PRUEBA I SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determina las matrices *A* y *B* que verifican:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{A}-\mathbf{3}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

¿Es regular la matriz AA^t?

Se multiplica por 3 la primera ecuación: $3A+3B=\begin{pmatrix} 9 & -6 & 9 & -3 \\ 15 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Sumando ambas ecuaciones: $5A=\begin{pmatrix} 10 & -5 & 15 & 0 \\ 15 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Despejando *A*: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la primera ecuación y despejando: $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Para que AA^t sea regular su determinante tiene que ser no nulo. Como *A* no es una matriz cuadrada, debemos calcular primero el producto que si que resulta ser una matriz cuadrada.

$$AA^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}\Rightarrow |AA^t|=\begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}=104\neq 0\Rightarrow AA^t \text{ es regular .}$$

2. Sean las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$.

a) Halla la matriz *X* que satisface la ecuación $AX - BCX = 3C$.

b) Calcula la matriz inversa de $A^t + B$, donde A^t representa la matriz traspuesta de *A*.

a) Se despeja la matriz *X.*

$$AX-BCX=3C\Rightarrow (A-BC)X=3C\Rightarrow X=(A-BC)^{-1}(3C)$$

$$A-BC=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A-BC|=4 \qquad \text{Adj}(A-BC)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \qquad (A-BC)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 21 \\ -\frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

b) $A^t+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$|A^t+B|=6 \qquad \text{Adj}(A^t+B)=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (A^t-B)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Considera las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-6} & \mathbf{-2}\end{pmatrix} \ \textbf{y} \ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

a) Calcula A^{15} e indica si la matriz A tiene inversa.

b) Calcula el determinante de la matriz $(-2BA^tB^{-1}I)^3$.

a) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}$ $\quad A^2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}$ $\quad A^{15}=A$

La matriz A tiene inversa si su rango es 2. Como $F_2 = -3F_1$, sigue que el rango de A es 1 y por tanto la matriz A no tiene inversa.

b) Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$|-2BA^tB^{-1}I|^3=\left[(-2)^2|B||A^t||B^{-1}||I|\right]^3=\left[4\cdot(-1)|A|\frac{1}{|B|}\cdot 1\right]^3=\left[4\cdot(-1)\cdot 0\cdot\frac{1}{(-1)}\cdot 1\right]^3=0$$

4. *Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{ay}+\boldsymbol{z}=\mathbf{1}\\ \boldsymbol{x}+(\mathbf{2}+\boldsymbol{a})\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\mathbf{0}\\ \mathbf{3}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{y}+\mathbf{2}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{a}\end{cases}$$

a) Discútelo en función del parámetro real a.

b) Resuélvelo para $a = 0$.

a) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}2 & -2a & 1\\ 1 & 2+a & 1\\ 3 & a^2 & 2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2 & -2a & 1 & 1\\ 1 & 2+a & 1 & 0\\ 3 & a^2 & 2 & a\end{pmatrix}$.

$|A|=a^2+a-2=0\Rightarrow a=-2 \quad a=1$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$, $|A| \neq 0$ y por tanto rg(A) = rg(A^*) = 3 = n.º de incógnitas. Sistema compatible determinado.

Para $a = -2$, $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0$, rg($A$) = 2. Añadiendo al menor anterior C_4 y F_3, se tiene $\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}=12\neq 0$ y, por tanto, rg(A^*) = 3, lo que implica que el sistema es incompatible.

Para $a = 1$, $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=8\neq 0$, rg($A$) = 2.

Por otro lado rg(A^*) = 2, ya que $F_3 = F_1 + F_2$.

Como rg(A) = rg(A^*) = 2 < n.º de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases}2x+z=1\\ x+2y+z=0\\ 3x+2z=0\end{cases}\xrightarrow[E_2\leftrightarrow E_1]{}\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x+z=1\\ 3x+2z=0\end{cases}\xrightarrow[\substack{E_2\to E_2-2E_1\\ E_3\to E_3-3E_1}]{}\begin{cases}x+2y+z=0\\ -4y-z=-1\\ -6y-z=0\end{cases}\xrightarrow[E_3\to 2E_3-3E_2]{}\begin{cases}x+2y+z=0\\ -4y-z=1\\ z=-3\end{cases}$$

Sustituyendo y despejando de abajo a arriba, se obtiene:

$$x=2 \qquad y=\frac{1}{2} \qquad z=-3$$

5. **La empresa de dulces navideños La Soteña comercializa en sus tres tiendas tres únicos productos: polvorones, mazapanes y mazapanes con chocolate. La tabla que aparece a continuación muestra la cantidad (en kg) de cada uno de los productos vendidos durante un día de la pasada Navidad y los ingresos de ese día en cada una de las tiendas:**

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3
Polvorones	**10**	**20**	**20**
Mazapanes	**30**	**20**	**30**
Mazapanes con chocolate	**20**	**10**	**30**
Ingresos	**240**	**170**	**310**

a) Determina un sistema de ecuaciones que permita conocer el precio del kilo de cada uno de los productos que comercializa la empresa.

b) Si el coste de elaboración y venta de un kilo de polvorones es de 1 €, el de un kilo de mazapanes es de 2 € y el de un kilo de mazapanes de chocolate es de 3 €, determina los beneficios de la empresa del día reflejado en la tabla.

(Nota: para calcular los beneficios aplica que Beneficios = Ingresos – Gastos)

a) Sea x el precio del kilo de polvorones, y el precio del kilo de mazapanes y z el precio del kilo de mazapanes de chocolate.

$$\begin{cases} 10x+30y+20z=240 \\ 20x+20y+10z=170 \\ 20x+30y+30z=310 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+3y+2z=24 \\ 2x+2y+z=17 \\ 2x+3y+3z=31 \end{cases} \underset{\substack{E_2\to E_2-2E_1 \\ E_3\to E_3-2E_1}}{\rightarrow} \begin{cases} x+3y+2z=24 \\ \quad -4y-3z=-31 \\ \quad -3y-z=-17 \end{cases} \underset{E_3\to 4E_3-3E_4}{\rightarrow} \begin{cases} x+3y+2z=24 \\ \quad -4y-3z=-31 \\ \qquad 5z=25 \end{cases}$$

$x = 2$ $y = 4$ $z = 5$

El precio del kg de polvorones es de 2 €, el del kg de mazapanes es de 4 € y el de mazapanes de chocolate de 5 €.

b) El beneficio obtiene es: 50(2 – 1) + 80(4 – 2) + 60(5 – 3) = 330 €

6. Una compañía dispone de 96 000 € para comprar ordenadores y licencias de un determinado software. Se sabe que necesita adquirir al menos 20 ordenadores y que el número de licencias debe ser mayor o igual que el de ordenadores. Además se tiene que el precio de cada ordenador es de 400 € y el de cada licencia es de 800 €.

a) ¿Cuántos ordenadores y cuántas licencias puede comprar para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

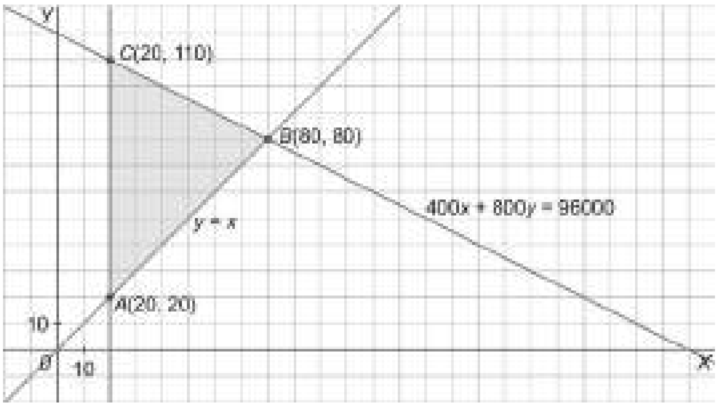
b) ¿Cuántos ordenadores y cuántas licencias debe comprar para que el coste total de la compra sea mínimo?, ¿y para que el número de licencias sea máximo?

a) x: n.º de ordenadores

y: n.º de licencias

Región factible:

$$\begin{cases} x \geq 20 \\ y \geq x \\ 400x + 800y \leq 96\,000 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$



El conjunto de soluciones está formado por todos los pares de coordenadas enteras que quedan dentro de la región factible.

b) Sea $C(x, y) = 400x + 800y$

$C(A) = 24\,000$ $C(B) = 96\,0000$ $C(C) = 96\,800$

El coste mínimo se consigue comprando 20 ordenadores y 200 licencias.

Sea $L(x, y) = y$.

$L(A) = 110$ $L(B) = 80$ $C(C) = 20$

El número máximo de licencias es 110.

PRUEBA II SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta si se consideran *A* y *B*, matrices cuadradas de orden 2.

A. Siempre se verifica que $(A + B)^2 + A^2 + B^2 + 2AB$.

B. En ningún caso se verifica que $(A + B)^2 + A^2 + B^2 + 2AB$.

C. En todos los casos, $(A + B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$.

D. Solo se verifica que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ cuando *A* y *B* conmutan entre sí.

Solución: D

2. Dado el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$, su valor se puede calcular mediante el desarrollo:

A. $\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

C. $\Delta = 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

B. $\Delta = -3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

D. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

La respuesta correcta es D, ya que es el desarrollo por C_2 $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Se quiere obtener el valor del rango de la matriz $A = (a_{ij})$, de dimensión 3×4. Para ello, se sabe que: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ y $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$, y se dan, como dato, los valores de:

1. Todos los menores de orden 2 que contienen a Δ_1.

2. Todos los menores de orden 3 que contienen a Δ_2.

Indica cuál de las siguientes afirmaciones, referidas a los datos conocidos, es cierta.

A. Las informaciones 1 y 2 son suficientes por sí solas para obtener el rango.

B. La información 1 es suficiente por sí sola, pero la 2 no.

C. La información 2 es suficiente por sí sola, pero la 1 no.

D. Son necesarias las dos informaciones juntas.

La respuesta correcta es C La información 2 es suficiente por sí sola, pero la 1 no, ya que se debería tener información acerca de los menores de orden tres que contienen a Δ_1.

4. El valor de *m* que hace que las rectas del plano *r*: $2x - 3y + 5 = 0$ y *s*: $-3x + my + 5 = 0$ sean paralelas es:

A. $m = 2$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -3$ **D.** $m = \frac{9}{2}$

La respuesta correcta es la D, $m = \frac{9}{2}$, para que las rectas sean paralelas, el sistema debe ser incompatible. Por tanto, los coeficientes de las incógnitas deben ser proporcionales pero los coeficientes independientes no deben guardar esta proporción.

5. **Indica cuál o cuáles de las afirmaciones siguientes son ciertas si se considera un problema de programación lineal con dos variables.**

A. Si el punto (a, b) es una solución óptima del problema, entonces obligatoriamente es un vértice de la región factible.

B. Si el punto (a, b) es la única solución óptima del problema, entonces (a, b) obligatoriamente pertenece a la región factible.

C. Si el punto (a, b) es la única solución óptima del problema, entonces es obligatoriamente un vértice de la región factible.

D. Si (a, b) no pertenece a la región factible, entonces no puede ser solución del problema.

Las soluciones correctas son la B, la C y la D.
Una solución puede ser óptima y no ser vértice, ya que puede ser una de las infinitas soluciones de un problema de programación lineal. Sin embargo, si es única, debe ser vértice. Obviamente, para que sea solución óptima, lo primero que debe verificar es que pertenezca a la región factible.

6. **La región factible de un determinado problema de programación lineal es acotada. La función objetivo es $f(x, y) = ax + by$. Se afirma que el máximo de dicha función se alcanza en el último vértice que la recta $ax + by = k$ toca a la región factible en su desplazamiento paralelo en dirección hacia $+\infty$ del eje Y.**
Analiza si la siguiente información proporcionada es suficiente para asegurar que la afirmación anterior es cierta.

1. $a > 0$, $b > 0$ **2.** $a < 0$, $b > 0$

A. Tanto la información 1 como la 2 son suficientes para asegurar que la afirmación es correcta.

B. La información 1 es suficiente, pero la 2 no.

C. La información 2 es suficiente, pero la 1 no.

D. Son necesarias las dos informaciones juntas.

La solución correcta es la A. Al ser positivo el coeficiente de y en la función objetivo, el máximo de dicha función se alcanza en el último vértice que la recta $ax + by = k$ toca a la región factible en su desplazamiento paralelo en dirección hacia $+\infty$ del eje Y.