1 Matrices

EJERCICIOS PROPUESTOS

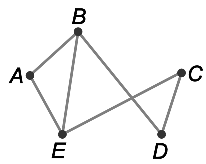
1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Escribe una matriz A de orden 3×4 tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i+j}{2} - 1 & \text{si } i > j \\ \sqrt{ij} & \text{si } i = j \\ (-3j)^i & \text{si } i < j \end{cases}$$

Haciendo los cálculos correspondientes tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -9 \\ \frac{1}{2} & 2 & 81 \\ 1 & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

4. Los pueblos A, B, C, D y E están unidos por carreteras de doble sentido tal y como muestra el grafo de la figura. Escribe la correspondiente matriz de adyacencia.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5 y 6. Ejercicios resueltos.

7. Calcula el valor de a, b y c para que las siguientes matrices sean simétricas.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2a-1 & \sqrt{b} \\ a & -3 & -3 \\ 9 & c & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & a^2+a \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Para la matriz A tenemos: $\begin{cases} 2a - 1 = a \Rightarrow a = 1 \\ \sqrt{b} = 9 \Rightarrow b = 81 \\ c = -3 \end{cases}$

Para la matriz B tenemos: $a^2 + a = 6 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2 \quad a = -3$

8. Indica, razonadamente, si las siguientes matrices son o no escalonadas.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4 & 8\\ 0 & -3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 4 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

La matriz *A* sí es escalonada, ya que la fila formada por todo ceros ocupa el último lugar y el primer elemento no nulo de las filas segunda y tercera está más a la derecha que el primer elemento no nulo de las filas primera y segunda, respectivamente.

La matriz *B* no es escalonada, ya que el primer elemento no nulo de la segunda fila no está más a la derecha que el primer elemento no nulo de la fila primera.

La matriz *C* no es escalonada, ya que el primer elemento no nulo de la segunda fila no está más a la derecha que el primer elemento no nulo de la fila primera.

9 y 10. Ejercicios resueltos.

11. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 5\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $3A+2B$

b) $\frac{1}{2}A-3B$

c) Comprueba que se verifica la propiedad $(A+B)^t=A^t+B^t$.

a) $3A+2B=\begin{pmatrix}-6 & 3 & 0\\ 9 & 9 & 15\\ 6 & -6 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 6\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 0\\ 9 & 7 & 21\\ 6 & -2 & 7\end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{2}A-3B=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2}\\ 1 & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 9\\ 0 & 6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{13}{2}\\ 1 & -7 & -\frac{11}{2}\end{pmatrix}$

c) $A+B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 8\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow(A+B)^t=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 8 & 3\end{pmatrix}$

$A^t=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & -2\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix},\ B^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A^t+B^t=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 8 & 3\end{pmatrix}$

12. Calcula, en cada caso, el valor de las letras que aparecen para que:

a) $A = \begin{pmatrix} x+y & 3y+x \\ 2x+y & 13 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3x+6 & -4y-1 \\ -14 & -x^2+3y \end{pmatrix}$ sean opuestas.

b) Si $A = \begin{pmatrix} a^2 & 2b+c \\ b+2c & 2a-5 \\ b^2+c^2 & 41 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5a & 4 & 16 \\ 8 & 3a & a^2+b^2 \end{pmatrix}$, entonces $A^t = B$.

a) $A = -B \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3x-6 \\ 3y+x = 4y+1 \\ 2x+y = 14 \\ 13 = x^2-3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y = -6 \\ x-y = 1 \\ 2x+y = 14 \\ x^2-3y = 13 \end{cases} \Rightarrow x = 5,\ y = 4$

b) $A^t = B \Rightarrow \begin{cases} a^2 = -5a \\ b+2c = 4 \\ b^2+c^2 = 16 \\ 2b+c = 8 \\ 2a-5 = 3a \\ 41 = a^2+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+5a = 0 \\ b+2c = 4 \\ b^2+c^2 = 16 \\ 2b+c = 8 \\ a = -5 \\ a^2+b^2 = 41 \end{cases} \Rightarrow a = -5,\ b = 4,\ c = 0$

13 a 16. Ejercicios resueltos.

17. Calcula $A^2 - 3A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e *I* la matriz identidad de orden 2.

$$A^2 - 3A - I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Explica razonadamente si puedes realizar los productos *AB* y *BA*. En caso afirmativo, halla los resultados.

La matriz *A* tiene dimensión 3 x 4 y la matriz *B* es de orden 3, es decir, tiene dimensión 3 x 3. Por tanto, el producto *AB* no se puede realizar, pues no coincide el número de columnas de *A* con el de filas de *B*. En cambio, sí se puede realizar el producto *BA*, pues coincide el número de columnas de *B* con el de filas de *A*, y el resultado es una matriz de dimensión 3 x 4.

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

19. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, explica razonadamente si existen matrices *B* y *C* tales que *AB* y *CA* sean matrices de tres filas.

La matriz *A* tiene dimensión 2 x 4. Para que pueda efectuarse el producto *AB*, la matriz *B* debe tener 4 filas, ya que el número de columnas de *A* debe coincidir con el de filas de *B*. Del mismo modo, para que pueda efectuarse el producto *CA* la matriz *C* debe tener 2 columnas.

Así, si la dimensión de *B* es 4 x *b*, la matriz producto *AB* tendrá dimensión 2 x *b*, es decir, la matriz *AB* tendrá 2 filas independientemente de qué valor tome *b*, luego no existe ninguna matriz *B* tal que *AB* sea una matriz de 3 filas.

Análogamente, si la dimensión de *C* es *c* x 2, la matriz *CA* tendrá dimensión *c* x 4, por lo *CA* tendrá 3 filas si $c = 3$, es decir, siempre que *C* sea una matriz de dimensión 3 x 2.

20. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\3&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-3&2&4\\1&0&-1\end{pmatrix}$**, comprueba que se verifica la propiedad:** $(AB)^t=B^tA^t$

$$AB=\begin{pmatrix}-2&1&1\\3&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\-3&2&4\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2&5\\9&2&-11\\2&2&-2\end{pmatrix}\Rightarrow(AB)^t=\begin{pmatrix}-4&9&2\\-2&2&2\\5&-11&-2\end{pmatrix}$$

$$B^tA^t=\begin{pmatrix}1&-3&1\\2&2&0\\-1&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3&1\\1&-2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&9&2\\-2&2&2\\5&-11&-2\end{pmatrix}$$

21. Ejercicio interactivo.

22. Ejercicio resuelto.

23. Calcula el rango de las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&-6\\4&6&-12\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&-3&5&0\\1&-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-7F_1]{F_2\to F_2-4F_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-2F_2]{}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(A)=2$$

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&-6\\4&6&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-4F_1]{F_2\to F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&5&-6\\0&10&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-2F_2]{}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&5&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(B)=2$$

$$C=\begin{pmatrix}2&-3&5&0\\1&-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2\to 2F_2-F_1]{}\begin{pmatrix}2&-3&5&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(C)=1$$

24. Aplica el método de Gauss para calcular el rango de:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\1&1&3&2&1\\1&1&2&1&7\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&-1&4&4\\2&1&2&-3\\2&-3&18&13\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\1&1&3&2&1\\1&1&2&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F_2\to F_2-F_1}\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\0&0&1&1&-2\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(A)=3$$

$$B=\begin{pmatrix}0&-1&4&4\\2&1&2&-3\\2&-3&18&13\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\begin{pmatrix}2&1&2&-3\\0&-1&4&4\\2&-3&18&13\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\begin{pmatrix}2&1&2&-3\\0&-1&4&4\\0&-4&16&16\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-4F_2]{}\begin{pmatrix}2&1&2&-3\\0&-1&4&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(B)=2$$

25 a 27. Ejercicios resueltos.

28. Aplicando la definición, calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Pongamos $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, tenemos $AA^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+c & -b+d\\ -a+2c & -b+2d\end{pmatrix}$ y, por tanto:

$$AA^{-1}=I\Rightarrow\begin{cases}-a+c=1\\ -a+2c=0\end{cases}\text{ y }\begin{cases}-b+d=0\\ -b+2d=1\end{cases}\Rightarrow a=-2,\ c=-1,\ b=1,\ d=1\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Pongamos $B^{-1}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$, tenemos $BB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+g & b+h & c+i\\ d-g & e-h & f-i\\ g & h & i\end{pmatrix}$ y, por tanto:

$$\begin{cases}a+g=1\\ d-g=0,\\ g=0\end{cases}\begin{cases}b+h=0\\ e-h=1\\ h=0\end{cases} y \begin{cases}c+i=0\\ f-i=0\\ i=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\ b=0,\ c=-1\\ d=0,\ e=1,\ f=1\\ g=0,\ h=0,\ i=1\end{cases}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

29. Calcula *X* de forma que $\boldsymbol{AX+B=C}$, siendo:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -5\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 2 & -3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & -6\end{pmatrix}$$

$$AX+B=C\Rightarrow AX=C-B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}(C-B)\Rightarrow X=A^{-1}(C-B)$$

Calculemos A^{-1} con el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & -5 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_2\to F_2+2F_1}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)\underset{F_1\to F_1-3F_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & -5 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)\underset{F_1\to -F_1}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 5 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=A^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -39\\ 6 & -15\end{pmatrix}$.

30. Calcula *X* de forma que $\boldsymbol{XA-B=2C}$, siendo:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & -3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$XA-B=2C\Rightarrow XA=2C+B\Rightarrow XAA^{-1}=(2C+B)A^{-1}\Rightarrow X=(2C+B)A^{-1}$$

Calculemos A^{-1} con el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_1\to F_1-\frac{1}{2}F_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_2\to\frac{1}{2}F_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=(2C+B)A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -9\\ 3 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 3 & -6\end{pmatrix}$.

31. Comprueba que el rango de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2 y observa qué ocurre si se intenta calcular A^{-1} por el método de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_2}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Si intentamos aplicar el método de Gauss-Jordan tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - F_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El hecho de que en la parte izquierda de la expresión aparezca una fila de todo ceros indica que no es posible obtener la matriz identidad en la parte izquierda, con lo que la matriz A no tiene inversa.

32. Utilizando el método de Gauss-Jordan, calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to 2F_2 - F_1}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1 \to 5F_1 + F_2}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to \frac{1}{10}F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{5}F_2}}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Inversa de B:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 \to 2F_1 - 3F_2}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to -\frac{1}{2}F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{2}F_2}}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Inversa de C:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to 5F_1 + 2F_2 \\ F_3 \to 5F_3 - 2F_2}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -2 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 + 3F_3}}{\to}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & -15 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -2 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to \frac{1}{5}F_1 \\ F_2 \to -\frac{1}{5}F_2 \\ F_3 \to -F_3}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

33. Ejercicio interactivo.

34. Una empresa monta ordenadores de dos tipos, de mesa y portátiles, y de tres calidades: alta, media y baja.

En un mes monta 100 ordenadores de cada tipo, de los cuales 20 son de calidad alta, 40, de media, y 40, de baja para los de mesa, y 30 de calidad alta, 30, de media, y 40, de baja para los portátiles.

Para los ordenadores de mesa se invierten cuatro horas de montaje y siete de instalación del software, y para los portátiles seis y ocho horas respectivamente.

a) Escribe la matriz A que determina el número de ordenadores montados atendiendo a su calidad (filas) y su tipo (columnas).

b) Escribe la matriz B que determina el número de horas utilizadas de montaje y de software (filas) para cada tipo de ordenador (columnas).

c) Calcula e interpreta la matriz AB^t.

a)

	Mesa	Portátil
Alta	20	30
Media	40	30
Baja	40	40

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix}$$

b)

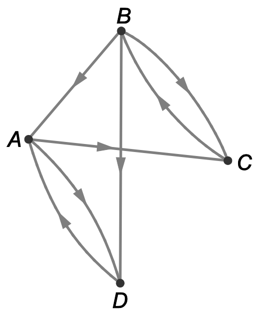
	Mesa	Portátil
Montaje	4	6
Software	7	8

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

c) $$AB^t = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 & 380 \\ 340 & 520 \\ 400 & 600 \end{pmatrix}$$

Los elementos de esta matriz representan el número total de horas invertidas en un mes en montaje y software (columnas) para cada calidad (filas), por ejemplo, el número de horas mensuales invertidas en instalación de software para todos los ordenadores de gama media es de 520.

35. Observa el siguiente grafo e indica:



a) Todos los caminos de longitud 3 que se pueden seguir para ir de C a D.

b) Todos los caminos de longitud 4 que se pueden seguir para ir de C a A.

La matriz de adyacencia del grafo y sus potencias segunda, tercera y cuarta son:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) El número de caminos de longitud 3 que se pueden seguir para ir de C a D viene dado por el elemento de la tercera fila y cuarta columna de M^3, es decir, hay un único camino, en concreto, $C \to B \to A \to D$.

b) El número de caminos de longitud 4 que se pueden seguir para ir de C a A viene dado por el elemento de la tercera fila y primera columna de M^4, es decir, hay dos posibles caminos, en concreto, estos dos caminos son $C \to B \to A \to D \to A$ y $C \to B \to C \to B \to A$.

36 a 45. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Matrices. Grafos

46. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Indica su dimensión.

b) Indica los elementos que forman su cuarta columna.

c) Indica los elementos que forman su tercera fila.

d) Indica el valor de los elementos $a_{22}, a_{32}, a_{23}, a_{45}$

e) ¿Cómo designas la ubicación del elemento cuyo valor es −5? ¿Y del que es 0?

a) 3 x 6

b) $a_{14} = 4,\ a_{24} = 3,\ a_{34} = -3$

c) $a_{31} = -4,\ a_{32} = 1,\ a_{33} = 3,\ a_{34} = -3,\ a_{35} = 2,\ a_{36} = 3$

d) $a_{22} = -1,\ a_{32} = 1,\ a_{23} = -1,\ a_{45}$ no existe

e) $-5 = a_{12},\ 0 = a_{26}$

47. Escribe una matriz cuadrada *B* de orden 3 tal que todos sus elementos verifiquen que $b_{ij} = 2i - 3j + 1$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

48. Escribe una matriz cuadrada *C* de orden 4 tal que sus elementos verifiquen que:

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i+2j}{3} & \text{si } i \le j \\ \dfrac{2i+j}{3} & \text{si } i > j \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & 3 \\ \frac{5}{3} & 2 & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & 3 & \frac{11}{3} \\ 3 & \frac{10}{3} & \frac{11}{3} & 4 \end{pmatrix}$$

49. Calcula el valor de las letras *a*, *b* y *c* para que las matrices *A* y *B* sean iguales.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a+b & 2a-3b & 4a+5b \\ -a^2+a+c & b+2c & c^2+2a-b \\ a+b+c & -2a+3c & b^2+c^2-a \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-3b=0 \\ -a^2+a+c=-1 \end{cases} \Rightarrow a=0,\ b=0,\ c=-1$$

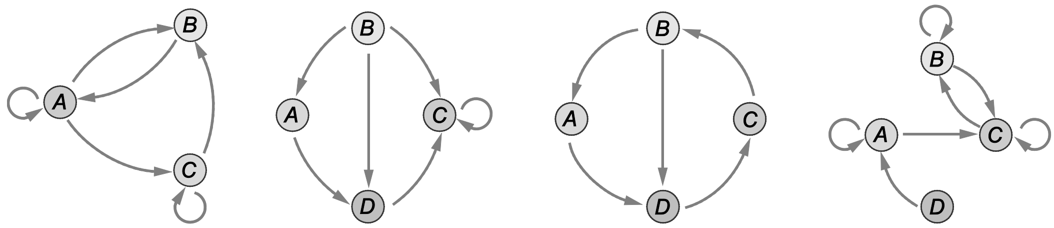
Para estos valores de a, b y c se cumple que todos los elementos de las matrices coinciden y, por tanto, $A=B$.

50. Calcula el valor de las letras *x*, *y* para que las matrices *A* y *B* sean iguales:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x^2 & x^2+y^2 \\ 2x+3y & x-3y \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 13 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2=4 \\ x^2+y^2=13 \\ 2x+3y=-5 \\ x-3y=11 \end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=-3$$

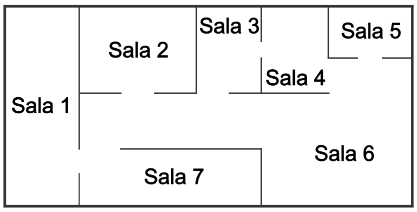
51. Escribe la matriz asociada a cada uno de los siguientes grafos.

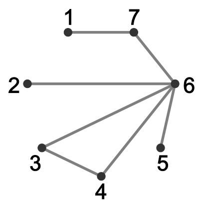


$$M_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

52. La figura siguiente representa la planta de un museo con sus siete salas. En ella, se aprecian las puertas que permiten ir de una sala a otra contigua.

Dibuja un grafo que represente la situación y escribe su matriz asociada.





$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

53. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{2}\end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $A+B$, $A-B$ y $2A-3B$ **b)** AB y BA **c)** ABA

a) $A+B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$ $A-B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ -1 & -6 & -1\end{pmatrix}$ $2A-3B=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 3\\ 0 & 9 & 2\\ -3 & -14 & -5\end{pmatrix}$

b) $AB=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ -2 & -7 & -12\\ 2 & 8 & 14\end{pmatrix}$ $BA=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 5 & -2\\ 1 & -8 & 2\end{pmatrix}$

c) $ABA=(AB)A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ -2 & -7 & -12\\ 2 & 8 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -10 & 2\\ -2 & 31 & -10\\ 2 & -36 & 12\end{pmatrix}$

54. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-3}\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $2A+3B$, $A-2B-3C$ y $2A-B+4C$

b) ABC y BAB

c) A^2B^3

a) $2A+3B=\begin{pmatrix}7 & -4 & -8\\ 11 & 3 & -9\\ 4 & -1 & -6\end{pmatrix}$ $A-2B-3C=\begin{pmatrix}3 & 5 & 3\\ -11 & -8 & -1\\ -7 & -6 & -3\end{pmatrix}$ $2A-B+4C=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 7 & 7 & -5\\ 16 & 15 & -6\end{pmatrix}$

b) $ABC=\begin{pmatrix}-24 & -19 & 0\\ -5 & -4 & 0\\ -20 & -15 & 0\end{pmatrix}$ $BAB=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 9\\ 11 & -5 & -12\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

c) $A^2B^3=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 8\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11 & 8 & 12\\ -6 & -9 & -8\\ -6 & 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27 & 7 & 14\\ 8 & 18 & 24\\ -7 & 17 & 24\end{pmatrix}$

55. Efectúa, si es posible, la siguiente operación matricial.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{-4} & \mathbf{5}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{6}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & -3\\ 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -3\\ -4 & 5\\ -5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 8 & 7 & -12\\ -20 & -20 & 28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -3\\ -4 & 5\\ -5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & -26\\ 32 & -61\\ -60 & 128\end{pmatrix}$$

56. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&3&1&2\\0&1&0&2\\0&0&-1&3\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&1&1&2\\1&1&0&2\\0&3&0&-4\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-2&-3&4&2\\1&0&1&-1\end{pmatrix}$$

a) Calcula $(A+B)C^t$.

b) Comprueba que $(A+B)C^t=AC^t+BC^t$.

c) Comprueba que $(AC^t)^t=CA^t$.

a) $(A+B)C^t=\begin{pmatrix}-3&4&2&4\\1&2&0&4\\0&3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\-3&0\\4&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-5\\0&-3\\-15&0\end{pmatrix}$

b) $AC^t+BC^t=\begin{pmatrix}-2&3&1&2\\0&1&0&2\\0&0&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\-3&0\\4&1\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&1&2\\1&1&0&2\\0&3&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\-3&0\\4&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\1&-2\\2&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&-2\\-1&-1\\-17&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-5\\0&-3\\-15&0\end{pmatrix}$

c) $(AC^t)^t=\begin{pmatrix}3&-3\\1&-2\\2&-4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}3&1&2\\-3&-2&-4\end{pmatrix}\qquad CA^t=\begin{pmatrix}-2&-3&4&2\\1&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0\\3&1&0\\1&0&-1\\2&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\-3&-2&-4\end{pmatrix}$

57. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&3&2&4&0\\2&3&-1&1&4\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2&1&0&4\end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $(AB^t)^t=BA^t$.

b) Calcula $(AB^t)^t+BA^t$.

a) $AB^t=\begin{pmatrix}-1&3&2&4&0\\2&3&-1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\19\end{pmatrix}\Rightarrow (AB^t)^t=\begin{pmatrix}9&19\end{pmatrix}$

$BA^t=\begin{pmatrix}-1&2&1&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&3\\2&-1\\4&1\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&19\end{pmatrix}$

b) $(AB^t)^t+BA^t=BA^t+BA^t=2BA^t=\begin{pmatrix}18&38\end{pmatrix}$

58. Dadas la matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

Calcula:

a) ABC **b)** CBA **c)** AB^2C **d)** CB^3A

a) $ABC=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

c) $AB^2C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -2\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}$

b) $CBA=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 2 & -4 & 2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$

d) $CB^3A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 2 & -4 & 2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$

59. Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$**, calcula:**

a) $A+I$ **b)** $(A+I)^2$ **c)** $(A+I)^3$ **d)** $(A+I)^4$

a) $A+I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$

c) $(A+I)^3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$

b) $(A+I)^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 1\end{pmatrix}$

d) $(A+I)^4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ -8 & -8 & 1\end{pmatrix}$

60. Dadas la matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible, la expresión de la matriz *AB*. ¿Se puede calcular *BA*?

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -2 & 5\\ 7 & 1 & -2 & -8\end{pmatrix}$$

No es posible calcular el *BA*, ya que el número de columnas de *B* no coincide con el de filas de *A*.

61. Se consideran las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 7 & 5 & 4 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 9 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 9 & 6 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & -4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor del elemento de la tercera fila y primera columna de la matriz $C = AB^t$.

b) Calcula el valor del elemento de la primera fila y tercera columna de la matriz $D = BA^t$.

c) ¿Cómo son estos valores?

a) Multiplicando la tercera fila de A por la primera columna de B^t obtenemos $c_{31} = 26$.

b) Multiplicando la primera fila de B por la tercera columna de A^t obtenemos $d_{13} = 26$.

c) Son iguales, ya que $C^t = \left(AB^t\right)^t = BA^t = D$.

62. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $M^2 - N^2$.

b) Calcula $(M+N)(M-N)$.

c) Explica la razón de que $M^2 - N^2 \neq (M+N)(M-N)$.

a) $M^2 - N^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & -1 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $(M+N)(M-N) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -9 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

c) Observemos que $(M+N)(M-N) = M^2 - MN + NM - N^2$, como en general $MN \neq NM$, se sigue que, en general, $-MN + NM \neq O$ y $M^2 - N^2 \neq (M+N)(M-N)$.

63. Sean las matrices $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) $\boldsymbol{A^2}$, $\boldsymbol{A^3}$ y $\boldsymbol{A^4}$

b) $\boldsymbol{A^2 - 3A + 2I}$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} -29 & 30 \\ -45 & 46 \end{pmatrix}$

b) $A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}$

64. Calcula la matriz X para que verifique la siguiente ecuación matricial:

$$2X-3\left[\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 6\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$2X-3\left[\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 6\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow 2X-3\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 11 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 32\\ 5 & 26\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2X=\begin{pmatrix}16 & 32\\ 5 & 26\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 33 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 29\\ 38 & 44\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{13}{2} & \frac{29}{2}\\ 19 & 22\end{pmatrix}$$

65. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases}2A+3B=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 8\end{pmatrix}\\ 3A-4B=\begin{pmatrix}-15 & 14\\ -4 & -22\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2A+3B=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 8\end{pmatrix}\\ 3A-4B=\begin{pmatrix}-15 & 14\\ -4 & -22\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8A+12B=\begin{pmatrix}28 & -8\\ 12 & 32\end{pmatrix}\\ 9A-12B=\begin{pmatrix}-45 & 42\\ -12 & -66\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow \text{ Sumando obtenemos } 17A=\begin{pmatrix}-17 & 34\\ 0 & -34\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}2A+3B=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 8\end{pmatrix}\\ 3A-4B=\begin{pmatrix}-15 & 14\\ -4 & -22\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6A+9B=\begin{pmatrix}21 & -6\\ 9 & 24\end{pmatrix}\\ -6A+8B=\begin{pmatrix}30 & -28\\ 8 & 44\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow \text{ Sumando obtenemos } 17B=\begin{pmatrix}51 & -34\\ 17 & 68\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

66. Resuelve el sistema $\begin{cases}3X+2Y=A\\ -X+3Y=B\end{cases}$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 6\\ -2 & 10 & 12\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 9\\ -3 & 4 & -4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3X+2Y=A\\ -X+3Y=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3X+2Y=A\\ -3X+9Y=3B\end{cases}\Rightarrow \text{ Sumando obtenemos } 11Y=A+3B=\begin{pmatrix}11 & 11 & 33\\ -11 & 22 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Despejando en la segunda ecuación: $X=3Y-B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$

67. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{2X - 4Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{10} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-14} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \\ \mathbf{-3X + 2Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X - 4Y = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -2 & -4 \\ -14 & 4 \end{pmatrix} \\ -3X + 2Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X - 4Y = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -2 & -4 \\ -14 & 4 \end{pmatrix} \\ -6X + 4Y = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -10 & -4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \text{ Sumando obtenemos } -4X = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -12 & -8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 2X - 4Y = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -2 & -4 \\ -14 & 4 \end{pmatrix} \\ -3X + 2Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6X - 12Y = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ -6 & -12 \\ -42 & 12 \end{pmatrix} \\ -6X + 4Y = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -10 & -4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \text{ Sumando obtenemos } -8Y = \begin{pmatrix} -8 & 24 \\ -16 & -16 \\ -32 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

68. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula:

a) A^2, A^3 y A^4 **b)** A^{23}

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) En general, tenemos $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto, $A^{23} = \begin{pmatrix} 1 & 46 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rango de una matriz

69. Indica el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\text{rg}(A) = 1$ ya que las dos filas de A son proporcionales.

b) $\text{rg}(B) = 2$ ya que las dos filas de B no son proporcionales.

c) $\text{rg}(C) = 0$ ya que la matriz C es la matriz nula.

70. Aplicando el método de Gauss, calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(C) = 2$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 + 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 20 & -18 & 9 \\ 0 & 3 & 20 & -18 & 9 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 20 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(D) = 2$

71. Calcula el rango de la matriz, observando si existe dependencia lineal entre sus filas.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 17 & -9 & 11 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Observemos que $F_4 = -\frac{1}{2}F_2$ y $F_3 = 3F_1 + 2F_2$, por lo que podemos eliminar la tercera y cuarta fila, obteniendo $\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 17 & -9 & 11 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$, ya que las dos filas que quedan no son proporcionales.

72. Calcula el rango de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{F_4 = -2F_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{C_5 = -2C_4}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1}}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3 = 2F_2}{=}$

$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Matriz inversa

73. Aplicando directamente la definición, calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{7}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{15}\end{pmatrix}$$

Pongamos $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, tenemos $AA^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c & 2d\\ 2a & 2b\end{pmatrix}$ y, por tanto:

$$AA^{-1}=I\Rightarrow\begin{cases}2c=1\\ 2a=0\end{cases} \text{ y } \begin{cases}2d=0\\ 2b=1\end{cases}\Rightarrow a=0,\ c=\frac{1}{2},\ b=0,\ d=\frac{1}{2}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

Pongamos $B^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, tenemos $BB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -2 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+7c & b+7d\\ -2a+15c & -2b+15d\end{pmatrix}$ y, por tanto:

$$BB^{-1}=I\Rightarrow\begin{cases}a+7c=1\\ -2a+15c=0\end{cases} \text{ y } \begin{cases}b+7d=0\\ -2b+15d=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{15}{29},\ c=\frac{2}{29},\ ,\ b=-\frac{7}{29},\ d=\frac{1}{29}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{15}{29} & -\frac{7}{29}\\ \frac{2}{29} & \frac{1}{29}\end{pmatrix}$$

74. Comprueba que las matrices *A* y *B* son inversas.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 2\\ 2 & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{3} & 2\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1\\ 36 & -24 & -30\\ \frac{16}{3} & -\frac{10}{3} & -4\end{pmatrix}$$

Basta comprobar que $AB=I$, y, en efecto,

$$AB=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 2\\ 2 & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{3} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1\\ 36 & -24 & -30\\ \frac{16}{3} & -\frac{10}{3} & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

75. Aplicando directamente la definición, calcula la matriz inversa de $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$**.**

Pongamos $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$, tenemos $AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-g & b-h & c-i\\ 2a-d & 2b-e & 2c-f\\ 2a-g & 2b-h & 2c-i\end{pmatrix}$ y, por tanto:

$$\begin{cases}a-g=1\\ 2a-d=0\\ 2a-g=0\end{cases},\ \begin{cases}b-h=0\\ 2b-e=1\\ 2b-h=0\end{cases} y \begin{cases}c-i=0\\ 2c-f=0\\ 2c-i=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\ b=0,\ c=1\\ d=-2,\ e=-1,\ f=2\\ g=-2,\ h=0,\ i=1\end{cases}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

76. Aplicando el método de Gauss, calcula las matrices inversas de:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 + 2F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 + F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to -F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 + F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 + 2F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to -F_1 \\ F_2 \to -F_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 + 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to 3F_1 - F_2 \\ F_3 \to 3F_3 + 7F_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 + 2F_3}}{\longrightarrow}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to \frac{1}{3}F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{3}F_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to F_1 + 2F_3 \\ F_2 \to F_2 - 4F_3}}{\longrightarrow}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to -F_1 \\ F_3 \to -F_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 6 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

77. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, calcula:

a) A^{-1} y A^t

b) $\left(A^t A^{-1}\right)^2 A$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to 5F_2 - 2F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 + 3F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \underset{F_1 \to \frac{1}{5}F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\left(A^t A^{-1}\right)^2 A = A^t A^{-1} A^t A^{-1} A = A^t A^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120 & -43 \\ 67 & 24 \end{pmatrix}$

78. **Dadas las matrices** $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$**:**

a) Calcula A^{-1}, B^{-1}, $(2A)^{-1}$ y $\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1}$.

b) Comprueba que $(2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$.

c) Comprueba que $\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1}=3B^{-1}$.

d) Comprueba que $\left[(2A)\left(\frac{1}{3}B\right)\right]^{-1}=\frac{3}{2}B^{-1}A^{-1}$.

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_2+2F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to 5F_1-F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-5 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to -\frac{1}{5}F_1\\ F_2\to \frac{1}{5}F_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to 2F_1+3F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to \frac{1}{2}F_1\\ F_2\to -\frac{1}{2}F_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right)\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-2 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 6 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_2+2F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to 5F_1-F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-10 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 10 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to -\frac{1}{10}F_1\\ F_2\to \frac{1}{10}F_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10}\\ 0 & 1 & \frac{2}{10} & \frac{1}{10}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2A)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{10} & \frac{1}{10}\\ \frac{2}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0\\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}\frac{1}{3} & 1 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to 2F_1+3F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}\frac{2}{3} & 0 & 3 & 2\\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to \frac{3}{2}F_1\\ F_2\to -\frac{3}{2}F_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{9}{2} & 3\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{9}{2} & 3\\ -\frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}$$

b) Es una comprobación directa.

c) Es una comprobación directa.

d) $\left[(2A)\left(\frac{1}{3}B\right)\right]^{-1}=\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1}(2A)^{-1}=\left(3B^{-1}\right)\left(\frac{1}{2}A^{-1}\right)=\frac{3}{2}B^{-1}A^{-1}$

79. **Dada la matriz** $A=\begin{pmatrix}a & c\\ c & d\end{pmatrix}$

a) Comprueba que su rango vale 2 cuando $ad-bc\neq 0$.

b) Comprueba que su inversa es:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

c) Comprueba que $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ tiene inversa y calcúlala.

a) $\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix}a & c\\ c & d\end{pmatrix}\underset{F_2\to aF_2-cF_1}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & ad-bc\end{pmatrix}$, por tanto, $\text{rg}(A)=2$ si y solo si $ad-bc\neq 0$.

b) $AA^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$

c) Según el apartado anterior A tiene inversa y $A^{-1}=\frac{1}{-5+4}\begin{pmatrix}5 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

80. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcula:

a) La matriz inversa de A.

b) La matriz X que verifica la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to 2F_2 - 3F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 + F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1 \to \frac{1}{2}F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$

81. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales.

a) $X\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$

a) La matriz $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa, $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) La matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene inversa, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

82. Halla la matriz *X* tal que $A^2X + BX = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$A^2X + BX = C \Rightarrow (A^2 + B)X = C$, así, si la matriz $A^2 + B$ tiene inversa podemos despejar $X = (A^2 + B)^{-1}C$.

La matriz $A^2 + B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ tiene inversa $(A^2 + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$, por lo que:

$$X = (A^2 + B)^{-1}C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

83. Halla la matriz *X* sabiendo que $3X + BA = AB$ y que:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3X + BA = AB \Rightarrow X = \frac{1}{3}[AB - BA] = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -19 & 0 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ 20 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 0 & -10 \\ 10 & 3 & -5 \\ -10 & 0 & -19 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -\frac{13}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

84. Halla la matriz *X* tal que $AXB = I$, siendo *I* la matriz unidad de orden 2 y:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices *A* y *B* tienen inversa, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$AXB = I \Rightarrow X = A^{-1}IB^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Síntesis

85. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -7 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor de λ para que el producto *AB* dé como resultado la matriz nula.

b) Para el valor de λ hallado, calcula el resultado de $BA + BAB + BAB^2$.

a) $AB = \begin{pmatrix} 2\lambda-2 & 2\lambda-2 & 2\lambda-2 \\ 7-7\lambda & 7-7\lambda & 7-7\lambda \\ 5-5\lambda & 5-5\lambda & 5-5\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

b) $BA + BAB + BAB^2 = BA + B0 + B0B = BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -7 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 22 & -17 \\ -54 & 44 & -34 \\ -27 & 22 & -17 \end{pmatrix}$

86. Sean las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

¿Qué condiciones deben verificar los números reales *a* y *b* para que *A* y *B* sean conmutables, es decir, para que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$?

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b-a \\ 2a & 2b+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & -a+2b \\ 2a & 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = a+2b \\ b-a = -a+2b \\ 2b+2a = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = 0 \end{cases}$$

Por tanto, para que $AB = BA$, b debe ser nulo y a puede ser cualquier número real.

87. Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$:

a) Halla todas las matrices posibles que conmuten con *A*.

b) Da un ejemplo de matriz de la forma $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que conmute con *A*.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-c = a+2b \\ b-d = -a+3b \\ 2a+3c = c+2d \\ 2b+3d = -c+3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b+c = 0 \\ a-2b-d = 0 \\ a+c-d = 0 \\ 2b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = s \\ b = t \\ c = -2t \\ d = s-2t \end{cases}$

Las matrices que conmutan con *A* son de la forma $\begin{pmatrix} s & t \\ -2t & s-2t \end{pmatrix}$ con $s, t \in \mathbb{R}$.

b) Teniendo en cuenta el apartado anterior, para $s = 1$ y $t = \frac{1}{2}$ la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ conmuta con *A*.

88. Sea la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, y *n* un número natural cualquiera. Encuentra el valor de $\boldsymbol{A^n}$ para cada *n* y halla $\boldsymbol{A^{360} - A^{250}}$.

Calculemos las primeras potencias de *A*:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, deducimos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{360} - A^{250} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1080 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 330 & 0 \end{pmatrix}$.

89. Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro *t*:

a) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & t\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}-2 & t\\ 2 & -t\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ t & -3 & t\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ -4 & t & t+4\end{pmatrix}$

a) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & t\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2\to F_2+F_1]{}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & t+3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } t\neq -3\Rightarrow \text{rg}(A)=2\\ \text{Si } t=-3\Rightarrow \text{rg}(A)=1\end{cases}$

b) $B=\begin{pmatrix}-2 & t\\ 2 & -t\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2\to F_2+F_1]{}\begin{pmatrix}-2 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(A)=1$ para cualquier valor de *t*.

c) $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ t & -3 & t\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2\to 2F_2-F_1\\ F_3\to 2F_3-tF_1}]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & t-6 & -t\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to 5F_3-(t-6)F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 6-6t\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } t\neq 1\Rightarrow \text{rg}(C)=3\\ \text{Si } t=1\Rightarrow \text{rg}(C)=2\end{cases}$

d) $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ -4 & t & t+4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-2F_1\\ F_3\to F_3+4F_1}]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & t & t\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } t\neq 0\Rightarrow \text{rg}(D)=2\\ \text{Si } t=0\Rightarrow \text{rg}(D)=1\end{cases}$

90. Estudia el rango de la matriz *A* según los diferentes valores de λ.

a) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{5} & \mathbf{10} & \lambda+\mathbf{1} & \lambda-\mathbf{4}\end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \lambda & \mathbf{-6} & \mathbf{4} & \lambda\\ \mathbf{3} & \mathbf{-9} & \mathbf{6} & \lambda+\mathbf{1}\end{pmatrix}$

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1 & -2\\ 3 & 6 & 1 & -1\\ 5 & 10 & \lambda+1 & \lambda-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2\to 2F_2-3F_1\\ F_3\to 2F_3-5F_1}]{}\begin{pmatrix}2 & 4 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 2\lambda-3 & 2\lambda+2\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3+(2\lambda-3)F_2]{}\begin{pmatrix}2 & 4 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 10\lambda-10\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\begin{cases}\text{Si } \lambda\neq 1\Rightarrow \text{rg}(A)=3\\ \text{Si } \lambda=1\Rightarrow \text{rg}(A)=2\end{cases}$

b) $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ \lambda & -6 & 4 & \lambda\\ 3 & -9 & 6 & \lambda+1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-\lambda F_1\\ F_3\to F_3-3F_1}]{}\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & -6+3\lambda & 4-2\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } \lambda\neq 2\Rightarrow \text{rg}(B)=3\\ \text{Si } \lambda=2\Rightarrow \text{rg}(B)=1\end{cases}$

91. Halla los valores *k* para los que el rango de la matriz es inferior a 3.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k}^2 & \boldsymbol{k}^2\\ \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k}^2\end{pmatrix}$$

Para estos casos, indica su rango.

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ k & k^2 & k^2\\ k & k & k^2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-kF_1\\ F_3\to F_3-kF_1}]{}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & k^2-k & k^2-k\\ 0 & 0 & k^2-k\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } k\neq 0 \text{ y } k\neq 1\Rightarrow \text{rg}(A)=3\\ \text{Si } k=0 \text{ o } k=1\Rightarrow \text{rg}(A)=1\end{cases}$

Por tanto, el rango de *A* es inferior a 3 si $k=0$ o $k=1$, en ambos casos el rango de *A* es 1.

92. Sea la matriz:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \alpha & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

a) Indica para qué valores de α la matriz *A* posee inversa.

b) Calcula la matriz inversa de *A* para el valor $\alpha = 0$.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ \alpha & 0 & -1\end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3-\alpha F_1}{\to}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & \alpha & -1\end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3+\alpha F_2}{\to}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1+\alpha\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } \alpha\neq 1\Rightarrow \text{rg}(A)=3\\ \text{Si } \alpha=1\Rightarrow \text{rg}(A)=2\end{cases}$

Por tanto, la matriz *A* tiene inversa si $\alpha \neq 1$.

b) Si $\alpha = 0$ tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_1\to F_1-F_2}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\to F_2+F_3\\ F_1\to F_1-F_3}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\to -F_2\\ F_3\to -F_3}}{\to}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

93. Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \boldsymbol{t} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \boldsymbol{t}\end{pmatrix}$

a) Indica para qué valores de *t* la matriz *A* posee inversa.

b) Mediante el método de Gauss-Jordan, calcula la matriz inversa de *A* para el valor $t = 2$.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ t & 1 & -1\\ -1 & 4 & t\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2\to F_2-tF_1\\ F_3\to F_3+F_1}}{\to}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & t-1\\ 0 & 4 & t-1\end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3-4F_2}{\to}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & t-1\\ 0 & 0 & -3t+3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } t\neq 1\Rightarrow \text{rg}(A)=3\\ \text{Si } t=1\Rightarrow \text{rg}(A)=2\end{cases}$

Por tanto, la matriz *A* tiene inversa si $t \neq 1$.

b) Si $t = 2$ tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1\\ F_3\to F_3+F_1}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_3\to F_3-4F_2}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 9 & -4 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to F_1-3F_3\\ F_2\to 3F_2+F_3}}{\to}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & 0 & -6 & 4 & -1\\ 0 & 3 & 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 9 & -4 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to \frac{1}{3}F_1\\ F_2\to \frac{1}{3}F_2\\ F_3\to -\frac{1}{3}F_3}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -3 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

94. Comprueba que el rango de $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ es 2 y observa qué ocurre si se intenta calcular A^{-1} por el método de Gauss.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3+F_2]{}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(A)=2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to F_3+F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

El hecho de que en la parte izquierda de la expresión aparezca una fila nula indica que A no tiene inversa.

95. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$$

a) Demuestra que $AB=AC$.

b) Calcula el rango de la matriz A. ¿Podrá tener inversa?

c) Comprueba que si $X=\begin{pmatrix}a\\ a\\ a\end{pmatrix}\Rightarrow AX=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

a) $AB=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 1 & 15\\ -3 & 15\end{pmatrix}=AC$

b) $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-2F_1\\ F_3\to F_3-4F_1}]{}\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 7 & -7\\ 0 & 9 & -9\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to 7F_3-9F_2]{}\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 7 & -7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(A)=2$.

Como el rango de A no coincide con su orden, no puede tener inversa.

c) $AX=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ a\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

96. Se dice que dos matrices cuadradas, A y B, de orden n, son semejantes si existe una matriz invertible, P, tal que $B=P^{-1}AP$, donde P^{-1} denota la matriz inversa de P.

Determina si son semejantes las matrices A y B: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Para ello, intenta calcular una matriz $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ que verifique la relación anterior.

$$B=P^{-1}AP\Rightarrow PB=AP\Rightarrow\begin{pmatrix}a & -b\\ c & -d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=a+2c\\ -b=b+2d\\ -d=d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\ b=d\\ d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\ c=0\\ d=0\end{cases}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Pero la matriz P obtenida no es invertible para ningún valor de t, es decir, las matrices A y B no son semejantes.

97. Una matriz cuadrada A es idempotente cuando verifica que $A^2 = A$.

a) Escribe algún ejemplo de matriz cuadrada de orden 3 distinta de la matriz unidad y de la matriz nula y que sea idempotente.

b) Calcula el valor de λ que hace que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ sea idempotente.

c) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que sean idempotentes.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda+16 & 2 \\ \lambda & 2\lambda+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda+16=4 \\ 2\lambda+9=-3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -6$

c) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+ab=1 \\ ab=0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$

Por tanto, las matrices buscadas son de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $t \neq 0$.

98. Una matriz cuadrada es nilpotente cuando alguna de sus potencias es igual a la matriz nula. Si n es el menor entero positivo que hace que $A^n = 0$, se dice que A es una matriz nilpotente de grado n.

a) Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ es nilpotente de grado 3.

b) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que sean nilpotentes de grado 2.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Al ser A^3 la primera potencia de A nula, la matriz A es nilpotente de grado 3.

b) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$

Por tanto, las matrices buscadas son de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $t \neq 0$.

NOTA: Observemos que no incluimos como solución la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que se obtiene cuando $a = b = 0$, ya que esta matriz es nilpotente de grado 1.

99. **Dada la matriz,** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$**:**

a) Calcula A^2, A^3 y A^4.

b) Induce la expresión de A^n y calcula A^{99}.

c) Calcula A^{-1}.

d) Calcula la matriz inversa de B siendo $B = I + A + A^2 + A^3$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -n & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{99} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -99 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $B = I + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

CUESTIONES

100. **Calcula los valores de *m*, *n*, *p* y *q* para que el producto de matrices $A_{mxn}B_{3x4}C_{pxq}$ dé como resultado una matriz de dos filas y una columna.**

Para que los productos se puedan realizar debe ser $n = 3,\ p = 4$. Para que el resultado sea una matriz 2 x 1 debe ser $m = 2,\ q = 1$.

101. **Se sabe que las matrices *A*, *B* y *C* son todas cuadradas y del mismo orden. Además, *A*, *B* y $A - B$ poseen inversa. Despeja *X* en las igualdades siguientes:**

a) $AXB = C$ **c)** $AXA = C$ **e)** $A^2XB = C$

b) $AX = BX + C$ **d)** $A^tXB = C$ **f)** $AX - BX = A - B$

a) $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

b) $AX = BX + C \Rightarrow AX - BX = C \Rightarrow (A-B)X = C \Rightarrow X = (A-B)^{-1}C$

c) $AXA = C \Rightarrow X = A^{-1}CA^{-1}$

d) $A^tXB = C \Rightarrow X = (A^t)^{-1}CB^{-1} = (A^{-1})^t CB^{-1}$

e) $A^2XB = C \Rightarrow X = (A^2)^{-1}CB^{-1} = (A^{-1})^2 CB^{-1}$

f) $AX - BX = A - B \Rightarrow (A-B)X = A - B \Rightarrow X = (A-B)^{-1}(A-B) = I$

102. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^n = 0$ y sea I la matriz unidad del mismo orden que A.

a) Calcula $(I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1})(I - A)$.

b) Calcula la suma $I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1}$.

a) $(I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1})(I - A) = I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1} - A - A^2 - A^3 - ... - A^n = I - A^n = I$

b) Según el apartado anterior, $I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1}$ es la matriz inversa de $I - A$.

103. Escribe dos matrices cuadradas de orden 2 que posean inversa pero tales que su suma no posea inversa.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = -A$ poseen inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = -A^{-1}$, pero $A + B = 0$ no tiene inversa.

Otro ejemplo podría ser $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

104. Escribe dos matrices A y B cuadradas de orden 2 tales que $AB = 0$ y sin embrago ni A ni B sean la matriz nula.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tenemos $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

105. Sean dos matrices cuadradas A y B tales que $AB = 0$ y tal que existe la inversa de A. Demuestra que $B = 0$.

$AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = 0 \Rightarrow IB = 0 \Rightarrow B = 0$

106. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Escribe dos matrices diferentes B y C tales que $AB = AC$.

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos $A \cdot B = A \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

107. Sean A, B y C tres matrices cuadradas y tales que A posee inversa. Demuestra que si $AB = AC$ entonces, obligatoriamente, B y C deben ser iguales.

$AB = AC \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C$

108. ¿Qué condiciones debe verificar las dimensiones de las matrices A y B para que se pueda calcular el producto ABA? Comprueba que, en ese caso, también se puede calcular BAB.

Supongamos que las dimensiones de A y B son m x n y p x q respectivamente, para que se pueda realizar el producto $A_{m\times n}B_{p\times q}A_{m\times n}$ debe ser $n = p$ y $m = q$, es decir, el número de filas de A debe coincidir con el de columnas de B y el número de columnas de A debe coincidir con el de filas de B.

En este caso el producto $B_{p\times q}A_{m\times n}B_{p\times q}$ también se puede realizar.

109. a) Si A es una matriz simétrica, ¿qué relación existe entre ella y su transpuesta?

b) Se consideran dos matrices A y B simétricas y tales que su producto AB da como resultado una matriz también simétrica. Demuestra que A y B conmutan.

a) Una matriz A es simétrica si y solo si coincide con su traspuesta.

b) Como A y B son simétricas tenemos $BA = B^t A^t = (AB)^t$. Por otro lado, como AB también es simétrica tenemos $AB = (AB)^t$. Por tanto, $AB = (AB)^t = BA$, es decir, A y B conmutan.

110. a) Demuestra que si A y B son matrices invertibles, se cumple que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Nota: Para ello calcula el producto $ABB^{-1}A^{-1}$.

b) Suponiendo que exista A^{-1}, ¿se cumple que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$? ¿Y que $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$?

a) Queremos probar que $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB, y, en efecto,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

b) Se cumplen ambas igualdades:

$$(A^2)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2 \qquad (A^3)^{-1} = (AA^2)^{-1} = (A^2)^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2 A^{-1} = (A^{-1})^3$$

PROBLEMAS

111. Una tienda de música ha vendido dos tipos de productos: música grabada en CD y música en archivos digitales. La matriz *A* muestra el total de canciones, tanto grabadas en CD como en archivos digitales, vendidas durante los años 2014, 2015 y 2016. La matriz *B* muestra los precios a los que se ha vendido una canción según el tipo de grabación y según los años indicados anteriormente.

$$\begin{array}{c} \\ \text{CD's} \\ \text{Digital} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2014 & 2015 & 2016 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1150 & 1360 & 1400 \\ 780 & 950 & 1350 \end{pmatrix} \end{array} = A \qquad \begin{array}{c} \\ 2014 \\ 2015 \\ 2016 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{CD's} & \text{Digital} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0{,}75 \\ 1{,}30 & 0{,}65 \\ 1{,}40 & 0{,}50 \end{pmatrix} \end{array} = B$$

a) Calcula el producto de matrices $C = AB$ e indica qué significan sus elementos de la diagonal principal.

b) Calcula el producto de matrices $D = BA$ e indica qué significan sus elementos de la diagonal principal.

c) Indica un significado para los términos c_{12} y d_{23}.

a) $C = AB = \begin{pmatrix} 1150 & 1360 & 1400 \\ 780 & 950 & 1350 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}25 & 0{,}75 \\ 1{,}30 & 0{,}65 \\ 1{,}40 & 0{,}50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5165{,}5 & 2446{,}5 \\ 4100 & 1887{,}5 \end{pmatrix}$

Los elementos de la diagonal principal indican los ingresos obtenidos en el total de los tres años por las ventas de CD (término c_{11}) y por las ventas de los archivos digitales (término c_{22}).

b) $D = BA = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0{,}75 \\ 1{,}30 & 0{,}65 \\ 1{,}40 & 0{,}50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1150 & 1360 & 1400 \\ 780 & 950 & 1350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2022{,}5 & 2412{,}5 & 2762{,}5 \\ 2002 & 2385{,}5 & 2697{,}5 \\ 2000 & 2379 & 2635 \end{pmatrix}$

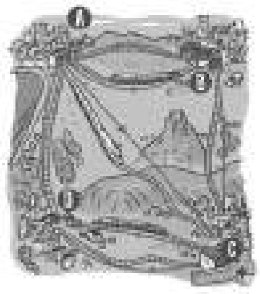
Los elementos de la diagonal principal indican los ingresos obtenidos por el total de ventas de CD y de archivos digitales para los años 2014 (término d_{11}), 2015 (término d_{22}) y 2016 (término d_{33})

c) El término c_{12} determina los ingresos por ventas para el total de los tres años para los CD pero si se hubieran aplicado los precios de archivos digitales en los años correspondiente.

El término d_{23} determina los ingresos por ventas para el total de CD y de archivos digitales para el año 2016 pero si se hubieran aplicado los precios de 2015.

112. En cierta zona de montaña existen cuatro refugios *A*, *B*, *C* y *D* que están comunicados por sendas según se establece en el siguiente grafo.

Debido a la pendiente, el recorrido en alguno de los sentidos de ciertas sendas carece de interés para los deportistas.



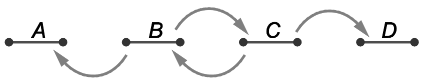
a) Forma la matriz *M* asociada al grafo.

b) Calcula la matriz M^2 e interpreta los resultados.

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Los elementos de M^2 indican el número de caminos diferentes de longitud 2 que se pueden seguir para ir de un vértice a otro.

113. Una partícula puede tomar una de las cuatro posiciones *A, B, C* o *D.*



En cada instante cambia de posición con las siguientes condiciones:

- **Si está en *A*, se queda fija en ese lugar.**
- **Si está en *D*, se queda fija en ese lugar.**
- **Si está en *B*, pasa a *A* con probabilidad 0,25, a *C* con probabilidad 0,25 y se queda en *B* con probabilidad 0,5.**
- **Si está en *C*, pasa a *B* con probabilidad 0,25, a *D* con probabilidad 0,25 y se queda en *C* con probabilidad 0,5.**

Escribe la matriz de transición del proceso estocástico y estudia el valor de sus potencias sucesivas. Interpreta el resultado.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}375 & 0{,}3125 & 0{,}25 & 0{,}0625 \\ 0{,}0625 & 0{,}25 & 0{,}3125 & 0{,}375 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}45313 & 0{,}21875 & 0{,}20313 & 0{,}125 \\ 0{,}125 & 0{,}20313 & 0{,}21875 & 0{,}45313 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}50781 & 0{,}16016 & 0{,}15625 & 0{,}17578 \\ 0{,}17578 & 0{,}15625 & 0{,}16016 & 0{,}50781 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general los elementos de T^n representan las probabilidades de, comenzando en una posición (filas), acabar en otra (columnas) tras *n* cambios de posición.

NOTA: Según crece el exponente, se puede probar que T^n se aproxima a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir, a largo plazo, si el proceso comienza en *A*, la partícula se mantiene en *A*; si comienza en *B*, la partícula acaba en *A* con probabilidad $\frac{2}{3}$ y en *D* con probabilidad $\frac{1}{3}$; si comienza en *C*, acaba en *A* con probabilidad $\frac{1}{3}$ y en *D* con probabilidad $\frac{2}{3}$, y si comienza en *D*, se mantiene en *D*.

114. Una empresa empaqueta cinco tipos de lotes de herramientas para bricolaje y las reparte a cuatro provincias *A*, *B*, *C* y *D*. La siguiente tabla muestra el número de lotes de cada tipo que debe repartir en cada provincia.

	Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5
A	12	10	10	30	10
B	15	9	15	25	12
C	23	8	12	25	15
D	12	12	20	15	12

Cada tipo de lote está formado por un número de piezas *P*, *Q* y *R* según la siguiente distribución.

	Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5
P	2	1	2	0	1
Q	2	1	2	2	0
R	0	2	2	3	3

Escribe la matriz que determina el número de piezas de cada clase que se van a repartir a cada provincia.

Consideremos la matriz *M* que representa el número de lotes (columnas) que se reparte en cada provincia (filas):

$$M = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 10 & 30 & 10 \\ 15 & 9 & 15 & 25 & 12 \\ 23 & 8 & 12 & 25 & 15 \\ 12 & 12 & 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Consideremos la matriz *N* que representa el número de piezas de cada clase (filas) que componen cada lote (columnas):

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz que determina el número de piezas de cada clase (columnas) que se reparten en cada provincia (filas) es:

$$MN^t = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 10 & 30 & 10 \\ 15 & 9 & 15 & 25 & 12 \\ 23 & 8 & 12 & 25 & 15 \\ 12 & 12 & 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 114 & 160 \\ 81 & 119 & 159 \\ 93 & 128 & 160 \\ 88 & 106 & 145 \end{pmatrix}$$

	P	*Q*	*R*
A	64	114	160
B	81	119	159
C	93	128	160
D	88	106	145

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & -3 & -2\end{pmatrix}\text{, calcula:}$$

a) $M+N$ **b)** $2M-\frac{1}{2}N$ **c)** MN **d)** $M^t(3M-2N)$

a) $M+N=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ 0 & -2 & 7\\ -1 & -3 & -4\end{pmatrix}$

b) $2M-\frac{1}{2}N=\begin{pmatrix}-4 & 6 & 8\\ 0 & -4 & 6\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & \frac{11}{2} & \frac{17}{2}\\ 0 & -4 & 4\\ -2 & \frac{3}{2} & -3\end{pmatrix}$

c) $MN=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -14 & 6\\ 0 & -9 & -14\\ -2 & 5 & 5\end{pmatrix}$

d) $M^t(3M-2N)=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-6 & 9 & 12\\ 0 & -6 & 9\\ -3 & 0 & -6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 8\\ 0 & -6 & -4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10 & 7 & 14\\ 0 & -6 & 1\\ -3 & 6 & -2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}23 & -20 & -26\\ -30 & 33 & 40\\ -34 & -2 & 63\end{pmatrix}$

2. Calcula el rango de las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-10 & 2 & 5\\ 4 & 2 & -3\\ 0 & 14 & -5\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 6 & -2\\ 1 & -4 & 2 & 0\\ 1 & -4 & 10 & -2\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}-10 & 2 & 5\\ 4 & 2 & -3\\ 0 & 14 & -5\end{pmatrix}\underset{F_2\to 5F_2+2F_1}{\to}\begin{pmatrix}-10 & 2 & 5\\ 0 & 14 & -5\\ 0 & 14 & -5\end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3-F_2}{\to}\begin{pmatrix}-10 & 2 & 5\\ 0 & 14 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(A)=2$

$B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 6 & -2\\ 1 & -4 & 2 & 0\\ 1 & -4 & 10 & -2\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2\to F_2+F_1\\ F_3\to F_3+F_1}}{\to}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 8 & -2\\ 0 & 0 & 16 & -4\end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3-2F_2}{\to}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 8 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(B)=2$

3. Calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-3} & \mathbf{4}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-4}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & 4 & 1 & 0\\ 2 & -4 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_2\to 3F_2+2F_1}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 2 & 3\end{array}\right)\underset{F_1\to F_1+F_2}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}-3 & 0 & 3 & 3\\ 0 & -4 & 2 & 3\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to -\frac{1}{3}F_1\\ F_2\to -\frac{1}{4}F_2}}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_3\to F_3-F_1}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to F_1-F_2\\ F_3\to F_3-F_2}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to F_1-3F_3\\ F_2\to F_2+2F_3}}{\to}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 4 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\underset{F_1\to \frac{1}{2}F_1}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -\frac{3}{2}\\ -2 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

4. Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2, A^3 y A^4.

b) Calcula A^{35} y A^{94}.

a) $A^2=AA=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $\quad A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$ $\quad A^4=A^3A=IA=A$

b) $A^{35}=A^{33}A^2=(A^3)^{11}A^2=I^{11}A^2=IA^2=A^2$ $\quad A^{94}=A^{93}A=(A^3)^{31}A=I^{31}A=IA=A$

5. Estudia el rango de la siguiente matriz *A* según los valores del parámetro *t*:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{2t} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{t} & \mathbf{7} & \mathbf{-5}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2t & 3\\ 0 & t & 7 & -5\end{pmatrix}\underset{F_2\to 2F_2-F_1}{\to}\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 4t-3 & 5\\ 0 & t & 7 & -5\end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3-tF_2}{\to}\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 4t-3 & 5\\ 0 & 0 & -4t^2+3t+7 & -5-5t\end{pmatrix}$$

Tenemos $\begin{cases}-4t^2+3t+7=0\Rightarrow t=-1,\ t=\dfrac{7}{4}\\ -5-5t=0\Rightarrow t=-1\end{cases}$, por tanto, $\begin{cases}\text{Si } t=-1\Rightarrow \text{rg}(A)=2\\ \text{Si } t\neq -1\Rightarrow \text{rg}(A)=3\end{cases}$.

6. Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2}\\ \boldsymbol{t} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{t}\end{pmatrix}$:

a) Indica para qué valores de *t* no posee inversa.

b) Calcula la inversa para $t=0$.

a) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ t & -1 & t\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2\to 2F_2-F_1\\ F_3\to 2F_3-tF_1}}{\to}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 3\\ 0 & t-2 & t\end{pmatrix}\underset{F_3\to 5F_3-(t-2)F_2}{\to}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 2t+6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } t\neq -3\Rightarrow \text{rg}(A)=3 \text{ y } A \text{ tiene inversa}\\ \text{Si } t=-3\Rightarrow \text{rg}(A)=2 \text{ y } A \text{ no tiene inversa}\end{cases}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_2\to 2F_2-F_1}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to 5F_1+F_2\\ F_3\to 5F_3+F_2}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}10 & 0 & 8 & 4 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 5\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to 3F_1-8F_3\\ F_2\to F_2-F_3}}{\to}$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}30 & 0 & 0 & 20 & -10 & -40\\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 5\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to \frac{1}{30}F_1\\ F_2\to \frac{1}{5}F_2\\ F_3\to \frac{1}{3}F_3}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3}\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\\ 0 & 0 & -1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

7. Calcula la matriz X tal que $XA + B = C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Si A tiene inversa podemos despejar:

$$XA + B = C \Rightarrow XA = C - B \Rightarrow X = (C - B)A^{-1}$$

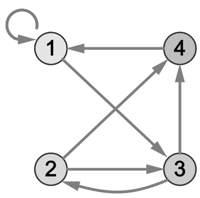
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to 2F_1 - F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - 2F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\underset{\substack{F_1 \to \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{2}F_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X = (C - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Dibuja un grafo que tenga asociada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **Dadas las matrices *A* y *B* cuadradas y tales que ambas poseen inversa, la matriz *X* tal que $BXA^{-1} = (AB)^{-1}$ se puede obtener mediante la expresión:**

   A. $X = BA^{-1}(AB)^{-1}$ **B.** $X = BA$ **C.** $X = B^{-1}B^{-1}$ **D.** $X = A^{-1}B^{-1}$

   $BXA^{-1} = (AB)^{-1} \Rightarrow X = B^{-1}(AB)^{-1}A = B^{-1}B^{-1}A^{-1}A = B^{-1}B^{-1}$, la respuesta correcta es C.

2. **El producto *AB* es una matriz de dimensión 2 x 4. La matriz *A* tiene tres columnas. Las dimensiones de *A* y *B* son:**

   A. $\dim(A) = 2\times 4$ y $\dim(B) = 4\times 4$ **C.** $\dim(A) = 2\times 3$ y $\dim(B) = 3\times 2$

   B. $\dim(A) = 2\times 3$ y $\dim(B) = 3\times 4$ **D.** $\dim(A) = 3\times 3$ y $\dim(B) = 3\times 4$

   Si $A = A_{nx3}$ y $B = B_{pxq}$, para poder calcular *AB* y que su dimensión sea 2 x 4, debe ser $n = 2$, $p = 3$ y $q = 4$, por tanto, la respuesta correcta es B.

3. **Los valores de λ para los que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$ es distinto de tres son:**

   A. $\lambda = 3$ o $\lambda = \frac{1}{3}$ **C.** Únicamente para $\lambda = 3$, $\text{rg}(A) \neq 3$

   B. $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq \frac{1}{3}$ **D.** Para cualquier valor de λ, $\text{rg}(A) \neq 3$

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & \lambda \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - (\lambda-2)F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 - 2\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda \neq 3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 \\ \text{Si } \lambda = 3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \end{cases}$$

   La respuesta correcta es C.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Dadas las matrices $A = (2 \quad 1)$ y $B = (-2 \quad 2)$:**

   A. $AB^t = BA^t$ **C.** AB^t es cuadrada de orden 1.

   B. AB^t no está definida. **D.** Todas son ciertas.

   Las respuestas correctas son A y C, ya que $AB^t = BA^t = -2$.

5. **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, se verifica que:**

   A. $a_{ij} = i + j$ si $i < j$ **B.** $a_{ij} = 2i + j$ si $i = j$ **C.** $a_{ij} = i - j$ si $i > j$ **D.** $|a_{ij}| = i - j$ si $i > j$

   Una simple comprobación permite verificar que las respuestas correctas son A, B y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Cinco localidades vecinas 1, 2, 3, 4 y 5 están unidas por una serie de carreteras de doble sentido.

Se conoce la matriz *A* de adyacencia del correspondiente gráfico que representa dichas carreteras.

1. El elemento a_{23} de la matriz A^3 vale 3.

2. El número de caminos distintos que se pueden seguir comenzando en 2 y acabando en 3 y visitando en total 4 ciudades (repetidas o no) es 3.

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

Recordemos que los elementos de A^3 determinan el número de caminos distintos que pueden seguirse para ir de una localidad (filas) a otra (columnas) en tres pasos, es decir, visitando un total de 4 ciudades (repetidas o no), por tanto, las dos afirmaciones son equivalentes y la relación correcta es C.

Señala el dato innecesario para contestar

7. De una matriz de dimensión 3 x 4 se quiere hallar su rango. Se conocen los siguientes datos:

1. La primera fila no es nula y es proporcional a la tercera.

2. La primera columna no es nula y se verifican las relaciones siguientes: $C_2 = 2C_1 \quad C_3 = 4C_2 \quad C_4 = C_1 + C_2 + C_3$

A. El dato 1 es innecesario.

B. El dato 2 es innecesario.

C. Son necesarios los dos datos.

D. Son innecesarios todos los datos.

Del dato 2 podemos deducir que el rango de la matriz es 1, ya que C_2, C_3 y C_4 son proporcionales a C_1 y esta columna no es nula:

$$C_2 = 2C_1 \quad C_3 = 4C_2 = 8C_1 \quad C_4 = C_1 + C_2 + C_3 = 11C_1$$

En cambio, del dato 1 solo podemos deducir que el rango es 1 (al menos F_1 no es nula) o 2, dependiendo de si F_2 es proporcional o no a F_1.

Por tanto, la respuesta correcta es A.