PRUEBA I SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dados los puntos $A(1, 2, -3)$ y $O(0, 0, 0)$:

a) Calcula la ecuación de un plano π_1 que pasa por A y O y sea perpendicular a π_2: $3x - 5y + 2z = 11$.

b) Encuentra la distancia del punto medio de A y O a π_2.

a) El plano π_1 se determina por los vectores $\vec{v}_r = \overrightarrow{OA} = (1, 2, -3)$, $\vec{n}_{\pi_2}(3, -5, 2)$ y el punto $O(0, 0, 0)$:

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -11x - 11y - 11z = 0 \Rightarrow \pi_1 : x + y + z = 0$$

b) Hallamos el punto medio de A y O: $M = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{-3+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$

$$d(M, \pi_2) = \frac{\left|3\cdot\frac{1}{2} - 5\cdot 1 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) - 11\right|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + (2)^2}} = \frac{\left|\frac{3}{2} - 5 - 3 - 11\right|}{\sqrt{38}} = \frac{\frac{35}{2}}{\sqrt{38}} = \frac{35}{2\sqrt{38}} = \frac{35\sqrt{38}}{76} \text{ u}$$

2. Sea π el plano que pasa por los puntos $A(1, -1, 1)$, $B(2, 3, 2)$, $C(3, 1, 0)$ y r la recta dada por $r: \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$.

a) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π.

b) Calcula los puntos de r que distan 6 unidades del plano π.

a) El plano π se determinará por dos vectores, $\overrightarrow{AB} = (1, 4, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, 2, -1)$, y un punto $A(1, -1, 1)$:

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6x + 3y - 6z + 15 = 0 \Rightarrow \pi : -2x + y - 2z + 5 = 0$$

$\vec{v}_r = (2, -1, 2)$ y $\vec{n}_\pi = (-2, 1, -2)$ son proporcionales, π y r son perpendiculares y forman un ángulo de 90º

b) Calculamos la distancia de un punto genérico de la recta de la recta al plano:

$$P_r(7+2\lambda, -6-\lambda, -3+2\lambda); \; d(P_r, \pi) = \frac{|-2(7+2\lambda) + (-6-\lambda) - 2(-3+2\lambda) + 5|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-9-9\lambda|}{3} = 6 \Rightarrow |-9-9\lambda| = 18$$

Hay dos puntos que verifican la condición.

$-9 - 9\lambda = 18 \Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow P_r(1, -3, -9)$ $\quad$ $-9 - 9\lambda = -18 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P_r(9, -7, -1)$

3. Dos de los tres vértices de un triángulo son los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(1, 1, 3)$. El tercer vértice C está en la recta r que pasa por los puntos $P(-1, 0, 2)$ y $Q(0, 0, 2)$.

a) Determina la ecuación de la recta r.

b) Calcula las coordenadas del vértice C para que el área del triángulo sea $\sqrt{15}$ unidades cuadradas.

a) El vector director de r y un punto son, respectivamente, $\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1, 0, 0)$ y $Q(0, 0, 2)$. $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

b) Como C pertenece a la recta r, $C(\lambda, 0, 2)$ y con el vector $\overrightarrow{AC} = (\lambda - 1, -1, 1)$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ \lambda - 1 & -1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|(2, 2\lambda - 2, 0)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 4} = \sqrt{15} \Rightarrow 4\lambda^2 - 8\lambda + 8 = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 13 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 52}}{2} = 1 \pm \sqrt{14} \Rightarrow \begin{cases} C\left(1 + \sqrt{14}, 0, 2\right) \\ C'\left(1 - \sqrt{14}, 0, 2\right) \end{cases}$$

4. **Dadas las rectas** $r:\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$.

a) Determina un vector director de la recta *s*.

b) Calcula el plano π que contiene a *r* y es paralelo a *s*.

c) Encuentra el plano π que contiene a *r* y es perpendicular a *s*.

a) $\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ & \vec{n}_{\pi 1} & \\ & \vec{n}_{\pi 2} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-2) \to \vec{v}_s = (0,0,1)$

b) El vector director de *r* es $\vec{v}_r = (0,1,0)$.

El plano contendrá los vectores directores de *r* y *s* y pasará por un punto de *r*.

Por lo tanto: $\pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ & \vec{v}_r & \\ & \vec{v}_s & \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x=0$

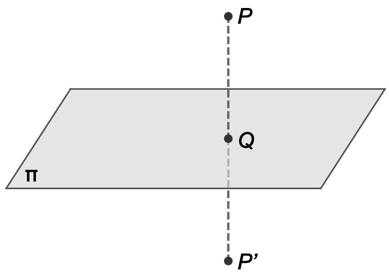
c) Si el plano es perpendicular a *s*,: $\vec{n}_\pi = \vec{v}_s = (0,0,1)$, por lo que el plano es $\pi \equiv z+d=0$.
Por otro lado, si contiene a *r*, contiene a cualquier punto de punto de *r*,
$P_r(0,\lambda,0): \pi(0,\lambda,0): 0+d=0 \to d=0 \to \pi: z=0$

5. **Dados el punto *P*(1, 0, 1), el plano π : x + 5y – 6z = 1, y la recta** $r:\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ **se pide:**

a) Calcular el punto *P*' simétrico a *P* respecto de π.

b) Hallar la distancia de *P* a *r*.

c) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y las intersecciones de π con los ejes coordenados *X*, *Y* y *Z*.



a) Hallamos la recta *s* que pasa por *P* y es perpendicular al plano

El vector director será $\vec{v}_s = \vec{n}_\pi = (1,5,-6)$ y un punto es *P* (1, 0, 1).

$s: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-1}{-6}$ y un punto genérico de *s* es $P_s(1+\lambda,\ 5\lambda,\ 1-6\lambda)$

Se halla el punto de corte *Q* entre la recta *s* y el plano:

$1+\lambda+5(5\lambda)-6(1-6\lambda)=1 \to 62\lambda = 6 \to \lambda = \dfrac{3}{31} \Rightarrow Q\left(\dfrac{34}{31}, \dfrac{15}{31}, \dfrac{13}{31}\right)$

P' es el simétrico de *P* respecto de *Q*, por tanto *Q* es el punto medio de $\overline{PP'}$

$Q = \left(\dfrac{1+x}{2}, \dfrac{y}{2}, \dfrac{1+z}{2}\right) = \left(\dfrac{34}{31}, \dfrac{15}{31}, \dfrac{13}{31}\right) \to \left\{ x = \dfrac{37}{31} \quad y = \dfrac{30}{31} \quad z = \dfrac{-5}{31} \to P'\left(\dfrac{37}{31}, \dfrac{30}{31}, \dfrac{-5}{31}\right)\right.$

b) Un punto de r es $P_r = (0,0,0)$ y un vector director $\vec{v}_r = (0,1,0)$. Como $\overrightarrow{P_rP} = (-1,0,-1) \to (1,0,1)$:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|} = \frac{\left|(1,0,1)\times(0,1,0)\right|}{\sqrt{1}} = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\| = \left|(-1,0,1)\right| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}\ u$$

c) Los puntos de corte del plano con los ejes coordenados: $A(1,0,0), B\left(0,\dfrac{1}{5},0\right)$ y $C\left(0,0,-\dfrac{1}{6}\right)$

El volumen será $V = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right| = \dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{6} \end{matrix}\right\| = \dfrac{1}{180}\ u^3$

PRUEBA II SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones referidas a los vectores $\vec{u}$ = (2, –1, 4), $\vec{v}$ = (0, 0, 1) y $\vec{w}$ = (–4, 2, –8) son ciertas

A. Son linealmente dependientes.

B. Son linealmente independientes.

C. El vector $\vec{w}$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

D. det $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

$\vec{w} = -2\vec{u}$ Son correctas las respuestas A, C y D.

2. Halla las coordenadas del vector $\vec{u}$ = (2, 4, 5) respecto de la base *B* = {(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)}.

A. Los vectores de *B* no forman base.

B. $\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

C. $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

D. (7, 1, 3)

$$(2, 4, 5) = a(0, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 1) \Rightarrow \begin{cases} 2 = b + c \\ 4 = a + b \\ 5 = a + c \end{cases} \Rightarrow \left\{ a = \frac{7}{2} \quad b = \frac{1}{2} \quad c = \frac{3}{2} \right. .$$

Por tanto, las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de la nueva base son $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Solución: C

3. El ángulo formado por el plano π : $x + y + z = 2$ y la recta $r : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ es:

A. 22º 12’ 27,56’’

B. 157º 47’ 32,44’’

C. 67º 47’ 32,44’’

D. 37º 47’ 32,44’’

$\overrightarrow{n_\pi}$ = (1, 1, 1); $\overrightarrow{u_r}$ = (1, 2, 3); $|\overrightarrow{n_\pi}| = \sqrt{3}$; $|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{14}$; $\text{sen}\left(\widehat{r, \pi}\right) = \frac{6}{\sqrt{14 \cdot 3}} \Rightarrow \left(\widehat{r, \pi}\right) = 67°\ 47’\ 32{,}44”$

Solución: C

4. Dados los planos π_1: $x + y - 2z + 3 = 0$ y π_2: $3y + z - 4 = 0$, señala cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.

A. La recta intersección de ambos planos tiene por vector director a $\vec{d}$ = (–7, 1, –3).

B. El plano $-x + 5y + 4z - 11 = 0$ pertenece al haz definido por π_1 y π_2.

C. Los planos forman un ángulo de 90º.

D. El punto (–2, 1, 1) pertenece a la recta definida por los dos planos.

Un vector normal de π_1 es (1, 1, −2). Un vector normal de π_2 es (0, 3, 1). No son proporcionales y, por tanto, los planos no son paralelos. Un vector de la recta determinada por los planos es (7, –1, 3). El plano de B pertenece al haz determinado por π_1 y π_2, ya que es $-\pi_1 + 2\pi_2 = 0$. Los planos no son perpendiculares, ya que el producto escalar de sus vectores no es nulo. (−2, 1, 1) sí pertenece a la recta ya que verifica sus ecuaciones.
Soluciones: A, B y D.

5. Dos puntos distintos *P* y *P'* son simétricos respecto un plano π.

1. $d(P, \pi) = d(P', \pi)$

2. Si $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{n_\pi}$; $M = \overrightarrow{PP'} \cap \overrightarrow{n_\pi}$; $d(P, M) = d(P', M)$

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$, pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$, pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son excluyentes

Solución B $\quad 1 \Rightarrow 2$, pero $2 \not\Rightarrow 1$

6. La posición relativa de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ y el plano $\pi : 2x - y - z + 3 = 0$ es:

A. El plano corta a la esfera en una circunferencia de centro $C(1, 1, 1)$ y radio 1.

B. El plano corta a la esfera en una circunferencia de centro $C(-2, 1, 1)$ y radio $\sqrt{2}$.

C. El plano es tangente a la esfera en el punto $P(1, 0, 2)$.

D. Ninguna de las anteriores.

La esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ tiene centro $C(1, 0, 0)$ y radio 2.

Como $d(C, \pi) = \left|\frac{2\cdot(-1)+3}{\sqrt{4+1+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{6}} < 2$. El plano corta a la esfera.

Solución: D, ya que el plano no es tangente a la esfera y los centros de las opciones A y B no pertenecen al plano.