2x+5}\right)}{h\left(\sqrt{2(x-h)+5} - \sqrt{2x+5}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x - 2h + 5 - 2x - 5}{h\left(\sqrt{2(x-h)+5} - \sqrt{2x+5}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x-h)+5} - \sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$$

Si $f(x)\ \ 2x\ \ 5\ \cdot f'(x)\ \ \lim_{h\to 0} \frac{f(x\ \ h)\ \ f(x)}{h}\ \ \lim_{h\to 0} \frac{2(x\ \ h)\ \ 5\ \ (2x\ \ 5)}{h}\ \ \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h}\ \ 2$

Si $g(x) = \sqrt{x} \to g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x-h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x-h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x-h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x-h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x-h} + \sqrt{x}\right)} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x-h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Como $k(x) = (g\circ f)(x)$, aplicando la regla de la cadena:

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-5}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

17. Página 148

a) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b) $f'(x) = \frac{-(x-1)\cdot sen\, x - cos\, x}{(x-1)^2} = \frac{-sen\, x}{x-1} - \frac{cos\, x}{(x-1)^2}$

c) $f'(x) = e^x \cdot (sen\, x - cos\, x)$

d) $f'(x) = 2e^{2x}$

18. Página 148

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right] = \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \ln e^{\lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{x+h}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{h}\right]} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

19. Página 149

a) $f'(x) = 2x\left(e^{x^2} - e^{-x^2}\right)$

b) $f'(x) = 2cos\, x \cdot e^{2sen\, x}$

c) $f'(x) = -2x \cdot 2 \cdot cos\,(x^2+1)\cdot sen\,(x^2+1) = -2x \cdot sen\,(2x^2+2)$

d) $f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

20. Página 149

a) $f'(x) = -\frac{3}{1-3x}$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right) = \ln(2x+1) - \ln(1-2x) \to f'(x) = \frac{2}{2x+1} + \frac{2}{1-2x} = \frac{4}{1-4x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln(5x+3) \to f'(x) = \frac{5}{10x+6}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(2x+1) - \ln(1-2x)\right] \to f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{2}}{2x+1} + \frac{\cancel{2}}{1-2x}\right] = \frac{2}{1-4x^2}$

SABER HACER

21. Página 150

Primero determinamos la expresión algebraica de la función a partir de la gráfica:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{20}x & 0 \le x \le 20 \\ 3 & 20 < x \le 25 \\ \frac{3}{25}x & 25 < x \le 50 \\ -\frac{3}{5}x + 36 & 50 < x \le 60 \end{cases}$$

Ahora hallamos la tasa de variación media en los intervalos pedidos:

$$T.V.M.([5,10]) = \frac{f(10)-f(5)}{10-5} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{20}$$

$$T.V.M.([52,56]) = \frac{f(56)-f(52)}{56-52} = \frac{2,4-4,8}{4} = -0,6$$

22. Página 150

Hallamos la tasa de variación media de los intervalos que se quieren analizar.

$$T.V.M.([0,7]) = \frac{f(7)-f(0)}{7-0} = \frac{9,2-(-2)}{7} = 1,6$$

$$T.V.M.([6,7]) = \frac{f(7)-f(6)}{7-6} = \frac{9,2-5,8}{1} = 3,4$$

23. Página 150

a) $f'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} (x^2-x+1) = 3$

b) $f'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^4-3x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x-1)(2x^3-2x^2-x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to -1} (2x^3-2x^2-x-1) = -2$

24. Página 151

a) $f'(x) - 15x^4 - 6 - \frac{6}{x^4}$

b) $f'(x) - \frac{-5}{x^3} - 30x^2$

25. Página 151

$f(1) = a = 3$ (ya que $\ln 1 = 0$)

$f'(x) = 4ax^3 - (b \cdot \ln x + b)$ $\qquad$ $f'(1) = 4 \cdot 3 \cdot 1^3 - b = 11 \rightarrow b = 1$

26. Página 151

Primero se estudia la continuidad de la función:

Si $x < 1$ o $x > 1$, la función es continua por ser un polinomio. Hay que comprobar qué sucede en el punto en el que cambia su expresión algebraica.

$f\ 1 - 1 - 4 - 3 - 0$

$f\ 1^- \quad \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 \quad 4x \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 3 \quad 0$ $\qquad$ $f\ 1^+ \quad \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 \mid 4x \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 3 \quad 0$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

A continuación se estudia la derivabilidad de la función:

$$f'\ x = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x < 1 \\ -2x-4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $x < 1$ o $x > 1$, la función es derivable por ser un polinomio. Hay que comprobar qué sucede en el punto en el que cambia su expresión algebraica.

$$x = 1 \rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2-4=-2 \\ f'(1^+) = -2-4=2 \end{cases}$$ → Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = 1$.

27. Página 152

Calculamos los límites laterales y el valor de la función en el punto.

$$f(3^-) = \lim_{x \to 3^-} x^2 - 2x = 3 = f(3)$$
$$f(3^+) = \lim_{x \to 3^+} 2x - a = 6 - a$$

Para que sea continua: $3 = 6 + a \rightarrow a = -3$.

La función continua es: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \le 3 \\ 2x - 3 & x > 3 \end{cases}$

Calculamos la derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 3 \\ 2 & x > 3 \end{cases}$

Calculamos las derivadas laterales:

$$f'(3^-) = \lim_{x \to 3^-} 2x - 2 = 4$$
$$f'(3^+) = \lim_{x \to 3^+} 2 = 2$$

Las derivadas laterales no coinciden, de modo que la función no es derivable en $x = 3$.

28. Página 152

Primero se estudia la continuidad de la función:

Si $x < 0$ o $x > \pi$, la función es continua por ser un polinomio. Si $0 < x < \pi$, la función es continua por ser una función trigonométrica. Veamos qué sucede en los puntos donde cambia su expresión algebraica.

• Si $x = 0$:

$$f(0) = 0 \qquad f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \qquad f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = sen(a \cdot 0) = 0$$

En $x = 0$ la función siempre es continua, independientemente del parámetro a.

• Si $x = \pi$:

$$f(\pi) = (\pi - \pi)^2 + 1 = 1 \qquad f(\pi^-) = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = sen(a \cdot \pi) \qquad f(\pi^+) = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = (\pi - \pi)^2 + 1 = 1$$

Para que la función sea continua en $x = \pi$ debe cumplirse que:

$$sen(a \cdot \pi) = 1 \rightarrow a \cdot \pi = \frac{(2k+1)\cdot \pi}{2} \rightarrow a = \frac{2k+1}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

A continuación se calcula la derivabilidad de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2k-1}{2} \cdot cos\left(\dfrac{(2k+1)\cdot x}{2}\right) & \text{si } 0 < x < \pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2(x - \pi) & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Si $x < 0$ o $x > \pi$, la función es derivable por ser un polinomio. Veamos qué sucede en los puntos en los que cambia su expresión algebraica:

$$f'(0^-) = -2 \qquad f'(0^+) = \frac{2k-1}{2} \qquad f'(\pi^-) = \frac{2k-1}{2} \cdot cos\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \pi\right) \qquad f'(\pi^+) = 0$$

En $x = 0$ la función no es derivable, porque $2 = \frac{2k-1}{2} \longrightarrow k = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

En $x \neq 0$ la función es derivable para cualquier valor entero de *k*.

29. Página 153

a) $g'(x) = 2e^{x}$ $\quad g'(f(x)) = 2e^{tg(x^2+1)} \longrightarrow (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{4x \cdot e^{tg(x^2+1)}}{cos^2(x^2-1)}$

b) $f'(x) = \frac{2x}{cos^2(x^2-1)}$ $\qquad f'(g(x)) = \frac{4e^{x}}{cos^2((2e^{x})^2-1)}$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{8e^{2x}}{cos^2((2e^{x})^2-1)}$$

c) $f'(x) = \frac{2x}{cos^2(x^2-1)}$ $\qquad f'(f(x)) = \frac{2tg(x^2-1)}{cos^2((tg(x^2-1))^2+1)}$

$$(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{2 \cdot tg(x^2-1)}{cos^2((tg(x^2-1))^2-1)} \cdot \frac{2x}{cos^2(x^2-1)}$$

30. Página 153

Tenemos la derivada de un cociente de modo que:

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$g'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{[f_2(x)]^2} = \frac{\frac{1}{x\ln 2}2x^3 - 6x\log_2 x}{4x^6} = \frac{\frac{2x}{\ln 2} - 6\log_2 x}{4x^5} = \frac{x - 3\ln 2\log_2 x}{2x^5}$$

31. Página 153

a) $g(x)$ es el producto de $2x^2$ y de $(2x - x^3)^5$. De modo que la calculamos como la derivada de un producto.

$g'(x) = 4x(2x - x^3)^5 + 2x^2 \cdot 5(2x - x^3)^4 \cdot (2 - 3x^2) = (2x - x^3)^4\,(8x - 4x^4 + 20x^2 - 30x^4) = (2x - x^3)^4\,(8x - 34x^4 + 20x^2)$

b) $g(x)$ es el producto de x^3 y de $\cos x^2$. De modo que la calculamos como la derivada de un producto.

$g'(x) = 3x^2 \cos x^2 + x^3\,(-\text{sen}\, x^2)\, 2x = x^2\,(3\cos x^2 - 2x^2\, \text{sen}\, x^2)$

ACTIVIDADES FINALES

32. Página 154

$$T.V.M.[2,3] = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{6}$$

$$T.V.M.[2,5] = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{10}$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2-h}-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2-2-h}{2h(2-h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2-h)} = -\frac{1}{4}$$

33. Página 154

$$T.V.M.\ \ -1,2\ \ = \frac{f(2)-f(-1)}{2-1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$T.V.M.\ \ -1,3\ \ = \frac{f(3)-f(-1)}{3-1} = \frac{5-3}{4} = 2$$

$$f'\ \ -1\ = \lim_{h\to 0} \frac{-1+h\ ^{2}-4-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\cancel{h}+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = -2$$

34. Página 154

$$T.V.M.\ \ 1,6\ \ = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = \frac{\frac{3}{8}-1}{5} = -\frac{1}{8}$$

$$T.V.M.\ \ 1,4\ \ = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{\frac{1}{2}-1}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$f'\ \ 1\ = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{1-h\ +2} - \frac{3}{1+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3}-\cancel{3}-\cancel{h}}{\cancel{h}(3-h)} = -\frac{1}{3}$$

35. Página 154

$f(x)\ \ \ \ln(x\ \ b)$

$$T.V.M.\ \ 0,2\ \ = \frac{f(2)-f(0)}{2} = \frac{\ln(2+b)-\ln b}{2} = \frac{\ln\left(\frac{2-b}{b}\right)}{2} = \ln 2 \longrightarrow b\ \ \ \frac{2}{3}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(0-h-\frac{2}{3}\right)-\ln\left(0+\frac{2}{3}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{h-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{3h-2}{2}\right)}{h} = \frac{3}{2}$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(2-h+\frac{2}{3}\right)-\ln\left(2+\frac{2}{3}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{h-\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{3h-8}{8}\right)}{h} = \frac{3}{8}$$

36. Página 154

$$T.V.M.\ \ 0,6\ \ - \frac{s(6)-s(0)}{6} - \frac{116-2}{6} - 19$$

37. Página 154

La función que mide la superficie de un círculo según la longitud de su radio *x* es: $f(x)\ \ \ \pi x^{2}$

$$T.V.M.\ \ 1,3\ \ \ \frac{f(3)\ \ \ f(1)}{3\ \ \ 1}\ \ \frac{9\pi\ \ \ \ \pi}{2}\ \ \ 4\pi \qquad\qquad T.V.M.\ \ 3,5\ \ \ \frac{f(5)\ \ \ f(3)}{5\ \ \ 3}\ \ \frac{25\pi\ \ \ \ 9\pi}{2}\ \ \ 8\pi$$

Aunque la variación del radio es la misma, la variación de la superficie no permanece constante.

38. Página 154

a) $T.V.M.\ [1,7] = \frac{f(7)-f(1)}{7-1} = \frac{245-5}{6} = 40$

$T.V.M.\ [1,5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{125-5}{4} = 30$

b) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5(1-h)^2-5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{10\cancel{h}+5h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = 10$

39. Página 154

a) $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(2+h)-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$

b) $f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2-h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^3-(-2)^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3-6h^2-12h}{h} = 12$

c) $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2-h)^2-3(2+h)-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+h}{h} = 1$

40. Página 154

a) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah-\cancel{b}-\cancel{b}}{h} = a$

b) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(0-h)^2-b(0-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah^2-bh}{h} = \lim_{h\to 0}(ah-b) = b$

c) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah^2+bh+\cancel{c}-\cancel{c}}{h} = \lim_{h\to 0}(ah-b) = b$

d) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah^3+bh^2+ch+\cancel{d}-\cancel{d}}{h} = \lim_{h\to 0}(ah^2-bh-c) = c$

41. Página 154

a) $f'(x) = 4x + 4x^3 \rightarrow f'(2) = 40$

b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4}$

c) $f'(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{4}$

d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{4}$

e) $f'(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x > -3 \\ -x-3 & \text{si } x < -3 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > -3 \\ -1 & \text{si } x < -3 \end{cases} \rightarrow f'(2) = 1$

f) $f'(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x > 2 \\ -x-2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

$f'(2^+) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-h-2}{h} = 1$

$f'(2^-) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(2-h)-2}{h} = -1$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales; por tanto, la función no es derivable en $x = 2$.

42. Página 154

a) $f'\ 1^+ = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f\ 1-h\ -f\ 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h-2}-\sqrt{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{h-2}-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = f'\ 1^-$

b) $f'\ 1^+ = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f\ 1-h\ -f\ 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = -\infty$ $\qquad f'\ 1^- = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f\ 1-h\ -f\ 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{h}}$

No existe la derivada por la izquierda porque la raíz cuadrada no está definida para valores negativos.

43. Página 154

a) $f\ x\ - \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < 3 \\ x-4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

La función es continua en $x = 3$: porque $f\ 3^-\ = f\ 3^+\ = f\ 3\ = -1$.

$f'\ 3^+ = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f\ 3-h\ -f\ 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h-1+1}{h} = 1$

$f'\ 3^- = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f\ 3-h\ -f\ 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-\ 3-h\ +2-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h}{h} = -1$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, entonces la función no es derivable.

b) $f\ x \begin{cases} x\quad 9\quad x^2 & \text{si } x < \ \ 3 \\ x\quad 9\quad x^2 & \text{si } \ \ 3 \leq x \leq 3 \\ x\quad 9\quad x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

La función es continua en $x = 3$, $f\ 3^-\ = f\ 3^+\ = f\ 3\ = 3$

$f'\ 3^+ = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f\ 3-h\ -f\ 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{3+h-9-\ 3-h\ ^2-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-h^2-5h}{h} = -5$

$f'\ 3^- = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f\ 3-h\ -f\ 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h-\cancel{3}-9+\ h-3\ ^2-\cancel{3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2-7h}{h} = 7$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, entonces la función no es derivable.

44. Página 154

$f\ x\ = \begin{cases} 4-x-x^2 & \text{si } x < -2 \\ 3x-4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

$f'\ -2^+ = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f\ -2-h\ -f\ -2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{3\cdot\ -2+h\ -4-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{3h-4}{h} = -\infty \to$ No existe.

$f'\ -2^- = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f\ -2-h\ -f\ -2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{4-\ -2+h\ -\ -2-h\ ^2-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{3h-h^2}{h} = 3$

45. Página 154

$$f\ \ x\ = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{si}\quad x \neq 1 \\ 5 & \text{si}\quad x = 1 \end{cases}$$

$$f'\ 1^{+}\ = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{f\ \ 1-h\ \ -f\ \ 1}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{\dfrac{1-h}{1-h-1}-5}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{1-4h}{h^{2}} = -\infty = f'\ 1^{-}$$

No existen las derivadas laterales.

46. Página 154

a) $f(x) = \begin{cases} -2-x & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$

$$f'(2^{+}) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(2-h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{-2+2+h}{h} = -1$$

$$f'(2^{-}) = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(2-h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{2-(2-h)}{h} = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales no son iguales, por lo que $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

b) $g(x) = \begin{cases} x^{2}-4 & x \leq -2 \\ -x^{2}-4 & -2 < x < 2 \\ x^{2}-4 & x \geq 2 \end{cases}$

$$g'(2^{+}) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{g(2-h)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{(2-h)^{2}-4}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{4h+h^{2}}{h} = 4$$

$$g'(2^{-}) = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{g(2-h)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{-(2+h)^{2}-4}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{-4h-h^{2}}{h} = -4$$

Las derivadas laterales no son iguales, por lo que $g(x)$ no es derivable en $x = 2$.

47. Página 154

$$f'(0^{+}) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{\dfrac{1}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{1}{h^{2}} = -\infty$$

$$f'(0^{-}) = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{\dfrac{1}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{1}{h^{2}} = -\infty$$

48. Página 154

$$f'(1^{+}) \quad \lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(1 \quad h) \quad f(1)}{h} \quad \lim_{h\to 0^{+}} \frac{2 \quad (1+h)^{2} \quad 4}{h} \quad \lim_{h\to 0^{+}} \frac{h^{2} \quad 2h \quad 3}{h} \quad \infty$$

$$f'(1^{-}) \quad \lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(1 \quad h) \quad f(1)}{h} \quad \lim_{h\to 0^{+}} \frac{(1+h)^{2} \quad 3 \quad 4}{h} \quad \lim_{h\to 0^{+}} \frac{2h+h^{2}}{h} \quad 2$$

49. Página 155

$\lim\limits_{x\to 0^{+}} \sqrt[3]{x} \quad \lim\limits_{x\to 0^{-}} \sqrt[3]{x} \quad 0 \quad f(0) \rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$.

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^{2}}} = -\infty \rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

50. Página 155

a) • Si $x > 0: f(x) = \cos x \rightarrow$ Función trigonométrica continua y derivable en $(0, +\infty)$.

• Si $x < 0: f(x) = -x^2 + 1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 0)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$:

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1 \qquad f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} (-x^2 + 1) = 1 \qquad f(0) = 1$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces *f*(*x*) es derivable en $\mathbb{R}$.

b) • Si $x > 0: f(x) = -x^3 + 2x + 1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(0, +\infty)$.

• Si $x < 0: f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow$ Función trigonométrica continua y derivable en $(-\infty, 0)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$:

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} (-x^3 + 2x + 1) = 1 \qquad f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} (2 \cdot \operatorname{sen} x + 1) = 1 \qquad f(0) = 1$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cdot \cos x & \text{si } x < 0 \\ -3x^2 + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 2 \\ f'(0^+) = 2 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces *f*(*x*) es derivable en $\mathbb{R}$.

c) • Si $x > 2: f(x) = 7 - 2^x \rightarrow$ Función exponencial continua y derivable en $(2, +\infty)$.

• Si $x < 2: f(x) = \frac{x - 3}{2x - 5} \rightarrow$ Función racional continua y derivable en $(-\infty, 2)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x = 2$:

$$f(2^+) = \lim_{x\to 2^+} (7 - 2^x) = 3 \qquad f(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x - 3}{2x - 5} = -5$$

Así, la función no es continua en $x = 2$, y por tanto, tampoco será derivable en ese punto.

Es decir, la función es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

d) • Si $x > 1: f(x) = -2x^2 + 3 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(1, +\infty)$.

• Si $x < 1: f(x) = -4x + 5 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 1)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x = 1$:

$$f(1^+) = \lim_{x\to 1^+} (-2x^2 + 3) = 1 \qquad f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} (-4x + 5) = 1$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < 1 \\ -4x & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -4 \\ f'(1^+) = -4 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces *f*(*x*) es derivable en $\mathbb{R}$.

51. Página 155

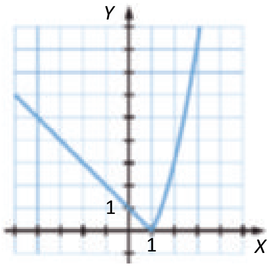
$\lim_{x\to 1^+}(x^2 \quad 1) \quad \lim_{x\to 1^-}(\quad x \quad 1) \quad 0 \quad f(1) \longrightarrow f(x)$ es continua en $x = 1$.

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{2h-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+}(2-h) = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{-(1-h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

a)



b) No existe, pues si una función es discontinua en un punto no puede ser derivable en él.

52. Página 155

- Si $x > 2: f \quad x \quad -2x \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $2, -\infty$.
- Si $x < 2: f \quad x \quad \frac{x \quad 1}{x \quad 1}$ Función racional continua y derivable en $-\infty, 2$, salvo en $x = 1$.
- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x \quad 1$:

$f \quad 1^+ \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1} + \infty$ $\qquad$ $f \quad 1^- \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1} - \infty$

$f(x)$ no es continua en $x = 1$; por tanto, no es derivable en $x = 1$.

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x \quad 2$:

$f \quad 2^+ \quad \lim_{x\to 2^+}(\quad 2x) \quad 4$ $\qquad$ $f \quad 2^- \quad \lim_{x\to 2^-}\frac{x \quad 1}{x \quad 1} \quad 3$

$f(x)$ no es continua en $x = 2$; por tanto, no es derivable en $x = 2$.

$$f' \quad x = \begin{cases} \dfrac{-2}{(x-1)^2} & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Así, la función es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

53. Página 155

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{1-x^2} & \text{si } -2<x<1\\ 1-3\sqrt{2x-1} & \text{si } 1\le x<5\end{cases}\qquad \text{Dom}\left(\dfrac{x^2-2x-3}{1-x^2}\right)=\mathbb{R}-\{-1,1\}\qquad \text{Dom}\left(1-3\sqrt{2x-1}\right)=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$$

- Si $x\in(-2,-1)\cup(-1,1)\rightarrow f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{1-x^2}$ → Función racional continua y derivable.
- Si $x\in(1,5)\rightarrow f(x)=1-3\sqrt{2x-1}$ → Función radical continua y derivable.
- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=-1$:

$$f(-1^+)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-2x-3}{-(x^2-1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-(x-3)}{x-1}=-\infty\qquad f(-1^-)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-2x-3}{1-x^2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{-(x-3)}{x-1}=-\infty$$

Así, la función no es continua, y por tanto, no es derivable, en $x=-1$

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=1$:

$$f(1^+)=\lim_{x\to1^+}\left(1-3\sqrt{2x-1}\right)=-2\qquad f(1^-)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x-3}{1-x^2}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-3)}{x+1}=-2\qquad f(1)=-2$$

Así, la función es continua en $x=1$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(x-1)^2} & \text{si } x\in(-2,-1)\cup(-1,1)\\ \dfrac{-3}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x\in(1,5)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(1^-)=\dfrac{1}{2}\\ f'(1^+)=-3\end{cases}$$

→ La función no es derivable en $x=1$.

54. Página 155

- Si $x<-4: f(x)=-1$ → Función constante continua y derivable en $(-\infty,-4)$.
- Si $-4<x<2: f(x)=x-2$ → Función polinómica continua y derivable en $(-4,2)$.
- Si $x>2: f(x)=\dfrac{8}{x}$ → Función racional continua y derivable en $(2,+\infty)$.
- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=-4$:

$$f(-4^+)=\lim_{x\to-4^+}(x-2)=2\qquad f(-4^-)=\lim_{x\to-4^-}-1=-1$$

$f(x)$ no es continua en $x=-4$; por tanto, no es derivable en $x=-4$.

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=2$:

$$f(2^+)=\lim_{x\to2^+}\frac{8}{x}=4\qquad f(2^-)=\lim_{x\to2^-}(x-2)=4$$

$f(x)$ no es continua en $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x<-4\\ 1 & -4<x<2\\ -\dfrac{8}{x^2} & x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(2^-)=1\\ f'(2^+)=-2\end{array}\right\}$$ → Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=2$.

Así, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{-4,2\}$.

55. Página 155

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5x - 6 & \text{si } x \le -1 \\ 2 - \dfrac{1}{x} & \text{si } -1 < x \le 2 \\ \dfrac{5}{4} - 2^{-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Si $x < -1 \to f(x) = 2x^2 - 5x - 6 \to$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, -1)$.
- Si $-1 < x < 0$ y $0 < x < 2 \to f(x) = 2 - \dfrac{1}{x} \to$ Función continua y derivable en $(-1, 0) \cup (0, 2)$.
- Si $x > 2 \to f(x) = \dfrac{5}{4} - 2^{-x} \to$ Función exponencial continua y derivable en $(2, +\infty)$.
- Si $x = -1$:

$$f(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 3 \qquad f(-1^-) = \lim_{x \to -1^-} (2x^2 + 5x - 6) = 3 \qquad f(-1) = 3$$

Así, la función es continua en $x = -1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 5 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } -1 < x < 0 \text{ ó } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x > 2 \end{cases} \to \begin{cases} f'(-1^-) = 1 \\ f'(-1^+) = 1 \end{cases}$$

$\to$ La función es derivable en $x = -1$.

- Si $x = 0$:

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty \qquad f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

Así, la función no es continua en $x = 0$; por tanto, no es derivable en este punto.

- Si $x = 2$:

$$f(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{5}{4} - 2^{-x}\right) = \frac{3}{2} \qquad f(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2} \qquad f(2) = \frac{3}{2}$$

Así, la función es continua en $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 5 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } -1 < x < 0 \text{ ó } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x > 2 \end{cases} \to \begin{cases} f'(2^-) = \dfrac{1}{4} \\ f'(2^+) = \dfrac{-\ln 2}{4} \end{cases}$$

$\to$ La función no es derivable en $x = 2$.

En resumen, la función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

56. Página 155

$$f(x) = \begin{cases} 7 - (2x - 6) & \text{si } x \ge 3 \\ 7 - (2x - 6) & \text{si } x < 3 \end{cases} = \begin{cases} 13 - 2x & \text{si } x \ge 3 \\ 1 - 2x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

- Si $x < 3: f(x) = 13 - 2x \to$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 3)$
- Si $x > 3: f(x) = 1 - 2x \to$ Función polinómica continua y derivable en $(3, +\infty)$

• Si $x = 3$:

$f\ 3^- \quad \lim\limits_{x\to 3^-} 1\,\text{ı}\ 2x \quad 7 \qquad f\ 3^+ \quad \lim\limits_{x\to 3^+} 13 \quad 2x \quad 7 \qquad f\ 3 \ - 7$

Por tanto, la función es continua en $x = 3$.

$f'\ x\ = \begin{cases} -2 & \text{si } x > 3 \\ 2 & \text{si } x < 3 \end{cases} - \begin{cases} f'\ 3^+ \ = -2 \\ f'\ 3^- \ = 2 \end{cases}$ $\longrightarrow$ Por tanto, la función no es derivable en $x = 3$.

57. Página 155

a) • Si $x > 3 : f\ x\ - x^2 - 2x -$ Función polinómica continua y derivable en $3, -\infty$.

• Si $x < 3 : f\ x\ - 2x - a \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $-\infty, 3$.

• Para que la función sea continua en $x = 3$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(3) = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3^-) = \lim\limits_{x\to 3^-} (2x - a) = 6 - a \\ f(3^+) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2 - 2x) = 3 \end{array}\right\} - f(3^-) = f(3^+) = f(3) - 6 - a = 3 \rightarrow a = -3$$

b) La función solo puede ser derivable si es continua, por lo que consideramos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x > 3 \\ 2x - 3 & x < 3 \end{cases}$$

$$f'(3^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3-h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(3-h)^2 - 2(3-h) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} (4-h) = 4$$

$$f'(3^-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(3-h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(3-h) - 3 - 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

Las derivadas laterales existen, pero no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

58. Página 155

• Si $x < -1 : f\ x\ - -4x - 3 -$ Función polinómica continua y derivable en $-\infty, -1$.

• Si $-1 < x < 1 : f\ x\ - 2x^2 - 1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $-1, 1$.

• Si $x > 1 : f\ x\ - \dfrac{k-2}{x} -$ Función racional continua y derivable en $1, -\infty$.

• Para que la función sea continua en $x = -1$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(-1) = 1$:

$f\ -1^+ \ = \lim\limits_{x\to -1^+} (2x^2 - 1) = 1 \qquad\qquad f\quad 1^- \quad \lim\limits_{x\to -1^-} (\quad 4x \quad 3) \quad 1$

$f(x)$ es continua en $x = -1$.

• Para que la función sea continua en $x = 1$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = k + 2$:

$f\ 1^+ \ - \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{k-2}{x} - k - 2 \qquad\qquad f\ 1^- \quad \lim\limits_{x\to -1^-} (2x^2 \quad 1) \quad 1$

$f(1^-) \quad f(1^+) \quad f(1) \ \cdot k \quad 2 \quad 1 \ \cdot k \quad 1.$

Si $k = -1$: $f'\ x\ = \begin{cases} -4 & x < -1 \\ 4x & -1 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r} f'(-1^-) = -4 \\ f'(-1^+) = -4 \end{array}\right| \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(1^-) = 4 \\ f'(1^+) = -1 \end{array}\right| \rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales, por tanto; $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

59. Página 155

a) • Si $x < 0 : f\ x = \dfrac{1}{x^2 - 1} \rightarrow$ Función racional continua y derivable en $-\infty, 0$.

• Si $0 < x < 3 : f\ x = ax - b \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $0, 3$.

• Si $x > 3 : f\ x = x - 5 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $3, -\infty$.

• Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = b$:

$$f\ 0^+ = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = 1 \qquad\qquad f\ 0^- = \lim_{x\to -1^-} (ax - b) = b$$

$f(x)$ es continua en $x = 0$ si $b = 1$.

Consideramos que $b = 1$, entonces para que la función sea continua en $x = 3$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(3) = 3a + 1$:

$$f\ 3^+ \quad \lim_{x\to -1^+} (x \quad 5) \quad 2 \qquad\qquad f\ 3^- = \lim_{x\to -1^-} (ax - 1) = 3a - 1$$

$$f(3^-) \quad f(3^+) \quad f(3) \rightarrow 3a \quad 1 \quad 2 \rightarrow a \quad 1.$$

b) Si $a = -1$ y $b = 1$: $f'\ x = \begin{cases} \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2} & x < 0 \\ -1 & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = -1 \end{array}\right| \rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(3^-) = -1 \\ f'(3^+) = 1 \end{array}\right| \rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

60. Página 155

$$f\ x = \begin{cases} 2x - 4 + x & \text{si } x > 2 \\ -2x + 4 + x & \text{si } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x > 2 \\ -x - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

• Si $x < 2 : f\ x = -x + 4 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $-\infty, 2$.

• Si $x > 2 : f\ x = 3x - 4 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $2, -\infty$.

• Si $x \quad 2$:

$$f\ 2^- \quad \lim_{x\to 2^-} \quad x \quad 4 \quad 2 \qquad f\ 2^+ \quad \lim_{x\to 2^+} \ 3x \quad 4 \quad 2 \qquad f\ 2 = 2$$

Entonces la función es continua en $x = 2$.

$$f'\ x = \begin{cases} 3 & \text{si } x > 2 \\ -1 & \text{si } x < 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'\ 2^+ = 3 \\ f'\ 2^- = -1 \end{cases}$$ $\rightarrow$ Las derivadas laterales existen pero son diferentes, entonces la función no es derivable en $x = 2$.

61. Página 155

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ -x^3-x+1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

- Si $x<0: f(x)=-x^3-x+1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.
- Si $x>0: f(x)=x^3-x-1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(2,-\infty)$.
- Si $x=0$:

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3-x+1)=1$ $\quad f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3-x+1)=1$ $\quad f(0)=1$

Entonces la función es continua en $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & \text{si } x>0 \\ -3x^2+1 & \text{si } x<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^+)=1 \\ f'(0^-)=1 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces la función es derivable en $x=0$.

- Por otra parte:

$$f(x)=|x|^3-|x|-1=\begin{cases} -x^3-x-1 & \text{si } x<0 \\ x^3-x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

$f(0^+)=f(0^-)=f(0) \rightarrow$ Continua en $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & \text{si } x>0 \\ -3x^2-1 & \text{si } x<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^+)=1 \\ f'(0^-)=-1 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen pero son diferentes, luego la función no es derivable en $x=0$.

62. Página 155

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } x<0 \\ x^2-a & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable, en primer lugar, debe ser continua.

La función es continua en $x=0$ si los límites laterales son iguales y coinciden con $f(0)=\cos 0=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1 \\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-a)=a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0) \rightarrow a=1$$

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } x<0 \\ x^2-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=0 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x=0$ si $a=1$.

63. Página 155

a) • Si $x \in (-\infty,-4) \cup (-4,-3) \longrightarrow f(x) = \frac{x}{x-4}$ ⟶ Función racional continua y derivable.

• Si $x \in (-3,+\infty) \longrightarrow f(x) = x^2 + ax$ ⟶ Función polinómica continua y derivable.

• Si $x = -4$:

No es continua ni derivable en $x = -4$ ya que no pertenece al dominio.

• Si $x = -3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-3^-) = \lim\limits_{x \to -3^-} \frac{x}{x-4} = -3 \\ f(-3^+) = \lim\limits_{x \to -3^+} (x^2 - ax) = 9 - 3a \end{array}\right\} \to f(-3^-) = f(-3^+) = f(3) \to 9 - 3x = -3 \to a = 4$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x > -3 \\ \frac{4}{(x-4)^2} & \text{si } x < -3 \end{cases} \to \begin{cases} f'(-3^+) = -2 \\ f'(-3^-) = 4 \end{cases} \to f'(3^+) \neq f'(3^-)$$

Entonces no existe ningún valor de *a* para el cual la función es derivable en $x = -3$

b) • Si $x \in (-\infty, 1) \longrightarrow f(x) = 2x + e^{1-x}$ ⟶ Función exponencial continua y derivable.

• Si $x \in (1, +\infty) \longrightarrow f(x) = 1 + \sqrt{x+m}$ ⟶ Función radical continua y derivable $\forall m > -x$.

• Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + e^{1-x}) = 3 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} (1 + \sqrt{x+m}) = 1 - \sqrt{1+m} \end{array}\right\} \to f(1^-) = f(1^+) \to 3 = 1 + \sqrt{1+m} \to m = 3$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - e^{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-3}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \to \begin{cases} f'(1^+) = 1 \\ f'(1^-) = \frac{1}{4} \end{cases} \to f'(1^+) = f'(1^-)$$

Entonces no existe ningún valor de *a* para el cual la función es derivable en $x = 1$.

64. Página 155

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 < x < 4 \\ x^2 - mx + n & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ ha de ser continua en este punto:

$$\left.\begin{array}{l} f(4^-) = \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{25 - x^2} = 3 \\ f(4^+) = \lim\limits_{x \to 4^+} (x^2 - mx - n) = 16 + 4m - n \end{array}\right\} \to f(4^-) = f(4^+) = f(4) \to 4m - n = -13$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } -5 < x < 4 \\ 2x - m & \text{si } x > 4 \end{cases} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} f(4^-) = -\frac{4}{3} \\ f(4^+) = 8 - m \end{array}\right\} \to 8 - m = -\frac{4}{3} \to m = -\frac{28}{3}$$

Así, $16 - 4 \cdot \left(-\frac{28}{3}\right) - n = 3 \to n = 3 + \frac{112}{3} - 16 \to n = \frac{73}{3}$.

65. Página 155

$$f(x)=\begin{cases}1-a\sqrt{x-1}\cdot\ln(x-1) & \text{si } x>0\\ (x-1)^2 & \text{si } x\le 0\end{cases}$$

a) • Si $x\in(0,+\infty)\rightarrow f(x)=1-a\sqrt{x-1}\cdot\ln(x+1)$ → Producto de funciones continuas y derivables en $(0,+\infty)$.

• Si $x\in(-\infty,0)\rightarrow f(x)=(x-1)^2$ → Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.

• Si $x=0$:

$$\left.\begin{aligned}f(0^-)&=\lim_{x\to 0^-}(x-1)^2=1\\ f(0^+)&=\lim_{x\to 0^+}\left(1-a\sqrt{x-1}\cdot\ln(x-1)\right)=1-a\cdot 0=1\ \forall a\end{aligned}\right\}\rightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1\quad\forall a\in R$$

b) $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{a\cdot\ln(x-1)+2}{2\cdot\sqrt{x-1}} & \text{si } x>0\\ 2x-2 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Para que la función sea derivable: $f'(0^+)=f'(0^-)\rightarrow\begin{cases}f'(0^+)=\dfrac{a\cdot\ln 1+2}{2\sqrt{1}}=\dfrac{2a}{2}\\ f'(0^-)=-2\end{cases}\rightarrow a=-2$

66. Página 156

a) $$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(2x-1)&=1\\ \lim_{x\to 0^-}e^{ax}&=1\end{aligned}\right\}\rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=1$$

$f(0)=e^{a\cdot 0}=1$

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)\rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$.

b) $$f'(x)=\begin{cases}ae^{ax} & x<0\\ 2 & x>0\end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x=0$, las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$$\left.\begin{aligned}f'(0^-)&=a\\ f'(0^+)&=2\end{aligned}\right\}\rightarrow a=2$$

67. Página 156

a) Para que la función sea continua en $x=2$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(2)=3$.

$$\left.\begin{aligned}f(2^-)&=\lim_{x\to 2^-}(ax^2-1)=4a-1\\ f(2^+)&=\lim_{x\to 2^+}(e^{2-x}+2)=3\end{aligned}\right\}\rightarrow f(2^-)=f(2^+)=f(2)\rightarrow 4a-1=3\rightarrow a=\frac{1}{2}$$

b) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-1 & x\le 2\\ e^{2-x}-2 & x>2\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}x & x<2\\ -e^{2-x} & x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}f'(2^-)&=2\\ f'(2^+)&=-1\end{aligned}\right\}\rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=2$.

68. Página 156

$$f(x)=\begin{cases}\ln(e-\operatorname{sen}x) & \text{si } x<0\\ x^3-ax-b & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x=0$ ha de ser continua en este punto:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(e-\operatorname{sen}x)=1\\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3+ax-b)=b\end{array}\right\}\to f(0^-)=f(0^+)=f(0)\to b=1$$

Para que la función sea derivable en $x=0$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-\cos x}{e-\operatorname{sen}x} & \text{si } x<0\\ 3x^2-a & \text{si } x>0\end{cases}\longrightarrow \left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\dfrac{1}{e}\\ f'(0^+)=a\end{array}\right\}\to a=\frac{1}{e}$$

69. Página 156

$$f(x)=\begin{cases}ax^2-bx-1 & \text{si } x<0\\ a^2-\operatorname{sen}x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

- Si $x<0: f(x)=ax^2-bx+1\to$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.
- Si $x>0: f(x)=a^2-\operatorname{sen}x\to$ Función trigonométrica continua y derivable en $(0,+\infty)$.
- Si $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax^2-bx+1)=1\\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a^2-\operatorname{sen}x)=a^2\end{array}\right\}\longrightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1\longrightarrow a^2=1\to a=\pm 1$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax-b & \text{si } x<0\\ -\cos x & \text{si } x>0\end{cases}\longrightarrow \left.\begin{array}{l} f'(0^-)=b\\ f'(0^+)=-\cos 0=-1\end{array}\right\}\to b=-1$$

70. Página 156

a) • Si $x<\pi: f(x)=e^{a(x-\pi)}\to$ Función exponencial continua y derivable en $(-\infty,\pi)$.

- Si $x>\pi: f(x)=2a-b\cdot\operatorname{sen}(x-\pi)\to$ Función trigonométrica continua y derivable en $(\pi,+\infty)$.
- Si $x=\pi$:

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi^-)=\lim\limits_{x\to\pi^-}e^{a(x-\pi)}=1\\ f(\pi^+)=\lim\limits_{x\to\pi^+}(2a-b\cdot\operatorname{sen}(x-\pi))=2a\end{array}\right\}\to 2a=1\to a=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{\left(\frac{x-\pi}{2}\right)} & \text{si } x<\pi\\ b\cdot\cos(x-\pi) & \text{si } x>\pi\end{cases}\longrightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\pi^-)=\dfrac{1}{2}\\ f'(\pi^+)=b\cdot\cos 0=b\end{array}\right\}\to b=\frac{1}{2}$$

b) • Si $x < -1: f(x) = (x - b)^2 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, -1)$.

• Si $x > -1: f(x) = \dfrac{ax}{\sqrt{x-2}} \rightarrow$ Función radical continua y derivable en $(-1, -\infty)$.

• Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1^-) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x+b)^2 = 1 - 2b - b^2 \\ f(-1^+) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{ax}{\sqrt{x-2}} = -a \end{array}\right\} \rightarrow -a = 1 - 2b - b^2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2b & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{a(x-4)}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } x > -1 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = -2 + 2b \\ f'(-1^+) = \dfrac{3a}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{3a}{2} = -2 + 2b$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} -a = 1 - 2b - b^2 \\ 3a = -4 + 4b \end{cases} \rightarrow a = -\frac{16}{9} \text{ y } b = -\frac{1}{3} \text{ o } a = 0 \text{ y } b = 1$$

71. Página 156

a) $f(x) = \begin{cases} 2e^x - x - a & \text{si } x < 0 \\ x^2 + b(x-1) & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x^4 - 3a & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Todas las ramas son continuas y derivables en el dominio en el que se las ha definido.

• Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2e^x - x + a) = 2 + a \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - b(x-1)) = b \end{array}\right\} \rightarrow 2 - a = b$$

• Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - b \cdot (x-1)) = 4 + 3b \\ f(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^4 - 3a) = 16 - 3a \end{array}\right\} \rightarrow 16 - 3a = 4 + 3b$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2 - a = b \\ 16 - 3a = 4 - 3b \end{cases} \rightarrow a = 1, b = 3$$

Comprobamos la derivabilidad: $f'(x) = \begin{cases} 2e^x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 4x^3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 3 \\ f'(0^+) = 3 \end{array}\right\} \text{ y } \left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 7 \\ f'(2^+) = 32 \end{array}\right\}$$

Entonces f es derivable en $x = 0$, pero no es derivable en $x = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 7x - c & \text{si} \quad x < -2 \\ ax^2 - 3x - 11 & \text{si} \quad -2 \le x < \frac{3}{2} \\ 18\sqrt{2x-1} + b & \text{si} \quad x \ge \frac{3}{2} \end{cases}$

Todas las ramas son continuas y derivables en el dominio en el que se las ha definido.

- Si $x = -2$:

$$\left.\begin{aligned} f(-2^-) &= \lim_{x\to -2^-} (-x^3 - 7x - c) = c - 6 \\ f(-2^+) &= \lim_{x\to -2^+} (ax^2 + 3x + 11) = 4a - 5 \end{aligned}\right\} \to 4a - c - 11 = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 - 7 & \text{si } x < -2 \\ 2ax + 3 & \text{si } -2 < x < \frac{3}{2} \\ \frac{18}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow \left.\begin{aligned} f'(-2^-) &= -5 \\ f'(-2^+) &= 3 - 4a \end{aligned}\right\} \to -5 = 3 - 4a \to a = 2$$

Así, $8 + 11 = c \to c = 19$

- Si $x = \frac{3}{2}$ (sustituyendo los valores de *a* y *c*):

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}^-\right) &= \lim_{x\to \frac{3}{2}^-} (2x^2 - 3x - 11) = 20 \\ f\left(\frac{3}{2}^+\right) &= \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} \left(18\sqrt{2x-1} + b\right) = 36 - b \end{aligned}\right\} \to 20 = 36 - b \to b = -16$$

- Comprobamos que es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 7 & \text{si } x < -2 \\ 4x - 3 & \text{si } -2 < x < \frac{3}{2} \\ \frac{18}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow \left.\begin{aligned} f'\left(\frac{3}{2}^-\right) &= 9 \\ f'\left(\frac{3}{2}^+\right) &= 9 \end{aligned}\right\} \to \text{Es derivable en } x = \frac{3}{2}.$$

72. Página 156

Cada rama es continua y derivable en el dominio en el que se las ha definido. Comprobamos en $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} (x^2 + ax + ab) = ab \\ f(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \log_2 (x - 2) = 1 \end{aligned}\right\} \to ab = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{(x-2)\ln 2} = \frac{1}{x\cdot\ln 2 - \ln 4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0^-) &= a \\ f'(0^+) &= \frac{1}{\ln 4} \end{aligned}\right\} \to a = \frac{1}{\ln 4} \to b = \ln 4$$

73. Página 156

Si $-1 < x < 1$, $f(x) = \frac{a}{x}$ → Función racional, no continua en $x = 0$; por tanto, no es derivable en $x = 0$.

Así, no existen valores de a y b para los que la función sea derivable en todos los puntos.

74. Página 156

- Si $x < 0: f(x) = 3x - 2 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 0)$.
- Si $0 < x < \pi: f(x) = x^2 + 2a\cos x \rightarrow$ Función polinómica y trigonométrica continua y derivable en $(0, \pi)$.
- Si $x > \pi: f(x) = ax^2 + b \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(\pi, +\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 2a$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} (3x-2) = 2 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + 2a\cos x) = 2a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) = 1 \rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1$$

Consideremos que $a = 1$, entonces para que la función sea continua en $x = \pi$ los límites laterales tiene que ser iguales y coincidir con $f(\pi) = \pi^2 + b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 - 2\cos x) = \pi^2 - 2 \\ f(\pi^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - b) = \pi^2 - b \end{array}\right\} \rightarrow f(\pi^-) = f(\pi^+) = f(\pi) \rightarrow \pi^2 - 2 = \pi^2 - b \rightarrow b = -2$$

Si $a = 1$ y $b = -2$, entonces: $f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2x - 2\,\text{sen}\,x & 0 < x < \pi \\ 2x & x > \pi \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 3 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-) = 2\pi \\ f'(\pi^+) = 2\pi \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = \pi$.

75. Página 156

a) $f'(x) = 2$ $\quad f''(x) = 0$ $\quad f'''(x) = 0$

b) $g'(x) = 2x$ $\quad g''(x) = 2$ $\quad g'''(x) = 0$

c) $h'(x) = 3x^2$ $\quad h''(x) = 6x$ $\quad h'''(x) = 6$

d) $i'(x) = -\text{sen}\, x$ $\quad i''(x) = -\cos x$ $\quad i'''(x) = \text{sen}\, x$

e) $j'(x) = \cos x$ $\quad j''(x) = -\text{sen}\, x$ $\quad j'''(x) = -\cos x$

f) $k'(x) = 1 + \text{tg}^2\, x$ $\quad k''(x) = 2\text{tg}\, x \cdot (1 + \text{tg}^2\, x)$ $\quad k'''(x) = 2(1 + \text{tg}^2\, x)^2 + 2\,\text{tg}\, x \cdot 2\,\text{tg}\, x \cdot (1 + \text{tg}^2\, x)$

76. Página 156

La función es continua en su dominio, esto es, en $(0, +\infty)$.

$h'(x) = \frac{1}{x}$ → $h(x)$ es derivable en $(0, +\infty)$.

$h''(x) = -\frac{1}{x^2}$

77. Página 156

a) $f(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right\} \to f(1^-) \neq f(1^+) \to$$ $f(x)$ no es continua en $x = 1$; por tanto, no es derivable en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Así, $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) $$g(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$$

$g(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} g(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2 = 2 \\ g(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x - 2) = 2 \end{array}\right\} \to g(2^-) = g(2^+) = g(2) \to$$ $g(x)$ es continua en $x = 2$.

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & x > 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(2^-) = 0 \\ g'(2^+) = 2 \end{array}\right\} \to$$ Las derivadas laterales existen, pero son distintas; por tanto, $g(x)$ no es derivable en $x = 2$.

Así, $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$g''(x) = 0$ si $x \neq 2$

c) $h(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} h(-1^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x + 4) = 1 \\ h(-1^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-2x - 1) = 1 \end{array}\right\} \to h(-1^-) = h(-1^+) = h(-1) \to$$ $h(x)$ es continua en $x = -1$.

$$h'(x) = \begin{cases} 3 & x < -1 \\ -2 & x > -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} h'(-1^-) = 3 \\ h'(-1^+) = -2 \end{array}\right\} \to$$ Las derivadas laterales existen, pero son distintas; por tanto, $h(x)$ no es derivable en $x = -1$.

Así, $h(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$h''(x) = 0$ si $x \neq 1$

78. Página 156

a) $f'(x) = \dfrac{(1-x) - (1-x)(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$ $\qquad f''(x) = -\dfrac{4}{(1-x)^3}$ $\qquad f'''(x) = \dfrac{12}{(1-x)^4}$ $\qquad f^{IV)}(x) = -\dfrac{48}{(1-x)^5}$

La derivada n-ésima es: $f^{n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$

b) $g'(x) = 2$ sen x cos $x =$ sen $2x$ $\qquad g''(x) = 2$ cos $2x$ $\qquad g'''(x) = -4$ sen $2x$ $\qquad g^{IV)}(x) = -8$ cos $2x$

$g^{V)}(x) = 16$ sen $2x$

Así, la derivada n-ésima puede calcularse según las expresiones:

$$g^{n)} \to \begin{cases} g^{2k-1)}(x) = (-1)^{k+1}2^{2k-2}\,\text{sen}\ 2x \\ g^{2k)}(x) = (-1)^{k+1}2^{2k-1}\cos 2x \end{cases}$$ para $k = 1, 2, 3\ldots$

c) $h'(x) = x^{-1}$ $\quad h''(x) = -x^{-2}$ $\quad h'''(x) = 2x^{-3}$ $\quad h^{IV)}(x) = -6x^{-4}$

La derivada n-ésima es: $h^{n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!x^{-n}$

79. Página 156

a) $y' - \frac{3}{2}\ \sqrt{x}$

b) $y' - \frac{6}{x^3} - 1$

c) $y' = \ 3e^{\ -x}\ \ 1 - x(1 - \ln 3)$

d) $y' = e^{-x}\ \ x^2 - x - 1$

e) $y' = \frac{-1}{x-1\ \sqrt{1-x^2}}$

f) $y' = \frac{-4x-9}{x-3\ ^4}$

80. Página 157

a) $y' = \frac{4x-9}{x\ \ x-3}$

b) $y' - \frac{x}{x^2-2}$

c) $y' - \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

d) $y' = \frac{15x^2}{(5x^3-1)\ \ln 2}$

81. Página 157

a) $y' = \frac{4}{sen\,4x}$

b) $y' = -6x \cdot tg\ \ x^2 - 1$

c) $\frac{20x}{(x^4-25)\cdot \ln 2}$

d) $y' - \frac{1}{2x-2x^2}$

e) $y' = \frac{1 - sen^2 x - 2x\,sen(2x)}{2x \cdot \ln 10 \cdot (sen^2 x + 1)}$

82. Página 157

a) $y' - -\frac{16x}{x^2-4\ ^2}$

b) $y' = \frac{2x^2-2x-1}{x-1\ ^2\ x^2}$

c) $y' = \frac{7}{2\sqrt{x}} - \frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $y' - e^x\ \ x-1$

83. Página 157

a) $y' = \frac{10x}{3\sqrt[3]{\ 5x^2\ ^2}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{25x}}$

b) $y' = \frac{-1}{x-3\ ^2}$

c) $y' = \frac{-x\ \ x+2}{x-1\ ^2}$

d) $y' - -15x^2 + 2x\,sen\,x - x^2 cos\,x$

e) $y' \quad \frac{1}{x\ln 2} \quad 2^x \ln 2$

84. Página 157

a) $y' = \dfrac{2xe^x - \; x^2+1 \; e^x}{e^x \;\; ^2} = \dfrac{-x^2-2x-1}{e^x}$

b) $y' = \dfrac{\ln x - x \cdot \dfrac{1}{x}}{\ln x \;\; ^2} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

c) $y' - \dfrac{-\sqrt{x-1}}{x-1 \;\; ^2 \sqrt{x-1}}$

d) $y' = \dfrac{2 \;\; x-2 \;\; x-1 - \;\; x-2 \;\; ^2}{x-1 \;\; ^2} = \dfrac{x^2-2x}{x-1 \;\; ^2}$

e) $y' = \dfrac{-2x^3-4x}{e^{x^2}}$

f) $y' = \dfrac{-4x^3-3x^2-2}{2\sqrt{\dfrac{2x-1}{x^3-1}} \;\; x^3-1 \;\; ^2}$

85. Página 157

a) $y' - 3^{x^2+4} \ln 3 \cdot 2x$

b) $y' \quad 15x^4 \quad x^5 \quad 2 \;\; ^2$

c) $y' = \dfrac{1}{3} \;\; x^3-2x \;\; ^{-\frac{2}{3}} \cdot \;\; 3x^2-2 \;\; = \dfrac{3x^2-2}{3\sqrt[3]{\;\; x^3-2x \;\; ^2}}$

d) $y' - -10xe^{-x^2}$

e) $y' = \dfrac{-5x-6}{2x^4\sqrt{x-1}}$

86. Página 157

a) $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$

b) $y' - 2xe^{x^2-7}$

c) $y' \quad 2\,sen\,x \quad cos\,x$

d) $y' - 2^{sen\,x} \cdot \ln 2 \cdot cos\,x$

87. Página 157

a) $y' = 12 \cdot \dfrac{1}{2} \;\; 3x^2+x \;\; ^{-\frac{1}{2}} \cdot \;\; 6x-1 \;\; = \dfrac{36x-6}{\sqrt{3x^2-x}}$

b) $y' = \dfrac{cos\,x^2 \cdot 2x}{sen\,x^2} = 2x\,cotg\,x^2$

c) $y' = (8x-5) \;\; 3^x - (4x^2-5x-1) \cdot 3^x \cdot \ln 3$

88. Página 157

a) $y' = 4tg \;\; 2x+3 \;\; 1+tg^2 \;\; 2x+3$

b) $y' = \dfrac{3x^2}{1- \;\; x^3+6 \;\; ^2}$

c) $y' = \dfrac{1}{2} \;\; \ln(3x-5) \;\; ^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{3}{3x-5} = \dfrac{3}{2(3x-5)\sqrt{\ln(3x-5)}}$

89. Página 157

a) $y' = \frac{1}{4}\ 5x^3 - 1^{-\frac{3}{4}} \cdot 15x^2 = \frac{15x^2}{4\sqrt[4]{5x^3 - 1^{3}}}$

b) $y' = 2\,arc\,sen\,x - \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $y' = \frac{2}{3}\ 5x - 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x - 2}}$

90. Página 157

a) $y' = -\frac{4x}{x^4 - 4}$

b) $y' = \frac{\cos x}{2\,sen\,x}$

c) $y' = -4\ \ tg^2(\cos(2x)) + 1\ \ sen(2x) \cdot tg(\cos(2x))$

d) $y' = -\frac{2x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{-4x^2 - 1}}$

91. Página 157

a) $y' - -2e^{\cos 2x} \cdot sen^2 2x - 2\cos 2x \cdot e^{\cos 2x}$

b) $y' = -10\ \ tg^2(-5x + 1) + 1\ \cdot tg(-5x - 1)$

c) $y' - -6(2x - 1)^2 \cdot sen((2x - 1)^3)$

d) $y' - -6\cos^2(2x - 1) \cdot sen(2x - 1)$

92. Página 157

a) $y' = \frac{2x - e^x}{x^2 - e^x}$

b) $y' = \frac{4x}{x^2 - 1}$

c) $y' - 2 - \frac{1}{x}$

d) $y' - \frac{2x^2 - 9x - 3}{3x\ \ x^2 - 2x - 3}$

e) $y' = -\frac{x\,sen\,x - \cos x - 1}{x - x\cos x}$

93. Página 157

a) $y' = \frac{4x^2 - 2}{\sqrt{1 - x^2}}$

b) $y' = -\frac{\sqrt[3]{cotgx} \cdot cosec\,x \cdot sec\,x}{3}$

c) $y' \quad \frac{1}{2} cosec\,x \cdot\ cotg^2 x\ \text{ı}\ cosec^2 x$

d) $y' - -2sen\ \ 2 - x\ \ \cos\ \ 2 - x\ \ - -sen\ \ 4 - 2x$

94. Página 157

a) $y' - \frac{-x\,sen\,x - sen\,x + x\cos x}{e^x}$

b) $y' = \frac{2^x \ln 2}{2^x - 1}$

c) $y' - -\frac{x\,sen\,x - 2\cos x}{x^3}$

d) $y' = \frac{sen\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 158

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Meterse en la piscina en verano para refrescarse, encender la calefacción para calentarse o el aire acondicionado, utilizar cualquier electrodoméstico o artículo electrónico que libera energía calórica, utilizar una sartén u olla, echar hielos en la bebida…

2. Página 158

El punto de equilibrio térmico es la temperatura a la que llegan cuerpo y medio simultáneamente y que hace que no haya más variación de temperatura (en el sentido de bajar una y subir la otra).

3. Página 158

Lo que ocurrirá es que tenderán a bajar una y subir otra hasta que lleguen a la misma temperatura y se equilibren.

4. Página 158

• Primera ley del movimiento: «todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, salvo que actúen fuerzas sobre él que le obliguen a cambiar de estado».

• Segunda ley del movimiento: «la fuerza neta sobre un objeto es igual a la tasa de variación temporal del producto de su masa y velocidad».

• Tercera ley del movimiento: «a cada acción le corresponde una reacción igual y en sentido opuesto».

• Ley de la gravitación universal: la fuerza de atracción entre dos objetos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

• Teoría de las mareas: Isaac Newton realizó varios estudios del comportamiento de las mareas y calculó la altura de estas según la fecha del mes, la estación del año y la latitud. La explicación que dio, es la que se acepta actualmente.

• Teoría del color: descubrió que la luz procedente del sol (la luz blanca) se puede descomponer en colores.