PRUEBA I SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelve las siguientes cuestiones.

a) Se elige al azar un número de 4 cifras distintas escrito con las cifras 7, 2, 3 y 8. Calcula la probabilidad de que dicho número sea mayor que 7500.

b) Sean A y B dos sucesos independientes, tal que $P(A) = 0{,}2$ y $P(A \cap B) = 0{,}16$. Halla la probabilidad de $\overline{A} \cap \overline{B}$.

a) Casos favorables: Los de la forma 78 _ _ y los de la forma 8 _ _ _ , es decir, $P_2 + P_3 = 2! + 3! = 8$

Casos posibles: $P_4 = 4! = 24$

Por tanto, P(El número sea mayor de 7500) = $\dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$.

b) Si los sucesos A y B son independientes:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow 0{,}16 = 0{,}2 \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{0{,}16}{0{,}2} = 0{,}8$$

Si dos sucesos son independientes también lo son sus contrarios.

Como $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ y $P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, se tendrá:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$$

2. Una urna, *A*, contiene siete bolas numeradas del 1 al 7. Otra urna, *B*, contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5. Se lanza una moneda equilibrada, de forma que si sale cara, se extrae una bola de la urna *A*, y, si sale cruz, se extrae de la urna *B*.

Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) "La bola haya sido extraída de la urna A y el número sea par".

b) "El número de la bola extraída sea par".

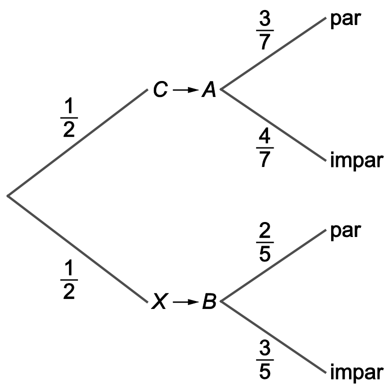
c) "La bola sea de la urna A, si ha salido un número par".

Se consideran los sucesos:

C = "salir cara" $\quad$ X = "salir cruz"

A = "se elije la urna A" $\quad$ B = "se elije la urna B"

Par = "se extrae n.º par" $\quad$ Impar = "se extrae nº impar"



a) Aplicando la fórmula de la probabilidad condicionada se tiene:

$$P(A \cap \text{par}) = P(A)P(\text{par}|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

b) Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total se tiene:

$$P(\text{par}) = P(A)P(\text{par}|A) + P(B)P(\text{par}|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{29}{70}$$

c) Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(A\,|\,\text{par}) = \frac{P(A)P(\text{par}\,|\,A)}{P(\text{par})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{29}{70}} = \frac{15}{29}$$

3. En una localidad llueve en 73 de los 365 días del año. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva más de 2 días en una semana cualquiera?

La probabilidad de que llueva un día cualquiera es $p = \frac{73}{365} = 0,2$.

Se considera la variable X: "número de días que llueve en una semana", $X \sim \text{Bin}(n = 7,\ p = 0,2)$.

Entonces, la probabilidad de que llueva más de 2 días en una semana cualquiera será:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) =$$

$$= 1 - \binom{7}{0} 0,2^0 \cdot 0,8^7 - \binom{7}{1} 0,2 \cdot 0,8^6 - \binom{7}{2} 0,2^2 \cdot 0,8^5 = 1 - 0,8^7 - 7 \cdot 0,2 \cdot 0,8^6 - 21 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^5 = 0,148\ 032$$

4. La duración de las baterías de una tableta tiene una distribución normal con media igual a 9 horas y con desviación típica igual a 2 horas. Se toma una muestra aleatoria de 16 tabletas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las baterías esté entre 7 horas y media, y 9 horas y media?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las baterías sea mayor de 10 horas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las baterías sea menor de 8 horas?

La media de las muestras de tamaño n obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ, $N(\mu, \sigma)$, se distribuye según una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. En este caso: $N\left(\mu = 9,\ \sigma = \frac{2}{\sqrt{16}}\right) = N(\mu = 9,\ \sigma = 0,5)$

a) $P(7,5 < \bar{X} < 9,5) = P\left(\frac{7,5-9}{0,5} < Z < \frac{9,5-9}{0,5}\right) = P(-3 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -3) =$

$= 0,8413 - (1 - 0,9987) = 0,84.$

b) $P(\bar{X} > 10) = P\left(Z > \frac{10-9}{0,5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 09772 = 0,0228$

c) $P(\bar{X} < 8) = P\left(Z < \frac{8-9}{0,5}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228.$

5. Una empresa produce dispositivos electrónicos con pantalla HD. La resolución de estas pantallas sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 20 píxeles. Se tomó una muestra aleatoria de 100 dispositivos electrónicos y mediante un estudio estadístico se obtuvo el intervalo de confianza (1076,08; 1083,92) para la resolución media de las pantallas elegidas al azar.

a) Calcula el valor de la resolución media de las pantallas de los 100 dispositivos electrónicos elegidos para la muestra.

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo.

c) ¿Cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo? Sin calcular el intervalo de confianza, ¿se podría admitir que la media poblacional sea μ = 1076,08 píxeles con un nivel de confianza del 90 %? Razona tus respuestas.

a) La media muestral es el punto medio del intervalo: $\bar{x} = \dfrac{1076,08 + 1083,92}{2} = 1080$

b) Como σ = 20, n = 100, $\bar{x}$ = 1080 y $\bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1083,92$, se tiene:

$1080 + z_{\alpha/2}\dfrac{20}{\sqrt{100}} = 1083,92 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \dfrac{3,92 \cdot 10}{20} = 1,96 \Rightarrow$ Hay un 95 % de confianza.

c) La amplitud del intervalo es $2 \cdot \left(z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$.

En este caso, puesto que σ es fijo, la amplitud depende de los valores de $z_{\alpha/2}$ y de n.

Si aumenta el tamaño muestral, el intervalo puede estrecharse; pero si se pide una mayor confianza, lo que significa que $z_{\alpha/2}$ debe ser mayor, el intervalo se ensancha.

Igualmente, para un menor nivel de confianza (manteniendo constantes los demás parámetros) el intervalo disminuye su amplitud.

Así, si el nivel de confianza pasa del 95 % al 90 % el intervalo se estrecha, sería (1076,08; 1083,92), que tiene menor amplitud que el dado. Esto significa que 1076,08 quedaría fuera de él. Luego no se puede admitir que la media poblacional sea μ = 1076,08 píxeles. En todos los casos los sucesos (superar o no superar la prueba) son independientes.

PRUEBA II SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. De un experimento se sabe que $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,6$ y $P(A|B) = 0,15$. La probabilidad del suceso $A \cup B$ es de:

A. 0,09 **B.** 0,45 **C.** 0,7 **D.** 0,76

$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = 0,6 \cdot 0,15 = 0,09$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,25 + 0,6 - 0,09 = 0,76$

2. Decide cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

A. Si A y B son dos sucesos incompatibles, entonces $P(A) + P(B) = 1$.

B. Si A y B son dos sucesos independientes, entonces son también incompatibles.

C. Si A es un suceso imposible, también es independiente con cualquier otro suceso.

D. Si A es un suceso seguro, también es independiente con cualquier otro suceso.

Son correctas C y D.

Si $P(A) = 0$, entonces $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ y $P(A) \cdot P(B) = 0$

Si $P(A) = 1$, entonces $P(A \cap B) = P(B)$ y $P(A) \cdot P(B) = P(B)$

3. **Si Z sigue una distribución $N(0, 1)$, $P(Z > 1{,}2)$ es:**

A. 0,8849 **B.** 0,7801 **C.** 0,2299 **D.** 0,1151

$P(Z > 1{,}2) = 1 - P(Z < 1{,}2) = 1 - 0{,}8849$ Solución: D

4. **Para afirmar que la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ kx & \text{si } a \le x \le b \\ t & \text{si } x > b \end{cases}$ es una función de densidad, con k, t, a, $b \in \mathbb{R}$ nos dicen:**

1. $a = 0$ **2.** $b > 0$

A. 1 es suficiente por sí sola, pero 2 no.

B. 2 es suficiente por sí sola, pero 1 no.

C. Son necesarias las dos.

D. Faltan más datos.

t siempre es nulo. Si conocemos *a* y *b* la constante *k* la podemos deducir teniendo en cuenta que el área encerrada por la curva es 1. Por tanto faltan datos para responder.

Solución: D

5. **Dadas las siguientes afirmaciones:**

1. ***X* es una variable aleatoria discreta.**

2. ***X* es una variable aleatoria continua.**

3. **$P(X = k) = 0$, siendo k un número real cualquiera.**

¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones entre las afirmaciones son ciertas?

A. $1 \Rightarrow 3$ **B.** $2 \Rightarrow 3$ **C.** $3 \Rightarrow 1$ **D.** $3 \Rightarrow 2$

Solución: B

6. **Indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones pueden completar la frase haciendo que la afirmación sea cierta.**

"A medida que el tamaño de la muestra tiende a infinito…

A. …la desviación típica de la distribución en el muestreo de la proporción tiende a 0".

B. …la media de la distribución en el muestreo de la media tiende a infinito".

C. …la desviación típica de la distribución en el muestreo de la media tiende a 0".

D. …la media de la distribución en el muestreo de las sumas muestrales tiende a 0".

A y C son correctas.

B no es correcta, ya que la media coincide con la media poblacional.

D no es correcta porque tiende a infinito, siempre que la media poblacional no sea nula.