PRUEBA I SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} & \textbf{si } -\mathbf{2} \le \boldsymbol{x} \le -\mathbf{1} \\ \dfrac{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{3}}{\mathbf{2}} & \textbf{si } -\mathbf{1} < \boldsymbol{x} \le \mathbf{0} \end{cases}$$

a) Prueba que $f(x)$ es continua en el intervalo [–2, 0] y derivable en el intervalo (2, 0).

b) Estudia si la función es creciente o decreciente en los intervalos (–2, –1) y (–1, 0).

a) Se estudia la continuidad de la función en el intervalo [–2, 0], tan sólo en el punto x =–1, ya que $g(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y $h(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} f(x) = -1$, $f(x)$ es continua en dicho intervalo.

La derivabilidad se estudia en el punto x =–1.

$$f\,'(\mathrm{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f\,'(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f\,'(x) = \lim\limits_{x \to -1} f\,'(x) = -1$, $f(x)$ es derivable en el intervalo dado.

b) El dominio son todos los reales, ya que el denominador no se anula para ningún valor de x. Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función se iguala la primera derivada a cero:

$$f\,'(x) = 0 \to \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} = 0, \text{no existe} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x = 0 & \text{si } -1 < x \le 0 \end{cases}$$

Luego no tiene máximos o mínimos ya que el único punto en el que pudiera haberlos, x = 0, coincide con el extremo absoluto de la función.

	–2 –1	–1 0
f'	–	–
f	↘	↘

Por tanto, la función es estrictamente decreciente ya que la derivada es siempre negativa en todo el intervalo.

2. Resuelve:

a) Sea f la función definida como $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{a - x}$ para $x \ne a$. Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (2, 3) y tenga una asíntota oblicua con pendiente –4.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x}$

a) La función pasa por el punto (2, 3): $f(2) = \dfrac{4a + b}{a - 2} = 3 \to 4a + b = 3a - 6 \to a + b = -6$

Como m = –4, pendiente de la asíntota oblicua, se tiene que:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(\mathrm{x})}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{a - x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{ax - x^2} = \frac{a}{-1} = -4 \to a = 4$$

Por lo tanto $a + b = -6 \to 4 + b = -6 \to b = -10$. La función es: $f(x) = \dfrac{4x^2 - 10}{4 - x}$.

b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x}) \cdot (\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x})}{(\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 2 - 3x^2 - x}{(\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x})} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{(\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x})} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

3. Sea $h(x) = x^4 - 2x^3 - 1$:

a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de *h*.

c) Utiliza el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $h(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones reales.

a) Si *f* es una función real y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y, además, signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) Se iguala la primera derivada a cero: $h'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \to 2x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad x = 0$

Estos valores son los candidatos a extremos. Para estudiar la monotonía de la función.

	$-\infty$ a 0	0 a $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ a ∞
h'	–	–	+
h	↘	↘	↗

Por lo que es decreciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

$$h''(x) = 12x^2 - 12x \Rightarrow h''(0) = 0 \quad h''\left(\frac{3}{2}\right) = 12 \cdot \frac{9}{4} - 12 \cdot \frac{3}{2} > 0$$

Para $x = 0$ tenemos un punto de inflexión, y para $x = \frac{3}{2}$ un mínimo.

c) Resolver la ecuación $x^4 - 2x^3 - 1 = 0$ es equivalente a hallar los puntos de corte de $h(x)$ con el eje *X*. Para ello, aplicamos el teorema de Bolzano. Teniendo en cuenta que la función es continua en todos los reales, buscamos valores para los que la función tiene signo distinto y vamos acotando:

$h(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^3 - 1 > 0$ $\quad h(0) = -1 < 0$ $\quad h(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 1 < 0$

$h(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 - 1 > 0$ $\quad h(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 1 < 0$ $\quad h(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 1 > 0$

Por lo tanto podemos resumir:

$\begin{cases} h(-1) > 0 \\ h(0) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists\, c_1 \in (-1, 0)$ tal que $h(c_1) = 0$ $\qquad \begin{cases} h(2) > 0 \\ h(3) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists\, c_2 \in (2, 3)$ tal que $h(c_2) = 0$.

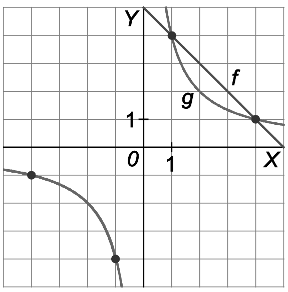
Es imposible que haya más soluciones si atendemos a la monotonía de la función.

4. Dadas las funciones $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = \frac{4}{x}$ para $x \neq 0$:

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* indicando sus puntos de corte.

b) Calcula el área del recinto.

a) $f(x) = 5 - x$ es una recta y $g(x) = \frac{4}{x}$, es una hipérbola de I y III cuadrante.



Para ver los puntos de corte se iguala $f(x)$ y $g(x)$, es decir,

$5 - x = \frac{4}{x}$, de donde $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Resolviendo la ecuación obtenemos $x = 1$ y $x = 4$.

b) $A = \int_1^4 [f(x) - g(x)]dx = 5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln|x| \Big]_1^4 = \frac{15}{2} - 4\ln 4 \text{ u}^2$

5. Calcula las siguientes integrales, explicando el método de resolución:

a) $\int x\cos(3x)\,dx$ **b)** $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}$

a) Se aplica el método de integración por partes: $\int u(x)\,dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\,du(x)$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = \cos(3x)\,dx \rightarrow v = \int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)$

$\int x\cos(3x)\,dx = \frac{x}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(3x)\,dx = \frac{x}{3}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$

b) $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x^2-x)(x-1)} = \int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x(x-1)(x-1)} = \int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x(x-1)^2}$, que se puede descomponer en fracciones simples:

$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$

$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$

Para $x = 0$ tenemos que $1 = A$.

Para $x = 1$ tenemos que $1 = C$.

Para $x = 2$ tenemos que $1 = A + 2B + 2C$, y sustituyendo los valores $A = 1$ y $C = 1$, $B = -1$.

Por tanto, la integral queda: $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)}\Big]_{-2}^{-1} = \frac{1}{6} - 2\ln 2 + \ln 3$

PRUEBA II SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se quiere obtener el límite $\lim_{x\to -2}\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas. Se dan los siguientes datos:

1. $P(0) = Q(0) = 0$

2. El resto de dividir $P(x)$ entre $(x + 2)$ es 3

3. El resto de dividir $Q(x)$ entre $(x + 2)$ es 0.

4. El resto de dividir $Q(x)$ entre $(x + 2)^2$ es 2.

¿Cuál es el dato innecesario para contestar y, por ello, puede eliminarse?

A. Puede eliminarse el dato 1.

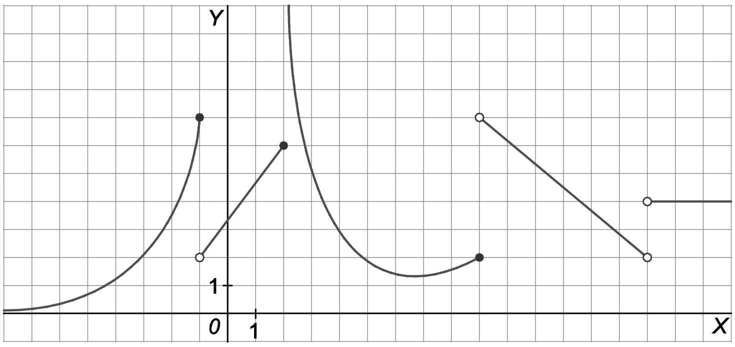
B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

$$\lim_{x\to -2}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]_{ind}=\lim_{x\to -2}\frac{P_1(x)(x+2)+3}{Q_1(x)(x+2)+0}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty$$ Solución D

2. A la vista de la gráfica de la siguiente función, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?:



A. Tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$.
B. Tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 2$.
C. Tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 9$.
D. Es continua por la derecha y por la izquierda en $x = 15$.

Solución: (B, C)

3. Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 L de volumen de tal forma que un lado de la base sea el doble que el otro. Las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima son:

A. $x = \frac{3}{2}$ dm, $h = 2$ dm

B. $x = 2$ dm, $h = \frac{3}{2}$ dm

C. $x = \frac{3}{2}$ cm, $h = 2$ cm

D $x = 2$ cm, $h = \frac{3}{2}$ cm

Para relacionar las variables se utiliza la fórmula del volumen: $V = A_b\cdot h = 2x\cdot x\cdot h = 2x^2h = 9 \to h = \frac{9}{2x^2}$

Por tanto, el área queda: $A(x) = 4x^2 + 6xh = 4x^2 + \frac{27}{x} = \frac{4x^3+27}{x}$

E igualando la primera derivada a cero: $A'(x) = \frac{8x^3-27}{x^2} = 0 \to x = \frac{3}{2}$ dm

		$\frac{3}{2}$
A'	–	+
A	$\searrow$	$\nearrow$

Como $x = \frac{3}{2}$ dm $\to h = 2$ dm Solución: A

4. Para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el origen de coordenadas y tenga un mínimo en el punto (1, −1) los valores de *a*, *b* y *c* tienen que ser:

A. $a = 0,\ b = \frac{1}{2},\ c = 0$

B. $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{3}{2},\ c = 0$

C. $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = 0$

D. Este caso no puede ocurrir.

Si $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas entonces $f(0) = c = 0$, entonces $f(x) = ax^3 + bx$

Por otro lado, sabemos que la función pasa por el punto (1, –1) y que además éste es un mínimo:

$$\begin{cases} f(1) = a + b = -1 \\ f'(x) = 3ax^2 + b = 0 \to f'(1) = 3a + b = 0, \end{cases} \text{ entonces } \begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

Y resolviendo el sistema: $a = \frac{1}{2},\ b = -3a = \frac{-3}{2}$

Por lo tanto la función será $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ Solución: B

5. Lorenzo, que no sabe derivar, dice que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son primitivas de una misma función. Señala cuál o cuáles de las siguientes opciones verifican las afirmaciones de Lorenzo.

A. $f(x) = \frac{x}{x+1},\ g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

B. $f(x) = \ln(2x^2 + 1),\ g(x) = \ln(24x^2 + 12)$

C. $f(x) = \operatorname{sen}^{\sqrt{2}} x \cdot \cos^8 x - \cos x,\quad g(x) = \cos^5 x \operatorname{sen}^{\sqrt{2}} x + \cos x$

D. $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ g(x) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

Dos funciones son primitivas de una misma función sólo si difieren en una constante.

A. $g(x) = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = 1 + f(x)$, luego A es verdadera.

B. $g(x) = \ln\left[12\left(2x^2+1\right)\right] = \ln 12 + \ln(2x^2 + 1) = \ln 12 + f(x)$ y B es verdadera.

C. $g(x) - f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen}^{\sqrt{2}} x \cos^5 x\,(1 - \cos^3 x)$ por lo que C es falsa.

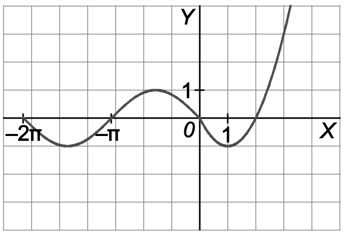
D. $f(x) - g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, con lo que D es verdadera.

Solución: A, B y D

6. **El área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}(x) & \text{si } x\in[-2\pi,0)\\ x^2-2x & \text{si } x\in[0,3]\end{cases}$, el eje de abscisas y las rectas verticales *x* = 0 y x = 3 es:**

A. 0 **B**. $\frac{\pi}{4}$ **C** .1 **D**. $\frac{8}{3}$

La gráfica de la función es:



Observando la gráfica de la función, el área pedida es:

$$\int_0^2 -(x^2-2x)dx+\int_2^3 (x^2-2x)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg]_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg]_2^3=\frac{8}{3}\ \text{u}^2$$