PRUEBA I SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En un período de 7 horas, la altura en metros del agua acumulada en un depósito sigue la función:

$$\boldsymbol{h(t)=\begin{cases}\dfrac{(t-1)^2}{4}+1, & 0\le t\le 3\\ \dfrac{7}{4}-\dfrac{t-4}{4}, & 3<t\le 7\end{cases}}\qquad \textbf{(}\boldsymbol{t}\textbf{ mide el tiempo en horas)}$$

a) ¿Es continua? ¿Es derivable? ¿Cuándo crece y cuándo decrece $h(t)$?

b) ¿Cuáles son las alturas máximas y mínimas? ¿En qué momentos?

c) ¿Cuándo la altura del depósito es igual a un metro?

a) La funciones que definen a $h(t)$ son continuas y derivables en su dominio, por lo que solo habrá que estudiar la continuidad y derivabilidad de h en $t = 3$.

Continuidad

$$\left.\begin{array}{l} h(3)=2\\ \lim\limits_{t\to 3^-} h(t)=\lim\limits_{t\to 3^-}\left(\dfrac{(t-1)^2}{4}+1\right)=2\\ \lim\limits_{t\to 3^+}\left(\dfrac{7}{4}-\dfrac{t-4}{4}\right)=2\end{array}\right\}\Rightarrow h \text{ es continua en } t=3.$$

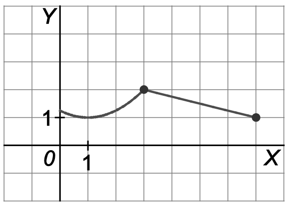
Derivabilidad

$$h'(t)=\begin{cases}\dfrac{t-1}{2} & 0<t<3\\ -\dfrac{1}{4} & 3<t<7\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l} h'(3^-)=\lim\limits_{t\to 3^-} h'(t)=\lim\limits_{t\to 3^-}\dfrac{t-1}{2}=1\\ h'(3^-)=\lim\limits_{t\to 3^-} h'(t)=\lim\limits_{t\to 3^-}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}\end{array}\Rightarrow h \text{ no es derivable en } t=3.$$

	0 – 1	1 – 3	3 – 7
h'	–	–	+
h	↘	↗	↘

b) h' se anula en $t = 1$. Fijándonos en la tabla anterior, se deduce que $t = 1$ es un mínimo. Por tanto la altura mínima se alcanza al cabo de 1 hora, siendo la altura de 1 m.

La función h está formada por una parábola y una recta, es fácil representarla:



En $t = 3$ se alcanza la altura máxima, siendo esta de 2 m.

c) Para ver en qué momento la altura del depósito es de 1 m, podemos fijarnos en la gráfica o hacerlo analíticamente:

$$0\le t\le 3 \quad \frac{(t-1)^2}{4}+1=1\Rightarrow \frac{(t-1)^2}{4}=0\Rightarrow t=1$$

$$3<t\le 7 \quad \frac{7}{4}-\frac{t-4}{4}=1\Rightarrow \frac{t-4}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=7$$

El depósito alcanza la altura de un metro a la primera y a la séptima hora.

2. Un restaurante ha sido abierto al público a principios de 2010 y la función

$$\boldsymbol{B(t)=\begin{cases}10\left(4t-t^2\right) & \text{si } 0\le t\le 3\\ 60-10t & \text{si } 3<t\le 7\end{cases}}$$

indica cómo han evolucionado sus beneficios (en miles de euros) en función del tiempo *t* (en años) transcurrido desde su apertura, correspondiendo *t* = 0 a principios de 2010.

a) Estudia en qué periodos se ha producido un aumento y en los que se ha producido una disminución de sus beneficios. ¿A cuánto han ascendido sus beneficios máximos? ¿En qué año los han obtenido?

b) Representa la gráfica de la función $B(t)$. ¿En algún año después de su apertura no obtuvieron beneficios? ¿A partir de algún año ha dejado de ser rentable el restaurante?

La función es $B(t)=\begin{cases}10\left(4t-t^2\right) & \text{si } 0\le t\le 3\\ 60-10t & \text{si } 3<t\le 7\end{cases}$ es continua en t =3, pero no derivable.

a) La variación de la función (crecimiento y decrecimiento) se determina a partir del estudio de su derivada:

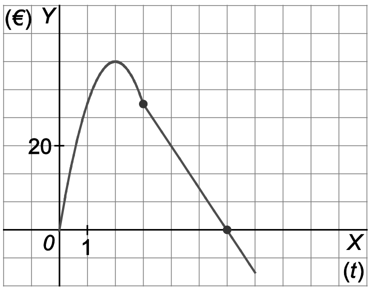
$B'(t)=\begin{cases}10\left(4-2t\right) & \text{si } 0\le t< 3\\ -10 & \text{si } 3<t\le 7\end{cases} \Rightarrow$.   Se anula cuando $4-2t=0\Rightarrow t=2$.

	0	2	3	7
B'	–	–	+	
B	↗	↘	↘	

Los beneficios aumentan en los dos primeros años; disminuyen en los años siguientes.

El máximo beneficio se alcanza a los 2 años, al final del año 2011 (o a principios de 2012), siendo ese beneficio de $B(2) = 10 \cdot 4 = 40 \Rightarrow$ 40 000 €.

b) Con los datos obtenidos (crecimiento, máximo y decrecimiento) y teniendo en cuenta que la función está formada por un trozo de parábola y por un trozo de recta, puede dibujarse dando algunos valores: (0, 0), (1, 30), (2, 40) que es un máximo, (4, 20), (6, 0).



3. Dada la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$, calcula los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*, sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la curva en *x* = 0 es –24, que dicha función tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa *x* = 2 y un punto de inflexión en *x* = –1.

De los datos del enunciado, se deduce:

- La pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es $-24 \Rightarrow f'(0)=-24$.
- Mínimo relativo en $x = 2 \Rightarrow f'(2)=0$.
- Punto de inflexión en $x = -1 \Rightarrow f''(-1)=0$.

Derivando sucesivamente la función, se obtiene: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$

Sustituyendo se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases}c=-24\\ 12a+4b=24\\ -6a+2b=0\end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, se obtiene: $a = 1$, $b = 3$ y $c = -24$.

La función buscada es $f(x)=x^3+3x^2-24x+3$.

4. Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+6 & \text{si } x\le -1 \\ bx^2-2x+1 & \text{si } -1<x\le 2 \\ \dfrac{x-5}{(x+1)^2} & \text{si } x>2 \end{cases}$**:**

a) Determina los valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales la función es continua en todo su dominio.

b) Calcula la integral definida $\int_3^4 f(x)dx$.

a) Las funciones que definen $f(x)=\begin{cases} ax+6 & \text{si } x\le -1 \\ bx^2-2x+1 & \text{si } -1<x\le 2 \\ \dfrac{x-5}{(x+1)^2} & \text{si } x>2 \end{cases}$ son continuas, cada una en su dominio, por lo que, los únicos puntos que hay que estudiar son $x = -1$ y $x = 2$.

Para que la función sea continua en esos puntos deben coincidir los límites laterales con el valor de la función en dichos puntos, es decir, se debe cumplir que:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

En $x = -1$: $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(ax+6)=-a+6$;

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(bx^2-2x+1)=b+3$

En $x = 2$: $f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(bx^2-2x+1)=4b-3$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-5}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{3}$

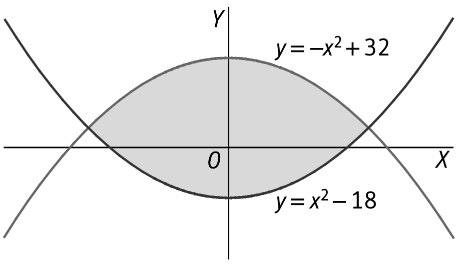
Igualando los límites laterales se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -a+6=b+3 \\ 4b-3=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+6=\dfrac{2}{3}+3 \Rightarrow a=\dfrac{7}{3} \\ b=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

b) $\displaystyle\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\frac{x-5}{(x+1)^2}dx=\int_3^4\frac{x+1-6}{(x+1)^2}dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x+1}-\frac{6}{(x+1)^2}\right)dx=\left[\ln(x+1)+\frac{6}{x+1}\right]_3^4=$

$=\left(\ln 5+\dfrac{6}{5}\right)-\left(\ln 4+\dfrac{6}{4}\right)=\ln 5-\ln 4-\dfrac{6}{20}=\ln\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{10}$.

5. Calcula el área limitada por las parábolas $y=x^2-18$ e $y=-x^2+32$. En la imagen siguiente aparece sombreada el área solicitada.



Se calculan los puntos de corte de las parábolas: $x^2-18=-x^2+32 \Rightarrow 2x^2=50 \Rightarrow x=-5$ y $x = 5$.

Como el área solicitada aparece sombreada en la figura dada, por la simetría, se tiene que:

$$S=2\int_0^5\left(-x^2+32-(x^2-18)\right)dx=2\int_0^5\left(-2x^2+50\right)dx=2\left(-\frac{2x^3}{3}+50x\right)\Bigg|_0^5=2\left(-\frac{250}{3}+250\right)=\frac{1000}{3}\ \text{u}^2.$$

PRUEBA II SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Indica qué afirmación es cierta referida a la función *f*: (0, + ∞) → $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2}$.

A. La gráfica de *f* no tiene asíntotas ni verticales ni horizontales.

B. La gráfica de *f* no corta nunca al eje *X*.

C. El eje *Y* es asíntota vertical de la gráfica de *f*.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

Analicemos cada opción y vayamos descartando:

A. Observamos que *x* = 0 es una asíntota vertical de *f*(*x*) ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Falsa

B. $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2}=0$ si $x^3+3x-1=0$ y esta ecuación tiene al menos una solución real ya que un polinomio de 3^er^ grado corta al menos una vez al eje *X*. Falsa

C. Es cierta como hemos comprobado en A.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$. Falsa

2. Sea *f* : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

A. Si *f*(2)*f*(3) < 0, existe algún número $c\in(2,3)$ con *f*(*c*) = 0.

B. Si *f* es continua en [2, 3] y no se anula en [2, 3], entonces *f* (2)*f* (3) > 0.

C. Si *f* es continua en [2, 3] y se anula alguna vez en ese intervalo, entonces *f*(2) y *f*(3) tienen diferente signo.

D. Si *f* es continua en [2, 3] y *f*: [2, 3] → [2, 3], existe algún número *c* en [2, 3] tal que $\frac{f(c)}{c}=1$.

A. Es cierto si la función es continua. Un contraejemplo es $f(x)=\begin{cases}-1 & x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$.

B. Si *f*(2)*f*(3) fuera negativo, *f*(2) y *f*(3) tendrían distinto signo y por el teorema de Bolzano existiría un número *c* en [2, 3] con *f*(*c*) = 0 pero *f* no se anula en [2, 3]. Es verdadera.

C. Es falsa. Un contraejemplo es $f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$.

D. Es verdadera.

Consideremos en este caso la función *g*(*x*) = *f*(*x*) – *x* que es continua en [2, 3] y estudiamos el signo de *g*(2) ·*g*(3) = (*f*(2) – 2) (*f*(3) – 3):

Como $f(3)\in[2,3]\Rightarrow f(3)\le 3\Rightarrow\begin{cases}f(3)=3\Rightarrow\frac{f(3)}{3}=1\\ f(3)<3\Rightarrow f(3)-3<0\ (1)\end{cases}$

Como $f(2)\in[2,3]\Rightarrow f(2)\ge 2\Rightarrow\begin{cases}f(2)=2\Rightarrow\frac{f(2)}{2}=1\\ f(2)>2\Rightarrow f(2)-2>0\ (1)\end{cases}$

Si ocurre (1), *g*(2)*g*(3) es negativo y, por tanto, *g*(2) y *g*(3) tiene distinto signo. Usando el teorema de Bolzano sabemos que existe algún número *c* en [2, 3] tal que *g*(*c*) = 0 y por tanto $\frac{f(c)}{c}=1$.

Otra forma de verlo es gráficamente: como f es continua y va de [2, 3] al [2, 3], a la fuerza, su gráfica corta en algún punto (*c*, *f*(*c*)) al segmento que une los puntos (2, 2) y (3, 3), es decir, a la recta *y* = *x*, por lo que *f*(*c*)=*c*.

3. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas si $f(x)$ es la función $f(x) = x|x|$ definida en $\mathbb{R}$?

A. Como $g(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$, $f(x)$ tampoco lo es.

B. Para todo x real, $f'(x) = |x| + x$

C. $f'(0) = 0$.

D. Si $x < 0$, $f'(x) + g'(x) = 0$ siendo $g(x) = x^2$.

Son correctas las afirmaciones B y C.

4. Sea f una función derivable y $g(x) = x + f^2(x)$. Indica la relación existente entre estas dos afirmaciones referidas a f y g.

1. La tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa 0 es paralela a la recta $y = x$.

2. La gráfica de $f(x)$ pasa por el origen.

A. $2 \Rightarrow 1$, pero $1 \not\Rightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$, pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

La respuesta correcta es la B, puesto que si $f(0) = 0$, $g'(0) = 1 + 2f(0) \cdot f'(0) = 1$, pero no es cierto lo contrario, ya que podría ser $f'(0) = 0$.

5. Señala cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas si se considera la función $f(x) = \text{sen}[g(x)]$, siendo $g(x)$ un polinomio de 4.º grado.

A. La gráfica de f puede cortar 4 veces el eje horizontal en el intervalo $[0, 2\pi]$

B. El máximo número de puntos de la gráfica de f con tangente horizontal es 5.

C. Si $g'(x) \neq 0$, entonces $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leq 1$.

D. La gráfica de f es periódica de período 2π.

A. Es cierta. Como $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, $\text{sen}(g(x))$ cortará infinitas veces el X (siempre que $g(x) = k\pi$).

B. Es falsa. Habrá infinitos puntos con tangente horizontal (siempre que $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

C. Es cierta. $f'(x) = \cos(g(x))g'(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \cos(g(x)) \Rightarrow \left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right| = |\cos(g(x))| \leq 1$, siendo $g'(x) \neq 0$.

D. Es falsa, ya que, por ejemplo, el período de la función $h(x) = \text{sen}(px)$ es $T = \dfrac{2\pi}{p}$, pues $h(x) = \text{sen}(px) = \text{sen}(px + 2\pi) = \text{sen}\left(p\left(x + \dfrac{2\pi}{p}\right)\right) = h\left(x + \dfrac{2\pi}{p}\right)$.

6. **Para decidir el signo de la integral $\int_0^2 f(x)dx$, siendo *f* una función continua y creciente, se sabe que:**

1. $f(2) > 0$ **2 $f(0) > 0$**

Indica qué afirmación es correcta referida a la información de la que se dispone.

A. 1 es suficiente por sí sola pero 2 no.

B. 2 es suficiente por sí sola, pero 1 no.

C. Son necesarias las dos juntas.

D. Hacen faltan más datos.

La respuesta correcta es la B.

Si $f(0) > 0$, como *f* es creciente, se deduce que *f* es positiva en el intervalo [0, 2], por lo que $\int_0^2 f(x)dx$ es positiva.

En cambio si $f(2) > 0$, no se aporta ninguna información sobre el signo de la función en [0, 2] y no se puede concluir nada acerca del signo de la integral.