Integrales

9

ACTIVIDADES

1. Página 210

$f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2 \longrightarrow F(x) = x^5 - x^3 - 2x - 3$

$f(x) = x^4 - x^3 - 2 \longrightarrow F(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{4} - 2x - 1$

$f(x) = 12x^2 + 6x \longrightarrow F(x) = 4x^3 + 3x^2$

2. Página 210

a) $2x^4 - 2x^2 - 5x$

b) $\dfrac{2}{5}x^4$

c) $3e^x - x$

d) $3\sqrt{x}$

3. Página 211

a) $\int (3x^2 - 2x - 1)dx = x^3 - x^2 - x + k$

b) $\int (2\cos x)dx = 2\operatorname{sen} x + k$

c) $\int (4x^3 - \operatorname{sen} x)dx = x^4 - \cos x + k$

d) $\int (2x - e^x)dx = x^2 - e^x + k$

e) $\int (3 - e^{-x})dx = 3x - e^{-x} + k$

f) $\int (5 - 4x - \cos x)dx = 5x - 2x^2 - \operatorname{sen} x + k$

g) $\int (5e^x - 2\cos x)dx = 5e^x + 2\operatorname{sen} x - k$

h) $\int (7\operatorname{sen} x - 4\cos x)dx = -7\cos x + 4\operatorname{sen} x + k$

4. Página 211

a) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + k$

b) $\int [2f(x) - g(x)]dx = 2\int f(x)dx - \int g(x)dx = 2F(x) - G(x) + k$

c) $\int \left[\dfrac{1}{2}f(x) - 2g(x)\right]dx = \dfrac{1}{2}\int f(x)dx - 2\int g(x)dx = \dfrac{1}{2}F(x) - 2G(x) + k$

d) $\int [-f(x) + b \cdot g(x)]dx = -\int f(x)dx + b\int g(x)dx = -F(x) - b \cdot G(x) + k$

5. Página 212

a) $\int (x^2 - 3x - 2)dx = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 2x - k$

b) $\int \dfrac{3}{x^3}dx = \int 3x^{-3}dx = -\dfrac{3}{2x^2} + k$

c) $\int 3\sqrt[4]{x^3}dx = \int 3x^{\frac{3}{4}}dx = \dfrac{12}{7}\sqrt[4]{x^7} - k = \dfrac{12}{7}x\sqrt[4]{x^3} - k$

6. Página 212

a) $\int (1-x)^2\,dx = -\int (-1)(1-x)^2\,dx = -\frac{(1-x)^3}{3} - k$

b) $\int (1-x^2)^2\,dx = \int (1-2x^2-x^4)dx = x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} - k$

c) $\int 2x\sqrt{x^2-3}\,dx \rightarrow$ Tomamos $f(x)=x^2-3 - f'(x)=2x \rightarrow \int 2x\sqrt{x^2-3}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-3)^3} - k$.

7. Página 213

a) $\int x(x^2-3)dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+3)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-3)^2}{2} - k = \frac{(x^2+3)^2}{4} - k$

b) $\int (x-2)(x^2-4x-1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int (2x-4)(x^2-4x-1)^3\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-4x-1)^4}{4} + k = \frac{(x^2-4x+1)^4}{8} + k$

8. Página 213

a) $\int \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(2x-1)^3} - k = \frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3} + k$

b) $\int x\sqrt{x^2-2}dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2-2}dx = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-2)^3} - k = \frac{\sqrt{(x^2-2)^3}}{3} - k$

c) $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} - k$

d) $\int (x-1)e^{x^2+2x-1}dx = \frac{1}{2}\int (2x-2)e^{x^2+2x-1}dx = \frac{1}{2}e^{x^2+2x-1} + k$

9. Página 214

a) $\int \frac{4x}{2x^2-1}dx = \ln|2x^2-1| - k$

b) $\int \frac{x^2}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-3| - k$

c) $\int \frac{x-1}{x^2-2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2-2x}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x| - k$

d) $\int \frac{5x}{1-x^2}dx = -\frac{5}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}dx = -\frac{5}{2}\ln|1-x^2| + k$

10. Página 214

a) $\int \frac{4x^3}{x^4-2}dx = \ln|x^4-2| - k$

b) $\int \frac{4x^3}{(x^4-2)^2}dx = \int 4x^3(x^4-2)^{-2}dx = \frac{-1}{x^4-2} - k$

c) $\int \frac{4x^3}{\sqrt[3]{x^4-2}}dx = \int 4x^3(x^4-2)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^4-2)^2} + k$

d) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}dx = \frac{1}{2}\int (2x-2)\,(x^2-2x)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(x^2-2x)^{\frac{1}{2}} - k = \sqrt{x^2-2x} - k$

11. Página 215

a) $\int 3^{\frac{x}{2}}dx = 2\int \frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{x}{2}}dx = 2\cdot\frac{3^{\frac{x}{2}}}{\ln 3} - k$

b) $\int e^{x+1}dx = e^{x+1} - k$

c) $\int \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}dx = \frac{1}{4}\int 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + k$

d) $\int (e^{-3x} - e^{x-2})dx = \int e^{-3x}dx - \int e^{x-2}dx = -\frac{1}{3}\int -3e^{-3x}dx - \int e^{x-2}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} - e^{x-2} - k$

12. Página 215

a) $\int 7^{x^2+1}\cdot 2xdx = \frac{7^{x^2+1}}{\ln(7)} + k$

b) $\int 5e^{\frac{x}{2}+2}dx = 10\int \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}+2}dx = 10e^{\frac{x}{2}+2} + k$

c) $\int \frac{3^{5x-1}}{7}dx = \frac{1}{35}\int 5\cdot 3^{5x-1}dx = \frac{1}{35}\cdot\frac{3^{5x-1}}{\ln(3)} - k$

d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$

13. Página 216

a) $\int sen(2x)dx = \frac{1}{2}\int 2\cdot sen(2x)dx = -\frac{1}{2}cos(2x) - k$

b) $\int cos(x-1)dx = sen(x-1) - k$

c) $\int \frac{sen\frac{x}{2}}{2}dx = -cos\frac{x}{2} - k$

d) $\int sen(-x)dx = cos(-x) - k$

14. Página 216

a) $\int \frac{1}{cos^2(x-1)}dx = tg(x-1) - k$

b) $\int -3\,sen(2x-1)dx = -\frac{3}{2}\int 2\,sen(2x-1)dx = \frac{3}{2}cos(2x-1) - k$

c) $\int (x-1)\cdot cos(x^2-2x)dx = \frac{1}{2}\int (2x-2)\cdot cos(x^2-2x)dx = \frac{1}{2}sen(x^2+2x) - k$

d) $\int \frac{x}{cos^2(x^2-3)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{cos^2(x^2-3)}dx = \frac{1}{2}tg(x^2-3) + k$

15. Página 217

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}dx = \frac{1}{5}arc\,sen(5x) + k$

b) $\int \frac{1}{1-(x-3)^2}dx = arc\,tg(x-3) + k$

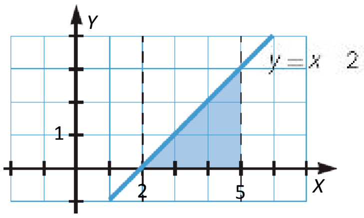
16. Página 217

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}dx = \frac{1}{2}arc\,sen(2x-3) - k$

b) $\int \frac{x}{1\quad 9x^4}dx \quad \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1\quad (3x^2)^2}dx \quad \frac{1}{6}arc\,tg(3x^2) \quad k$

17. Página 218

a) Representamos el área que tenemos que calcular.



Área $\quad \frac{b\cdot h}{2} \quad \frac{3\cdot 3}{2} \quad \frac{9}{2} \quad 4{,}5$

b) Tomamos una sucesión de particiones: $P - \quad x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \quad - \left\{2, \frac{3}{n} - 2, \frac{2\cdot 3}{n} + 2, \ldots, \frac{n-1\cdot 3}{n} + 2, \frac{3n}{n} - 2 - 5\right\}$

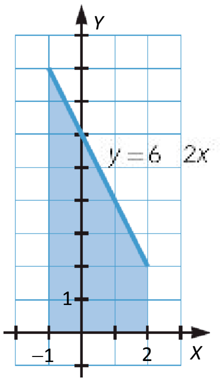
La altura de los rectángulos en cada intervalo es:

$$s_n - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{3i-3}{n}\left[\frac{3i}{n} - 2 - \frac{3\ i-1}{n} - 2\right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{3i-3}{n}\cdot\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(9i-9) - \frac{9(n-1)}{2n}$$

$$m_i \quad f(x_{i-1}) \quad x_{i-1} \quad 2 \quad \frac{3(i \quad 1)}{n} \quad 2 \quad 2 \quad \frac{3i \quad 3}{n} \qquad\qquad \int_2^5 f(x)\,dx \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{9n \quad 9}{2n}\right| \quad \frac{9}{2} \quad 4{,}5$$

18. Página 218

a) Representamos el área que tenemos que calcular.



Área $\quad \frac{3\cdot 6}{2} \quad 3 \quad 2 \quad 9 \quad 6 \quad 15$

b) Tomamos una sucesión de particiones: $P \quad x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \quad \left\{ 1, \frac{3}{n} \quad 1, \frac{2\cdot 3}{n} \quad 1, \ldots, \frac{3n}{n} \quad 1 \quad 2 \right\}$

La altura de los rectángulos en cada intervalo es:

$$m_i \quad f(x_i) \quad 6 \quad 2x_i \quad 6 \quad 2\left[\frac{3i}{n} \quad 1\right] \quad 6 \quad 2 \quad 2\cdot\frac{3i}{n} \quad 8 \quad \frac{6i}{n} \quad \frac{8n \quad 6i}{n}$$

$$s_n \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i \quad x_{i-1}) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{8n \quad 6i}{n}\left[\frac{3i}{n} \quad 1 \quad \frac{3(i \quad 1)}{n} \quad 1\right] \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{8n \quad 6i}{n} \quad \frac{3}{n} \quad \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(24n \quad 18i) \quad \frac{3(5n \quad 3)}{n}$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{15n \quad 9}{n}\right| \quad 15$$

19. Página 219

$$F(x) \quad \int f(x)dx \quad \int (\quad x^2 \quad 2)dx \quad \frac{x^3}{3} \quad 2x \quad k$$

$$F(x)\Big|_4^7 \quad F(7) \quad F(4) \quad \frac{7^3}{3} \quad 2\cdot 7 \quad k \quad \left|\frac{4^3}{3} \quad 2\cdot 4 \quad k\right| \qquad 99$$

20. Página 219

a) $\int_{-2}^{2}(2x^3 - 4x + 3)\,dx = \left.\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 3x\right|_{-2}^{2} = 6 - 6 = 12$

b) $\int_0^e \frac{-3x}{x^2 - 1}\,dx = \left.\frac{-3}{2}\ln|x^2 + 1|\right|_0^e = \frac{-3}{2}\ln|e^2 - 1| - 0 = \frac{-3}{2}\ln|e^2 + 1|$

21. Página 220

a) Área $\frac{b\cdot h}{2} \quad \frac{2\cdot 4}{2} \quad 4$

b) Tomamos la sucesión de particiones: $P \quad x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \quad \left\{0, \frac{2\cdot 1}{n}, \frac{2\cdot 2}{n}, \ldots, \frac{2n}{n} \quad 2\right\}$

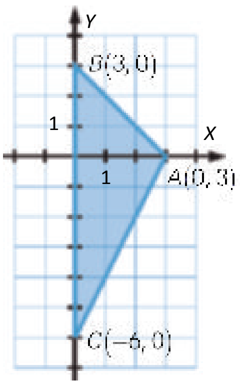
La altura de los rectángulos en cada intervalo es: $m_i \quad f(x_i) \quad 2x_i \quad 4 \quad 2\cdot\frac{2i}{n} \quad 4 \quad \frac{4i \quad 4n}{n}$

$$s_n \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i \quad x_{i-1}) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{4i \quad 4n}{n}\left[\frac{2i}{n} \quad \frac{2(i \quad 1)}{n}\right] \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{4i \quad 4n}{n} \; \frac{2}{n} \quad \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(\quad 8i \quad 8n) \quad \frac{4(n \quad 1)}{n}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx \quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4(n \quad 1)}{n}\right] \quad 4$$

c) $\int_0^2 (\quad 2x \quad 4)\,dx \quad \left. x^2 \quad 4x\right]_0^2 \quad (\quad 2^2 \quad 4\cdot 2) \quad 0 \quad 4$

22. Página 220



a) Área $\frac{b \quad h}{2} \quad \frac{3\cdot 9}{2} \quad \frac{27}{2} \quad 13{,}5$

b) Área $= \int_0^3 (3 - x)\,dx - \int_0^3 (2x - 6)\,dx = \left. 3x - \frac{x^2}{2}\right|_0^3 - \left. x^2 - 6x\right|_0^3 = 9 - \frac{9}{2} - 9 - 18 = \frac{27}{2} = 13{,}5$

23. Página 221

a) $\text{Área} = \int_{-1}^{2} (4 - x^2)\,dx - \int_{2}^{3} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} - \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{2}^{3} = 9 - \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{27}{3} - \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$

b) $\text{Área} = -\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 8)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x\right]_{-1}^{3} = -\left|9 - 9 - 24 - \frac{1}{3} - 1 - 8\right| = \frac{92}{3} = 30,6$

24. Página 221

a) $\text{Área} = \int_{-2}^{0} (3x^2 - 5x)\,dx - \int_{0}^{1} (3x^2 - 5x)\,dx = \left[x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_{-2}^{0} - \left|x^3 - \frac{5}{2}x^2\right|_{0}^{1} = 8 - 10 - 1 + \frac{5}{2} = \frac{39}{2}$

b) $\text{Área} \quad \int_{-2}^{-1} (2x^3 \quad x^2 \quad x)\,dx \quad \int_{-1}^{0} (2x^3 \mid x^2 \quad x)\,dx \quad \int_{0}^{\frac{1}{2}} (2x^3 \quad x^2 \quad x)\,dx \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x^3 \quad x^2 \quad x)\,dx$

$\int_{-2}^{-1} (2x^3 - x^2 - x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left[8 - \frac{8}{3} - 2\right] = -\frac{1}{3} - 8 + \frac{8}{3} + 2 = -\frac{11}{3}$

$\int_{-1}^{0} (2x^3 - x^2 - x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = -\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{3}$

$\int_{0}^{\frac{1}{2}} (2x^3 - x^2 - x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{32} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{5}{96}$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x^3 - x^2 - x)\,dx - \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{37}{96}$

$\text{Área} \quad \frac{11}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{96} \mid \frac{37}{96} \quad \frac{71}{16}$

25. Página 222

Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$f(x) \quad g(x) \quad 0 \cdot 5x \mid 3x^2 \quad x^2 \quad x \quad 6 \quad 0 \cdot 2x^2 \quad 4x \quad 6 \quad 0 \cdot \begin{cases} x \quad 3 \\ x \quad 1 \end{cases}$

$\text{Área} = \left|\int_{-3}^{1} (2x^2 - 4x - 6)\,dx\right| = \left|\left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right]_{-3}^{1}\right| = \left|\frac{2}{3} - 2 - 6 - 18 - 18 - 18\right| = \frac{64}{3}$

26. Página 222

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$f(x) \quad g(x) \quad 0 \cdot (6x \quad x^2) \quad (x^2 \quad 2x) \quad 0 \cdot \quad 2x^2 \quad 8x \quad 0 \cdot \begin{cases} x \quad 0 \\ x \quad 4 \end{cases}$

$\text{Área} = \left|\int_{0}^{4} (8x - 2x^2)\,dx\right| = \left|\left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_{0}^{4}\right| = \frac{64}{3}$

27. Página 223

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow (x^3 - x) - 3x = 0 \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx\right| - \left|\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2}\right| = |-4 + 8| - |4 - 8| = 4 - 4 = 8$$

28. Página 223

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow (x^3 - 2x) - -x^2 = 0 \rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx\right| - \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{0}^{1}\right| = \frac{8}{3} + \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{37}{12}$$

SABER HACER

29. Página 224

$$f(x) \quad \int \frac{2x}{x^2 \quad 1} dx \quad \ln|x^2 \;\shortmid\; 1| \quad k \qquad f(0) = 1 \rightarrow \ln|1| - k = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow f(x) = \ln|x^2 - 1| - 1$$

30. Página 224

$$F(x) \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{1 \quad x^3}} dx \quad \frac{2}{3}\sqrt{1 \quad x^3} \quad k \qquad F(0) \quad 0 \;\cdot\; \frac{2}{3} \quad k \quad 0 \;\cdot k \quad \frac{2}{3} \;\cdot F(x) \quad \frac{2}{3}\sqrt{1 \quad x^3} \quad \frac{2}{3}$$

31. Página 224

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - (2x+1)^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4 - (2x+1)^2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x-1}{2}\right)^2}} dx = \frac{1}{2} arc\,sen\left(\frac{2x-1}{2}\right) - k$$

32. Página 224

$$\int \frac{x^3 \quad 2x^2 \quad 1}{x} dx \quad \int \frac{x^3}{x} dx \quad \int \frac{2x^2}{x} dx \quad \int \frac{1}{x} dx \quad \int x^2\, dx \quad \int 2x\, dx \quad \int \frac{1}{x} dx \quad \frac{x^3}{3} \quad x^2 \;\shortmid\; \ln|x| \quad k$$

33. Página 225

$$f(x) \quad \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{1} |x|\, dx = \int_{-2}^{0} (-x)\, dx - \int_{0}^{1} x\, dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

34. Página 225

$$\int_0^2 (3kx^2 \quad 1)\,dx \quad [kx^3 \quad x]_0^2 \quad 8k \quad 2 \quad 2 \to k \quad \frac{1}{2}$$

35. Página 225

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje *X*.

$-x^2-4=0 \to x = \quad 2 \to$ *A* debe estar en el intervalo [–2, 2].

$$\text{Área} = \left|\int_a^2 (-x^2-4)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_a^2\right| = \left|-\frac{8}{3}-8-\frac{a^3}{3}-4a\right| = \left|\frac{a^3}{3}-4a-\frac{16}{3}\right|$$

$$\text{Área} = 9 \to \left|\frac{a^3}{3}-4a-\frac{16}{3}\right| = 9 \to \begin{cases} -\dfrac{a^3}{3}-4a-\dfrac{16}{3} = 9 \to -a^3+12a-43=0 \\ \dfrac{a^3}{3}-4a-\dfrac{16}{3} = 9 \to a^3-12a-11=0 \end{cases}$$

La primera ecuación es en el caso de que *f*(*x*) sea menor que 0, algo que, de momento, no nos interesa ya que es positiva en el intervalo [–2, 2].

Resolvemos la segunda ecuación por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -12 & -11 \\ -1 & & -1 & 1 & 11 \\ \hline & 1 & -1 & -11 & \boxed{0} \end{array} \to a^3-12a-11 = (a-1)(a^2-a-11) = 0 \to a = -1$$

$$a^2-a-11=0 \to a = \frac{1 \pm \sqrt{1^2+4\cdot 11}}{2} = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2} \to \begin{cases} a \quad 3{,}85 \quad 2 \\ a \quad -2{,}85 \quad -2 \end{cases}$$

El valor de *a* buscado es –1.

36. Página 226

Calculamos los puntos de corte con el eje de abscisas: $4x-12=0 \to x=-3$

Calculamos los puntos de corte en el intervalo de integración:

$$x^2 \quad 4x \quad 3 \quad 0 \quad \begin{cases} x \quad 1 \\ x \quad 3 \end{cases}$$

$$\text{Área} \quad \left|\int_{-2}^{-1}(4x + 12)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{1}(x^2 \quad 4x \quad 3)\,dx\right| \quad \left|\int_{1}^{3}(x^2 \quad 4x \quad 3)\,dx\right| \quad \left|\int_{3}^{4}(x^2 \quad 4x \quad 3)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[2x^2-12x\right]_{-2}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_{-1}^{1}\right| - \left|\left[\frac{x^3}{3}-2x^2-3x\right]_{1}^{3}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_{3}^{4}\right| = 6-\frac{20}{3}-\frac{4}{3}-\frac{4}{3} = \frac{46}{3}$$

37. Página 226

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje *X*.

$$x^3-9x=0 \to \begin{cases} x=-3 \\ x=0 \\ x=3 \end{cases} \qquad \int (x^3 \quad 9x)\,dx \quad \frac{1}{4}x^4 \quad \frac{9}{2}x^2$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-3}^{0}(x^3-9x)\,dx\right| - \left|\int_{0}^{3}(x^3-9x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0}\right| - \left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{3}\right| = \frac{81}{4}+\frac{81}{4} = \frac{81}{2} = 40{,}5$$

38. Página 226

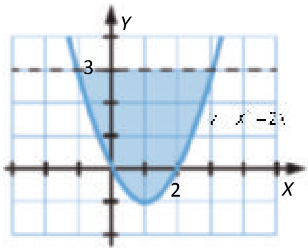
Hallamos los puntos de corte de la función con el eje *X*.

$(x-3)^2 = 0 — x = 3$

$$\text{Área} = \left|\int_0^3 (x-3)^2\,dx\right| = \left|\int_0^3 x^2 - 6x - 9\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 9x\right]_0^3\right| = |9 - 27 + 27| = 9\ \text{m}^2$$

Si para cada metro cuadrado se necesitan 12 litros de agua, en total se necesitarán $12 \cdot 9 = 108$ litros.

39. Página 227



Calculamos los puntos de corte de la función con el eje *X*.

$$x^2 \quad 2x \quad 0 \quad \begin{cases} x & 0 \\ x & 2 \end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$x^2 \quad 2x \quad 3 \quad \begin{cases} x & 1 \\ x & 3 \end{cases}$$

$$\text{Área}_1 = \left|\int_{-1}^3 (3 - x^2 - 2x)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{-1}^3\right| = \frac{32}{3}$$

$$\text{Área}_2 = \left|\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2\right| = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área} \quad \text{Área}_1 \quad \text{Área}_2 \quad \frac{32}{3} \quad \frac{4}{3} \quad 12$$

40. Página 227

$$f(x) = \frac{|x|}{2} = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

Si $x < 0$, $\frac{x}{2} \quad \frac{1}{1 \quad x^2} \cdot x \quad 1$

Si $x \geq 0$, $\frac{x}{2} \quad \frac{1}{1 \quad x^2} \cdot x \quad 1$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^0 \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{2}\right) dx\right| - \left|\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{2}\right) dx\right| = \left|\left[\text{arc tg } x - \frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^0\right| + \left|\left[\text{arc tg } x - \frac{1}{4}x^2\right]_0^1\right| =$$

$$\left|\text{arc tg } 0 \quad \text{arc tg} \quad 1 \quad \frac{1}{4}\right| \left|\text{arc tg } 1 \quad \frac{1}{4} \quad \text{arc tg } 0\right| \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{1}{2}$$

ACTIVIDADES FINALES

41. Página 228

a) $F(x) = 3x^5 - 2x - 1 — F'(x) = 15x^4 - 2 — F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

b) $F(x) = (x^5 - 2)^3 \rightarrow F'(x) = 15x^4(x^5 - 2)^2 — F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

c) $F(x) \quad \frac{2 \quad x}{x^3} \quad 7 \cdot F'(x) \quad \frac{2x \quad 6}{x^4} \cdot F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

d) $F(x) \quad \frac{x \quad 1}{x^2} \quad 3 \quad F'(x) \quad \frac{x \mid 2}{x^3} \cdot F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

e) $F(x) \quad \ln\sqrt{x^2 \quad 2x} \cdot F'(x) \quad \frac{x \quad 1}{x^2 \quad 2x} \quad F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

f) $F(x) \quad 5e^{-x^2} \quad 11 \cdot F'(x) \quad 10xe^{-x^2} \cdot F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

g) $F(x) = arc\,tg\sqrt{x} — F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 - x)} — F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

h) $F(x) - cos^2 x - 1492 \rightarrow F'(x) - 2sen\,x\,cos\,x - -sen\,2x \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

42. Página 228

a) $f(x) = 3x^2 — F(x) = x^3 - k$ $\qquad F(0) = 1 \rightarrow k = 1 — F(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) \quad \frac{4}{5x} \cdot F(x) \quad \frac{4}{5}\ln|x| \quad k$ $\qquad F(1) \quad 4 \cdot k \quad 4 \cdot F(x) \quad \frac{4}{5}\ln|x| \mid 4$

c) $f(x) \quad sen\,3x \quad F(x) \quad \frac{1}{3}cos\,3x \mid k$ $\qquad F(\pi) \quad \frac{1}{3} \cdot k \quad \frac{2}{3} \cdot F(x) \quad \frac{1}{3}cos\,3x \quad \frac{2}{3}$

d) $f(x) \quad e^{2x} \cdot F(x) \quad \frac{e^{2x}}{2} \mid k$ $\qquad F(0) \quad \frac{2}{3} \quad k \quad \frac{1}{6} \cdot F(x) \quad \frac{e^{2x}}{2} \quad \frac{1}{6}$

e) $f(x) \quad \frac{3}{4}(x^2 \quad 1) \cdot F(x) \quad \frac{x^3}{4} \quad \frac{3x}{4} \mid k$ $\qquad F(1) \quad \frac{1}{4} \cdot k \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4}$

43. Página 228

a) $F(x) = 1001x + k \rightarrow F'(x) = 1001$

b) $F(x) = x^2 - k \rightarrow F'(x) = 2x$

c) $F(x) \quad \frac{x^2}{2} \mid k \cdot F'(x) \quad x$

d) $F(x) = x^3 + k \rightarrow F'(x) = 3x^2$

e) $F(x) \quad \frac{x^3}{3} \mid k \quad F'(x) \quad x^2$

f) $F(x) = x^4 + k \rightarrow F'(x) = 4x^3$

g) $F(x) = x^{n+1} - k \rightarrow F'(x) = (n+1)x^n$

h) $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n-1} - k \rightarrow F'(x) = x^n$

44. Página 228

a) $F(x) \quad \sqrt{x} \quad k \cdot F'(x) \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $F(x) \quad 2\sqrt{x} \quad k \quad F'(x) \quad \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $F(x) = 2\sqrt{x-1} + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

d) $F(x) \quad 2\sqrt{x \quad 4} \mid k \cdot F'(x) \quad \frac{1}{\sqrt{x \quad 4}}$

e) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+10} + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-10}}$

f) $F(x) = arc\,sen\,x - k — F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

45. Página 228

a) $F(x)\quad 19\ln|x|\quad k\ \cdot F'(x)\quad \frac{19}{x}$

b) $F(x)\quad \frac{\ln|x|}{19}\quad k\ \cdot F'(x)\quad \frac{1}{19x}$

c) $F(x)\quad \ln|19\quad x|\quad k\ \cdot F'(x)\quad \frac{1}{19\quad x}$

d) $F(x)\quad 2\ln|2x\ \text{ı}\ 3|\quad k\ \cdot F'(x)\quad \frac{4}{2x\quad 3}$

e) $F(x)\quad \frac{1}{x}\quad k\ \cdot F'(x)\quad \frac{1}{x^2}$

f) $F(x)\quad arc\,tg\,x\quad k\quad F'(x)\quad \frac{1}{1\quad x^2}$

46. Página 228

a) $F(x)=e^x-k\rightarrow F'(x)=e^x$

b) $F(x)\quad \frac{e^{2x}}{2}\quad k\quad F'(x)\quad e^{2x}$

c) $F(x)\quad \frac{e^{5x+55}}{5}\quad k\ \cdot F'(x)\quad e^{5x+55}$

d) $F(x)\quad \frac{2^x}{\ln 2}\quad k\ \cdot F'(x)\quad 2^x$

e) $F(x)\quad \frac{2^{x-7}}{\ln 2}\ \text{ı}\ k\quad F'(x)\quad 2^{x-7}$

f) $F(x)\quad \frac{2^{9x+5}}{9\ln 2}\quad k\ \cdot F'(x)\quad 2^{9x+5}$

47. Página 228

a) $F(x)=sen\,x-k\rightarrow F'(x)=cos\,x$

b) $F(x)\quad \frac{sen\,3x}{3}\quad k\ \cdot F'(x)\quad cos\,3x$

c) $F(x)=sen(x-3)-k\rightarrow F'(x)=cos(x-3)$

d) $F(x)=-3cos\,x+k - F'(x)=3sen\,x$

e) $F(x)=-cos(x-\ )+k\rightarrow F'(x)=sen(x-\ )$

f) $F(x)=-3cos(x-\ )-k - F'(x)=3sen(x-\ )$

48. Página 228

a) Porque la derivada de una función polinómica siempre es otra función polinómica.

b) El grado de *F*(*x*) es *n* + 1, considerando que *f*(*x*) es un polinomio o que *n* sea distinto de −1.

49. Página 228

a) $\int(2x\quad 3)dx\quad x^2\quad 3x\quad k$

b) $\int(3x^2\quad 4x\quad 2)dx\quad x^3\quad 2x^2\quad 2x\ \text{ı}\ k$

c) $\int\left(\frac{3}{4}x^3\quad 3x^2\quad 6x\quad 1\right)dx\quad \frac{3}{16}x^4\quad x^3\ \text{ı}\ 3x^2\quad x\quad k$

d) $\int(x\quad 1)^3dx\quad \frac{(x\quad 1)^3}{4}\quad k$

e) $\int(x\quad 3)^2dx\quad \frac{(x\quad 3)^3}{3}\ \text{ı}\ k$

f) $\int(1\quad 2x)^2dx\quad \frac{1}{2}\int(\quad 2)\cdot(1\quad 2x)^2dx\quad \frac{1}{2}\frac{(1\quad 2x)^3}{3}\ \text{ı}\ k\quad \frac{1}{6}(1\quad 2x)^3\quad k$

g) $\int\left(\frac{x^3}{3}\quad \frac{x^2}{2}\quad x\quad 5\right)dx\quad \frac{x^4}{12}\quad \frac{x^3}{6}\ \text{ı}\ \frac{x^2}{2}\quad 5x\ \text{ı}\ k$

h) $\int(x\quad 3x\ \text{ı}\ 2)dx\quad \int(\quad 2x\quad 2)dx\quad x^2\ \text{ı}\ 2x\quad k$

50. Página 228

a) $\int 2\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + k$

b) $\int 2\sqrt{3x}\,dx = 2\sqrt{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}} - k = \frac{4}{3}\sqrt{3x^3} - k$

c) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right)dx = 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + k$

d) $\int \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}\right)dx = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + k$

e) $\int (2 - \sqrt{x})dx = 2x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$

f) $\int (2 - \sqrt{3x})dx = 2x - \frac{2}{3}\sqrt{3x^3} + k$

g) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x\right)dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{x^2}{2} + k$

h) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{2x}} - \frac{4}{\sqrt[4]{4x}}\right)dx = \sqrt{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx - 2\sqrt{2}\int x^{-\frac{1}{4}}\,dx = 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{8\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{4}} - k = 2\sqrt{2x} - \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt[4]{x^3} + k$

51. Página 228

a) $\int \frac{4}{x+2}\,dx = 4\ln|x+2| + k$

b) $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)dx = \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + k$

c) $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-4}\right)dx = 2\ln|x+3| - \ln|x-4| + k$

d) $\int \frac{1}{(x-4)^2}\,dx = -\frac{1}{x-4} + k$

e) $\int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7}{x+3}\right)dx = -\frac{1}{x-1} + 7\ln|x+3| + k$

f) $\int \left(\frac{2}{(x-3)^3} - \frac{5}{(x-3)^2}\right)dx = -\frac{1}{(x+3)^2} + \frac{5}{(x-3)} + k$

52. Página 229

a) $\int e^{x-2}\,dx = e^{x-2} + k$

b) $\int (e^x - 1)\,dx = e^x - x + k$

c) $\int (e^{2x} - 2^x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{2^x}{\ln 2} + k$

d) $\int \left(xe^{x^2} - \frac{4}{3}x^3\right)dx = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{3}x^4 + k$

e) $\int e^{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + k$

f) $\int (2e^x - 3x^2)\,dx = 2e^x - x^3 + k$

g) $\int \left(5e^{\frac{x}{2}} + 2\cdot 3^x\right)dx = 10e^{\frac{x}{2}} + 2\frac{3^x}{\ln 3} + k$

h) $\int (x2^{x^2+2x} + 2^{x^2+2x})\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+2)\cdot 2^{x^2+2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{x^2+2x}}{\ln 2} + k$

53. Página 229

a) $\int \cos(2x)\,dx \quad \frac{1}{2}\text{sen}(2x) \quad k$

b) $\int 4\,\text{sen}(x \quad \pi)\,dx \quad 4\cos(x \quad \pi) \quad k$

c) $\int 3\cos\left(\frac{\pi}{2} \quad \frac{x}{3}\right)dx \quad 9\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \quad \frac{x}{3}\right) \quad k$

d) $\int 5\,\text{sen}(2x \quad \pi)\,dx \quad \frac{5}{2}\cos(2x \quad \pi) \quad k$

e) $\int 3\sec^2\left(\frac{1}{5}x\right)dx = 15\int \frac{\frac{1}{5}dx}{\cos^2\left(\frac{1}{5}x\right)} = 15\,tg\left(\frac{1}{5}x\right) - k$

f) $\int \frac{7}{\text{sen}^2(3x)}dx \quad \frac{7}{3}\int \frac{3}{\text{sen}^2(3x)}dx \quad \frac{7}{3}\text{cotg}(3x) \quad k$

g) $\int \frac{5}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}dx = 15\int \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}dx = 15\,tg\left(\frac{x}{3}\right) - k$

h) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 3\,arc\,sen\,x - k$

i) $\int \frac{3}{x^2 \quad 1}dx \quad 3\,arc\,tg\,x \quad k$

j) $\int \frac{1}{(3x)^2 \quad 1}dx \quad \frac{1}{3}arc\,tg(3x) \quad k$

54. Página 229

a) Consideramos $\int x^2\,dx$ y comprobamos que no coincide con el producto $\int x\,dx \cdot \int x\,dx$.

$\int x^2dx \quad \frac{x^3}{3} \quad k$

$\int xdx \quad \frac{x^2}{2} \quad \int xdx \cdot \int xdx \quad \frac{x^4}{4} \quad k$

Entonces la afirmación es cierta.

b) Consideramos $\int 1dx$ y comprobamos que no coincide con $\frac{\int xdx}{\int xdx}$.

$\int 1dx \quad \int \frac{x}{x}dx \quad x \quad k$

$\int xdx = \frac{x^2}{2} - \frac{\int xdx}{\int xdx} = \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} - k = 1 - k$

Entonces la afirmación es cierta.

55. Página 229

a) $\int \frac{2x}{x^2 \quad 1}dx \quad \ln|x^2 + 1| \quad k$

b) $\int \frac{8x \quad 3}{4x^2 \quad 3x + 1}dx \quad \ln|4x^2 \quad 3x \quad 1| + k$

c) $\int \frac{6x^2 - 1}{2x^3 - x - 9}dx = \ln|2x^3 - x - 9| - k$

d) $\int \frac{senx}{cosx}dx \quad \ln|cosx| + k$

e) $\int cotgdx \quad \int \frac{cosx}{senx}dx \quad \ln|senx| + k$

f) $\int 3x^2 \, sen\, x^3\, dx \quad cos\, x^3 + k$

g) $\int (2x \quad 1)sen(x^2 + x \quad 5)dx \quad cos(x^2 + x \quad 5) \quad k$

h) $\int 6x cos(3x^2 \quad 5)dx \quad sen(3x^2 \quad 5) + k$

i) $\int \left(\frac{1}{x^2 \quad 1} \quad \frac{1}{x^2}\right)dx \quad arc\,tg\,x \quad \frac{1}{x} + k$

j) $\int 6xe^{3x^2}dx \quad e^{3x^2} \quad k$

k) $\int (3x^2 \quad 1)e^{x^3+x}dx \quad e^{x^3+x} \quad k$

l) $\int (12x^2 \quad 6x)e^{4x^3-3x^2+7}dx \quad e^{4x^3-3x^2+7} \quad k$

m) $\int xe^{7x^2}dx \quad \frac{e^{7x^2}}{14} \quad k$

n) $\int \frac{-2}{4-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = -arc\,tg\frac{x}{2} - k$

ñ) $\int \frac{-2}{\sqrt{3-x^2}}dx = \frac{-2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}dx = -2arc\,sen\frac{x}{\sqrt{3}} + k$

o) $\int x^3e^{x^2} \quad \frac{1}{2}\int te^t dt \quad \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 \quad 1) \quad k$ (con $t = x^2$ y $dt = 2xdx$)

p) $\int \frac{x \quad \ln x}{x}dx \quad \int dx + \int \frac{\ln x}{x}dx \quad x \quad \int \frac{\ln x}{x}dx \quad x \quad \frac{\ln^2 x}{2} \quad k$

q) $\int \left(\frac{1}{x^2 \quad 1} \quad \frac{2}{x^2} \quad \frac{3}{x}\right)dx \quad arc\,tg\,x \quad \frac{2}{x} \quad 3\ln|x| \quad k$

56. Página 229

a) $\int \frac{x}{x^2 \quad 3}dx \quad \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 \quad 3}dx \quad \frac{1}{2}\ln\left|x^2 \quad 3\right| + k$

b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-3}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\sqrt{t} - k = \frac{1}{2}\sqrt{x^4+3} + k$

$\boxed{t = x^4 + 3 \rightarrow dt = 4x^3\,dx \rightarrow x^3\,dx = \frac{1}{4}dt}$

c) $\int \frac{sen\,x}{1-cos\,x}dx = \ln|1-cos\,x| + k$

d) $\int \frac{3-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$\boxed{t = 1 - x^2 \rightarrow dt = -2x\,dx \rightarrow x\,dx = -\frac{1}{2}dt}$

$3\,arc\,sen\,x \quad \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt \quad 3\,arc\,sen\,x \quad \sqrt{1 \quad x^2} + k$

e) $\int \frac{2x-\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \frac{2x}{x^2}dx - \int \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx =$

$\int \frac{2x}{x^2}dx \quad \int x^{-\frac{3}{2}}dx \quad \ln\left|x^2\right| \quad \frac{2}{\sqrt{x}} \quad k$

f) $\int \frac{2cos\,x}{3-sen\,x}dx = 2\ln|3-sen\,x| - k$

g) $\int \frac{x}{x^2 \quad 2^4}dx \quad \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} \quad \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2^4| \quad k$

$\boxed{t = x^2 + 2^4 \rightarrow dt = 2x\,dx}$

h) $\int \frac{x}{\sqrt{1 \quad 3x^2}}dx \quad \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt \quad \frac{2}{6}\sqrt{t} \quad k \quad \frac{1}{3}\sqrt{1 \quad 3x^2} \quad k$

$\boxed{t = 1 + 3x^2 \rightarrow dt = 6x\,dx \rightarrow x\,dx = \frac{1}{6}dt}$

i) $\int \frac{x \quad 1}{x^2 \quad 1}dx \quad \int \frac{x}{x^2+1}dx \quad \int \frac{1}{x^2 \quad 1}dx$

$\frac{1}{2}\ln\left|x^2 \quad 1\right| \quad arc\,tg\,x \quad k$

j) $\int \frac{8}{x^2-4}dx = \int \frac{2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}dx = 4\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}dx =$

$4\,arc\,tg\left(\frac{x}{2}\right) + k$

57. Página 229

$$F(x) = \int (x-1)(x^2-2x+6)\,dx = \int (x^3-3x^2+8x-6)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + 4x^2 - 6x + k$$

$$F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 4x^2 - 6x + 1$$

58. Página 229

$$f(x) = \int \frac{a}{1-x}\,dx = -a\ln|1-x| + k$$

$f(0) = 1 \rightarrow a\ln 1 + k \rightarrow k = 1$ $\qquad f(-1) = -1 \rightarrow -a\ln 2 + 1 = -1 \rightarrow a = \frac{2}{\ln 2}$

La función es: $f(x) = -\frac{2}{\ln 2}\ln|1-x| + 1$

59. Página 229

$$F(x) = \int \frac{x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + k$$

$$F(\sqrt{2}) = 3 \rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-2| + k = 3 \rightarrow k = 3$$

La función primitiva es: $F(x) = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + 3$

60. Página 229

Sabemos que *f* pasa por el origen de coordenadas, por lo que: $f(0) = 0$.

Además, ese es un punto de inflexión, entonces: $f''(0) = 0$.

Como la pendiente de la recta tangente en (0, 0) es 5, podemos concluir que: $f'(0) = 5$.

Finalmente, tenemos:

$$f'''(x) = 24x - 6$$

$$f''(x) = \int (24x-6)\,dx = 12x^2 - 6x + k \rightarrow f''(0) = k = 0 \rightarrow f''(x) = 12x^2 - 6x$$

$$f'(x) = \int (12x^2-6x)\,dx = 4x^3 - 3x^2 + k \rightarrow f'(0) = 5 \rightarrow k = 5 \rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5$$

$$f(x) = \int (4x^3-3x^2+5)\,dx = x^4 - x^3 + 5x + k \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow k = 0 \rightarrow f(x) = x^4 - x^3 + 5x$$

61. Página 229

$$f''(x) = \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + k \rightarrow f''(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow f''(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$f'(x) = \int \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + k \rightarrow f'(0) = 5 \rightarrow k = 5 \rightarrow f'(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 5$$

$$f(x) = \int \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 5\right)dx = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 5x + k \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow k = 0 \rightarrow f(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 5x$$

62. Página 229

$$F(x) = \int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{2x - 2\cos x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{x + \cos x}dx = \frac{1}{2}\ln|x - \cos x| - k$$

$$F(0) \quad 2 \quad 0 \quad k \quad 2 \quad k \quad 2 \cdot F(x) \quad \frac{1}{2}\ln|x \mid \cos x| \quad 2$$

63. Página 229

$$f'(x) \quad \int \operatorname{sen} x\,dx \qquad \cos x \mid k$$

$$f(x) \quad \int (\cos x \mid k)dx \qquad \operatorname{sen} x \mid kx \quad l$$

$$f(0) = 1 — l = 1 \rightarrow f(x) = -\operatorname{sen} x + kx - 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \pi \cdot \quad 1 \mid \frac{\pi}{2}k \mid 1 \quad \pi \cdot k \quad 2 \cdot f(x) \qquad \operatorname{sen} x \quad 2x \mid 1$$

64. Página 229

$$f'(x) \quad \int (6x \quad 2)dx \quad 3x^2 \mid 2x \quad k$$

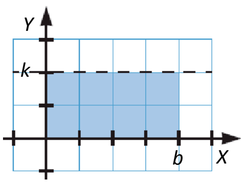
f tiene un mínimo relativo en $A(1, 3)$; por tanto, $f(1) = 3$ y $f'(1) = 0$.

$$f'(1) = 0 \rightarrow 3 + 2 + k = 0 \rightarrow k = -5 — f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

$$f(x) \quad \int (3x^2 \quad 2x \quad 5)dx \quad x^3 \mid x^2 \quad 5x \mid k \cdot f(1) \quad 3 \cdot 1 \quad 1 \quad 5 \mid k \quad 3 \cdot k \quad 6 \longrightarrow f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 6$$

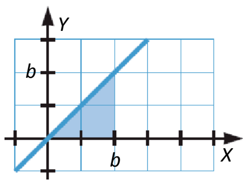
65. Página 230

a) Es el área de un rectángulo de base *b* y altura *k*.



Área $= b \cdot k$

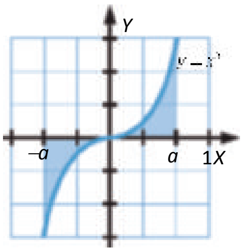
b) Es el área de un triángulo de base *b* y altura *b*.



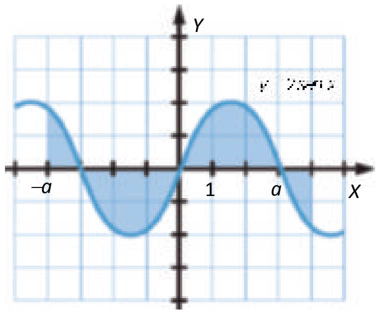
Área $\quad \frac{b \cdot b}{2}$

66. Página 230

a)



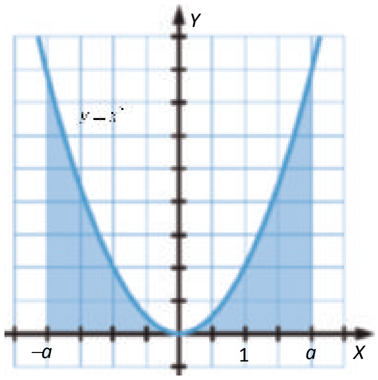
b)



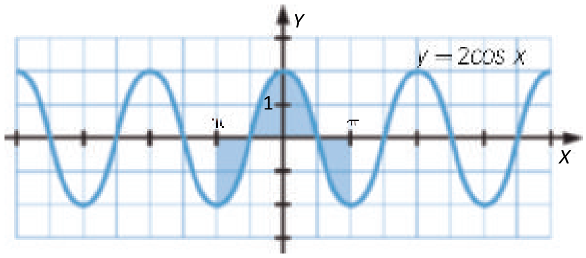
En ambos casos son funciones impares, por lo que el área de la región correspondiente al intervalo $[0, a]$ es igual que la del intervalo $[-a, 0]$ pero de signo contrario. La integral definida en un intervalo centrado en cero es nula.

67. Página 230

a) La integral de esta función no puede ser nula en ningún intervalo. Es una función par que toma siempre valores positivos.



b) La integral de esta función sí puede ser nula, pero no en todos los intervalos centrados en cero.



Vemos que, en el intervalo $(-\pi, \pi)$, la integral se anula porque el área comprendida entre la parte positiva de la función y el eje de abscisas es igual a la región comprendida entre este eje y la parte negativa. Así, tenemos que la integral es nula en todos los intervalos de la forma $(-k\pi, k\pi)$, con $k \in \mathbb{N}$.

68. Página 230

a) Geométricamente es el área de dos triángulos con misma base y altura.

$$\text{Área} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 16 \qquad \int_{-4}^{4} f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{4} x\,dx = \frac{16}{2} + \frac{16}{2} = 16$$

b) Geométricamente es el área de un trapecio de bases 6 y 2, y altura 2.

$$\text{Área} = \frac{6+2}{2} \cdot 2 = 8 \qquad \int_{-2}^{4} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x+2)\,dx + \int_{0}^{2} 2\,dx + \int_{2}^{4} (4-x)\,dx = 2 + 4 + 2 = 8$$

c) Geométricamente es la diferencia del área de dos triángulos.

$$\text{Área} = -\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{5}{2} \qquad \int_{-2}^{3} h(x)\,dx = \int_{-2}^{3} (x-1)\,dx = \int_{-2}^{1} (x-1)\,dx + \int_{1}^{3} (x-1)\,dx = -\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{5}{2}$$

69. Página 230

Buscamos la expresión algebraica de la función: $f(x) = \begin{cases} 6x + 6 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 6 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2x + 8 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Calculamos la integral.

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (6x+6)\,dx + \int_{0}^{1} 6\,dx + \int_{1}^{4} (-2x+8)\,dx = \left[3x^2 + 6x\right]_{-1}^{0} + \left[6x\right]_{0}^{1} + \left[-x^2 + 8x\right]_{1}^{4} = 3 + 6 + 9 = 18$$

70. Página 230

a) $\int_0^4 (2 - x)\,dx = \int_0^4 2\,dx - \int_0^4 x\,dx = 2\int_0^4 dx - \int_0^4 x\,dx = 2x\Big|_0^4 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8 + 8 = 16$

b) $\int_{-3}^2 x^2\,dx = \int_{-3}^0 x^2\,dx - \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^0 + \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = 9 - \frac{8}{3} = \frac{35}{3}$

c) $\int_0^2 (x^2 - 3x - 5)\,dx = \int_0^2 x^2\,dx - 3\int_0^2 x\,dx + 5\int_0^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - 3\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 5\,x\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 3 \quad 2 - 5\cdot 2 = \frac{20}{3}$

71. Página 230

$\int_{-2}^4 f(x)\,dx = \int_{-2}^0 (-2x)\,dx - \int_0^4 3x\,dx = -x^2\Big|_{-2}^0 - \frac{3x^2}{2}\Big|_0^4 = 4 - 24 = 28$

72. Página 230

$\int_{-1}^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 (-2x - 5)\,dx + \int_1^3 (x^2 + 2)\,dx = -x^2 - 5x\Big|_{-1}^1 + \frac{x^3}{3} - 2x\Big|_1^3 = -1 - 5 - 1 + 5 - 9 - 6 - \frac{1}{3} - 2 = \frac{68}{3}$

73. Página 230

$f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y $F(x) \quad \frac{1}{3} arc\ tg\ \frac{x}{3}$ es una primitiva de $f(x)$. Así, podemos aplicar la regla de Barrow:

$\int_0^2 \frac{1}{9 - x^2}\,dx = \frac{1}{3} arc\ tg\ \frac{x}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{3} arc\ tg\ \frac{2}{3}$

Geométricamente es el área de la región limitada por la curva, el eje *X* y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

74. Página 230

$f(x)$ es continua en $[0,5; 1]$. Podemos aplicar la regla de Barrow siempre que exista una primitiva de la función.
Realizamos el cambio de variable:

$t - e^x - dt - e^x\,dx \qquad\qquad x \quad 0,5; 1 \quad t \quad \sqrt{e}, e$

$\int_{0,5}^1 \frac{e^x}{e^{2x} - 1}\,dx = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{t^2 - 1}\,dt = |arc\ tg\ t|_{\sqrt{e}}^e = arc\ tg\ e - arc\ tg\ \sqrt{e}$

75. Página 230

a) $\int_1^5 (2 \quad 4x^3)\,dx \quad 2x \quad x^4\Big|_1^5 \quad 635 \quad 3 \quad 632$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\ 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\int_1^9 (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})\,dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^9 = \left(\frac{27}{4}\sqrt[3]{9} - 18\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{27}{4}\sqrt[3]{9} - \frac{199}{12}$

d) $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx \quad e^{x^2}\Big|_0^1 \quad e \quad 1$

e) $\int_0^1 (2e^x - 4x^2)\,dx = \left. 2e^x - \frac{4}{3}x^3 \right|_0^1 = 2e - \frac{4}{3} - 2 = 2e - \frac{10}{3}$

f) $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx \quad 6\sqrt{x}\,\Big|_1^4 \quad (12 \quad 6) \quad 6$

76. Página 230

a) $\int_2^3 \left(2^x - \sqrt{2x}\right) dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{3}\sqrt{2x^3}\right]_2^3 = \left(\frac{2^3}{\ln 2} + \frac{2}{3}\sqrt{2\cdot 3^3}\right) - \left(\frac{2^2}{\ln 2} + \frac{2}{3}\sqrt{2\cdot 2^3}\right) = \frac{4}{\ln 2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

b) $\int_2^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{x}\right]_2^4 = \left(\ln 4 - \frac{1}{4}\right) - \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{4}$

c) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \,sen\, x^2\,dx = -\left.\frac{\cos x^2}{2}\right|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 1\right|$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\; x\,dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| + \ln|\cos 0| = -\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$

77. Página 230

a) $\int_1^3 \frac{3}{x \quad 2}\,dx \quad 3\ln|x \quad 2|\Big|_1^3 \quad 3\ln 5 \quad 3\ln 3 \quad 3\ln\frac{5}{3}$

b) $\int_0^3 \frac{2x}{x^2 \quad 1}\,dx \quad \ln|x^2 \quad 1|\Big|_0^3 \quad \ln 10 \quad \ln 1 \quad \ln 10$

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 \quad 1}\,dx \quad arc\; tg\; x\,\Big|_0^1 \quad \frac{\pi}{4} \quad 0 \quad \frac{\pi}{4}$

d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 \quad 2}\,dx \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\; tg\,\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\; tg\,\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\; tg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \sqrt{2}\,arc\; tg\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

78. Página 230

a) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$t = x^2 - 1 \rightarrow dt = 2x\,dx \qquad\qquad x = 0, 1 \rightarrow t = 1, 2$

$\int_0^1 x\sqrt{x^2 \quad 1}\,dx \quad \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt \quad \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^2 \quad \frac{1}{3}(\sqrt{8} \quad 1)$

b) $\int_0^7 (x-1)^{\frac{1}{3}}\,dx = \left.\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}\right|_0^7 = \frac{3}{4}(16-1) = \frac{45}{4}$

c) $\int_0^1 \frac{3}{x^2 \quad 1}\,dx \quad 3\;arc\; tg\; x\,\Big|_0^1 \quad 3(arc\; tg\; 1 \quad arc\; tg\; 0) \quad \frac{3\pi}{4}$

d) $\int_0^\pi 3\,sen\; x\,\cos\, x\,dx \quad \frac{3}{2}\int_0^\pi sen\; 2x\,dx \quad \frac{3}{4}\cos 2x\,\Big|_0^\pi \quad \frac{3}{4}(1 \quad 1) \quad 0$

79. Página 230

a) $\int_0^b (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} = 0 \rightarrow \frac{b^2}{6}(3+2b) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$

b) $\int_{-2}^{2} 4 - bx \quad dx = \frac{bx^2}{2} + 4x \Big]_{-2}^{2} = 2b + 8 - 2b - 8 = 16 \neq 2 \rightarrow$ No hay ningún valor de b que lo cumpla.

80. Página 230

Como ambas funciones son continuas, tenemos que:

$$\int_1^3 g(x)\,dx \quad \int_1^2 g(x)\,dx \;\; \int_2^3 g(x)\,dx$$

Hallamos el valor de cada uno de los sumandos.

$$\int_1^2 2f(x)\,dx \quad 3 \quad 2\int_1^2 f(x)\,dx \quad 3 \quad \int_1^2 f(x)\,dx \quad \frac{3}{2}$$

$$\int_2^3 f(x)\,dx \quad \int_1^3 f(x)\,dx \quad \int_1^2 f(x)\,dx \quad 3 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \int_2^3 f(x)\,dx \quad \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 f(x) \quad g(x) \;\; dx \quad 3 \quad \int_1^2 f(x)\,dx \;\; \int_1^2 g(x)\,dx \quad 3 \quad \frac{3}{2} \quad \int_1^2 g(x)\,dx \quad 3 \quad \int_1^2 g(x)\,dx \quad \frac{3}{2}$$

$$3\int_2^3 f(x) \quad g(x) \;\; dx \quad 3 \quad 3\int_2^3 f(x)\,dx \quad 3\int_2^3 g(x)\,dx \quad 3 \quad \int_2^3 f(x)\,dx \quad \int_2^3 g(x)\,dx \quad 1 \quad \int_2^3 g(x)\,dx \quad \frac{3}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2}$$

$$\int_1^3 g(x)\,dx \quad \int_1^2 g(x)\,dx \quad \int_2^3 g(x)\,dx \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 2$$

81. Página 231

a) $\int_0^2 (e^x \quad 3e^{-x})\,dx \quad e^x \quad 3e^{-x}\Big]_0^2 \quad e^2 \quad 3e^{-2} \quad 1 \quad 3 \quad \frac{e^4 \quad 2e^2 \quad 3}{e^2}$

b) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$t \quad \sqrt{x} \quad dt \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}x\,dx \qquad\qquad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow t \in \left[\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (1 - tg^2 t)\,dt = 2\int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (\sec^2 t)\,dt = 2 \;\; tg\; t \Big]_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 2\,tg\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) - 2\,tg\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)$$

c) $$\int_0^2 \frac{1}{3x^2 - 4}\,dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{3}}{x^2 - \frac{4}{3}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{4}{3}\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\frac{3}{4}x^2 - 1}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^2 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,arc\;tg\,\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big]_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,arc\;tg\,\sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

d) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2 \quad 4x \quad 5}\,dx \quad \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x \quad 2)^2 \;\; 1}\,dx \quad arc\;tg\,(x \;\; 2)\Big]_{-2}^{-1} \quad arc\;tg\,1 \quad arc\;tg\,0 \quad \frac{\pi}{4}$

82. Página 231

$$\int_{-1}^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 2x - 1 \;\; dx - \int_0^2 2^x\,dx - \int_2^3 \frac{-4x}{x - 4}\,dx = x^2 + x\Big]_{-1}^0 - \frac{2^x}{\ln 2}\Big]_0^2 - 4\int_2^3 \left(\frac{4}{x - 4} - 1\right)dx =$$

$$= -2 - \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + 4\;\; 4\ln|x - 4| - x\Big]_2^3 = -2 + \frac{3}{\ln 2} - 12 - 16\ln 2 - 8 = \frac{3}{\ln 2} - 16\ln 2 - 6$$

83. Página 231

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} (x^2 + 2a\cos x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (ax^2 - b)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2a\,\text{sen}\,x\right]_0^{\pi} - \left[\frac{ax^3}{3} - bx\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$\frac{\pi^3}{3} \quad \frac{8a\pi^3}{3} \quad \frac{a\pi^3}{3} \quad 2b\pi \quad b\pi \quad \frac{\pi^3(7a \quad 1)}{3} \quad b\pi$$

84. Página 231

a) $\int_0^3 (3x^2 \quad 2x \quad a)\,dx \quad x^3 + x^2 \quad ax\Big|_0^3 \quad 27 + 9 \quad 3a \quad 12 \to a \quad 8$

b) $\int_2^6 \frac{a}{x}\,dx = a\ln|x|\,\Big|_2^6 = a\ln 6 - a\ln 2 = a\ln 3 \to a\ln 3 = 1 - \ln 3 \to a = \frac{1}{\ln 3} - 1$

85. Página 231

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{e^x}{(1-e^x)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^a = -\frac{1}{1+e^a} - \frac{1}{1-1} = -\frac{1}{1+e^a} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \to -\frac{1}{1-e^a} = -\frac{1}{4} \to e^a = 3 \to a = \ln 3$$

86. Página 231

Si la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ es –12 $\to f'(3) = -12$.

$f'(x) = 2ax \to f'(3) = 6a \to -12 = 6a \to a = -2$

Luego la función es: $f(x) = -2x^2 + b$

$$6 = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 (-2x^2 - b)\,dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + bx\right]_0^6 = -144 + 6b \to b = 25 \to f(x) = -2x^2 + 25$$

87. Página 231

$p'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$

$p''(x) = 6ax + 2b$

Pasa por el punto $(0, 1) \to p(0) - 1 \to d - 1$.

El punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión $\to p''(0) = 0 \to 2b = 0 \to b = 0$.

Tiene un máximo en $x = 1 \to p'(1) = 0 \to 3a - c = 0$.

$$\frac{5}{4} = \int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 (ax^3 - cx + 1)\,dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{cx^2}{2} - x\right]_0^1 = \frac{a}{4} - \frac{c}{2} - 1 \to a + 2c = 1$$

$$\left.\begin{matrix} 3a & c & 0 \\ a & 2c & 1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{c=-3a} a \quad 6a \quad 1 \to a \quad \frac{1}{5} \to c \quad \frac{3}{5}$$

Luego, el polinomio es: $p(x) \quad \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x \quad 1$

88. Página 231

Hallamos las raíces por el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -4 & 8 \\ -2 & & -2 & 8 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \lfloor 0 \end{array} \rightarrow f(x) = (x-2)(x^2-4x+4) = (x-2)(x-2)^2$$

$$f(x) \quad 0 \quad \begin{cases} x & 2 \\ x & 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-3}^{-2}(x^3-2x^2-4x-8)\,dx\right| - \left|\int_{-2}^{2}(x^3-2x^2-4x-8)\,dx\right| = \left|\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-2x^2+8x\right|_{-3}^{-2} - \left|\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-2x^2+8x\right|_{-2}^{2} =$$

$$\left|\frac{44}{3}+\frac{15}{4}\right| + \left|\frac{20}{3}+\frac{44}{3}\right| \quad \frac{131}{12} \quad \frac{64}{3} \quad \frac{387}{12} \quad \frac{129}{4}$$

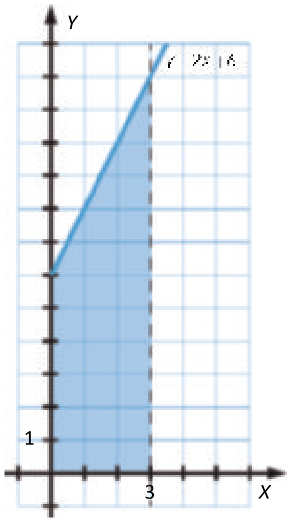
89. Página 231

Calculamos los puntos de intersección:

$$\left.\begin{array}{l} y \quad 2x + 6 \\ x \quad 0 \end{array}\right\} \quad y \quad 6 \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} y \quad 2x + 6 \\ x \quad 3 \end{array}\right\} \quad y \quad 12$$

$$\int_0^3 (2x \quad 6)\,dx \quad \left[x^2 \quad 6x\right]_0^3 \quad 9 + 18 \quad 27$$

$$\text{Área} \quad \frac{12 \quad 6 \quad 3}{2} \quad 27$$



90. Página 231

a) $x^2 \quad 4 \quad 0 \quad \begin{cases} x & 2 \\ x & 2 \end{cases}$ $\qquad \text{Área} = \left|\int_{-2}^{2}(-x^2-4)\,dx\right| = \left|-\frac{x^3}{3}-4x\right|_{-2}^{2} = \left|-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8\right| = \frac{32}{3}$

b) $x^3-4x=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$ $\qquad \text{Área} = \left|\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx\right| = \left|\frac{x^4}{4}-2x^2\right|_{-2}^{0} + \left|\frac{x^4}{4}-2x^2\right|_{0}^{2} = 4-4=8$

c) $-x^3-9x=0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=0 \\ x=3 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_{-3}^{0}(-x^3-9x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{3}(-x^3-9x)\,dx\right| = \left|-\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\right|_{-3}^{0} - \left|-\frac{x^4}{4}+\frac{9x^2}{2}\right|_{0}^{3} = \frac{81}{4}-\frac{81}{4}=\frac{81}{2}$$

d) $x^2 \quad 9 \quad 0 \quad \begin{cases} x & 3 \\ x & 3 \end{cases}$ $\qquad \text{Área} = \left|\int_{-3}^{3}(x^2-9)\,dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}-9x\right|_{-3}^{3} = |9-27-9-27| = 36$

e) $x^3 \quad x^2 \quad 0 \quad \begin{cases} x & 0 \\ x & 1 \end{cases}$ $\qquad \text{Área} = \left|\int_{0}^{1}(x^3-x^2)\,dx\right| = \left|\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{1} = \left|\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{12}$

f) $-x^3 - x^2 - 2x = 0 - \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0}(-x^3 - x^2 + 2x)\,dx\right| - \left|\int_{0}^{2}(-x^3 - x^2 - 2x)\,dx\right| = \left|-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right|_{-1}^{0} - \left|-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right|_{0}^{2} =$$

$$\left|\frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad 1\right| \quad \left| 4 \quad \frac{8}{3} \quad 4\right| \quad \frac{5}{12} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{37}{12}$$

91. Página 231

$f(x) = 0 - x = 3$

$$\text{Área} = \left|\int_{3}^{4}\sqrt{x-3}\,dx\right| = \left|\frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}\right|_{3}^{4} = \left|\frac{2}{3} - 0\right| = \frac{2}{3}$$

92. Página 231

$f(x) = 0 - x = 2$ $\qquad$ $f(x) = 2 \rightarrow x = 0$

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{2}\sqrt{4-2x} - 2\,dx\right| = \left|-\frac{1}{3}\sqrt{(4-2x)^3} - 2x\right|_{0}^{2} = \left|-4 - \frac{8}{3}\right| = \frac{4}{3}$$

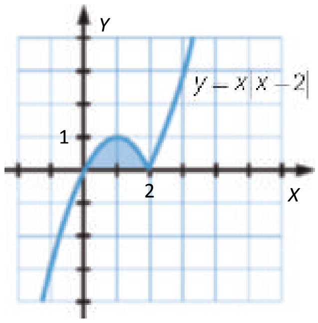
93. Página 231

$f(x) \quad 0 \quad x \quad \frac{2\pi}{3}$

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{1}{2} + \cos x\right)dx\right| - \left|\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x\right]_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\right| - \left|\left[\frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\right| = \left|\frac{}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| - \left|\frac{}{2} - \frac{}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{}{6} - \sqrt{3}$$

94. Página 231

a)



b) $\begin{matrix} y & 0 \\ y & x\,|\,x \quad 2\,| \end{matrix} \quad x\,|\,x \quad 2\,| \quad 0 \quad \begin{cases} x & 0 \\ x & 2 \end{cases}$

Escribimos la función definida a trozos: $f(x) = x\,|\,x - 2\,| = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \int_{0}^{2}(-x^2 + 2x)\,dx = \left.\frac{-x^3}{3} - x^2\right|_{0}^{2} = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

95. Página 231

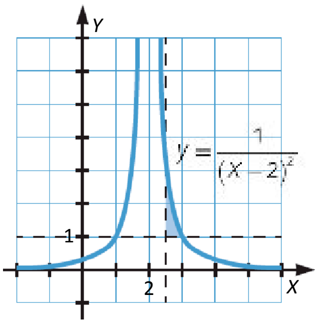
$x^2 \quad 4 \quad 0 \cdot x \quad 2 \quad 1, 3$

Escribimos la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{2} (4 - x^2)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{3} (x^2 - 4)\,dx\right| = \left|\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{2}^{3}\right| = \left|\frac{16}{3} - \frac{11}{3}\right| + \left|-3 - \frac{16}{3}\right| = \frac{27}{3} - \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$$

96. Página 231

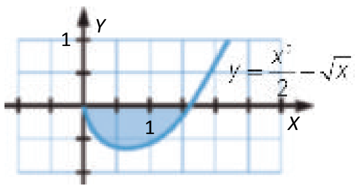
$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $f(x) = 1 \to \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$



$$\text{Área} = \left|\int_{\frac{5}{2}}^{3} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1\right) dx\right| = \left|\left[\frac{-1}{x-2} - x\right]_{\frac{5}{2}}^{3}\right| = \left|-1 - 3 + 2 - \frac{5}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

97. Página 231

a)

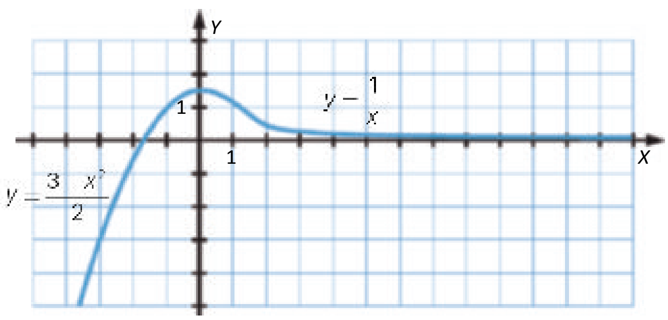


b) $f(x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{4} \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{\sqrt[3]{4}} \left(\frac{x^2}{2} - \sqrt{x}\right) dx\right| = \left|\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_{0}^{\sqrt[3]{4}}\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{4}{3} - 0\right| = \frac{2}{3}$$

98. Página 231

a)

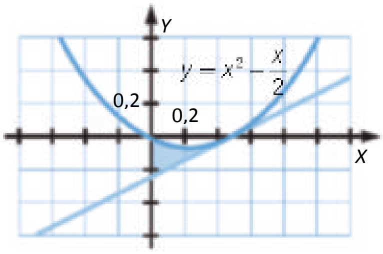


b) $f(x) - 0 \rightarrow x - -\sqrt{3}$

$$\text{Área} = \left|\int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{3 - x^2}{2}\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2} \frac{1}{x}\,dx\right| = \left|\frac{3}{2}x - \frac{x^3}{6}\right|_{-\sqrt{3}}^{1} + \left|\ln x\right|_{1}^{2} = \left|\frac{3}{2} - \frac{1}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| - \ln 2 = \frac{4}{3} - \sqrt{3} + \ln 2$$

99. Página 231

Calculamos la recta tangente:



$$f'(x) \quad 2x \quad \frac{1}{2} \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right) \quad \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \quad 0$$

$$y \quad \frac{1}{2}x \quad n \quad 0 \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \quad n \quad n \quad \frac{1}{4} \quad y \quad \frac{1}{2}x \quad \frac{1}{4}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - x^2 - \frac{x}{2}\right)dx\right| = \left|\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{4} - x^2\right)dx\right| = \left|\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{x^3}{3}\right|_{0}^{\frac{1}{2}} = \left|-\frac{1}{24}\right| = \frac{1}{24}$$

100. Página 232

$f(2) = 1 \rightarrow 8a - 4b + 2c - d = 1$

$f(0) = 0 \rightarrow d = 0$

$f'(x) = 3ax^2 - 2bx - c \rightarrow f'(2) = 12a - 4b - c = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b \rightarrow f''(2) = 12a + 2b = 0$

Entonces: $a \quad \frac{1}{8}$, $b \quad \frac{3}{4}$, $c \quad \frac{3}{2}$ y $d = 0$.

Por lo tanto: $y \quad \frac{1}{8}x^3 \quad \frac{3}{4}x^2 \quad \frac{3}{2}x$ Segmento: $y \quad \frac{1}{2}x$

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x\right)dx\right| = \left|\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x\right)dx\right| = \left|\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right|_{0}^{2} = \left|\frac{1}{2} - 2 - 2\right| = \frac{1}{2}$$

101. Página 232

Calculamos la recta tangente:

$f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow f'(-1) = 7$ $\qquad f(-1) = -3$ $\qquad y = 7x - n \rightarrow -3 = -7 + n \rightarrow n = 4 \rightarrow y = 7x - 4$

Hallamos los puntos de corte:

$$x^3 \quad 2x^2 \quad 7x \mid 4 \quad x^3 \quad 2x^2 \quad 7x \quad 4 \quad 0 \quad \begin{cases} x & 1 \\ x & 4 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{4}(7x - 4 - x^3 + 2x^2)\,dx\right| = \left|-\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} - 4x\right|_{-1}^{4} = \left|-64 - \frac{128}{3} + 56 + 16 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{7}{2} - 4\right| = \frac{625}{12}$$

102. Página 232

La función es derivable en 0; por tanto, será continua en este punto. Así, tenemos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \lim_{x\to 0} e^{ax} = \lim_{x\to 0} (a \quad b\ sen\ x) \quad \cdot 1 = a$$

Además, por ser *f* derivable en 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \to \lim_{x\to 0} e^{x} = \lim_{x\to 0} b \cos x \to 1 = b$$

Definimos la función: $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - sen\ x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{0} e^{x}\, dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + sen\ x)\, dx\right| = \left|\left[e^{x}\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[x - \cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right| = \left|1 - e^{-2}\right| + \left|\frac{\pi}{2} - 1\right| = 2 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e^{2}}$$

103. Página 232

a) $x + 1$ y 2^{x} son continuas en los intervalos en los que están definidas, por lo que basta con estudiar lo que ocurre en los extremos de los intervalos.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (x - 1) = 1 \\ f(0) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} 2^{x} = 1 \end{array}\right\} \to f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to f(x)$$ es continua en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} 2^{x} = 4 \\ f(2) = -1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x-4} = -1 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \to f(x)$$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

La expresión $\frac{2}{x - 4}$ no es continua cuando el denominador se anula.

$$x - 4 = 0 \to x = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{2}{x-4} = -\infty \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{2}{x-4} = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim_{x\to 4^+} f(x) \to f(x)$$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 4$.

b) $f(x) = \frac{2}{x - 4} \quad \forall x > 2 \to f(3) = -2$

$f'(x) = \frac{-2}{(x - 4)^{2}} \quad \forall x > 2 \to f'(3) = -2$

$y = -x - n \to -2 = -1 \cdot 3 + n \to n = 1$

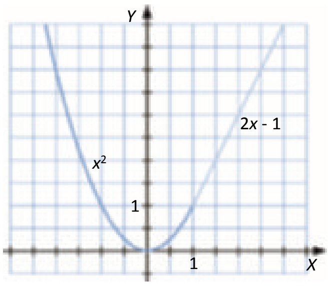
La recta tangente en $x = 3$ es $y = -x + 1$.

c) $$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (x - 1)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{2} 2^{x}\, dx\right| + \left|\int_{2}^{3} \frac{2}{x - 4}\, dx\right| = \left|\left[\frac{x^{2}}{2} - x\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{2^{x}}{\ln 2}\right]_{0}^{2}\right| + \left|\left[2\ln|x - 4|\right]_{2}^{3}\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{2} - 1\right| + \left|\frac{3}{\ln 2}\right| + \left|2 \cdot 0 - 2\ln 2\right| = \frac{1}{2} + \frac{3}{\ln 2} + 2\ln 2$$

104. Página 232

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1 \\ f(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (2x-1) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ La función es continua en cualquier intervalo.

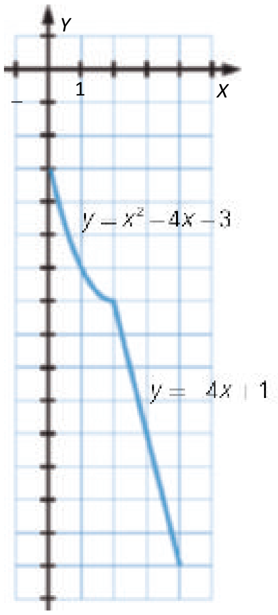


b) $x^2 = 2x - 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 x^2\,dx\right| + \left|\int_1^2 2x - 1\,dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \left|x^2 - x\right|_1^2 = 1 + 2 = 3$$

105. Página 232

a)



b) $\text{Área} = \left|\int_0^2 (x^2 - 4x - 3)\,dx\right| - \left|\int_2^4 (x+1)\,dx\right| = \left|\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x\right|_0^2 + \left|\frac{x^2}{2} + x\right|_2^4 = \left|\frac{8}{3} - 8 - 60\right| - |8 + 4 - 2 - 2| = \frac{172}{3}$

106. Página 232

$$\text{Área} \quad \int_1^a (2x + 1)\,dx \quad x^2 \quad x\Big|_1^a \quad a^2 \quad a \quad 2$$

$$\text{Área} \quad 18 \quad a^2 + a \quad 2 \quad 18 \quad a^2 + a \quad 20 \quad 0 \quad \begin{cases} a \quad 4 \\ a \quad 5 \end{cases}$$

Si consideramos que $1 < a$, tenemos que $a = 4$.

107. Página 232

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{a}(-x^2-9)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3}-9x\right]_{-1}^{a}\right| = \left|-\frac{a^3}{3}+9a-\frac{1}{3}-9\right| = \left|-\frac{a^3}{3}-9a+\frac{26}{3}\right|$$

$$\text{Área} = 24 \rightarrow -\frac{a^3}{3}+9a-\frac{26}{3} = 24 \rightarrow \begin{cases} a = -1-2\sqrt{6} \\ a = 2 \\ a = 2\sqrt{6}-1 \end{cases}$$

Si consideramos que $-1 < a$, tenemos que $a = 2$ o $a = 2\sqrt{6}-1$.

108. Página 232

a) $\int \frac{2}{x \quad 1}\,dx \quad 2\ln|x \quad 1| \quad K$

b) $\text{Área} = \left[\ln|x-1|\right]_2^k = \ln|k-1| - \ln 3 = \ln\left|\frac{|k-1|}{3}\right|$

$$\text{Área} = \ln 2 \rightarrow \ln\left|\frac{|k-1|}{3}\right| = \ln 2 \rightarrow \frac{|k+1|}{3} = 2 \rightarrow \begin{cases} k-1=6 \rightarrow k=5 \\ -k-1=6 \rightarrow k=-6 \end{cases}$$

Como $k > 2 \rightarrow$ La solución es $k = 5$.

109. Página 232

Hallamos los puntos de corte:

$$x^2 - 2 = 2x - 2 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^2 (x^2-2-2x-2)\,dx\right| = \left|\int_0^2 (x^2-2x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2\right| = \left|\frac{8}{3}-4\right| = \frac{4}{3}$$

110. Página 232

Calculamos las rectas que determinan los lados del triángulo.

El lado que contiene los vértices $(-5, 0)$ y $(2, 0)$ está en la recta $y = \frac{2}{5}x + 2$.

El lado que contiene los vértices $(5, 0)$ y $(0, 0)$ está en la recta $y = 0$.

El lado que contiene a los vértices $(0, 0)$ y $(2, 0)$ está en la recta $x = 0$.

$$\text{Área} = \left|\int_{-5}^{0}\left(\frac{2}{5}x+2\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{5}-2x\right]_{-5}^{0}\right| = 5$$

111. Página 232

Hallamos los puntos de corte: $2 - x - x^2 = x^2 + 3x + 2 \rightarrow 2x^2 + 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_0^2 (2+x-x^2-x^2-3x-2)\,dx\right| = \left|\int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{2x^3}{3}-2x^2\right]_0^2\right| = \left|-\frac{16}{3}+8\right| = \frac{8}{3}$$

112. Página 232

La ecuación de la bisectriz es $y = x$.

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 \quad 2 \quad x \quad \cdot \; x^2 \quad x \quad 2 \quad 0 \; \cdot \begin{cases} x & 1 \\ x & 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{2}(x^2-2-x)\,dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}-2x-\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2} = \left|\frac{8}{3}-4-2+\frac{1}{3}-2+\frac{1}{2}\right| = \frac{9}{2}$$

113. Página 232

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^3-2x=-x^2 \to x^3-x^2-2x=0 \to \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{0}(x^3-2x+x^2)\,dx\right| - \left|\int_{0}^{1}(x^3-2x+x^2)\,dx\right| = \left|\frac{x^4}{4}-x^2+\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{0} + \left|\frac{x^4}{4}-x^2-\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{1} =$$

$$\left| \; 4 \quad 4 \quad \frac{8}{3}\right| \; \text{ı} \; \left|\frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{1}{3}\right| \quad \frac{8}{3} \; \text{ı} \; \frac{5}{12} \quad \frac{37}{12}$$

b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^3-2x^2-x-1=-x^2-3x-1 \to x^3-x^2-2x=0 \to \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)\,dx\right| = \left|\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right|_{-1}^{0} + \left|\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right|_{0}^{2} =$$

$$\left| \; \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \; \text{ı} \; 1\right| \quad \left|4 \quad \frac{8}{3} \quad 4\right| \quad \frac{5}{12} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{37}{12}$$

114. Página 232

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\frac{|x|}{2} = \frac{1}{1-x^2} \to \begin{cases} -\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{1-x^2} \to x^3-x+2=0 \to x=-1 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{1-x^2} \to x^3+x-2=0 \to x=1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{x}{2}\right)dx\right| - \left|\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{x}{2}\right)dx\right| = \left|\text{arc tg } x+\frac{x^2}{4}\right|_{-1}^{0} - \left|\text{arc tg } x-\frac{x^2}{4}\right|_{0}^{1} = \left|\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right| - \left|\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right| = \frac{\pi-1}{2}$$

115. Página 232

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

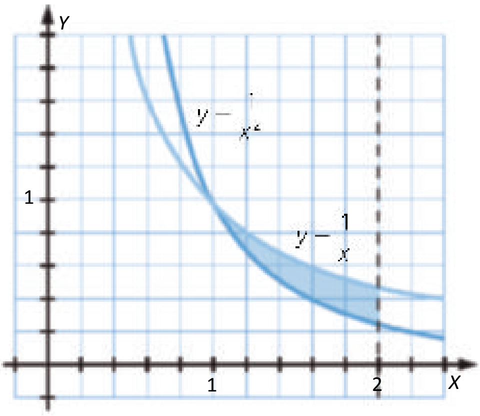
$\frac{8}{x} \quad \sqrt{x} \cdot 8 \quad x\sqrt{x} \cdot x \quad 4$

$\text{Área} = \left|\int_4^8 \left(\frac{8}{x} - \sqrt{x}\right) dx\right| = \left|\left[8\ln x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_4^8\right| = \left|8\ln 8 - \frac{16}{3}\sqrt{8} - 8\ln 4 - \frac{8}{3}\sqrt{4}\right| = \left|24\ln 2 - \frac{32}{3}\sqrt{2} - 16\ln 2 - \frac{16}{3}\right| =$

$- \left|\frac{16 - 32\sqrt{2}}{3} - 8\ln 2\right|$

116. Página 232

a)



b) Hallamos los puntos de corte de las funciones: $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x^2} \cdot x \quad 1$

$\text{Área} = \left|\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx\right| = \left|\left[\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^2\right| = \left|\ln 2 + \frac{1}{2} - 1\right| = \ln 2 - \frac{1}{2}$

117. Página 232

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $1 \quad \frac{1}{x} \cdot x \quad 1$

$\text{Área} = \left|\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx\right| = \left|\left[x - \ln|x|\right]_1^2\right| = 2 - \ln 2 - 1 - \ln 1 = 1 - \ln 2$

118. Página 232

Hallamos los puntos de corte para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $\text{sen } 2x = \cos x \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\text{Área} = \left|\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\text{sen } 2x - \cos x)\, dx\right| - \left|\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen } 2x - \cos x)\, dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \text{sen } x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\right| - \left|\left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \text{sen } x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right| =$

$\left| \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right| \left|\frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2}\right| \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2}$

119. Página 232

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = (x-2)^2 \rightarrow x^2 = x^2 - 4x - 4 \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1$$

$$x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \qquad\qquad (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 x^2\,dx\right| + \left|\int_1^2 (x-2)^2\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right| - \left|\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2\right| = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

120. Página 232

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $2 = x$

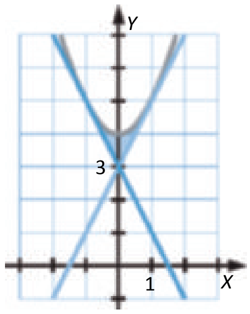
$$\text{Área} = \left|\int_0^2 (2-x)\,dx\right| = \left|\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2\right| = 2$$

121. Página 232

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $\sqrt{x} = 4 \rightarrow x = 16$

$$\text{Área} = \left|\int_0^{16} (\sqrt{x} - 4)\,dx\right| = \left|\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 4x\right]_0^{16}\right| = \left|\frac{128}{3} - 64\right| = \frac{64}{3}$$

122. Página 232



$$y(-1) = 5 \qquad\qquad y(1) = 5$$

$$f(x) = x^2 - 4 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow \begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 2 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son:

$$y = -2x + n \rightarrow 5 = 2 - n \rightarrow n = 3 \rightarrow y = -2x - 3$$

$$y = 2x - n \rightarrow 5 = 2 + n \rightarrow n = 3 \rightarrow y = 2x - 3$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^0 (x^2 - 4 - 2x - 3)dx\right| - \left|\int_0^1 (x^2 - 4 - 2x - 3)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]_{-1}^0\right| - \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - x\right]_0^1\right| = \left|\frac{1}{3}\right| - \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

123. Página 232

$$x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = e^2$$

Recta: $m = \dfrac{e^2 - 1}{2} \rightarrow y = \left(\dfrac{e^2 - 1}{2}\right)x + n \rightarrow 1 = n \rightarrow y = \left(\dfrac{e^2 - 1}{2}\right)x + 1$

$$\text{Área} = \left|\int_0^2 \left[\left(\frac{e^2 - 1}{2}\right)x - 1 - e^x\right] dx\right| = \left|\left[\left(\frac{e^2 - 1}{4}\right)x^2 - x - e^x\right]_0^2\right| = \left|e^2 - 1 + 2 - e^2 - 1\right| = 2$$

124. Página 233

a) $f(1) = 2 \rightarrow 1 - a - b = 2 \rightarrow b = 1 - a$

$g(1) = 2 \rightarrow 1 + c = 2 \rightarrow c = 1$

La función es: $g(x) = x^3 - 1$

$g'(x) = 3x^2 \rightarrow g'(1) = 3$

$f'(x) = 2x - a - f'(1) = 3 - 2 - a = 3 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 0$

La función es: $f(x) = x^2 - x$

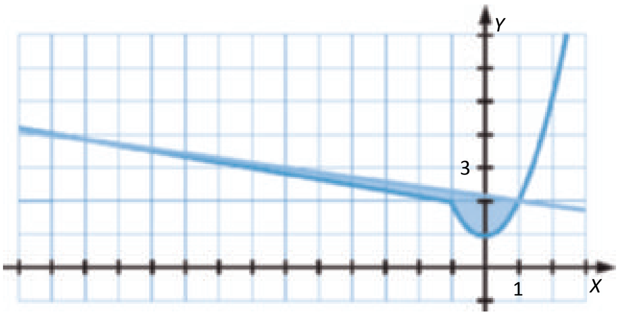
b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$x^2 \quad x \quad x^3 \; 1 \; 1 \quad \begin{cases} x \quad 1 \\ x \quad 1 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{1} (x^2 - x - x^3 - 1)\, dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - x \right|_{-1}^{1} = \left| \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 \right| = \frac{4}{3}$$

125. Página 233

a)



b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$\frac{15 \quad x}{7} \quad \sqrt{3 \quad x} \quad \begin{cases} x \quad 13 \\ x \quad 6 \end{cases}$ $\qquad \frac{15 \quad x}{7} \quad x^2 \quad 1 \quad x \quad 1$

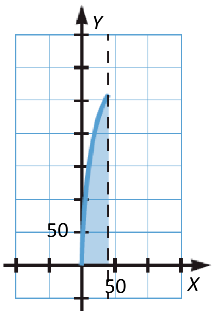
$$\text{Área} = \left| \int_{-13}^{-6} \left(\sqrt{3 - x} - \frac{15}{7} - \frac{x}{7} \right) dx \right| + \left| \int_{-6}^{-1} \left(\sqrt{3 - x} - \frac{15}{7} - \frac{x}{7} \right) dx \right| - \left| \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1 - \frac{15}{7} - \frac{x}{7} \right) dx \right| =$$

$$= \left| -\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3} - \frac{15}{7}x - \frac{x^2}{14} \right|_{-13}^{-6} \Bigg| - \Bigg| -\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3} - \frac{15}{7}x + \frac{x^2}{14} \Bigg|_{-6}^{-1} \Bigg| + \left| \frac{x^3}{3} - \frac{8}{7}x + \frac{x^2}{14} \right|_{-1}^{1} \Bigg| =$$

$$\left| \; 18 \quad \frac{90}{7} \quad \frac{18}{7} \; \frac{128}{3} \quad \frac{195}{7} \quad \frac{169}{14} \right| \quad \left| \; \frac{16}{3} \quad \frac{15}{7} \quad \frac{1}{14} \quad 18 \quad \frac{90}{7} \quad \frac{18}{7} \right| \quad \left| \frac{1}{3} \quad \frac{8}{7} \; \frac{1}{14} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{8}{7} \quad \frac{1}{14} \right|$$

$$\left| \; 18 \quad \frac{90}{7} \quad \frac{18}{7} \; \frac{128}{3} \quad \frac{195}{7} \quad \frac{169}{14} \right| \quad \left| \; \frac{16}{3} \quad \frac{15}{7} \quad \frac{1}{14} \quad 18 \quad \frac{90}{7} \quad \frac{18}{7} \right| \quad \left| \frac{1}{3} \quad \frac{8}{7} \; \frac{1}{14} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{8}{7} \quad \frac{1}{14} \right| \quad \frac{1}{6} \quad \frac{23}{42} \; \frac{34}{21} \quad \frac{7}{3}$$

126. Página 233



Área $\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}\,dx \quad 10\sqrt{(2x \quad 1)^3}\Big|_0^{40} \quad 7\,290 \quad 10 \quad 7\,280$

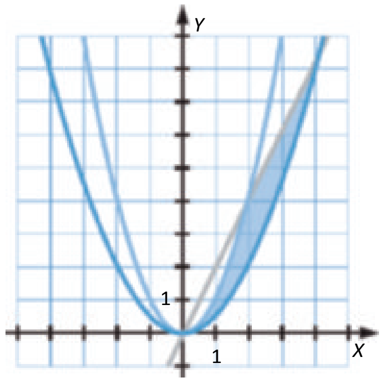
127. Página 233

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$f(x) \quad g(x) \quad x^2 \quad \frac{x^2}{2} \quad x \quad 0$

$f(x) \quad h(x) \quad x^2 \quad 2x \quad \begin{cases} x & 0 \\ x & 2 \end{cases}$

$g(x) \quad h(x) \quad \frac{x^2}{2} \quad 2x \quad \begin{cases} x & 0 \\ x & 4 \end{cases}$



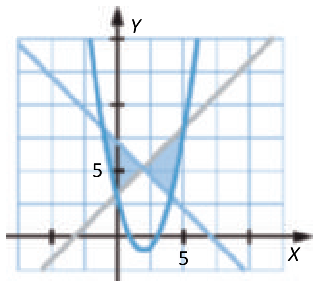
$$\text{Área} = \left|\int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx\right| + \left|\int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) dx\right| = \left|\frac{x^3}{6}\Big|_0^2\right| + \left|\frac{x^3}{6} - x^2\Big|_2^4\right| = \left|\frac{4}{3}\right| - \left|\frac{32}{3} - 16 - \frac{4}{3} - 4\right| = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$$

b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$f(x) \quad g(x) \quad x+3 \quad x^2 \quad 4x \quad 3 \quad \begin{cases} x & 0 \\ x & 5 \end{cases}$

$f(x) = h(x) \rightarrow x - 3 = -x + 7 \rightarrow x = 2$

$g(x) \quad h(x) \quad x^2 \quad 4x \quad 3 \quad x \quad 7 \quad \begin{cases} x & 1 \\ x & 4 \end{cases}$



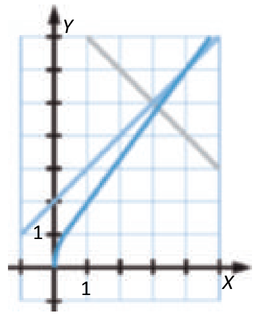
$$\text{Área} \quad \left|\int_{-1}^{0} x \quad 7 \quad x^2 + 4x \quad 3 \; dx\right| \quad \left|\int_0^2 x \quad 3 \quad x \quad 7 \; dx\right| \quad \left|\int_2^4 x \quad 3 \quad x \quad 7 \; dx\right| + \left|\int_4^5 x \quad 3 \quad x^2 \quad 4x \quad 3 \; dx\right|$$

$$\left|\int_{-1}^{0} x^2 \quad 3x \quad 4 \; dx\right| \quad \left|\int_0^2 2x \quad 4 \; dx\right| + \left|\int_2^4 2x \quad 4 \; dx\right| + \left|\int_4^5 x^2 \quad 5x \; dx\right|$$

$$= \left|-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\Big|_{-1}^{0}\right| - \left|x^2 - 4x\Big|_0^2\right| - \left|x^2 - 4x\Big|_2^4\right| + \left|-\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\Big|_4^5\right| =$$

$$\left|\frac{1}{3} \quad \frac{3}{2} + 4\right| + |4 \quad 8| \quad |4 + 8| \quad \left|\frac{125}{3} \quad \frac{125}{2} \quad \frac{64}{3} \quad 40\right| \quad \frac{13}{6} \quad 4 \quad 4 \quad \frac{13}{6} \quad \frac{37}{3}$$

c) Hallamos los puntos de corte de las funciones:



$f(x) = g(x) \to -x - 8 = x - \sqrt{x} - x = \frac{33}{8} - \frac{\sqrt{65}}{8} \approx 3{,}12$

$f(x) = h(x) \to -x + 8 = x + 2 - x = 3$

$g(x) \quad h(x) \quad x \quad \sqrt{x} \quad x \quad 2 \quad x \quad 4$

$\text{Área} = \left|\int_{3}^{3,12} x - 2 - x - 8 \; dx\right| - \left|\int_{3,12}^{4} x - \sqrt{x} - x - 2 \; dx\right| = \left|x^2 - 6x\right|_{3}^{3,12} + \left|\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2x\right|_{3,12}^{4} =$

$\left| 3{,}12^2 \quad 6 \cdot 3{,}12 \quad 9 + 18 \right| \left| \frac{16}{3} \quad 8 \quad \frac{2}{3}\sqrt{3{,}12^3} \quad 2 \cdot 3{,}12 \right| \quad 0{,}01 + 0{,}1 \quad 0{,}11$

128. Página 233

$f(x) \quad \sqrt{x} \qquad g(x) - -\sqrt{x} \qquad h(x) \quad \frac{3 \quad x}{2}$

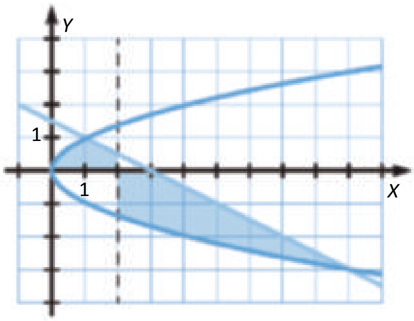
Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$f(x) \quad h(x) \quad \sqrt{x} \quad \frac{3 \quad x}{2} \quad x \quad 1$

$g(x) \quad h(x) \quad \sqrt{x} \quad \frac{3 \quad x}{2} \quad x \quad 9$

$f(x) = 0 - g(x) = 0 \to x = 0$

$h(x) = 0 \to x = 3$



$\text{Área} = \left|\int_0^1 \sqrt{x}\, dx\right| - \left|\int_1^2 \frac{3 - x}{2}\, dx\right| - \left|\int_2^3 -\sqrt{x}\, dx\right| - \left|\int_3^9 \left[\sqrt{x} - \frac{3 - x}{2}\right] dx\right| =$

$= \left|\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right|_0^1 - \left|\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4}\right|_1^2 + \left|-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right|_2^3 - \left|\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{4}\right|_3^9 =$

$\left|\frac{2}{3}\right| \quad \left|3 \quad 1 \quad \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right| \quad \left|2\sqrt{3} \quad \frac{4}{3}\sqrt{2}\right| \quad \left|18 \quad \frac{27}{2} + \frac{81}{4} \quad 2\sqrt{3} \quad \frac{9}{2} \quad \frac{9}{4}\right|$

$= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{3} - 27 - 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{3} - \frac{341}{12}$

129. Página 233

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = 2\sqrt{x} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{4} \end{cases} \qquad \text{Área} = \left| \int_0^{\sqrt[3]{4}} \left(2\sqrt{x} - x^2 \right) dx \right| = \left| \left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt[3]{4}} \right| = \left| \frac{8}{3} - \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

130. Página 233

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = ax \rightarrow x(x-a) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^a \left(x^2 - ax \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^a \right| = \left| \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right| = \left| \frac{a^3}{6} \right| = 36 \rightarrow \left| \frac{a^3}{6} \right| = 36 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{a^3}{6} = 36 \rightarrow a = 6 \\ \dfrac{a^3}{6} = -36 \rightarrow a = -6 \end{cases}$$

131. Página 233

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$-x^2 + 4 = a \rightarrow x^2 = 4 - a \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{4-a} \\ x = \sqrt{4-a} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} \left(x^2 - 4 + a \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x + ax \right]_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\left(\sqrt{4-a}\right)^3}{3} - 4\left(\sqrt{4-a}\right) + a\sqrt{4-a} + \frac{\left(\sqrt{4-a}\right)^3}{3} - 4\left(\sqrt{4-a}\right) - a\sqrt{4-a} \right| =$$

$$= \left| 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{4-a}\right)^3}{3} - 8\left(\sqrt{4-a}\right) - 2a\sqrt{4-a} \right| = \left| \sqrt{4-a} \left[\frac{2}{3}(4-a) - 8 - 2a \right] \right| = \left| -\frac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} \right|$$

$$\text{Área} = \frac{4}{3} \rightarrow \left| -\frac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} \right| = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} = \dfrac{4}{3} \rightarrow (4-a)^3 = 1 \rightarrow a = 3 \\ \dfrac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} = -\dfrac{4}{3} \rightarrow (4-a)^3 = -1 \rightarrow a = 5 \end{cases}$$

132. Página 233

Si $a \geq 1$, las funciones no determinan una región cerrada.

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$1 - x^2 = a \rightarrow x^2 = 1 - a \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{1-a} \\ x = \sqrt{1-a} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} \left(x^2 - 1 + a \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x + ax \right]_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} \right| = \left| \frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^3}{3} - \sqrt{1-a} + a\sqrt{1-a} - \frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^3}{3} - \sqrt{1-a} - a\sqrt{1-a} \right| =$$

$$= \left| 2\frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^3}{3} - 2\left(\sqrt{1-a}\right) - 2a\sqrt{1-a} \right| = \left| \sqrt{1-a} \left[\frac{2}{3}(1-a) - 2 - 2a \right] \right| = \left| -\frac{4}{3}\sqrt{(1-a)^3} \right| = \frac{4}{3}\sqrt{(1-a)^3} \quad \forall a \in (-\infty, 1)$$

133. Página 233

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 \quad 1 \cdot \begin{cases} x & 1 \\ x & 1 \end{cases}$$

$$\text{Área total} = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \; dx = \; x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Entonces el área de cada una de las parcelas será la mitad, es decir, $\frac{2}{3}$.

$$\text{Área} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} a - x^2 \; dx = \; ax - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

$$\text{Área} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}a\sqrt{a} \quad \frac{2}{3} \cdot a\sqrt{a} \quad \frac{1}{2} \cdot a^3 \quad \frac{1}{4} \cdot a \quad \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot a \quad \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

134. Página 233

a) Para que la curva y la recta delimiten una región del plano, tienen que cortarse en dos puntos.

$$x^2 \quad 2x \quad 3 \quad 2x \quad m \cdot x^2 \quad 3 \quad m \cdot x \quad \pm\sqrt{3 \text{ I } m}$$

Si $3 + m = 0 \rightarrow m = -3 \rightarrow$ La curva y la recta se cortarán solamente en un punto, en $x = 0$.

Si $3 - m < 0 \rightarrow m < -3 \rightarrow$ La raíz no existe, por lo que las funciones no se cortan.

Si $3 - m > 0 \rightarrow m > -3 \rightarrow$ Las dos funciones delimitan una región en el plano.

b) Las primeras coordenadas de los puntos de corte serán: $\sqrt{3 \quad m}$ y $\sqrt{3 \quad m}$. Entonces:

$$\text{Área} = \left|\int_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}} x^2 + 2x - 3 - 2x - m \; dx\right| = \left|\int_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}} x^2 - 3 - m \; dx\right| = \left|\frac{x^3}{3} - (3 - m)x\Bigg|_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}}\right| =$$

$$-\left|\frac{(3-m)\sqrt{3-m}}{3} - (3+m)\sqrt{3-m} - \frac{(3-m)\sqrt{3-m}}{3} - (3-m)\sqrt{3-m}\right| - \left|-\frac{4(3-m)\sqrt{3-m}}{3}\right| - \frac{4(3-m)\sqrt{3-m}}{3}$$

Como $\frac{4(3-m)\sqrt{3+m}}{3} = 36 - (3+m)\sqrt{3-m} = 27 - (3-m)^2(3-m) = 27^2 - (3+m)^3 = 3^{2\;3} \rightarrow 3 - m = 9 - m = 6$

135. Página 233

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x \quad 2 \quad 4 \quad x^2 \cdot x^2 \quad x \quad 2 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 2 \\ x & 1 \end{cases}$$

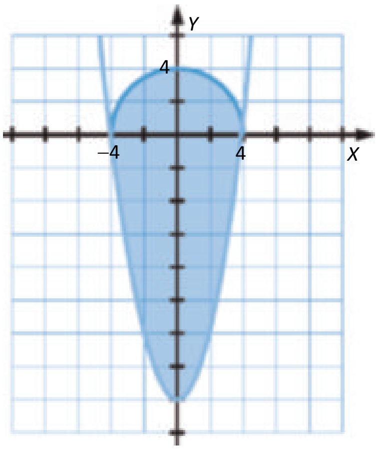
$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{1} x + 2 - 4 + x^2 \; dx\right| = \left|\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1}\right| = \left|\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{3} - 2 - 4 - \frac{8}{3}\right| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}$$

b) Basta con tomar una recta paralela al eje *X*, $y = a$, de tal forma que:

$$a \quad 2 \quad \frac{9}{2} \cdot a \quad \frac{9}{4} \cdot p(x) \quad \frac{9}{4}$$

136. Página 233

a) La ecuación de una circunferencia es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. En este caso tenemos una circunferencia de radio 4; por tanto, la función que tenemos es $y = \sqrt{16 - x^2}$.



b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\sqrt{16 - x^2} = x^2 - 16 \rightarrow 16 - x^2 = x^4 - 32x^2 + 16^2 \rightarrow x^4 - 31x^2 + 240 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \\ x = \sqrt{15} \\ x = -\sqrt{15} \end{cases}$$

Como solo tomamos el sentido positivo de la circunferencia, las funciones se cortan en $x = -4$ y $x = 4$.

$$\text{Área} = \left|\int_{-4}^{4}\left(\sqrt{16 - x^2} - x^2 + 16\right) dx\right| = \left|\int_{-4}^{4}\sqrt{16 - x^2}\, dx\right| + \left|\left[-\frac{x^3}{3} - 16x\right]_{-4}^{4}\right|$$

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$x = 4\, sen\, t \rightarrow dx = 4\cos t\, dt \qquad x \in [-4, 4] \rightarrow t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-4}^{4}\sqrt{16 - x^2}\, dx\right| - \left|\left[-\frac{x^3}{3} + 16x\right]_{-4}^{4}\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3} - 16x\right]_{-4}^{4}\right| - \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 4\cos t\sqrt{16 - 16sen^2 t}\, dt\right| =$$

$$= -\frac{64}{3} + 64 - \frac{64}{3} - 64 - \left|16\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^2 t\, dx\right| = \frac{256}{3} - \left|16\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1 - \cos 2t}{2}\, dx\right| = \frac{256}{3} - \left|8\left[t + \frac{1}{2} sen\, 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| = \frac{256}{3} - 8\pi$$

c) $\left(\frac{256}{3} - 8\pi\right) \cdot 3 \approx 331{,}40$ €

d) $\frac{256}{3} - 8\pi \approx 110{,}47\ m^2$

Tendría que comprar 3 paquetes de 50 m^2, es decir, se gastaría 300 €. Le compensa la oferta.

137. Página 233

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $6kx^2 - x = 0 \to x(6kx - 1) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{6k} \end{cases}$

$$\left|\int_0^k (6kx^2 - x)\,dx\right| = \left|\left[2kx^3 - \frac{x^2}{2}\right]_0^k\right| = \left|2k^4 - \frac{k^2}{2}\right| = 2k^4 - \frac{k^2}{2}$$ porque $k > 0$.

Por tanto: $2k^4 - \dfrac{k^2}{2} = k^4 + (k^2 - 2)^2 \to 4k^4 + k^2 = 2k^4 + 2k^4 - 8k^2 - 8 \to 9k^2 - 8 = 0 \to \begin{cases} k = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ k = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

Como buscamos el valor positivo de $k \to k = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 292

El beneficio viene dado por: $R(x) = 2300 - (x - 50)^2$

Vendiendo 30 pares: $R(30) = 2300 - (30 - 50)^2 = 1900$

Vendiendo 25 pares: $R(25) = 2300 - (25 - 50)^2 = 1675$

2. Página 292

Con la venta de 50 pares de zapatillas se obtiene el beneficio máximo, por lo que si los precios no varían, los beneficios empezarían a disminuir.

Si se venden menos de 50 pares, la empresa obtiene beneficios, pero no llegan al beneficio máximo.

3. Página 292

Veamos para qué valores de *x* la función de beneficio es positiva. Para ello, buscaremos los puntos en los que dicha función se anula:

$$R(x) = 0 \to 2300 - (x - 50)^2 = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -10(\sqrt{23} - 5) \approx 2{,}04 \\ x_2 = 10(5 + \sqrt{23}) \approx 97{,}96 \end{cases}$$

La función de beneficio se anula en $x = 2{,}04$ y en $x = 97{,}96$. Comprobemos que en valores intermedios la función es positiva, tomando, por ejemplo, $x = 10$.

$R(10) = 700 > 0$

Tenemos, por tanto, que la función de beneficio toma valores positivos en el intervalo $(2{,}04;\ 97{,}96)$, pero como estamos trabajando con pares de zapatos, los valores deben ser enteros, por lo que diremos que obtenemos beneficio en el intervalo $[3, 97]$.

4. Página 292

Como ya hemos hallado el intervalo en el que se obtiene beneficio, el mínimo beneficio se obtendrá en alguno de los extremos del intervalo. Veamos en cuál:

$R(3) = 91 = R(97)$

En ambos extremos se obtiene el mismo beneficio, que es de 91 €.