PRUEBA I SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $B = A^2 - 2A$.

b) Determina para qué valores de a la matriz B tiene inversa.

c) Para $a = 1$, calcula si es posible A^{-1} y B^{-1}.

a) $B = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1-a \\ 1+a & -1+a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1-a \\ -1+a & -1+a^2-2a \end{pmatrix}$

b) B tiene inversa si el determinante es distinto de cero.

$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 1-a \\ -1+a & -1+a^2-2a \end{vmatrix} = -2(a^2-2a-1)-(-a+1)(a-1) = -a^2+2a+3 = 0 \rightarrow a = -1,\ a = 3$

Por lo tanto, B tiene inversa si $a \neq 3, -1$.

c) Para $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Para hallar la inversa de A y B se aplica el método de Gauss - Jodan:

$$(A \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2\to F_2-F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1\to F_1+\frac{1}{2}F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2\to\frac{1}{2}F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (I_2 \mid A^{-1})$$

Por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$(B \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_i\to-\frac{1}{2}F_i}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = (I_2 \mid B^{-1})$$

Por tanto $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. Sabiendo que el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ **es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{3C_1 \\ 2C_2}}{=} 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \underset{F_1\leftrightarrow F_2}{=} = -6\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$

b) $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} \underset{F_1\to F_1-F_3}{=} \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} \underset{F_2\to F_2-3F_1}{=} \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} \underset{2F_2}{=} 2\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1\to F_1+F_2 \\ F_3\to F_3-F_1}}{=}$

$= 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$

3. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 2\\ -1 & m & m\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad \mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Estudia el rango de A según los valores de m.

b) Calcula el determinante de la matriz A^{20}.

c) Para $m = -2$, resuelve el sistema $AX = 0$.

d) Para $m = 0$, resuelve el sistema $AX = B$.

a) Como $F_1 = 2F_3$ $|A| = 0\ \forall m \in \mathbb{R}$ y rg(A) < 3

$\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -1 & m\end{vmatrix} = -2m+4=0 \Rightarrow m=2$. Si $m \neq 2$, rg(A) = 2.

Si $m = 2$, $\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix} = -2 \neq 0$, rg($A$) = 2. Por tanto rg($A$) = 2, $\forall\, m \in \mathbb{R}$

b) $|A^{20}| = |A|^{20} = 0^{20} = 0$

c) Se trata de un sistema homogéneo y el rg(A) = 2 < n.º de incógnitas, luego es un sistema compatible indeterminado. Como $E_3 = \frac{1}{2}E_1$, puede eliminarse la tercera ecuación.

$$\begin{cases}-2x+4y+2z=0\\ -x-2y-2z=0\end{cases} \underset{E_1\leftrightarrow E_2}{\rightarrow} \begin{cases}-x-2y-2z=0\\ -2x+4y+2z=0\end{cases} \underset{E_2\rightarrow E_2-2E_1}{\rightarrow} \begin{cases}-x-2y-2z=0\\ \quad 8y+6z=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=-\frac{1}{2}\lambda\\ y=-\frac{3}{4}\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$$

d) Para $m = 0$, $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 4 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right)$. Se observa que $F_1 = 2F_3$ y por tanto trata de un sistema compatible indeterminado.

$$\begin{cases}-2x+4y+2z=-2\\ -x=0\\ -x+2y+z=-1\end{cases} \underset{E_1=2E_3}{\rightarrow} \begin{cases}x=0\\ -x+2y+z=-1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{-1-\lambda}{2}\\ z=\lambda\end{cases}$$

4. **a)** Sean A y B matrices 2 x 2. Determina dichas matrices sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones:

$$A+3B=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix} \qquad 2A-B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

b) Sean C y D las matrices:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Determina el determinante $|5(CD)^{-1}|$, donde $(CD)^{-1}$ es la matriz inversa de (CD).

a) Se multiplica por 3 la segunda ecuación: $6A-3B=\begin{pmatrix}-3 & 9\\ -3 & -3\end{pmatrix}$

Sumando ambas ecuaciones: $7A=\begin{pmatrix}-7 & 7\\ 0 & -7\end{pmatrix} \to A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Y sustituyendo en la segunda ecuación: $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

b) $\left|5(CD)^{-1}\right|=5^2\left|(CD)^{-1}\right|=25\dfrac{1}{|CD|}=\dfrac{25}{|C||D|}=\dfrac{25}{(-1)\cdot 2}=-\dfrac{25}{2}$

5. **Dado el sistema de ecuaciones** $\begin{cases}\boldsymbol{x+3y+2z=-1}\\ \boldsymbol{2x+4y+5z=k-2}\\ \boldsymbol{x+k^2y+3z=2k}\end{cases}$**, donde k es un parámetro real se pide:**

a) Discute razonadamente el sistema según los valores de k.

b) Obtén razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, todas las soluciones del sistema cuando $k = -1$.

c) Resuelve razonadamente el sistema cuando $k = 0$.

a) La matriz ampliada del sistema es $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 5 & k-2\\ 1 & k^2 & 3 & 2k\end{array}\right)$

Se estudia los valores de k para los cuales el determinante de A es 0:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & k^2 & 3\end{vmatrix}=-k^2+1=0\to k=\pm 1$$

Para $k\neq\pm 1$, $|A|\neq 0$, luego rg(A) = rg(A^*) = número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

Para $k = 1$, $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 5 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 2\end{array}\right)$. Como el menor $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}\neq 0\to$ rg(A) = 2.

Para calcular el rango de A^* añadimos al menor anterior C_4 y F_3:

$\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-4\neq 0$, por lo que el rg($A^*$) = 3

Como rg(A^*) $\neq$ rg(A), el sistema es incompatible.

Para $k = -1$, $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 5 & -3\\ 1 & 1 & 3 & -2\end{array}\right)$. Como $F_3 = F_2 - F_1$, rg(A^*) = rg(A) < nº de incógnitas = 3, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para k = –1, el sistema compatible indeterminado será $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-3 \\ x+y+3z=-2 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-3 \\ x+y+3z=-2 \end{cases} \underset{\substack{E_2\to E_2-2E_1 \\ E_3\to E_3-E_1}}{\rightarrow} \begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ -2y+z=-1 \\ -2y+z=-1 \end{cases} \underset{E_3\to E_3-E_2}{\rightarrow} \begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ -2y+z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \underset{z=\lambda}{\rightarrow} \begin{cases} x=\dfrac{-5-7\lambda}{2} \\ y=\dfrac{1+\lambda}{2} \\ z=\lambda \end{cases}$$

c) Para k = 0 el sistema es compatible determinado es $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-2 \\ x+3z=0 \end{cases}$ y podrá resolverse aplicando la regla de Cramer. Como $|A|=0^2+1=1$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1}=-12+18=6\ ,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1}=-6-5+4+6=-1,\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1}=-6+4=-2$$

PRUEBA II. SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para que un producto *AB* tenga dimensión 2 x 3 se dan las siguientes condiciones:

1. La matriz *A* debe tener dos filas.
2. La matriz *B* ha de tener tres columnas.
3. El número de columnas de la matriz *A* es igual al número de filas de la matriz *B*.
4. La matriz *B* tiene una fila de ceros.

Señala cuál de las siguientes condiciones puede eliminarse.

A. Puede eliminarse el dato 1.
B. Puede eliminarse el dato 2.
C. Puede eliminarse el dato 3.
D. Puede eliminarse el dato 4.

Solución D

2. Si *B* es la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matriz B^3 es:

A. $B^3 = O$ **B**. $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **C**. $B^3 = B$ **D**. $B^3 = I$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

Solución A

3. Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix}$ tiene rango 2, analiza si la información es suficiente para contestar

1. Si $ac = 0$ y $a \neq 0$ ó $c \neq 0$ **2. Si $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$**

A. Cada afirmación es suficiente por sí sola.
B. 1 es suficiente por sí sola, pero 2 no.
C. 2 es suficiente por sí sola, pero 1 no.
D. Son necesarias las dos juntas.

La afirmación 1 es suficiente por sí sola, pero no 2. Obsérvese que 2 es insuficiente pues $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & c \end{vmatrix}$ puede ser distinto de 0, bastaría que $c \neq 0$. Solución: B

4. Dada la ecuación $\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix}$ **= 0, señala las respuestas correctas**

A. $x = 0$ es una solución.

B. $x = a + b + c$ es una solución.

C. $x = a + b + c$ es una solución.

D. $x = b - c$ es una solución.

$$\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} x & a & b \\ x & x-b-c & b \\ x & a & x-a-c \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x-b-c & b \\ 1 & a & x-a-c \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2-F_1 \\ F_3 \to F_3-F_1}}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & x-b-c-a & b \\ 0 & 0 & x-a-c-b \end{vmatrix} = x(x-a-b-c)^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = a+b+c$$

Solución A y C

5. Halla un número de tres cifras, tal que la suma de sus cifras es 9, la cifra de las decenas sea la media aritmética de las otras dos cifras, y que si se invierte el orden de las cifras, la diferencia entre el número obtenido y el inicial sea 396.

A. 432

B. 126

C. 234

D. 531

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ y=\dfrac{x+z}{2} \\ 100x+10y+z-100z-10y-x=396 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ x-2y+z=0 \\ x-z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=3 \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow N=531$$

Solución D

6. Consideremos un sistema de cinco ecuaciones lineales con tres incógnitas. Sea *A* la matriz de coeficientes y *A la matriz ampliada. Indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones tiene un dato innecesario para poder comprobar que el sistema es compatible determinado:**

1. rg(*A*) = rg(*A) = 3 = número de incógnitas**

2. rg(*A*) = 3, rg(*A) = 3**

3. Solo hay tres ecuaciones linealmente independientes y, además, rg(*A*) = rg(*A).**

4. rg(*A*) = rg(*A), existe un menor M de orden 3 perteneciente a A, tal que |*M*| ≠ 0, rg(*A**) = 3**

A. En 1 hay algún dato innecesario.

B. En 2 hay algún dato innecesario.

C. En 3 hay algún dato innecesario.

D. En 4 hay algún dato innecesario.

La única respuesta que no tiene ningún dato innecesario es que rg A = 3; rg A* = 3. Solución A, C y D