PRUEBA I SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El 47 % de las personas de una ciudad son mujeres y el 53 % restante hombres. De entre las mujeres, un 28 % son jóvenes (entre 0 y 25 años), un 38% son adultas (entre 26 y 64 años) y un 34 % son de la tercera edad (65 años o más). De entre los hombres, un 26 % son jóvenes, un 43 % son adultos y un 31 % son de la tercera edad.

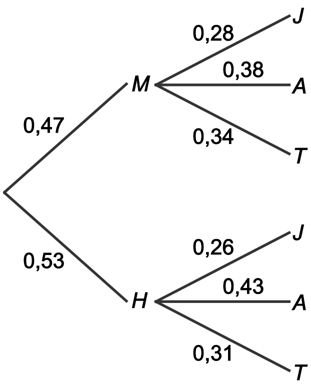
a) Si elegimos una persona de la ciudad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de la tercera edad?

b) Si elegimos una persona de la ciudad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la tercera edad?

c) Si elegimos una persona de la ciudad al azar de entre las de la tercera edad, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

d) Si elegimos una mujer de la ciudad al azar de entre las que tienen 26 años o más, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la tercera edad?

Se definen los sucesos M = "mujer", H = "hombre", J = "persona joven", A = "persona adulta" y T = "persona de la tercera edad"



a) Por la probabilidad condicionada se tiene:

$P(M \cap T) = P(M) \cdot P(T|M) = 0{,}47 \cdot 0{,}34 = 0{,}1598$

b) Por la probabilidad total se tiene:

$P(T) = P(M) \cdot P(T|M) + P(H) \cdot P(T|H) = 0{,}47 \cdot 0{,}34 + 0{,}53 \cdot 0{,}31 = 0{,}3241$

c) Por Bayes:

$$P(M \mid T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M) \cdot P(T \mid M)}{P(T)} = \frac{0{,}1598}{0{,}3241} = 0{,}4931.$$

d) Entre las mujeres, el porcentaje de mayores de 26 años es 38 % + 34 %. De ellas, las de la tercera edad son el 34 %. Por tanto:

$$P(T \mid M) = \frac{34}{38+34} = \frac{34}{72} = 0{,}4722$$

2. Juan, Isabel y Elena son tres estudiantes que deciden presentarse a las pruebas de nivel B2 de inglés que organiza la universidad. La probabilidad que tienen de superarla es, respectivamente, de $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ y $\frac{2}{5}$. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Los tres suspenden la prueba.

b) Sólo la supera uno de ellos.

c) Al menos uno de ellos la supera.

Las probabilidades de superar o no superar la prueba son:

Juan: $P(J) = \frac{3}{4} \Rightarrow$ De no superarla: $P(\bar{J}) = \frac{1}{4}$

Isabel: $P(I) = \frac{2}{3} \Rightarrow$ De no superarla: $P(\bar{I}) = \frac{1}{3}$

Elena: $P(E) = \frac{2}{5} \Rightarrow$ De no superarla: $P(\bar{E}) = \frac{3}{5}$

En todos los casos los sucesos (superar o no superar la prueba) son independientes.

a) P(los tres suspenden) = $P(\bar{J} \cap \bar{I} \cap \bar{E}) = P(\bar{J}) \cdot P(\bar{I}) \cdot P(\bar{E}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{20}$.

b) P(solo la supera uno) = [en todos los casos debe aprobar uno y suspender los otros dos] =

$$= P(J \cap \bar{I} \cap \bar{E}) + P(\bar{J} \cap I \cap \bar{E}) + P(\bar{J} \cap \bar{I} \cap E) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{17}{60}$$

c) P(al menos uno la supera) = 1– P(los tres suspenden) = $1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

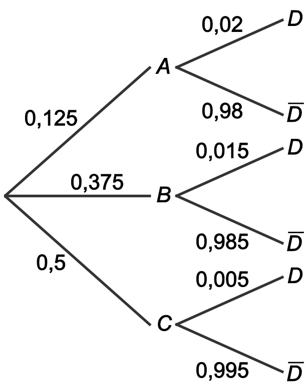
3. Una factoría dispone de tres máquinas para fabricar una misma pieza. La más antigua fábrica 1000 unidades al día, de las que el 2 % son defectuosas. La segunda máquina más antigua, 3000 unidades al día, de las que el 1,5 % son defectuosas. La más moderna fabrica 4000 unidades al día, con el 0,5 % defectuosas. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa?

b) Si una pieza elegida al azar es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina más antigua?

c) Sabiendo que una pieza elegida al azar no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la máquina más moderna?

Si A, B y C designan a las máquinas por orden de antigüedad y D indica el suceso pieza defectuosa:



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(C|D) =$ 0,125 · 0,02 + 0,375 · 0,015 + 0,5 · 0,005 = 0,010625

b) $P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(A)} = \frac{0{,}125 \cdot 0{,}02}{0{,}010625} = 0{,}2353$

c) $P\left((A \cup B) \mid \bar{D}\right) = \frac{P\left(A \cap \bar{D}\right) + P\left(B \cap \bar{D}\right)}{P\left(\bar{D}\right)} = \frac{0{,}125 \cdot 0{,}98 + 0{,}375 \cdot 0{,}985}{1 - 0{,}010625} = 0{,}4972$

4. **Un control de calidad se supera en cuatro de cada cinco aparejos de pesca. Si están sujetos a ese control un total de 225 artículos:**

a) ¿Cuántos artículos se espera que superen el control de calidad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que superen el control de calidad entre 170 y 187 (incluidos) artículos?

La probabilidad de que un determinado artículo supere el control de calidad es $p = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Se considera la variable Y: “número de artículos no defectuosos entre los 225”, $Y \sim \text{Bin}(n = 225, p = 0{,}8)$

a) El número esperado de artículos que superen el control de calidad será la media de Y: $\mu = 225 \cdot 0{,}8 = 180$.

b) Y puede aproximarse por la distribución normal $X \sim N\left(\mu = 180, \sigma = \sqrt{225 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}\right) = N\left(\mu = 180,\ \sigma = 6\right)$

$$P(170 \le Y \le 187) \simeq P(169{,}5 < X < 187{,}5) = P\left(\frac{169{,}5 - 180}{6} < Z < \frac{187{,}5 - 180}{6}\right) = P(-1{,}75 < Z < 1{,}25) =$$

$$= P(Z < 1{,}25) - P(Z < -1{,}75) = P(Z < 1{,}25) - [1 - P(Z < 1{,}75)] = 0{,}8944 - 1 + 0{,}9599 = 0{,}8543$$

5. **Una conocida cadena comercial tiene unas ventas mensuales que siguen una distribución normal de media 45 000 € y desviación típica de 3000 €. Calcula las siguientes probabilidades expresando el resultado en porcentajes:**

a) Probabilidad de que las ventas mensuales sean superiores a 50 000 euros.

b) Probabilidad de que las ventas mensuales estén comprendidas entre 42 000 € y 46 000 €.

c) Probabilidad de que las ventas mensuales sean inferiores a 39 000 euros.

d) Sabiendo que la probabilidad de que las ventas mensuales sean superiores a una determinada cantidad es del 1 %, ¿cuál es esa cantidad?

Sea X: “Ventas mensuales”, $X \sim N(\mu = 45000, \sigma = 3000)$

a) $P(X > 50000) = P\left(\frac{X - 45\,000}{3000} > \frac{50\,000 - 45\,000}{3000}\right) = P(Z > 1{,}67) = 1 - P(Z > 1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$

b) $P(42\,000 < X < 46\,000) = P\left(\frac{42\,000 - 45\,000}{3000} < \frac{X - 45\,000}{3000} < \frac{46\,000 - 45\,000}{3000}\right) = P(-1 < Z < 0{,}33) =$

$= P(Z < 0{,}33) - P(Z < -1) = P(Z < 0{,}33) - [1 - P(Z < 1)] = 0{,}6293 - 1 + 0{,}8413 = 0{,}4706$

c) $P(X < 39\,000) = P\left(\frac{X - 45\,000}{3000} < \frac{39\,000 - 45\,000}{3000}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

d) $P(Z > c) = 0{,}01 \Rightarrow c = 2{,}33 \Rightarrow \frac{X - 45\,000}{3000} = 2{,}33 \Rightarrow X = 45\,000 + 3000 \cdot 2{,}33 = 51990$ €

PRUEBA II SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Decide cuál de las siguientes afirmaciones son correctas:

A. Todas las variaciones con repetición son permutaciones.
B. Todas las variaciones sin repetición son permutaciones.
C. Todas las permutaciones son variaciones con repetición.
D. Todas las permutaciones son variaciones sin repetición.

Las permutaciones son un caso particular de variaciones sin repetición en donde coinciden el número de elementos y los elementos tomados. Solución: D

2. La solución de la ecuación $V_{x,3} = 105P_2$, es:

A. $x = 1$ **B**. $x = 3$ **C**. $x = 5$ **D**. $x = 7$

$V_{x,3} = 105P_2 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 105 \cdot 2! \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 210 = 0 \Rightarrow x = 7$

Solución: D

3. Para afirmar que la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ kx & \text{si} \quad a \le x \le b \\ t & \text{si} \quad x > b \end{cases}$ es una función de densidad, con $k, t, a, b \in \mathbb{R}$ nos dicen:

1. $a = 0$ **2. $b > 0$**

Analiza si la información es suficiente para contestar la cuestión:

A. 1 es suficiente por sí sola, pero 2 no.
B. 2 es suficiente por sí sola, pero 1 no.
C. Son necesarias las dos.
D. Faltan más datos.

t siempre es nulo. Si conocemos *a* y *b* la constante *k* la podemos deducir teniendo en cuenta que el área encerrada por la curva es 1. Por tanto faltan datos para responder.

Solución: D

4. Señala las respuestas correctas. Si $P(A)$ es la probabilidad de obtener al menos una cara cuando lanzamos cuatro caras, entonces:

A. El número de casos favorables es 4.
B. $P(A^c) = \frac{1}{16}$
C. $P(A) > \frac{5}{6}$
D. $P(A) + P(A^c) < 1$

Como $P(A) = \frac{15}{16}$, los únicos casos ciertos son B y C.

5. Una variable X sigue una distribución binomial de parámetros $n = 8$ y $p = 0,2$. La probabilidad de que $X = 6$ es aproximadamente:

A. 0,049 **B**. 0,0011 **C**. 0,0041 **D**. 0,025

$P(X = 6) = \binom{8}{6}(0,2)^6(0,8)^2 = 0,0011$

Solución B

6. Se lanza 100 veces al aire una moneda trucada, en la que la probabilidad de obtener cara es de 0,65. La probabilidad de obtener entre 60 y 70 caras es aproximadamente de:

A. 0,9558 **B**. 0,6939 **C**. 0,7064 **D**. 0,7448

Se considera la variable *Y*: "número de caras en los 100 lanzamientos", $Y \sim \text{Bin}(n = 100, p = 0,65)$

Y puede aproximarse por la distribución normal $X \sim N\left(\mu = 65, \sigma = \sqrt{100 \cdot 0,65 \cdot 0,35}\right) = N(\mu = 65, \ \sigma = 4,77)$

$P(60 \le Y \le 70) \simeq P(59,5 < X < 70,5) = P\left(\frac{59,5-65}{4,77} < Z < \frac{70,5-65}{4,77}\right) = P(-1,15 < Z < 1,15) = 2\Phi(1,15) - 1 = 0,7498$