10 Probabilidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se lanza una moneda tres veces. Describe el espacio muestral *E* y los sucesos *A* = "obtener dos caras", *B* = "obtener cara en el primer lanzamiento" y *C* = "obtener al menos una cruz". Además, escribe los sucesos:

$$\overline{A},\ B\cap C,\ A\cup B,\ \overline{A}\cap C,\ (B\cup C)\cap A \text{ y } \left(\overline{A\cap B}\right)-C$$

El espacio muestral está formado por 8 resultados equiprobables:

$$E=\{CCC,\ CCX,\ CXC,\ XCC,\ CXX,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}$$

donde, por ejemplo, *CXC* representa el resultado en el que se obtuvo cara en el primer y tercer lanzamiento y cruz en el segundo.

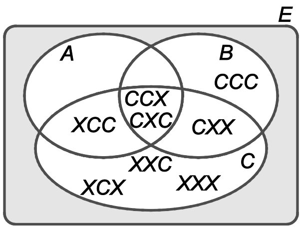
Los sucesos *A*, *B* y *C* son subconjuntos del espacio muestral:

$$A=\{CCX,\ CXC,\ XCC\}$$

$$B=\{CCC,\ CCX,\ CXC,\ CXX\}$$

$$C=\{CCX,\ CXC,\ XCC,\ CXX,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}$$

El diagrama de Venn representa la situación de los tres sucesos:



Entonces, los sucesos propuestos son:

$\overline{A}=\{CCC,\ CXX,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}$ = "no obtener dos caras".

$B\cap C=\{CCX,\ CXC,\ CXX\}$ = "obtener cara en el primer lanzamiento y al menos una cruz".

$A\cup B=\{CCC,\ CCX,\ CXC,\ XCC,\ CXX\}$ = "obtener dos caras o cara en el primer lanzamiento".

$\overline{A}\cap C=\{CXX,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}$ = "no obtener dos caras y obtener al menos una cruz".

$(B\cup C)\cap A=E\cap A=A=\{CCX,\ CXC,\ XCC\}$ = "obtener dos caras".

Como $A\cap B=\{CCX,\ CXC\}$, resulta:

$\left(\overline{A\cap B}\right)-C=\{CCC,\ XCC,\ CXX,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}-\{CCX,\ CXC,\ XCC,\ CXX,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}=\{CCC\}=$
= "obtener tres caras".

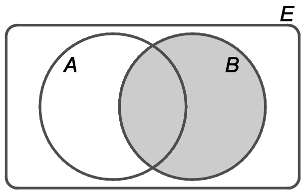
2. Muestra, mediante diagramas de Venn, que:

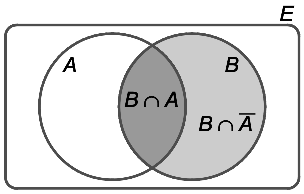
a) $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$

b) $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$

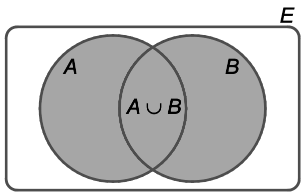
c) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

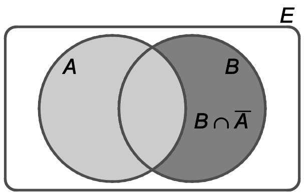
a) $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$



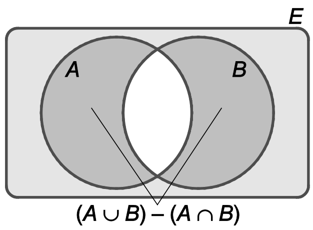


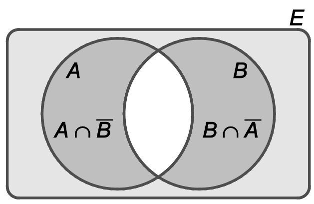
b) $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$





c) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$





3. Ejercicio resuelto.

4. Si $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}35$ y $P(A \cap B) = 0{,}15$, calcula las probabilidades de los sucesos $A \cup B$, $A \cap \bar{B}$ y $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Utilizando las propiedades de la probabilidad y una de las leyes de De Morgan se tiene que:

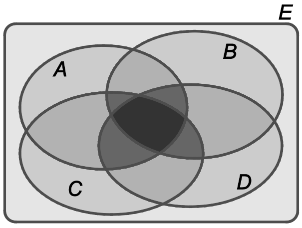
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}35 - 0{,}15 = 0{,}9$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}15 = 0{,}55$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$$

5. Deduce, a partir de la unión de tres sucesos, la probabilidad de la unión de cuatro sucesos.

Un diagrama de Venn con cuatro sucesos se puede representar como sigue:



Si se consideran los sucesos A, B y $C \cup D$, aplicando la probabilidad para estos tres sucesos se tiene que:

$$P(A \cup B \cup (C \cup D)) = P(A) + P(B) + P(C \cup D) - P(A \cap B) - P(A \cap (C \cup D)) - P(B \cap (C \cup D)) + P(A \cap B \cap (C \cup D)) =$$

Usando las propiedades de la probabilidad queda:

$$= P(A) + P(B) + (P(C) + P(D) - P(C \cap D)) - P(A \cap B) - P((A \cap C) \cup (A \cap D)) - P((B \cap C) \cup (B \cap D)) +$$
$$+ P((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D)) =$$

Si se emplea, de nuevo, la propiedad de la unión de probabilidades resulta:

$$= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(C \cap D) - P(A \cap B) - (P(A \cap C) + P(A \cap D) - P(A \cap C \cap D)) -$$
$$- (P(B \cap C) + P(B \cap D) - P(B \cap C \cap D)) + (P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)) =$$

Quitando paréntesis y recolocando los términos se obtiene que:

$$= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) +$$
$$+ P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)$$

6 y 7. Ejercicios resueltos.

8. De una baraja española se retiran todas las cartas excepto los ases, los treses, las sotas, los caballos y los reyes. De la baraja se elige al azar una carta. Escribe la función de probabilidad correspondiente en cada caso si lo que se quiere obtener son:

a) Los distintos palos de la baraja.

b) Las distintas figuras de la baraja.

c) Las distintas cartas que no son figuras de la baraja.

a) Se tienen 4 palos y cada palo 5 cartas: 5 cartas de oros (O), 5 cartas de copas (C), 5 cartas de espadas (S) y 5 cartas de bastos (B). Por tanto, el espacio muestral está formado por $E = \{O, C, S, B\}$ y la función de probabilidad es:

$$P(O) = P(C) = P(S) = P(B) = \frac{5}{20} = 0{,}25$$

b) En las 20 cartas de la baraja quedan 4 sotas (S), 4 caballos (H) y 4 reyes (R), el resto (8 cartas) no son figuras ($\overline{F}$). Así, en este caso, el espacio muestral es $E = \{S, H, R, \overline{F}\}$, y la función de probabilidad es:

$$P(S) = P(H) = P(R) = \frac{4}{20} = 0{,}2 \quad \text{y} \quad P(\overline{F}) = \frac{8}{20} = 0{,}4$$

c) En la baraja quedan 4 cuatro ases (A) y 4 treses (T), el resto (12 cartas) son figuras (F). El espacio muestral es ahora $E = \{A, T, F\}$ y la función de probabilidad correspondiente es:

$$P(A) = P(T) = \frac{4}{20} = 0{,}2 \quad \text{y} \quad P(F) = \frac{12}{20} = 0{,}6$$

9. En un experimento con 7 posibles resultados, las probabilidades de cada resultado son:

$$P(w_1) = 0{,}12;\ P(w_2) = 0{,}21;\ P(w_3) = 0{,}14$$

$$P(w_4) = 0{,}14;\ P(w_5) = 0{,}1;\ P(w_6) = a;\ P(w_7) = b$$

Razona si *a* y *b* pueden tomar los siguientes valores.

a) $a = 0{,}3 \quad b = -0{,}05$

b) $a = 0{,}15 \quad b = 0{,}14$

c) $a = 0{,}2 \quad b = 0{,}05$

d) $a = 0{,}2 \quad b = 0{,}35$

Los valores de *a* y *b* deben ser mayores o iguales que cero, por lo que los resultados del apartado a) no son posibles.

Además, la suma de las probabilidades debe ser 1. Es decir:

$$\sum_{j=1}^{7} P(w_j) = 1 \Leftrightarrow 0{,}12 + 0{,}21 + 0{,}14 + 0{,}14 + 0{,}1 + a + b = 1 \Leftrightarrow a + b = 0{,}29$$

Por lo que los únicos resultados posibles son los del apartado b).

10. En un grupo de danza hay 7 mujeres y 12 hombres. Si se escogen tres personas al azar, halla la probabilidad de que se seleccionen 2 mujeres y un hombre.

En la elección no importa el orden, por lo que los resultados posibles al elegir 3 personas de las 19 son las combinaciones de orden 3 de las 19 personas:

$$C_{19,3} = \binom{19}{3} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3!} = 969$$

Los resultados favorables al suceso *A* = "se eligen 2 mujeres y 1 hombre", se obtienen seleccionado a las 2 mujeres de las 7 y, por cada una de estas, un hombre de los 12. Es decir:

$$C_{7,2} \cdot C_{12,1} = \binom{7}{2}\binom{12}{1} = \frac{7 \cdot 6}{2!} \cdot 12 = 252$$

Por tanto, como los resultados posibles son equiprobables, la probabilidad del suceso *A* se obtiene mediante la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{252}{969} = 0{,}2601$$

11. Un juego consiste en lanzar dos dados de distinto color y obtener la diferencia de las puntuaciones de ambos dados. Si la diferencia es cero ni se gana ni se pierde, si la diferencia es un número par distinto de cero se gana y si la diferencia es un número impar se pierde. Calcula la probabilidad de:

a) Ganar **b)** Perder **c)** Empatar

¿Cómo puedes modificar las reglas del juego para que las probabilidades de ganar y perder sean iguales?

El número de resultados posibles equiprobables (se entiende que los dados están equilibrados) es:

$$VR_{6,2} = 6^2 = 36$$

En la tabla siguiente se muestran los posibles resultados (diferencias en valor absoluto) dependiendo si el resultado conduce a ganar (rayado horizontal), perder (blanco) o empatar (rayado vertical):

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

a) La probabilidad del suceso ganar (G) se obtiene por la regla de Laplace: $P(G) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

b) La probabilidad de suceso perder (R), se calcula de igual modo: $P(R) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

c) La probabilidad del suceso empatar (M) se obtiene igualmente por la regla de Laplace: $P(M) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Para que las probabilidades de ganar y perder sean iguales, bastaría con establecer las siguientes reglas:

- Se gana si la diferencia es número par (se incluye el cero como número par).
- Se pierde si la diferencia es número impar.

En cuyo caso la probabilidad de ganar, $\left(\frac{1}{2}\right)$, es la misma que la de perder, $\left(\frac{1}{2}\right)$.

12. Se elige al azar un número de 5 cifras distintas escrito con las cifras 2, 3, 5, 7 y 8.

a) Calcula la probabilidad de que dicho número sea mayor que 87 000.

b) Calcula la probabilidad de que sea menor que 32 000.

c) Calcula la probabilidad de que el número esté entre 30 000 y 60 000.

Con las cifras 2, 3, 5, 7 y 8 se pueden formar $P_5 = 5! = 120$ números de cifras distintas.

a) De los 120 números, son mayores que 87 000: 87235; 87253, 87325, 87352, 87523 y 87532 ($P_3 = 3! = 6$).

De modo que la probabilidad del suceso A = "el número sea mayor que 87 000" es:

$$P(A) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

b) De los 120 números, serán menores que 32 000 aquellos que empiecen por 2: $P_4 = 4! = 24$ números.

De manera que la probabilidad del suceso B = "el número es menor que 32 000" es:

$$P(B) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

c) De los 120 números, estarán entre 30 000 y 60 000 aquellos números que:

- Empiecen por 3: $P_4 = 4! = 24$ números.
- Empiecen por 5: $P_4 = 4! = 24$ números.

De manera que la probabilidad del suceso C = "el número está entre 30 000 y 60 000" es:

$$P(B) = \frac{24+24}{120} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

13. Ejercicio interactivo.

14. Ejercicio resuelto.

15. En un centro educativo el 40 % de los alumnos practica voleibol, el 30 % bádminton y el 20 % ambos deportes.

a) Si un alumno, elegido al azar, juega al voleibol, ¿cuál es la probabilidad de que no juegue al bádminton?

b) ¿Son independientes los sucesos "jugar al voleibol" y "jugar al bádminton"?

Seleccionado un alumno al azar, se consideran los sucesos V = "juega al voleibol" y B = "juega al bádminton". Se tiene que:

$$P(V)=0{,}4 \qquad P(B)=0{,}3 \qquad P(V\cap B)=0{,}2$$

a) En este caso, se trata de calcular la probabilidad de que el alumno seleccionado no juegue al bádminton, sabiendo que juega voleibol:

$$P(\bar{B}|V)=\frac{P(V\cap\bar{B})}{P(V)}=\frac{P(V)-P(V\cap B)}{P(V)}=\frac{0{,}4-0{,}2}{0{,}4}=0{,}5$$

b) Los sucesos V y B no son independientes ya que

$$P(V\cap B)=0{,}2\neq P(V)\cdot P(B)=0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}12$$

16. *Se consideran los sucesos A y B tales que $P(A)=0{,}84$; $P(B)=0{,}5$ y $P(\bar{A}|\bar{B})=0{,}12$. Entonces:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

b) Calcula la probabilidad de que ocurran A y $\bar{B}$.

De los datos que se proporcionan, se obtiene que:

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-0{,}5}=0{,}12$$

De donde:

$$1-P(A\cup B)=0{,}12\cdot(1-0{,}5)\Rightarrow P(A\cup B)=0{,}94$$

Y la probabilidad de la intersección de A y B es:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}84+0{,}5-0{,}94=0{,}4$$

a) Los sucesos A y B no son independientes, puesto que:

$$P(A\cap B)=0{,}4\neq P(A)\cdot P(B)=0{,}84\cdot 0{,}5=0{,}42$$

b) La probabilidad del suceso $A\cap\bar{B}$ se obtiene de la siguiente manera:

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=0{,}84-0{,}4=0{,}44$$

17. Calcula $P(\bar{A}\,|\,B)$ sabiendo que $P(B)=0{,}25$ y $P(A\cap B)=0{,}2$.

Por la definición de probabilidad condicionada y aplicando propiedades de la probabilidad:

$$P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}25-0{,}2}{0{,}25}=0{,}2$$

18 y 19. Ejercicios resueltos.

20. Una entidad bancaria concede tres tipos de créditos: para vivienda, para industria y personales. El 30 % de los créditos que concede son para vivienda, el 50 %, para industria y el 20 % restante son personales. Han resultado impagados el 5 % de los créditos para vivienda, el 7 % de los créditos para industria y el 12 % de los créditos para consumo. Se pide:

a) Seleccionado un crédito al azar, calcula la probabilidad de que no resulte impagado.

b) Se sabe que un determinado crédito ha resultado impagado. Calcula la probabilidad de que sea un crédito de vivienda.

Seleccionado un crédito al azar, se consideran los sucesos:

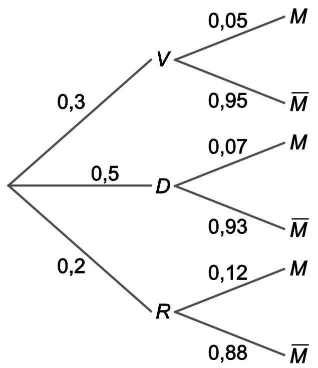
V = “el crédito es para vivienda” *D* = “el crédito es para industria”

R = “el crédito es personal” *M* = “el crédito es impagado”

Las probabilidades que se proporcionan son:

$$P(V)=0{,}3 \quad P(D)=0{,}5 \quad P(R)=0{,}2 \quad P(M|V)=0{,}05 \quad P(M|D)=0{,}07 \quad P(M|R)=0{,}12$$

El diagrama de árbol recoge las distintas posibilidades:



a) Se calcula la probabilidad de que un crédito seleccionado al azar haya sido impagado. Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(M)=P(M|V)\cdot P(V)+P(M|D)\cdot P(D)+P(M|R)\cdot P(R)=0{,}05\cdot 0{,}3+0{,}07\cdot 0{,}5+0{,}12\cdot 0{,}2=0{,}074$$

Por tanto, la probabilidad de que el crédito seleccionado al azar se pague es:

$$P\left(\overline{M}\right)=1-P(M)=1-0{,}074=0{,}926$$

También se podría haber calculado directamente:

$$P\left(\overline{M}\right)=P\left(\overline{M}|V\right)\cdot P(V)+P\left(\overline{M}|D\right)\cdot P(D)+P\left(\overline{M}|R\right)\cdot P(R)=0{,}95\cdot 0{,}3+0{,}93\cdot 0{,}5+0{,}88\cdot 0{,}2=0{,}926$$

b) Mediante el teorema de Bayes, se obtiene la probabilidad pedida:

$$P(V|M)=\frac{P(M|V)\cdot P(V)}{P(M)}=\frac{0{,}05\cdot 0{,}3}{0{,}074}=0{,}2027$$

21. El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es 120, por la tarde, 150, y por la noche, 30. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde, del 4 %, y por la noche, de un 6 %.

a) Calcula la probabilidad de que se retrase un vuelo con destino a este aeropuerto.

b) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo nocturno?

Elegido un vuelo al azar, se consideran los sucesos:

M = "el vuelo llega por la mañana" *T* = "el vuelo llega por la tarde"

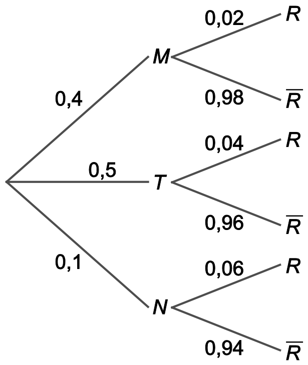
N = "el vuelo llega por la noche" *R* = "el vuelo llega con retraso"

Se proporcionan las siguientes probabilidades:

$$P(M) = \frac{120}{300} = 0,4 \qquad P(T) = \frac{150}{300} = 0,5 \qquad P(N) = \frac{30}{300} = 0,1$$

$$P(R|M) = 0,02 \qquad P(R|T) = 0,04 \qquad P(R|N) = 0,06$$

En el diagrama de árbol se pueden ver las distintas posibilidades con sus respectivas probabilidades



a) La probabilidad de que un vuelo elegido al azar se retrase se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(R|M)\cdot P(M) + P(R|T)\cdot P(T) + P(R|N)\cdot P(N) = 0,02\cdot 0,4 + 0,04\cdot 0,5 + 0,06\cdot 0,1 = 0,034$$

b) Se utiliza la regla de Bayes:

$$P(N|R) = \frac{P(R|N)\cdot P(N)}{P(R)} = \frac{0,06\cdot 0,1}{0,034} = 0,1765$$

22. Ejercicio interactivo.

EJERCICIOS

Experimentos aleatorios. Sucesos

32. En el experimento consistente en lanzar una moneda tres veces:

a) Describe el espacio muestral y los sucesos A = "obtener más caras que cruces", B = "obtener cara en el segundo lanzamiento" y C = "obtener al menos una cruz".

b) Describe y representa en un diagrama de Venn los sucesos: $A \cap B \cap C$, $\overline{A} \cap B$ y $(A \cup B) \cap \overline{C}$.

a) El espacio muestral del experimento consistente en lanzar una moneda tres veces, está formado por 8 resultados posibles equiprobables:

$$E = \{CCC,\ CCX,\ CXC,\ XCC,\ CXX,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}$$

Y los sucesos A, B y C son subconjuntos del espacio muestral:

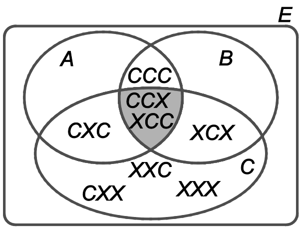
$$A = \{CCC,\ CCX,\ CXC,\ XCC\}$$

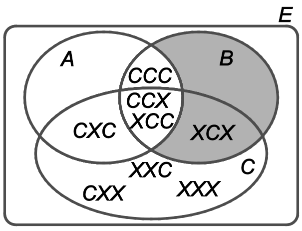
$$B = \{CCC,\ CCX,\ XCC,\ XCX\}$$

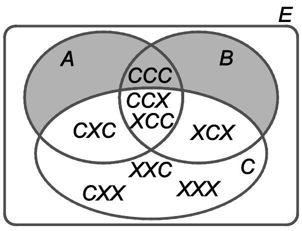
$$C = \{CCX,\ CXC,\ XCC,\ CXX,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}$$

b) Los sucesos propuestos son:

$A \cap B \cap C = \{CCX,\ XCC\}$ $\qquad$ $\overline{A} \cap B = \{XCX\}$ $\qquad$ $(A \cup B) \cap \overline{C} = \{CCC\}$







33. Considera el experimento consistente en medir la duración en horas de una marca particular de bombillas.

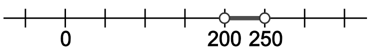
a) Describe el espacio muestral y los sucesos A = "la bombilla dura menos de 250 horas" y B = "la bombilla dura más de 200 horas".

b) Describe y representa los sucesos $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$ y $\overline{A \cap B}$.

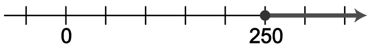
a) El espacio muestral consiste en cualquier instante de tiempo (en horas) mayor que cero, es decir, $E = (0,\ +\infty)$.

Los sucesos A y B son subconjuntos de E: $A = (0,\ 250)$ y $B = (200, +\infty)$.

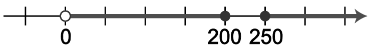
b) El suceso $A \cap B$ = "La bombilla dura más de 200 horas pero menos de 250 horas" es $A \cap B = (200,\ 250)$.



El suceso $\overline{A} \cap B$ = "La bombilla dura 250 o más", es decir, $\overline{A} \cap B = [250,\ +\infty)$.



El suceso $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ = "La bombilla dura 250 horas o más, o 200 horas o menos" es decir, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} = (0,\ 200] \cup [250,\ +\infty)$.



Probabilidad y propiedades

34. En una frutería el 60 % de los clientes compran naranjas, el 40 % compran manzanas y el 30 % no compran ni naranjas ni manzanas. Calcula el porcentaje de clientes que compran:

a) Naranjas o manzanas o ambas.

b) Manzanas y naranjas.

c) Naranjas pero no manzanas.

Se consideran los sucesos *N* = "el cliente compra naranjas" y *M* = "el cliente compra manzanas".

Elegido un cliente al azar, se tiene que $P(N) = 0,6$, $P(M) = 0,4$ y $P\left(\overline{N} \cap \overline{M}\right) = 0,3$.

a) Se pide la probabilidad de $N \cup M$. Mediante el suceso contrario y una de las leyes de De Morgan:

$$P(N \cup M) = 1 - P\left(\overline{N \cup M}\right) = 1 - P\left(\overline{N} \cap \overline{M}\right) = 1 - 0,3 = 0,7$$

El 70 % de los clientes compran naranjas o manzanas o ambas.

b) Se pide la probabilidad de $N \cap M$:

$$P(N \cap M) = P(N) + P(M) - P(N \cup M) = 0,6 + 0,4 - 0,7 = 0,3$$

El 30 % de los clientes compran naranjas y manzanas.

c) Se pide la probabilidad de $N \cap \overline{M}$:

$$P\left(N \cap \overline{M}\right) = P(N) - P(N \cap M) = 0,6 - 0,3 = 0,3$$

El 30 % de los clientes compran naranjas pero no manzanas.

35. En una determinada fábrica de automóviles, el 10 % de los coches fabricados tiene defectos de motor, el 8 % tiene defectos en la carrocería y el 4 % tiene defectos en motor y en carrocería. Se pide:

a) Expresa los datos proporcionados como probabilidades.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche tenga al menos un defecto?

c) ¿Y la probabilidad de que un coche elegido al azar no sea defectuoso?

d) Expresa e interpreta los resultados obtenidos en los aparatados b) y c) en porcentaje de coches.

Elegido un coche al azar, sean los sucesos: *M* = "tiene defectos de motor" y *C* = "tiene defectos de carrocería".

a) Los datos expresados como probabilidades son:

$$P(M) = 0,1 \quad P(C) = 0,08 \quad P(M \cap C) = 0,04$$

b) Se trata de la probabilidad del suceso unión de *M* y *C*:

$$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = 0,1 + 0,08 - 0,04 = 0,14$$

c) Que un coche no sea defectuoso resulta el suceso $\overline{M} \cap \overline{C}$. Utilizando una de las leyes de De Morgan y la propiedad de la probabilidad del suceso contrario:

$$P\left(\overline{M} \cap \overline{C}\right) = P\left(\overline{M \cup C}\right) = 1 - P(M \cup C) = 1 - 0,14 = 0,86$$

d) El 14 % de los coches presenta al menos un defecto en el motor o en la carrocería.

El 86 % de los coches no presenta defectos ni en el motor ni en la carrocería.

36. En una ciudad, el 10 % de los días de junio llueve, mientras que el 75 % luce el sol. Calcula probabilidad de que en un día elegido al azar llueva y no haga sol en cada uno de los casos siguientes.

a) No es posible que en un día llueva y haga sol.

b) Si llueve, entonces también lucirá el sol.

c) El 5 % de los días de junio llueve y hace sol.

Elegido un día de junio al azar, se consideran los sucesos A = "llueve" y B = "hace sol", donde:

$$P(A) = 0{,}1 \qquad P(B) = 0{,}75$$

Se pide la probabilidad del suceso $A \cap \bar{B}$, que se obtiene de la expresión: $P\left(A \cap \bar{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$.

a) Si no es posible que llueva y haga sol, entonces $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ y entonces:

$$P\left(A \cap \bar{B}\right) = P(A) = 0{,}1$$

b) En este caso, se tiene que $A \subset B$, y por lo tanto $A \cap B = A$, con lo que: $P\left(A \cap \bar{B}\right) = P(A) - P(A) = 0$.

c) Si el 5 % de los día de junio llueve y hace sol, entonces $P(A \cap B) = 0{,}05$. Por lo tanto:

$$P\left(A \cap \bar{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}1 - 0{,}05 = 0{,}05$$

37. La asignatura de Administración de Empresas tiene dos grupos, en el primero el 40 % de los estudiantes son hombres y en el segundo son mujeres el 45 %. Se elige al azar un estudiante de cada grupo.

a) Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

A = "ambos son mujeres" B = "sólo uno es mujer" C = "los dos son hombres"

b) Razona si el suceso contrario del suceso A es el C, el B, el $B \cap C$, el $B \cup C$ o algún otro suceso y calcula su probabilidad.

a) Si se elige un estudiante del primer grupo, la probabilidad de que sea hombre ($H1$) es $P(H1) = 0{,}4$ y la de que sea mujer ($M1$) es $P(M1) = 0{,}6$.

En el segundo grupo, al elegir un estudiante al azar, la probabilidad de que sea hombre ($H2$) es $P(H2) = 0{,}55$ y la de que sea mujer ($M2$) es $P(M2) = 0{,}45$.

La elección de un estudiante en un grupo es independiente de la elección de un estudiante en el otro grupo.

- El suceso A = "ambos son mujeres", se puede expresar como $A = M1 \cap M2$ y, puesto que $M1$ y $M2$ son independientes: $P(A) = P(M1 \cap M2) = P(M1) \cdot P(M2) = 0{,}60 \cdot 0{,}45 = 0{,}27$.

- El suceso B = "solo uno es mujer", se puede escribir como $B = (M1 \cap H2) \cup (H1 \cap M2)$. Teniendo en cuenta que los sucesos $(M1 \cap H2)$ y $(H1 \cap M2)$ son incompatibles y que los sucesos $M1$ y $H2$ son independientes al igual que $H1$ y $M2$, se tiene que:

$$P(B) = P(M1) \cdot P(H2) + P(H1) \cdot P(M2) = 0{,}6 \cdot 0{,}55 + 0{,}4 \cdot 0{,}45 = 0{,}51$$

- El suceso C = "los dos son hombres" se puede expresar como $H1 \cap H2$, y como $H1$ y $H2$ son independientes: $P(C) = P(H1 \cap H2) = P(H1) \cdot P(H2) = 0{,}40 \cdot 0{,}55 = 0{,}22$.

b) El suceso contrario a A es $\bar{A}$ = "al menos uno es hombre". Por lo tanto, el suceso B no puede ser ya que $\bar{A}$ podrían ser los dos hombres. Tampoco es el suceso C pues $\bar{A}$ podría ser hombre y mujer. $B \cap C$ no son pues este conjunto es vacío y $\bar{A}$ no lo es. Si se considera $B \cup C$, se tiene que o sólo uno es mujer o los dos son hombres, luego $\bar{A} = B \cup C$. Por tanto, su probabilidad será:

$$P\left(\bar{A}\right) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0{,}51 + 0{,}22 - 0 = 0{,}73$$

Se comprueba que es cierto pues $P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}27 = 0{,}73$.

38. El 80 % de los alumnos de mi colegio estudian inglés, y el 30 %, francés. Además, solo el 15 % combinan ambos idiomas. Calcula el porcentaje de alumnos que:

a) No estudia ninguno de esos idiomas.

b) Estudia solo uno de esos idiomas.

Si se elige un alumno al azar, se consideran los sucesos A = "estudia inglés" y B = "estudia francés". Entonces:

$$P(A)=0{,}8 \qquad P(B)=0{,}3 \qquad P(A\cap B)=0{,}15$$

a) Se pide la probabilidad del suceso $\bar{A}\cap\bar{B}$. Utilizando una de las leyes de De Morgan y la probabilidad del suceso contrario, se tiene que $P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)$.

Se calcula la probabilidad del suceso unión: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}8+0{,}3-0{,}15=0{,}95$.

Así, se tiene que $P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0{,}95=0{,}05$.

b) El suceso "estudia uno solo de los idiomas", se puede escribir como la unión de dos sucesos incompatibles, $\left(A\cap\bar{B}\right)\cup\left(\bar{A}\cap B\right)$, cuya probabilidad se calcula como sigue:

$$P\left(\left(A\cap\bar{B}\right)\cup\left(\bar{A}\cap B\right)\right)=P\left(A\cap\bar{B}\right)+P\left(\bar{A}\cap B\right)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=0{,}8-0{,}15+0{,}3-0{,}15=0{,}8.$$

39. Las probabilidades de que el metro, el tren o el autobús de una ciudad sean puntuales son 0,9; 0,8 y 0,6, respectivamente. Calcula la probabilidad de que en un determinado viaje en el que los tres medios salen a la vez, cumplan el horario:

a) Los tres medios de transporte.

b) Solo uno de ellos.

c) Al menos, dos de los tres.

Se consideran los sucesos con sus respectivas probabilidades son:

M = "el metro es puntual" $\quad$ T = "el tren es puntual" $\quad$ A = "el autobús es puntual"

$$P(M)=0{,}9 \qquad P(T)=0{,}8 \qquad P(A)=0{,}6$$

Los tres sucesos son mutuamente independientes, es decir, lo son dos a dos y los tres en conjunto.

a) Se pregunta por la probabilidad del suceso $M\cap T\cap A$, que es:

$$P(M\cap T\cap A)=P(M)\cdot P(T)\cdot P(A)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}432$$

b) El suceso B = "solo uno de los tres son puntuales", se puede escribir como la unión de tres sucesos incompatibles, $B=\left(M\cap\bar{T}\cap\bar{A}\right)\cup\left(\bar{M}\cap\bar{T}\cap A\right)\cup\left(\bar{M}\cap T\cap\bar{A}\right)$. Puesto que si los sucesos M, T y A son independientes también lo son sus contrarios y cualquier combinación de los sucesos con los contarios de los demás, la probabilidad resulta: $P(B)=P(M)\cdot P\left(\bar{T}\right)\cdot P\left(\bar{A}\right)+P\left(\bar{M}\right)\cdot P\left(\bar{T}\right)\cdot P(A)+P\left(\bar{M}\right)\cdot P(T)\cdot P\left(\bar{A}\right)=$

$$=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}4+0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}6+0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}116$$

c) El suceso C = "al menos dos de los tres son puntuales", se puede escribir como la unión de dos sucesos incompatibles $C=C2\cup C3$, donde $C2$ = "exactamente dos son puntuales" y $C3$ = "los tres son puntuales".

$$C2=\left(M\cap T\cap\bar{A}\right)\cup\left(M\cap\bar{T}\cap A\right)\cup\left(\bar{M}\cap T\cap A\right) \qquad C3=M\cap T\cap A$$

La probabilidad de $C2$ se obtiene de forma análoga al apartado b):

$$P(C2)=P\left(M\cap T\cap\bar{A}\right)+P\left(M\cap\bar{T}\cap A\right)+P\left(\bar{M}\cap T\cap A\right)=$$
$$=P(M)\cdot P(T)\cdot P\left(\bar{A}\right)+P(M)\cdot P\left(\bar{T}\right)\cdot P(A)+P\left(\bar{M}\right)\cdot P(T)\cdot P(A)=$$
$$=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4+0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}6+0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}444$$

Y la probabilidad de $C3$ se ha obtenido en el apartado a): $P(C3)=P(M\cap T\cap A)=0{,}432$.

De modo que, $P(C)=P(C2)+P(C3)=0{,}444+0{,}432=0{,}876$.

40. En un dado trucado la probabilidad de obtener número par es el doble que la de obtener impar. Calcula ambas probabilidades.

El espacio muestral correspondiente al lanzamiento de un dado es $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

Se sabe que $P(\{1,\ 3,\ 5\}) = P(1) + P(3) + P(5) = p$ y $P(\{2,\ 4,\ 6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = 2p$.

Como $p + 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$. De esta manera, $P(\{1,\ 3,\ 5\}) = \frac{1}{3}$ y $P(\{2,\ 4,\ 6\}) = \frac{2}{3}$.

Asignación de probabilidades. Espacios finitos

41. El temario en el que se basa una prueba consta de 15 temas. La prueba consiste en seleccionar al azar dos de estos temas y desarrollar uno de ellos.

a) ¿Cuántas parejas distintas de temas pueden darse?

b) Si solo he preparado 6 temas, ¿qué probabilidad tengo de suspender? Se supone que suspendo si no he preparado ninguno de los dos temas seleccionados.

a) Se deben seleccionar aleatoriamente dos temas de los 15 en que se basa la prueba. No importa el orden en el que se elijan los 2 temas, de modo que se trata de las combinaciones de orden 2 de los 15 temas:

$$C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

Se pueden formar, por tanto, 105 parejas distintas de temas.

b) Sea el suceso *S* = "no he preparado ninguno de los dos temas seleccionados", lo que equivale a suspender. El número de resultados favorables al suceso *S* se obtiene mediante las combinaciones de orden 2 de los 9 temas que no he preparado:

$$C_{9,2} = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

Y, aplicando la regla de Laplace, se obtiene la probabilidad del suceso *S*:

$$P(S) = \frac{36}{105} = 0{,}3429$$

42. Se dispone de seis tarjetas numeradas del 1 al 6. Se eligen, a la vez, dos tarjetas al azar. Se pide la probabilidad de que la suma de sus números:

a) Sea 7.

b) Sea un número par.

c) Sea menor que 5.

El número de resultados posibles es el de las variaciones con repetición de las 6 tarjetas tomadas de 2 en 2:

$$VR_{6,2} = 6^2 = 36$$

a) De las 36 posibilidades, suman 7: $\{1,\ 6\}; \{6,\ 1\}; \{2,\ 5\}; \{5,\ 2\}; \{3,\ 4\}; \{4,\ 3\}$.

Por tanto, la probabilidad del suceso *A* = "suma 7" es: $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) Los resultados favorables al suceso *B* = "la suma es número par" son:

$\{1, 1\}; \{1, 3\}; \{1, 5\}; \{2, 2\}; \{2, 4\}; \{2, 6\}; \{3, 1\}; \{3, 3\}; \{3, 5\}; \{4, 2\}; \{4, 4\}; \{4, 6\}; \{5, 1\}; \{5, 3\}; \{5, 5\}; \{6, 2\}; \{6, 4\}; \{6, 6\}$

$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

c) Los resultados favorables al suceso *C* = "la suma es menor que 5" son cuatro:

$$\{1,\ 1\}; \{1,\ 2\}; \{2,\ 1\}; \{1,\ 3\}; \{3,\ 1\}; \{2,\ 2\}$$

$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

43. En un dado trucado la probabilidad de obtener el número 1 al lanzarlo es doble que la de obtener cualquiera de los otros números.

a) Calcula las probabilidades de los sucesos elementales.

b) Si se lanza el dado 4 veces, calcula la probabilidad de obtener:

I. Cuatro unos

II. Ningún seis

III. Al menos un cinco

IV. A lo sumo un cuatro

El espacio muestral del lanzamiento de un dado es $E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

a) Sea $p \geq 0$ la probabilidad de obtener cualquiera de los números. La probabilidad de obtener el 1 es, entonces, $2p$. Es decir:

$$P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=p \qquad P(1)=2p$$

Dichas probabilidades deben sumar 1: $5p+2p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{7}$.

Y, por tanto:

$$P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=\frac{1}{7} \qquad P(1)=\frac{2}{7}$$

b) Los lanzamientos son independientes, de manera que:

I. La probabilidad del suceso A = "obtener 4 unos" es $P(A)=\left(\frac{2}{7}\right)^4=0{,}0067$.

II. La probabilidad del suceso B = "no obtener ningún 6" es $P(B)=\left(\frac{6}{7}\right)^4=0{,}5398$.

III. Para calcular la probabilidad del suceso C = "obtener al menos un 5", se calcula la de su contrario $\overline{C}$ = "no obtener ningún 5", cuya probabilidad es la misma que la del suceso B. Entonces:

$$P(\overline{C})=\left(\frac{6}{7}\right)^4=0{,}5398 \Rightarrow P(C)=1-P(\overline{C})=1-0{,}5398=0{,}4602$$

IV. El suceso D = "obtener a lo sumo un 4" se puede escribir como la unión de dos sucesos incompatibles, $D0$: "no obtener ningún 4" y $D1$: "obtener exactamente un 4". Las probabilidades de ambos sucesos resultan:

$$P(D0)=\left(\frac{6}{7}\right)^4=0{,}5398 \qquad P(D1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{7}\right)^1\left(\frac{6}{7}\right)^3=0{,}3599$$

De manera que:

$$P(D)=P(D0)+P(D1)=0{,}5398+0{,}3599=0{,}8997$$

44. Un examen de oposición consiste en desarrollar por escrito un tema de un total de 50. El tribunal elige al azar 2 temas y cada candidato debe escoger uno de ellos. Halla la probabilidad de que un candidato suspenda el examen si tan sólo ha estudiado 35 temas.

El número de resultados posibles en la elección aleatoria de 2 temas de los 50, es el número de las combinaciones de orden 2 de los 50 temas, ya que no importa el orden de elección:

$$C_{50,2}=\binom{50}{2}=\frac{50\cdot 49}{2}=1225$$

Si un candidato ha estudiado 35 temas, suspenderá el examen si los dos temas elegidos son de los 15 que no ha estudiado. De esta forma, el número de resultados favorables al suceso S = "suspende el examen" es:

$$C_{15,2}=\binom{15}{2}=\frac{15\cdot 14}{2}=105$$

Y la probabilidad del suceso S se obtiene utilizando la regla de Laplace:

$$P(S)=\frac{105}{1225}=\frac{3}{35}=0{,}0857$$

45. Tres cartas distintas van a ser enviadas a tres destinatarios diferentes cuyos nombres están escritos en los sobres correspondientes. Si se introducen al azar las cartas en los sobres (una carta en cada sobre), halla:

a) La probabilidad de que una y solo una de las cartas llegue a su verdadero destinatario.

b) La probabilidad de que ninguna de las cartas llegue a su verdadero destinatario.

El número de resultados posibles de repartir 3 cartas en 3 sobre es el de las permutaciones de orden 3 de las tres cartas (o los 3 sobres): $P_3 = 3! = 6$

En la tabla se describen las distintas posibilidades: *C*1, *C*2 y *C*3 representan las cartas y *S*1, *S*2 y *S*3 los sobres. También se indican el número de coincidencias:

***S*1**	*C*1	*C*1	*C*2	*C*2	*C*3	*C*3
***S*2**	*C*2	*C*3	*C*1	*C*3	*C*1	*C*2
***S*3**	*C*3	*C*2	*C*3	*C*1	*C*2	*C*1
Coincidencias	3	1	1	0	0	1

a) Sea el suceso *A* = "una carta y solo una coincide con su sobre". Tres de los resultados, como se ve en la tabla, son favorables al suceso *A*. Utilizando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

b) De los 6 resultados posibles, 2 (como se ve en la tabla) son favorables al suceso *B* = "ningún sobre coincide con su carta". Utilizando la regla de Laplace:

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$$

46. Una bolsa contiene bolas numeradas del 1 al 8. De la bolsa se extraen dos bolas al azar. Calcula la probabilidad de que la suma de sus números:

a) Sea un número par.

b) Sea 10.

Al extraer aleatoriamente 2 bolas de una bolsa, simultáneamente o sin reemplazamiento, que contiene 8 bolas no importa el orden en que se extraigan (la suma tiene la propiedad conmutativa). Por tanto, el número de resultados posibles es el de combinaciones de orden 2 de las 8 bolas:

$$C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

a) Los resultados favorables al suceso *A* = "la suma es número par" son 12:

$$\{1,\ 3\};\ \{1,\ 5\};\ \{1,\ 7\};\ \{2,\ 4\};\ \{2,\ 6\};\ \{2,\ 8\};\ \{3,\ 5\};\ \{3,\ 7\};\ \{4,\ 6\};\ \{4,\ 8\};\ \{5,\ 7\};\ \{6,\ 8\}$$

Aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} = 0{,}4286$$

b) Los resultados favorables al suceso *B* = "la suma es diez" son 3:

$$\{2,\ 8\};\ \{3,\ 7\};\ \{4,\ 6\}$$

Mediante la regla de Laplace:

$$P(B) = \frac{3}{28} = 0{,}1071$$

47. Supón que has quedado a comer con unos amigos en un restaurante y que al llegar ellos ya han pedido tres platos distintos para compartir pero no recuerdan exactamente cuáles son. Has leído la carta y has comprobado que hay doce platos y cinco de ellos no te gustan. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los tres platos que han pedido tus amigos haya alguno que no te guste?

En la carta del restaurante hay 5 platos que no te gustan y 7 que sí te gustan.

Los amigos han elegido 3 platos distintos, luego quedan 9 por elegir.

Se considera el suceso A = "al menos uno de los platos elegidos por los amigos no te gusta".

El suceso contrario al A es $\overline{A}$ = "los tres platos elegidos por tus amigos te gustan".

Para calcular la probabilidad del suceso A se procede primero a hallar la probabilidad del suceso $\overline{A}$:

Número de resultados posibles de elegir 3 platos (los que han elegido tus amigos) de entre los 12 de la carta:

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = \frac{1320}{6} = 220$$

- Número de resultados favorables al suceso $\overline{A}$, que los 3 platos que eligen están entre los 7 que sí te gustan:

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{210}{6} = 35$$

- Aplicando la regla de Laplace:

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{35}{220} = 0{,}1591$$

- Y, por tanto, $P\left(A\right) = 1 - 0{,}1591 = 0{,}8409$.

48. Con las letras de la palabra CARCAMAL se forman todas las palabras posibles con y sin sentido. Calcula la probabilidad de que la palabra formada:

a) Empiece por CAR.

b) Empiece por C y acabe en L.

El número de palabras, con o sin sentido, que se pueden formar con las letras de la palabra CARCAMAL es el de las permutaciones con repetición de las 8 letras donde la C se repite dos veces, la A se repite tres veces y las letras R, M y L solo aparecen una vez:

$$PR_8^{2,3,1,1,1} = \frac{8!}{2!3!1!1!1!} = 3360$$

a) El número de resultados favorables al suceso A = "la palabra empiece por CAR", es el de la permutaciones de las 5 letras que faltan (CAMAL) donde la A se repite dos veces y las letras C, M y L aparecen solo una vez:

$$PR_5^{2,1,1,1} = \frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$$

Utilizando la regla de Laplace:

$$P\left(A\right) = \frac{60}{3360} = \frac{1}{56} = 0{,}0179$$

b) El número de resultados favorables al suceso B = "la palabra empiece por C y acabe en L", es el de la permutaciones de la 6 letras que faltan (ARCAMA) donde la A se repite tres veces y las letras R, M y C aparecen solo una vez:

$$PR_6^{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!1!1!1!} = 120$$

Utilizando la regla de Laplace: $P\left(B\right) = \frac{120}{3360} = \frac{1}{28} = 0{,}0357$.

49. En una clase de pilates hay 14 mujeres y 4 hombres. Si se seleccionan 3 personas al azar, halla la probabilidad de que:

a) Se seleccionen 2 mujeres y un hombre.

b) Los seleccionados sean todas mujeres.

c) Entre los seleccionados haya al menos una mujer.

Para la elección aleatoria de las 3 personas no importa el orden, por lo que el número de resultados posibles es el de las combinaciones de orden 3 de las 18 personas:

$$C_{18,3} = \binom{18}{3} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{3!} = 816$$

a) El número de resultados favorables al suceso *A* = "se seleccionen 2 mujeres y 1 hombre" es:

$$C_{14,2} \cdot C_{4,1} = \binom{14}{2}\binom{4}{1} = \frac{14 \cdot 13}{2!} \cdot 4 = 364$$

La probabilidad del suceso *A* se obtiene mediante la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{364}{816} = \frac{91}{204} = 0{,}4461$$

b) Sea el suceso *B* = "los seleccionados son todas mujeres". El número de resultados favorables al suceso *B* es:

$$C_{14,3} = \binom{14}{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3!} = 364$$

Utilizando la regla de Laplace: $P(B) = \frac{364}{816} = 0{,}4461$

c) Se considera el suceso *C* = "al menos haya sido seleccionada una mujer". El suceso contrario al *C* es $\overline{C}$ = "ninguna mujer ha sido seleccionada".

El número de resultados favorables al suceso $\overline{C}$ es (las 3 personas se seleccionan entre los 4 hombres):

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$$

De modo que:

$$P(\overline{C}) = \frac{4}{816} \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{4}{816} = \frac{812}{816} = \frac{203}{204} = 0{,}9951$$

50. Una urna contiene tres bolas blancas y seis bolas negras. Se extraen dos bolas al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Las dos bolas extraídas sean negras.

b) Las dos bolas extraídas sean blancas.

c) Una de las bolas sea blanca y la otra negra.

El número de resultados posibles al elegir 2 bolas a la vez de una urna que contiene 9 bolas es el de las combinaciones de orden 2 de las 9 bolas:

$$C_{9,2} = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

a) Sea el suceso A = "las 2 bolas extraídas son negras". El número de resultados favorables al suceso A es el de las combinaciones de orden 2 de las 6 bolas que son negras. Y su probabilidad se obtiene utilizando la regla de Laplace:

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0{,}4167$$

b) De forma análoga a la del apartado a) se obtiene el número de resultados favorables al suceso B = "las 2 bolas extraídas son blancas" y su probabilidad:

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}0833$$

c) El número de resultados favorables al suceso C = "una de las bolas es blanca y la otra negra" y su probabilidad son:

$$C_{3,1} \cdot C_{6,1} = \binom{3}{1}\binom{6}{1} = 3 \cdot 6 = 18 \Rightarrow P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Probabilidad condicionada. Independencia

51. Se tiene una urna con cuatro bolas blancas y cuatro negras. Se saca una bola al azar y se introduce en otra urna que contiene dos bolas blancas y tres negras. De esta urna se extrae una segunda bola. Calcula:

a) La probabilidad de que la primera bola sea negra y la segunda blanca.

b) La probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color.

c) La probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

d) La probabilidad de que la segunda bola sea blanca.

Sea $U1=\{4B,\ 4N\}$ la urna de la que se extrae la primera bola, formada por 4 bolas blancas y 4 negras.

Si la primera bola extraída es blanca, la segunda urna resulta $U21=\{3B,\ 3N\}$.

Si la primera bola extraída es negra, la segunda urna queda $U22=\{2B,\ 4N\}$.

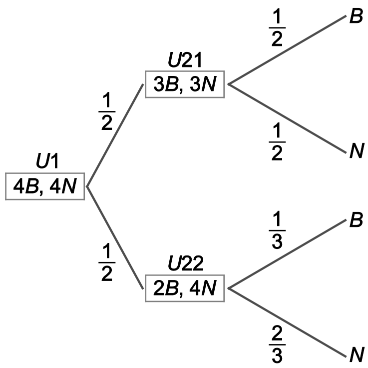
Como la probabilidad de extraer una bola blanca de $U1$ es 0,5 y, también 0,5 es la probabilidad de extraer bola negra, se tiene que la probabilidad de que se formen las urnas $U21$ y $U22$ son:

$$P(U21)=P(U22)=\frac{1}{2}$$

De la urna formada en el segundo paso se extrae una bola al azar, las probabilidades de que sea blanca (B) o sea rea negra (N), dependen de la urna que sea elegida:

$$P(B|U21)=P(N|U21)=\frac{1}{2} \qquad P(B|U22)=\frac{1}{3} \qquad P(N|U22)=\frac{2}{3}$$

En el diagrama de árbol se representan las diferentes posibilidades:



a) La probabilidad del suceso A = "la primera bola sea negra y la segunda blanca" se obtiene multiplicando las respectivas probabilidades de las ramas del árbol:

$$P(A)=P(U22)\cdot P(B|U22)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

b) La probabilidad del suceso B = "las dos bolas sea de distinto color" se calcula a partir de las probabilidades de las ramas del árbol:

$$P(B)=P(N|U21)\cdot P(U21)+P(B|U22)\cdot P(U22)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

c) La probabilidad del suceso C = "las bolas sean del mismo color", se obtiene de la misma forma que en el apartado b):

$$P(C)=P(B|U21)\cdot P(U21)+P(N|U22)\cdot P(U22)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$$

d) La probabilidad del suceso D = "la segunda bola extraída sea blanca" se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(D)=P(B|U21)\cdot P(U21)+P(B|U22)\cdot P(U22)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

52. En el juego del tiro al plato Antonio acierta el plato el 55 % de las veces que dispara. En cambio María falla en el 40 % de las tiradas. Si disparan los dos a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que ambos acierten?

Sean los sucesos A = "Antonio acierta", cuya probabilidad es $P(A)=0{,}55$, y M = "María acierta" cuya probabilidad es $P(M)=0{,}6$ (que se obtiene a partir del dato del enunciado: $P(\overline{M})=0{,}4$).

Los sucesos A y M son independientes, de forma que la probabilidad del suceso $A\cap M$: " los dos acierten" es:

$$P(A\cap M)=P(A)\cdot P(M)=0{,}55\cdot 0{,}6=0{,}33$$

53. Dados dos sucesos *A* y *B*, se sabe que:

$$\boldsymbol{P(A)=0{,}6 \qquad P(B)=0{,}3 \qquad P(A\cap B)=0{,}2}$$

Calcula:

a) $P(A\,|\,B)$ y $P(A\,|\,A\cap B)$

b) $P(A\cup B)$, $P(A\cap B\,|\,A\cup B)$ y $P(A\,|\,A\cup B)$

a) Mediante la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}2}{0{,}3}=0{,}6667$$

$$P(A\,|\,A\cap B)=\frac{P(A\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=1$$

b) Utilizando las propiedades de la probabilidad:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}6+0{,}3-0{,}2=0{,}7$$

Por la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A\cap B\,|\,A\cup B)=\frac{P((A\cap B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{0{,}2}{0{,}7}=0{,}2857$$

$$P(A\,|\,A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0{,}6}{0{,}7}=0{,}8571$$

54. Un estuche contiene 15 bolígrafos de color rojo y 10 de color azul. Se pide:

a) Si se elige uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color rojo? ¿Y de color azul?

b) Si se extraen dos sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean azules?

c) Si se extraen dos sin reemplazamiento, calcula la probabilidad de que el primero sea rojo y el segundo azul.

a) Se elige un bolígrafo al azar y se consideran los sucesos R = "coger bolígrafo de color rojo", A = "coger bolígrafo de color azul". El número total de bolígrafos es 25 y éste es el número de resultados posibles.

Dado que 15 bolígrafos son de color rojo y 10 de color azul, estos son los resultados favorables a cada uno de los sucesos. Aplicando la regla de Laplace:

$$P(R)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}=0{,}6 \qquad P(A)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}=0{,}4$$

b) En este caso, sean los sucesos R_j = "coger bolígrafo rojo en la extracción $j=1,\ 2$" y A_j = "coger bolígrafo azul en la extracción $j=1,\ 2$". Se debe calcular la probabilidad del suceso $A_1\cap A_2$:

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)=\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}=\frac{3}{20}=0{,}15$$

c) Con la misma notación que en el apartado b), ahora se debe calcular la probabilidad del suceso $R_1\cap A_2$:

$$P(R_1\cap A_2)=P(R_1)\cdot P(A_2|R_1)=\frac{15}{25}\cdot\frac{10}{24}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

55. En una empresa el 30 % de los trabajadores son técnicos informáticos y el 20 % son técnicos electrónicos, mientras que un 10 % tienen las dos especialidades.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de dicha empresa seleccionado al azar sea técnico informático o electrónico.

b) Si seleccionamos al azar a un técnico electrónico, ¿cuál es la probabilidad de que sea también técnico informático?

c) Si seleccionamos un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un técnico que tiene solo una de las dos especialidades?

Seleccionado un técnico al azar, se consideran el suceso A = "el trabajador es técnico informático" y el suceso B = "el trabajador es técnico electrónico". Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0{,}3 \qquad P(B) = 0{,}2 \qquad P(A \cap B) = 0{,}1$$

a) Se trata de calcular la probabilidad de la unión de los sucesos A y B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}4$$

b) Se debe calcular la probabilidad de que el trabajador sea técnico informático condicionada a que se sabe que es técnico electrónico:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5$$

c) En este caso se trata del suceso $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$, unión de dos sucesos incompatibles:

$$P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 0{,}3 - 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}3$$

56. Se tienen diez monedas en una bolsa. Seis monedas son legales mientras que las restantes tienen dos caras. Se elige al azar una moneda.

a) Calcula la probabilidad de obtener cara al lanzarla.

b) Si al lanzarla se ha obtenido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda sea de curso legal?

c) Si se sacan dos monedas al azar sucesivamente y sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que una sea legal y la otra no lo sea?

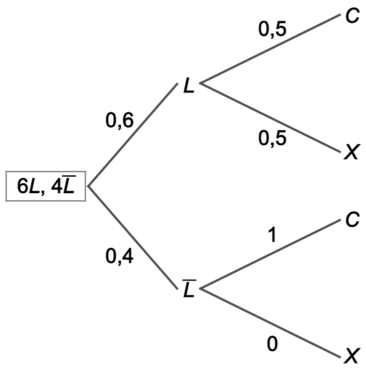
En la bolsa se tienen monedas de dos clases: legales (L) y con dos caras $\left(\overline{L}\right)$. De las primeras hay 6 y de las segundas 4. Se elige una moneda al azar, las probabilidades de los sucesos L y $\overline{L}$ son:

$$P(L) = 0{,}6 \qquad P\left(\overline{L}\right) = 0{,}4$$

a) Se considera el suceso C = "obtener cara", que dependiendo de si la moneda es legal o no, se tiene que:

$$P(C|L) = 0{,}5 \qquad P\left(C|\overline{L}\right) = 1$$

Utilizando el teorema de la probabilidad total (ver diagrama de árbol):

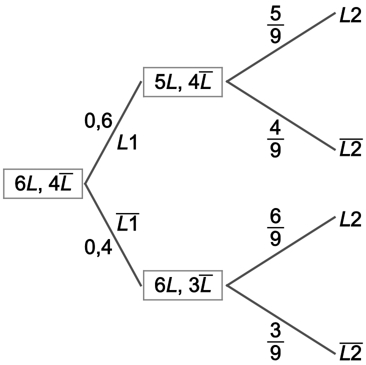


$$P(C) = P(C|L) \cdot P(L) + P\left(C|\overline{L}\right) \cdot P\left(\overline{L}\right) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}7$$

b) En este caso, mediante el teorema de Bayes, se puede obtener esta probabilidad:

$$P(L|C) = \frac{P(C|L)\cdot P(L)}{P(C)} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}6}{0{,}7} = 0{,}4286$$

c) Ahora, se extraen sucesivamente dos monedas sin reemplazar. Se nombran los sucesos L_j = "la moneda es legal en la extracción $j = 1, 2$" y $\overline{L}_j$ = "la moneda no es legal en la extracción $j = 1, 2$". El diagrama de árbol muestra la situación:



El suceso "una sea legal y otra no" se puede escribir como la unión de dos sucesos incompatibles: $\left(L_1\cap\overline{L}_2\right)\cup\left(\overline{L}_1\cap L_2\right)$. Cuya probabilidad se calcula como sigue:

$$P\left(\left(L_1\cap\overline{L}_2\right)\cup\left(\overline{L}_1\cap L_2\right)\right) = P\left(L_1\cap\overline{L}_2\right)+P\left(\overline{L}_1\cap L_2\right) = P(L_1)\cdot P\left(\overline{L}_2|L_1\right)+P\left(\overline{L}_1\right)\cdot P\left(L_2|\overline{L}_1\right) = 0{,}6\cdot\frac{4}{9}+0{,}4\cdot\frac{6}{9} = 0{,}5333$$

57. Se estima que un tercio de las empresas de un sector de la economía, tendrán un aumento en sus ganancias trimestrales. El 60 % de las empresas que tienen aumento declaran un dividendo y el 10 % de las que no tienen aumento, también lo declaran.

a) ¿Qué porcentaje de las empresas que declaren un dividendo tendrán un aumento en sus ganancias trimestrales?

b) ¿Qué porcentaje de empresas ni tienen aumento en sus ganancias ni declaran dividendo?

Se consideran los sucesos:

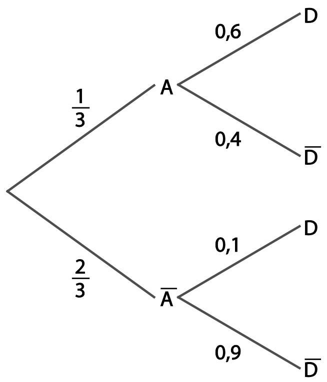
A = "la empresa tiene aumento en sus ganancias trimestrales" y su contrario $\overline{A}$..

D = "la empresa declara un dividendo" y su contrario $\overline{D}$.

Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(A)=\frac{1}{3} \qquad P(\overline{A})=\frac{2}{3} \qquad P(D|A)=0{,}6 \qquad P(D|\overline{A})=0{,}1 \qquad P(\overline{D}|A)=0{,}4 \qquad P(\overline{D}\,|\,\overline{A})=0{,}9$$

El siguiente diagrama de árbol recoge esta información:



a) Se trata de calcular la probabilidad condicionada $P(A\,|\,D)$, que se obtiene por la regla de Bayes:

$$P(A|D)=\frac{P(D\,|A)\cdot P(A)}{P(D)}=\frac{0{,}6\cdot\frac{1}{3}}{\frac{0{,}8}{3}}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

Donde $P(D)$ se ha calculado por el teorema de la probabilidad total:

$$P(D)=P(D|A)\cdot P(A)+P(D|\overline{A})\cdot P(\overline{A})=0{,}6\cdot\frac{1}{3}+0{,}1\cdot\frac{2}{3}=\frac{0{,}8}{3}\simeq 0{,}2667$$

b) Se trata de calcular la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap\overline{D}$:

$$P(\overline{A}\cap\overline{D})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{D}|\overline{A})=\frac{2}{3}\cdot 0{,}9=0{,}6$$

Por tanto, el 60 % de las empresas ni tienen aumento en sus ganancias ni declaran dividendo.

58. Se consideran los siguientes sucesos:

***A* = "la economía de un cierto país está en recesión"**

***B* = "un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión".**

Se sabe que $P(A)=0,005$; $P(B\mid A)=0,95$ y $P(\bar{B}\mid\bar{A})=0,96$.

Calcula la probabilidad de que:

a) El indicador muestre que la economía no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.

b) El indicador muestre que la economía del país está en recesión.

De las probabilidades dadas, se obtiene que: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=0,005\cdot 0,95=0,00475$.

a) Se trata de calcular la probabilidad del suceso $\bar{B}\cap A$:

$$P(\bar{B}\cap A)=P(A)-P(A\cap B)=0,005-0,00475=0,00025$$

b) Debe calcularse la probabilidad del suceso *B*, utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(B)=P(B|A)\cdot P(A)+P(B|\bar{A})\cdot P(\bar{A})=0,95\cdot 0,005+0,04\cdot(1-0,005)=0,04455$$

Donde la probabilidad $P(B|\bar{A})=1-P(\bar{B}|\bar{A})=1-0,96=0,04$.

59. Un paciente afectado por una enfermedad debe decidir si se somete a una operación, por lo que solicita la opinión de tres médicos especialistas. Por experiencias anteriores, se sabe que los tres médicos tienen opiniones diferentes e independientes y que las probabilidades de aconsejar ese tipo de operación son, respectivamente, 0,8; 0,5 y 0,3. Calcula la probabilidad de que:

a) Ninguno de ellos aconseje la operación.

b) Al menos uno de ellos aconseje la operación.

c) Solo uno aconseje la operación.

Sean *A*, *B* y *C* los tres médicos y sean los sucesos:

A = "el médico *A* aconseja la operación" con $P(A)=0,8$.

B = "el médico *B* aconseja la operación" con $P(B)=0,5$.

C = "el médico *C* aconseja la operación" con $P(C)=0,3$.

Los sucesos *A*, *B* y *C* son mutuamente independientes.

a) Se debe calcular la probabilidad del suceso $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$. Dado que si los sucesos *A*, *B* y *C* son independientes, también lo son sus contrarios. Por lo tanto se tiene que:

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})=0,2\cdot 0,5\cdot 0,7=0,07$$

b) El suceso "al menos uno de ellos aconseja la operación" es el suceso $A\cup B\cup C$, cuya probabilidad se calcula como sigue, teniendo en cuenta la mutua independencia de los sucesos:

$$\begin{aligned}&P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)\cdot P(B)-P(A)\cdot P(C)-P(B)\cdot P(C)+P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\\&=0,8+0,5+0,3-0,8\cdot 0,5-0,8\cdot 0,3-0,5\cdot 0,3+0,8\cdot 0,5\cdot 0,3=0,93\end{aligned}$$

c) El suceso *D* = "solo uno aconseje la operación" puede escribirse como la unión de tres sucesos incompatibles $D=(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)$. Cuya probabilidad se obtiene, teniendo en cuenta que los sucesos involucrados son mutuamente independientes:

$$\begin{aligned}&P(D)=P\left((A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)\right)=P(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})+P(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})+P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)=\\&=P(A)\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})+P(\bar{A})\cdot P(B)\cdot P(\bar{C})+P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(C)=0,8\cdot 0,5\cdot 0,7+0,2\cdot 0,5\cdot 0,7+0,2\cdot 0,5\cdot 0,3=0,38\end{aligned}$$

60. De los empleados de una empresa se sabe que el 40 % acude al trabajo en transporte público, que el 75 % come en la empresa y que el 30 % acude al trabajo en transporte público y come en la empresa.

a) ¿Qué porcentaje acude al trabajo en transporte público y no come en la empresa?

b) Dentro de los que comen en la empresa, ¿qué porcentaje usa el transporte público?

Sean los sucesos:

A = "el empleado usa el transporte público", y su contrario $\bar{A}$.

C = "el empleado come en la empresa" y su contrario $\bar{C}$.

$$P(A)=0{,}4 \qquad P(\bar{A})=0{,}6 \qquad P(C)=0{,}75 \qquad P(\bar{C})=0{,}25 \qquad P(A\cap C)=0{,}3$$

a) Se pide la probabilidad del suceso $A\cap\bar{C}$, que se calcula como sigue:

$$P(A\cap\bar{C})=P(A)-P(A\cap C)=0{,}4-0{,}3=0{,}1$$

El 10 % de los empleados acude en transporte público y no come en la empresa.

b) Debe calcularse la probabilidad del suceso A condicionada por el suceso C:

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{0{,}3}{0{,}75}=0{,}4$$

El 40 % de los que comen en la empresa usa el transporte público.

61. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=0{,}2$; $P(B)=0{,}5$ y $P(A\cup B)=0{,}65$.

a) ¿Son independientes ambos sucesos? Razona la respuesta.

b) Calcular $P(A\,|\,B)$.

a) Se calcula la probabilidad del suceso intersección de A y B:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}2+0{,}5-0{,}65=0{,}05$$

Si se tiene en cuenta este resultado, se deduce que los sucesos no son independientes ya que:

$$P(A)\cdot P(B)=0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}1\neq P(A\cap B)=0{,}05$$

b) Por la definición de probabilidad condicionada: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}05}{0{,}5}=0{,}1$.

62. En unos grandes almacenes, el 60 % de las compras de un determinado mes se pagaron con tarjeta de crédito. De ellas, el 10 % fueron posteriormente devueltas. Además, se sabe que entre las compras devueltas de las realizadas ese mes, un 50 % habían sido pagadas con tarjeta. Elegida una compra de ese mes al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya pagado con tarjeta y posteriormente se haya devuelto?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya devuelto posteriormente?

c) ¿Qué porcentaje de compras se compran al contado y no son devueltas posteriormente?

Elegida aleatoriamente una compra del mes en cuestión, sean los sucesos T = "la compra se pagó con tarjeta de crédito" y D = "la compra fue devuelta". La información proporcionada indica que:

$$P(T)=0{,}6 \qquad P(D|T)=0{,}1 \qquad P(T\,|D)=0{,}5$$

a) Se trata de obtener la probabilidad del suceso $T\cap D$: $P(T\cap D)=P(T)\cdot P(D|T)=0{,}6\cdot 0{,}1=0{,}06$.

b) En este caso, la probabilidad del suceso D se obtiene a partir de la probabilidad condicionada $P(T\,|\,D)$:

$$P(T\,|D)=\frac{P(T\cap D)}{P(D)}\Rightarrow P(D)=\frac{P(T\cap D)}{P(T\,|D)}=\frac{0{,}06}{0{,}5}=0{,}12$$

c) Se quiere hallar la probabilidad del suceso $\bar{T} \cap \bar{D}$. Usando las leyes de De Morgan se tiene:

$$P\left(\bar{T} \cap \bar{D}\right) = P\left(\overline{T \cup D}\right) = 1 - P\left(T \cup D\right) = 1 - 0,66 = 0,34$$

Donde $P\left(T \cup D\right) = P\left(T\right) + P\left(D\right) - P\left(T \cap D\right) = 0,6 + 0,12 - 0,06 = 0,66$.

Luego el 66 % de las compras se compran al contado y no son devueltas posteriormente.

63. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio, con $P\left(A\right) = 0,4$; $P\left(B\right) = 0,5$ y $P\left(B \mid A\right) = 0,3$. Calcula:

a) $P(A \cup B)$

b) $P\left(\bar{B} \mid A\right)$

c) $P\left(A \mid \bar{B}\right)$

d) $P\left(\bar{B} \mid \bar{A}\right)$

En primer lugar se calcula la probabilidad del suceso intersección de A y B:

$$P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B|A\right) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$$

a) Utilizando las propiedades de la probabilidad:

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) = 0,4 + 0,5 - 0,12 = 0,78$$

b) De la definición de probabilidad del suceso contrario:

$$P\left(\bar{B}|A\right) = 1 - P\left(B \mid A\right) = 1 - 0,3 = 0,7$$

c) Por la definición de probabilidad condicionada y las propiedades de la probabilidad:

$$P\left(A|\bar{B}\right) = \frac{P\left(A \cap \bar{B}\right)}{P\left(\bar{B}\right)} = \frac{P\left(A\right) - P\left(A \cap B\right)}{1 - P\left(B\right)} = \frac{0,4 - 0,12}{1 - 0,5} = 0,56$$

d) De la misma forma que en el apartado anterior:

$$P\left(\bar{B}|\bar{A}\right) = \frac{P\left(\bar{A} \cap \bar{B}\right)}{P\left(\bar{A}\right)} = \frac{P\left(\overline{A \cup B}\right)}{1 - P\left(A\right)} = \frac{1 - P\left(A \cup B\right)}{1 - P\left(A\right)} = \frac{1 - 0,78}{1 - 0,4} = 0,3667$$

64. Se lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas del 1 al 6.

a) Determina el número de resultados de este experimento aleatorio.

b) Sea *A* el suceso "en los dos lanzamientos se obtiene un número mayor que 4" y *B* el suceso "en los dos lanzamientos se obtiene un número par". Calcula la probabilidad de *A* y la de *B*.

c) ¿Son *A* y *B* independientes?

a) El número de resultados posibles del experimento consistente en lanzar un dado dos veces consecutivas es el de las variaciones con repetición de orden 2 de los 6 números de los que tiene el dado:

$$VR_{6,2} = 6^2 = 36$$

La tabla siguiente muestra los 36 resultados posibles. En las filas el resultado del primer lanzamiento y en las columnas el del segundo.

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

b) Los resultados favorables a los sucesos *A* y *B* se pueden contar en la tabla:

Resultados favorables al suceso *A*: 4 (señalados con rayas diagonales más el caso 66).

Resultados favorables al suceso *B*: 9 (señalados en color gris liso).

Como el dado es equilibrado, los 36 resultados posibles son equiprobables y se puede aplicar la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \qquad P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

c) El suceso consiste en un único resultados posible, $A \cap B = \{66\}$. Su probabilidad es por tanto:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Como $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{36} = P(A \cap B)$, los sucesos *A* y *B* son independientes.

65. Se consideran dos sucesos *A* y *B* tales que:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{3} \qquad P(B|A) = \frac{1}{4} \qquad P(A \cup B) = \frac{1}{2}}$$

Calcula razonadamente:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(B)$

c) $P(\overline{B} \mid A)$

d) $P(\overline{A} \mid \overline{B})$

a) Por la regla del producto de probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

b) Por las propiedades de la función de probabilidad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Donde $P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.

c) De la definición de probabilidad condicionada y de las propiedades de la probabilidad:

$$P\left(\bar{B}|A\right)=\frac{P\left(A\cap\bar{B}\right)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

d) Una vez más, de la definición de probabilidad condicionada y de las propiedades de la probabilidad:

$$P\left(\bar{A}|\bar{B}\right)=\frac{P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)}{P\left(\bar{B}\right)}=\frac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{1-P(B)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

Probabilidad total. Teorema de Bayes

66. En el departamento textil de unos grandes almacenes se encuentran mezcladas y a la venta 100 camisetas de la marca *A*, 60 de la marca *B* y 40 de la marca *C*. La probabilidad de que una camiseta tenga tara es 0,01 para la marca *A*; 0,02 para la marca *B* y 0,03 para la marca *C*. Un comprador elige una camiseta al azar.

a) Calcula la probabilidad de que la camiseta tenga tara.

b) Sabiendo que la camiseta elegida tiene tara, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca *B*?

Se elige una camiseta al azar. Sean los sucesos:

A = “la camiseta es de la marca *A*”.

B = “la camiseta es de la marca *B*”.

C = “la camiseta es de la marca *C*”.

T = “la camiseta tiene tara”.

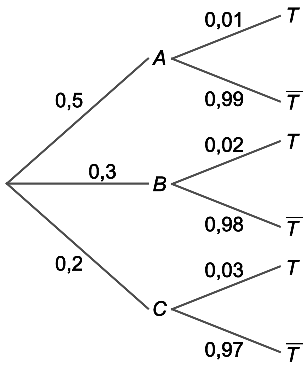
En total se dispone de 200 camisetas, luego se pueden asignar las siguientes probabilidades:

$$P(A)=\frac{100}{200}=0{,}5 \qquad P(B)=\frac{60}{200}=0{,}3 \qquad P(C)=\frac{40}{200}=0{,}2$$

Además, se sabe que:

$$P(T|A)=0{,}01 \qquad P(T|B)=0{,}02 \qquad P(T|C)=0{,}03$$

El diagrama de árbol muestra las distintas posibilidades:



a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, se obtiene la probabilidad de que la camiseta elegida tenga tara:

$$P(T)=P(T|A)\cdot P(A)+P(T|B)\cdot P(B)+P(T|C)\cdot P(C)=0{,}01\cdot 0{,}5+0{,}02\cdot 0{,}3+0{,}03\cdot 0{,}2=0{,}017$$

b) Mediante la regla de Bayes, se puede calcular esta probabilidad:

$$P(B|T)=\frac{P(T|B)\cdot P(B)}{P(T)}=\frac{0{,}02\cdot 0{,}3}{0{,}017}=0{,}3529$$

67. Cierta población de personas mayores de 70 años está formada por un 40 % de hombres y un 60 % de mujeres. El porcentaje de personas dependientes en esa población es del 10% entre los hombres y del 20 % entre las mujeres.

a) Calcula el porcentaje de personas dependientes en esa población de mayores de 70 años.

b) Elegida una persona al azar de la citada población, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer o no sea dependiente?

Se elige al azar una persona mayor de 70 años y se consideran los sucesos:

H = "la persona elegida es hombre".

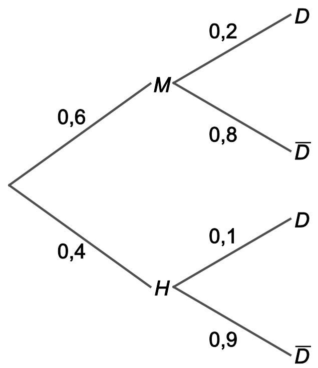
M = "la persona elegida es mujer".

D = "la persona elegida es dependiente".

Se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(H)=0,4 \qquad P(M)=0,6 \qquad P(D|H)=0,1 \qquad P(D|M)=0,2$$

En el diagrama de árbol se muestran las distintas posibilidades:



a) Se debe obtener la probabilidad de que una persona mayor de 70 años sea dependiente. Se utiliza el teorema de la probabilidad total:

$$P(D)=P(H)\cdot P(D|H)+P(M)\cdot P(D|M)=0,4\cdot 0,1+0,6\cdot 0,2=0,04+0,12=0,16$$

El 16 % de la población mayor de 70 años es dependiente.

b) Debe calcularse la probabilidad del suceso $M\cup \bar{D}$. Por las propiedades de la probabilidad se tiene que:

$$P\left(M\cup \bar{D}\right)=P(M)+P\left(\bar{D}\right)-P\left(M\cap \bar{D}\right)$$

La probabilidad del suceso contrario al D es $P\left(\bar{D}\right)=1-P(D)=1-0,16=0,84$.

La probabilidad del suceso $M\cap \bar{D}$, se obtiene por el producto de probabilidades:

$$P\left(\bar{D}\,|M\right)=1-P(D|M)=1-0,2=0,8 \Rightarrow P\left(M\cap \bar{D}\right)=P(M)\cdot P\left(\bar{D}|M\right)=0,6\cdot 0,8=0,48$$

De esta manera, $P\left(M\cup \bar{D}\right)=P(M)+P\left(\bar{D}\right)-P\left(M\cap \bar{D}\right)=0,6+0,84-0,48=0,96$.

68. La probabilidad de que ocurran simultáneamente dos sucesos *A* y *B* es 0,1 y la de que no ocurra ninguno de los dos es 0,2. Además se sabe que $P(A|B)=0,25$. Calcula la probabilidad de que:

a) Ocurra al menos uno de los dos.

b) No ocurra *A*.

Según los datos del enunciado se tiene que:

$$P(A\cap B)=0,1 \qquad P\left(\bar{A}\cap \bar{B}\right)=0,2 \qquad P(A|B)=0,25$$

a) Se quiere obtener la probabilidad del suceso $A\cup B$. Utilizando las leyes de De Morgan se obtiene que:

$$P(A\cup B)=1-P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(\bar{A}\cap \bar{B}\right)=1-0,2=0,8$$

b) Para calcular la probabilidad del suceso $\overline{A}$ primero se debe tener el valor de $P(A)$. En primer lugar, se calcula $P(B)$ aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A|B)}=\frac{0,1}{0,25}=0,4$$

Por las propiedades de la función de probabilidad se tiene que:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Donde $P(A)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(B)=0,8+0,1-0,4=0,5.$

Y, por tanto, $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,5=0,5.$

69. El 70 % de las compras de un supermercado las realizan mujeres. El 80 % de las compras realizadas por éstas supera los 20 €, mientras que sólo el 30 % de las realizadas por hombres supera esa cantidad.

a) Elegido un tique de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 20 €?

b) Si se sabe que un tique de compra no supera los 20 €, ¿cuál es la probabilidad de que la compra la hiciera una mujer?

Se elige aleatoriamente un tique de compra. Sean los sucesos:

M = “la compra la realizó una mujer”.

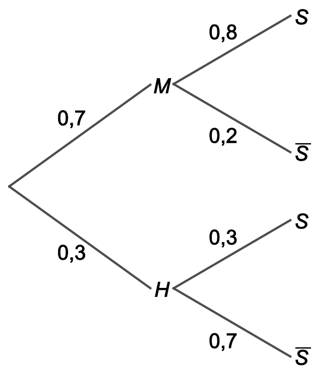
H = “la compra la realizó un hombre”.

S = “la compra supera los 20€”.

Se dispone de las siguientes probabilidades:

$$P(M)=0,7 \qquad P(H)=0,3 \qquad P(S|M)=0,8 \qquad P(S|H)=0,3$$

En el diagrama de árbol se pueden ver las diferentes posibilidades:



a) Para calcular esta probabilidad del suceso *S*, se utiliza el teorema de la probabilidad total:

$$P(S)=P(S|M)\cdot P(M)+P(S|H)\cdot P(H)=0,8\cdot 0,7+0,3\cdot 0,3=0,65$$

b) Esta probabilidad se obtiene mediante la regla de Bayes:

$$P(M|\overline{S})=\frac{P(\overline{S}|M)\cdot P(M)}{P(\overline{S})}=\frac{0,2\cdot 0,7}{1-0,65}=0,4$$

70. Un envío de frutas a un supermercado consta de naranjas y manzanas que se agrupan en cajones de 500 piezas: 300 naranjas y 200 manzanas. Por experiencias anteriores se sabe que en cada envío están estropeadas un 15 % de las naranjas y un 5 % de las manzanas. Se extrae una pieza al azar de un cajón cualquiera.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté estropeada?

b) Si la pieza elegida está en buenas condiciones, ¿qué es más probable, que sea naranja o que sea manzana?

Se elige al azar una pieza de fruta. Sean los sucesos:

N = "la pieza elegida es una naranja".

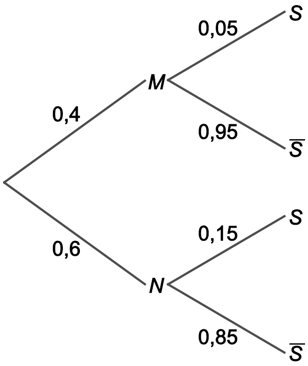
M = "la pieza elegida es una manzana".

S = "la pieza elegida está estropeada".

Se dispone de las siguientes probabilidades:

$$P(N)=\frac{300}{500}=0,6 \qquad P(M)=\frac{200}{500}=0,4 \qquad P(S|N)=0,15 \qquad P(S|M)=0,05$$

El diagrama de árbol muestra la situación:



a) Mediante el teorema de la probabilidad total, se calcula la probabilidad del suceso *S*:

$$P(S)=P(S|N)\cdot P(N)+P(S|M)\cdot P(M)=0,15\cdot 0,6+0,05\cdot 0,4=0,11$$

b) Si la pieza está en buenas condiciones es que ha ocurrido el suceso $\overline{S}$, contrario al *S*, cuya probabilidad es:

$$P\left(\overline{S}\right)=1-P(S)=1-0,11=0,89$$

Observando las probabilidades en el diagrama de árbol y utilizando el teorema de Bayes:

$$P\left(N|\overline{S}\right)=\frac{P\left(\overline{S}|N\right)\cdot P(N)}{P\left(\overline{S}\right)}=\frac{0,85\cdot 0,6}{0,89}=0,5730$$

$$P\left(M|\overline{S}\right)=\frac{P\left(\overline{S}|M\right)\cdot P(M)}{P\left(\overline{S}\right)}=\frac{0,95\cdot 0,4}{0,89}=0,4270$$

Por tanto, es más probable que la pieza en buenas condiciones sea una naranja.

71. En un tribunal de una prueba de acceso a la universidad se han examinado 80 alumnos del colegio *A*, 70 alumnos del colegio *B* y 50 alumnos del colegio *C*. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio *A*, el 90 % de los del colegio *B* y por el 82 % de los del colegio *C*.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio *B*?

Se elige un alumno al azar y se consideran los sucesos:

A = “el alumno es del colegio *A*”.

B = “el alumno es del colegio *B*”.

C = “el alumno elegido es del colegio *C*”.

S = “el alumno ha superado la prueba de acceso”.

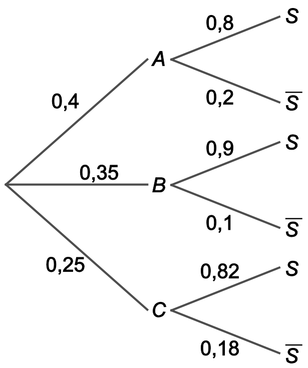
En total, se han examinado 200 alumnos. Se pueden asignar las siguientes probabilidades:

$$P(A) = \frac{80}{200} = 0,4 \qquad P(B) = \frac{70}{200} = 0,35 \qquad P(C) = \frac{50}{200} = 0,25$$

Además, se sabe que:

$$P(S|A) = 0,8 \qquad P(S|B) = 0,9 \qquad P(S|C) = 0,82$$

En el diagrama de árbol se muestran las distintas posibilidades:



a) Mediante el teorema de la probabilidad total se tiene que:

$$P(S) = P(S|A)\cdot P(A) + P(S|B)\cdot P(B) + P(S|C)\cdot P(C) = 0,8\cdot 0,4 + 0,9\cdot 0,35 + 0,82\cdot 0,25 = 0,84$$

b) Para calcular esta probabilidad, se utiliza la regla de Bayes:

$$P(B|\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}|B)\cdot P(B)}{P(\overline{S})} = \frac{0,1\cdot 0,35}{1-0,84} = 0,2188$$

CUESTIONES

72. Sean *A*, *B* y *C* tres sucesos cualesquiera de un espacio muestral. Escribe los sucesos "solo *A* ocurre", "al menos dos de los tres ocurren", "ocurren *A* y *C*, pero no ocurre *B*".

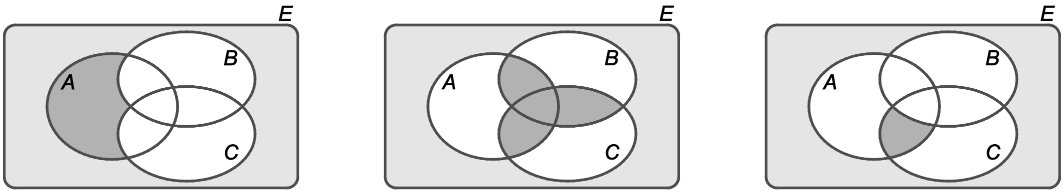
El suceso "solo *A* ocurre viene" dado por $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

El suceso "al menos dos de los tres ocurren" se puede escribir como:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

El suceso "ocurren *A* y *C* pero no *B*" es el suceso $A \cap \overline{B} \cap C$.

Los tres sucesos se pueden ver representados en los respectivos diagramas de Venn:



"solo *A* ocurre" — "al menos dos ocurren" — "ocurren *A* y *C*, pero no *B*"

73. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio con $A \subseteq B$. Si $P(A) = x$ y $P(B) = y$, calcula la probabilidad de los sucesos unión $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

Si el suceso *A* está contenido en el suceso *B*, se tiene que:

$$A \cup B = B \qquad A \cap B = A \qquad A - B = \varnothing$$

Entonces:

$$P(A \cup B) = P(B) = y \qquad P(A \cap B) = P(A) = x \qquad P(A - B) = 0$$

74. Si *A* y *B* son dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}5$ y $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}4$. ¿Se puede asegurar que *A* y *B* son independientes?

Debe calcularse la probabilidad del suceso intersección $A \cap B$.

En primer lugar se calcula la probabilidad del suceso unión:

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}4 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

Y, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}5 - 0{,}6 = 0{,}1$$

Se tiene que los sucesos *A* y *B* son independientes pues:

$$P(A \cap B) = 0{,}1 = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = P(A) \cdot P(B)$$

75. Sean A, B y C tres sucesos asociados a un experimento aleatorio con $P(B)>0$ y $P(C)>0$. Si los sucesos B y C son independientes, demostrar que:

$$\boldsymbol{P(A|B)=P(A|B\cap C)\cdot P(C)+P\left(A|B\cap\bar{C}\right)\cdot P\left(\bar{C}\right)}$$

Si se aplica la definición de probabilidad condicionada al segundo miembro de la igualdad:

$$P(A|B\cap C)\cdot P(C)+P\left(A|B\cap\bar{C}\right)\cdot P\left(\bar{C}\right)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}\cdot P(C)+\frac{P\left(A\cap B\cap\bar{C}\right)}{P\left(B\cap\bar{C}\right)}\cdot P\left(\bar{C}\right)=$$

En el denominador se utiliza que B y C son independientes y en el numerador se aplica la regla de multiplicación de probabilidades condicionada por B.

$$=\frac{P(A\cap C\mid B)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P(C)}\cdot P(C)+\frac{P\left(A\cap\bar{C}\mid B\right)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P\left(\bar{C}\right)}\cdot P\left(\bar{C}\right)=$$

Se simplifica dividiendo numerador y denominador por $P(B)$ y $P(C)$ en el primer término y por $P(B)$ y $P\left(\bar{C}\right)$ en el segundo término:

$$=P(A\cap C|B)+P\left(A\cap\bar{C}\mid B\right)=$$

Se aplica la regla del producto de probabilidades a los sucesos $A\cap C$ y $A\cap\bar{C}$, ambos ya condicionados por B:

$$=P(A|B)\cdot P(C|A\cap B)+P(A|B)\cdot P\left(\bar{C}|A\cap B\right)=$$

Se extrae el factor común $P(A\mid B)$ y como $P(C|A\cap B)+P\left(\bar{C}|A\cap B\right)=1$, se obtiene la relación:

$$=P(A|B)\cdot\left(P(C|A\cap B)+P\left(\bar{C}|A\cap B\right)\right)=P(A|B)$$

76. Dados los sucesos independientes A y B, calcula $P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)$ sabiendo que $P(A)=p$ y $P(A\cap B)=0{,}8p$.

Como A y B son sucesos independientes se tiene que:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=p\cdot P(B)=0{,}8p\Rightarrow P(B)=0{,}8$$

Por otro lado se tiene que:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=p+0{,}8-0{,}8p=0{,}8+0{,}2p$$

Finalmente se obtiene:

$$P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-(0{,}8+0{,}2p)=0{,}2-0{,}2p=0{,}2(1-p)$$

PROBLEMAS

77. Un estudiante busca una fórmula en tres libros de estadística. Las probabilidades de que la citada fórmula se encuentre en el 1.^{er}, 2.º o 3.^{er} libro son respectivamente 0,5; 0,6 y 0,7. Suponiendo que los sucesos son mutuamente independientes, calcula la probabilidad de que la fórmula se encuentre:

a) Solamente en un libro.

b) En ninguno de los tres libros.

c) Si el estudiante elige uno de estos libros al azar, calcula la probabilidad de que encuentre la fórmula.

Sean los sucesos A = "la fórmula se encuentra en el primer libro"; B = "la fórmula se encuentra en el segundo libro" y C = "la fórmula se encuentra en el tercer libro". Sus probabilidades son:

$$P(A)=0{,}5 \qquad P(B)=0{,}6 \qquad P(C)=0{,}7$$

Los sucesos son mutuamente independientes, es decir, son independientes dos a dos e independientes en conjunto.

a) El suceso "la fórmula se encuentra solo en un libro" se puede escribir como la unión de tres sucesos incompatibles:

$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$: "solo se encuentra en el primer libro".

$\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$: "solo se encuentra en el segundo libro".

$\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$: "solo se encuentra en el tercer libro".

La probabilidad se obtiene teniendo en cuenta que si A, B y C son mutuamente independientes, también lo son los grupos de tres sucesos que incluyan al menos uno de sus contrarios. De modo que:

$$P\left(\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\right)=P\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)=$$
$$=P(A)\cdot P\left(\overline{B}\right)\cdot P\left(\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\right)\cdot P(B)\cdot P\left(\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)\cdot P(C)=$$
$$=0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7=0{,}29$$

b) El suceso "la fórmula no se encuentra en ninguno de los libros" es el suceso $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$. Se tiene que si A, B y C son mutuamente independientes, también los son sus contrarios. Por tanto:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)\cdot P\left(\overline{C}\right)=0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}06$$

c) El estudiante elige al azar uno de los tres libros. Se consideran los siguientes sucesos:

S = "el estudiante encuentra la fórmula".

L_1 = "el estudiante elige el primer libro".

L_2 = "el estudiante elige el segundo libro".

L_3 = "el estudiante elige el tercer libro".

Los sucesos L_1, L_2 y L_3 constituyen una partición del espacio muestral (son un sistema completo de sucesos). Considerándose este hecho se tiene que:

$$P(L_1)=P(L_2)=P(L_3)=\frac{1}{3} \qquad P(S|L_1)=0{,}5 \qquad P(S|L_2)=0{,}6 \qquad P(S|L_3)=0{,}7$$

De manera que, la probabilidad del suceso S se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(S)=P(S|L_1)\cdot P(L_1)+P(S|L_2)\cdot P(L_2)+P(S|L_3)\cdot P(L_3)=0{,}5\cdot\frac{1}{3}+0{,}6\cdot\frac{1}{3}+0{,}7\cdot\frac{1}{3}=0{,}6$$

78. Según una encuesta de opinión, el 30 % de una determinada población aprueba la gestión del político *A*, mientras que el 70 % restante la desaprueba. En cambio, el político *B* es aprobado por la mitad y no por la otra mitad. Un 25 % de la población no aprueba a ninguno de los dos. Si se elige un individuo de la población al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe a alguno de los dos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe a los dos políticos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no apruebe a alguno de los dos?

Elegido un individuo al azar, se consideran los siguientes sucesos:

A = "aprueba la gestión del político A" y su contrario $\overline{A}$ = "no aprueba la gestión del político A".

B = "aprueba la gestión del político B" y su contrario $\overline{B}$ = "no aprueba la gestión del político B".

Se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0{,}3 \qquad P\left(\overline{A}\right) = 0{,}7 \qquad P(B) = P\left(\overline{B}\right) = 0{,}5 \qquad P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}25$$

a) Se trata de la probabilidad del suceso unión de $A \cup B$. Utilizando una de las leyes de De Morgan y las propiedades de la probabilidad:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}25$$

Por tanto:

$$P(A \cup B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

b) Debe calcularse la probabilidad del suceso intersección $A \cap B$. De las propiedades de la probabilidad:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}75 = 0{,}05$$

c) Ahora se trata de la probabilidad del suceso $\overline{A} \cup \overline{B}$, que se obtiene mediante una de las leyes de De Morgan y las propiedades de la probabilidad:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

79. El 40 % de los aspirantes a un puesto de trabajo superó una determinada prueba de selección. De los aspirantes que superan esa prueba, el 80 % acaban siendo contratados, mientras que también son contratados el 5 % de los que no la superan.

a) Calcula el porcentaje de aspirantes al puesto de trabajo que terminan siendo contratados.

b) Si un aspirante no es contratado, ¿cuál es la probabilidad de que superase la prueba de selección?

Elegido un aspirante al azar, se consideran los sucesos:

S = "el aspirante ha sido seleccionado".

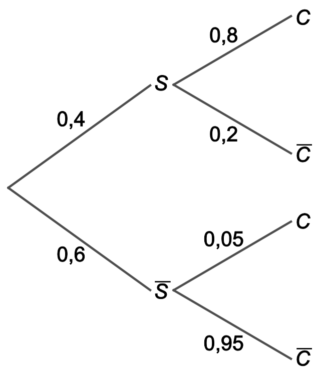
C = "el aspirante ha sido contratado".

Los sucesos S y su contrario $\overline{S}$ forman un sistema completo de sucesos.

Se dispone de las siguientes probabilidades:

$$P(S)=0,4 \quad P\left(\overline{S}\right)=0,6 \qquad P(C|S)=0,8 \qquad P\left(C|\overline{S}\right)=0,05$$

En el diagrama de árbol puede observase la distribución de las probabilidades:



a) La probabilidad de que el aspirante elegido sea contratado se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(C)=P(C|S)\cdot P(S)+P\left(C|\overline{S}\right)\cdot P\left(\overline{S}\right)=0,8\cdot 0,4+0,05\cdot 0,6=0,35$$

El 35 % de los aspirantes termina siendo contratado.

b) Debe calcularse ahora la probabilidad del suceso S sabiendo que el aspirante no fue contratado. Para ello, debe observarse que $P\left(\overline{C}|S\right)=1-P(C|S)=1-0,8=0,2$. Entonces:

$$P\left(S|\overline{C}\right)=\frac{P\left(\overline{C}|S\right)\cdot P(S)}{P\left(\overline{C}\right)}=\frac{0,2\cdot 0,4}{1-0,35}=\frac{0,08}{0,65}=0,1231$$

80. Un edificio tiene dos ascensores para uso de los vecinos. El primero de ellos es usado el 45 % de las ocasiones, mientras que el segundo es usado el resto de las ocasiones. El uso continuado de los ascensores provoca un 5 % de fallos en el primero de los ascensores, y un 8 %, en el segundo. Un día suena la alarma de uno de los ascensores porque ha fallado. Calcula la probabilidad de que haya sido el primero de los ascensores.

Habiendo sonado la alarma, se consideran lo sucesos:

A = “se ha usado el primer ascensor”.

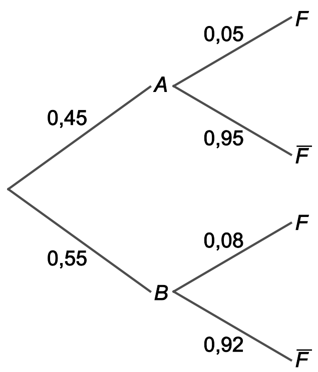
B = “se ha usado el segundo ascensor.”

F = “el ascensor se ha averiado”.

Los sucesos *A* y *B* forman un sistema completo de sucesos. Se dispone de las siguientes probabilidades:

$$P(A)=0,45 \qquad P(B)=0,55 \qquad P(F|A)=0,05 \qquad P(F|B)=0,08$$

El diagrama de árbol describe las posibles situaciones junto con sus probabilidades:



Mediante el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que algún ascensor se averíe al ser utilizado:

$$P(F)=P(F|A)\cdot P(A)+P(F|B)\cdot P(B)=0,05\cdot 0,45+0,08\cdot 0,55=0,0665$$

Usando el teorema de Bayes se calcula la probabilidad de que, sabiendo que un ascensor se ha averiado, sea el primero de los dos ascensores:

$$P(A|F)=\frac{P(F|A)\cdot P(A)}{P(F)}=\frac{0,05\cdot 0,45}{0,0665}=0,3383$$

81. Una Escuela Universitaria tiene el presente curso 900 alumnos españoles y 100 alumnos del programa Erasmus. Se sabe además que aprobaron el primer examen de matemáticas el 65 % de los estudiantes españoles y el 80 % de los estudiantes del programa Erasmus. Si se elige un alumno al azar de dicha escuela:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea Erasmus y haya aprobado el primer examen de matemáticas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el primer examen de matemáticas?

Elegido un alumno al azar, se consideran los sucesos:

S = “el alumno es español”.

R = “el alumno es del programa Erasmus”.

A = “aprobó el primer examen de matemáticas”.

Se conocen las probabilidades siguientes:

$$P(S)=0,9 \quad P(R)=0,1 \quad P(A|S)=0,65 \qquad P(A|R)=0,8$$

a) Se pide la probabilidad del suceso $R\cap A$. Por la regla del producto de probabilidades, se tiene que:

$$P(R\cap A)=P(R)\cdot P(A|R)=0,1\cdot 0,8=0,08$$

b) La probabilidad del suceso *A* se obtiene utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(A)=P(A|R)\cdot P(R)+P(A|S)\cdot P(S)=0,8\cdot 0,1+0,65\cdot 0,9=0,665$$

82. Una moneda ha sido trucada de forma que la probabilidad de obtener cara es el doble de la probabilidad de obtener cruz. Si se lanzan a la vez la moneda trucada y una moneda equilibrada, hallar la probabilidad de obtener:

a) Una cara y una cruz.

b) Al menos una cruz.

Sea *T* el suceso "la moneda está trucada". Con esta moneda la probabilidad de obtener cara es el doble que la de obtener cruz, es decir, llamando *C* al suceso "obtener cara" y *X* al suceso "obtener cruz":

$$P(C|T) = 2P(X|T)$$

Como $P(C|T) + P(X|T) = 1$, resulta que, sustituyendo:

$$2P(X|T) + P(X|T) = 1 \Rightarrow P(X|T) = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad P(C|T) = \frac{2}{3}$$

Si se denota por *B* al suceso "la moneda está equilibrada", se tiene que:

$$P(C|B) = P(X|B) = \frac{1}{2}$$

Entonces, teniendo en cuenta que el lanzamiento de una de las monedas es independiente del de la otra, las probabilidades de los posibles resultados al lanzar a la vez la moneda trucada y la moneda equilibrada son:

$$P(CC) = P(C|T) \cdot P(C|B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \qquad P(CX) = P(C|T) \cdot P(X|B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(XC) = P(X|T) \cdot P(C|B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \qquad P(XX) = P(X|T) \cdot P(X|B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

a) La probabilidad del suceso *A* = "obtener una cara y una cruz" es:

$$P(A) = P(CX) + P(XC) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

b) La probabilidad del suceso *D* = "obtener al menos una cruz" es:

$$P(D) = P(CX) + P(XC) + P(XX) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Puede observarse también que $P(D) = 1 - P(CC)$.

83. Entre los alérgicos, un 40 % tiene alergia a los animales, un 45 % tiene alergia a las plantas y un 15 % tiene alergia a algunas comidas. Son hombres el 40 % de los alérgicos a los animales, el 50 % de los alérgicos a las plantas y el 35 % de los alérgicos a algunas comidas.

a) Dibuja el diagrama de árbol de probabilidades.

b) Calcula la proporción de hombres en los alérgicos.

c) Se elige una mujer alérgica, ¿cuál es la probabilidad de que lo sea a las plantas?

Se elige al azar una persona alérgica. Se consideran los sucesos:

A = "ser alérgico a los animales" *L* = "ser alérgico a las plantas" *C* = "ser alérgico a las comidas"

H = "ser hombre" *M* = "ser mujer"

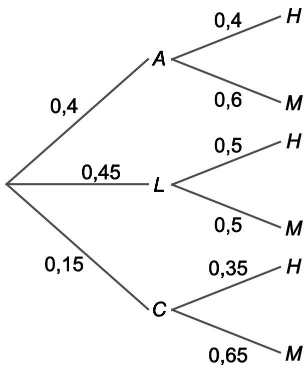
Los sucesos *A*, *L* y *C* constituyen un sistema completo de sucesos. Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(A)=0,4 \quad P(L)=0,45 \quad P(C)=0,15 \quad P(H|A)=0,4 \quad P(H|L)=0,5 \quad P(H|C)=0,35$$

a) De las probabilidades anteriores se deducen las siguientes probabilidades:

$$P(M|A)=0,6 \quad P(M|L)=0,5 \quad P(M|C)=0,65$$

Por lo tanto, el diagrama de árbol de probabilidades queda:



b) Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(H)=P(H|A)\cdot P(A)+P(H|L)\cdot P(L)+P(H|C)\cdot P(C)=0,4\cdot 0,4+0,5\cdot 0,45+0,35\cdot 0,15=0,4375$$

Por tanto, la proporción de hombres alérgicos es: $\dfrac{4375}{10\,000}=\dfrac{7}{16}$

c) En este caso se debe utilizar la regla de Bayes teniéndose en cuenta que:

$$P(M)=1-P(H)=1-0,4375=0,5625$$

De modo que:

$$P(L|M)=\frac{P(M|L)\cdot P(L)}{P(M)}=\frac{0,5\cdot 0,45}{0,5625}=0,4$$

84. Según un estudio, el 35 % de una población utiliza el autobús, mientras que el 65 % restante no lo hace. En cuanto al tranvía, es utilizado por la mitad y no por la otra mitad. Un 30 % no utiliza ninguno de los dos transportes. Si se elige un individuo de la población al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice alguno de los dos transportes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice los dos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice el tranvía, sabiendo que utiliza el autobús?

Elegido al azar un individuo de la población, se consideran los sucesos:

A = "utiliza el autobús".

T = "utiliza el tranvía".

Se dispone de las siguientes probabilidades:

$$P(A)=0,35 \quad P\left(\bar{A}\right)=0,65 \quad P(T)=0,5 \quad P\left(\bar{T}\right)=0,5 \quad P\left(\bar{A}\cap\bar{T}\right)=0,3$$

a) Se trata de la probabilidad del suceso unión $A\cup T$. Por la probabilidad del suceso contrario y una de las leyes de De Morgan:

$$P(A\cup T)=1-P\left(\overline{A\cup T}\right)=1-P\left(\bar{A}\cap\bar{T}\right)=1-0,3=0,7$$

b) La probabilidad del suceso intersección $A\cap T$ se consigue a partir de la relación:

$$P(A\cap T)=P(A)+P(T)-P(A\cup T)=0,35+0,5-0,7=0,15$$

c) Por la definición de probabilidad condicionada:

$$P(T|A)=\frac{P(A\cap T)}{P(A)}=\frac{0,15}{0,35}=0,4286$$

85. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se realizan dos tiradas con el dado elegido.

a) Calcula la probabilidad de sacar 5 en la primera tirada y 6 en la segunda.

b) Si el resultado de la primera tirada es 5 y el resultado de la segunda tirada es 6, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?

Sean los sucesos:

N = "se selecciona el dado normal". T = "se selecciona el dado trucado".

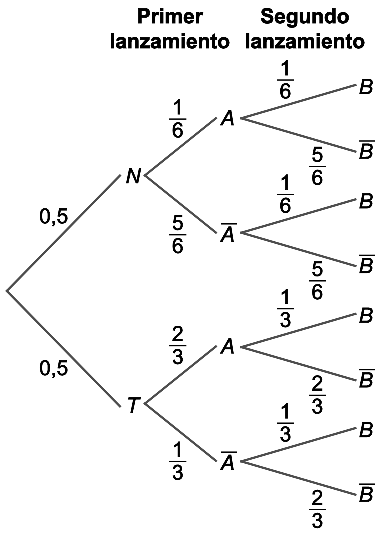
Las probabilidades de los sucesos N y T son $P(N) = P(T) = \frac{1}{2}$.

Una vez seleccionado el dado se lanza dos veces.

a) Sean los sucesos A = "en el primer lanzamiento se obtiene un 5" y B = "en el segundo lanzamiento se obtiene un 6". Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(A|N) = P(B|N) = \frac{1}{6} \qquad P(A|T) = \frac{2}{3} \qquad P(B|T) = \frac{1}{3}$$

El diagrama de árbol muestra la situación:



Los sucesos A y B son independientes. Y la probabilidad del suceso $A \cap B$ se calcula mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(A \cap B) = P(A \cap B|N) \cdot P(N) + P(A \cap B|T) \cdot P(T) = P(A|N) \cdot P(B|N) \cdot P(N) + P(A|T) \cdot P(B|T) \cdot P(T) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,5 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 = \frac{1}{8}$$

b) Si al lanzar dos veces el dado ha ocurrido el suceso $A \cap B$, se pide la probabilidad de que el dado lanzado sea el trucado. Utilizando la regla de Bayes:

$$P(T|A \cap B) = \frac{P(A \cap B|T) \cdot P(T)}{P(A \cap B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$$

86. Una urna *A* contiene cinco bolas rojas y dos azules. Otra urna *B* contiene cuatro bolas rojas y una azul. Tomamos al azar una bola de la urna *A* y, sin mirarla, la pasamos a la urna *B*. A continuación extraemos con reemplazamiento dos bolas de la urna *B*. Halla la probabilidad de que:

a) Ambas bolas sean de color rojo.

b) Ambas bolas sean de distinto color.

c) Si la primera bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la bola que hemos pasado de la urna *A* a la urna *B* haya sido azul?

Sean los sucesos:

R = "extraer bola roja" Z = "extraer bola azul"

En la primera fase del experimento se extrae una bola de la urna *A*, las probabilidades de que sea roja o azul son respectivamente:

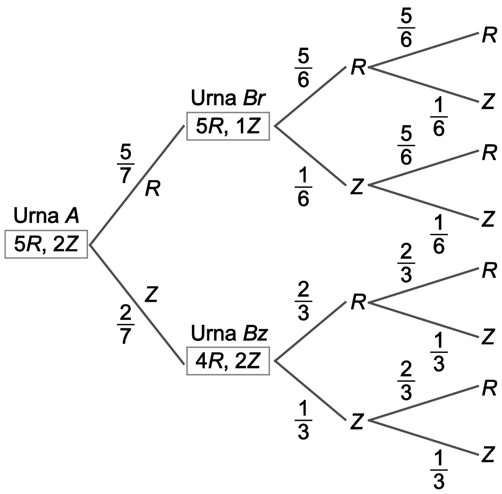
$$P(R|A)=\frac{5}{7} \qquad P(Z|A)=\frac{2}{7}$$

Por lo tanto, la urna *B* puede quedar compuesta con $B_R=\{5R,\ 1Z\}$ con probabilidad $\frac{5}{7}$ o con $B_Z=\{4R,\ 2Z\}$ con probabilidad $\frac{2}{7}$. A continuación, en la segunda fase del experimento se extraen con reemplazamiento, es decir, de forma independiente, dos bolas de la urna *B* que se haya formado.

a) Dependiendo de si la urna formada es $B_R=\{5R,\ 1Z\}$ o $B_Z=\{4R,\ 2Z\}$, la probabilidad de obtener dos bolas rojas es:

$$P(RR|B_R)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36} \qquad P(RR|B_Z)=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

En el diagrama de árbol se muestran las distintas posibilidades para este experimento:



La probabilidad de que las dos bolas obtenidas sean rojas (RR) se obtiene utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(RR)=P(RR|B_R)\cdot P(B_R)+P(RR|B_Z)\cdot P(B_Z)=\frac{25}{36}\cdot\frac{5}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{7}=\frac{157}{252}=0{,}6230$$

b) Se denota por B = "obtener bolas de distinto color". El suceso B incluye los casos RZ (primera bola roja y segunda azul) y ZR (primera bola azul y segunda roja) como se puede ver en el diagrama de árbol. En total cuatro posibilidades:

$$P(RZ|B_R)=P(ZR|B_R)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36} \qquad P(RZ|B_Z)=P(ZR|B_R)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(B)=P(RZ|B_R)\cdot P(B_R)+P(ZR|B_R)\cdot P(B_R)+P(RZ|B_Z)\cdot P(B_Z)+P(ZR|B_Z)\cdot P(B_Z)=$$
$$=\frac{5}{36}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{36}\cdot\frac{5}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{7}=\frac{41}{126}=0{,}3254$$

c) Sea C = "la primera bola extraída de la segunda urna es roja". Se pide la probabilidad de que la urna formada en la primera extracción haya sido B_Z, sabiendo que ha ocurrido C. Utilizando el teorema de Bayes:

$$P(B_Z|C)=\frac{P(C|B_Z)\cdot P(B_Z)}{P(C|B_Z)\cdot P(B_Z)+P(C|B_R)\cdot P(B_R)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{7}}=\frac{8}{33}=0,2424$$

87. En una caja hay guardados 20 relojes, de los cuales solo 15 funcionan correctamente.

a) Representa la situación del problema, cuando se extraen al azar dos relojes uno a uno sin reemplazamiento mediante un diagrama de árbol.

b) Si se extrae un reloj al azar, ¿cuál es la probabilidad de que funcione bien?

c) Si se extraen dos relojes al azar uno a uno sin reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que los dos funcionen bien?

d) Si se extraen al azar dos relojes sucesivamente sin reemplazamiento y el primero no funciona correctamente, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo tampoco funcione?

Sean los sucesos:

C_1 = "el primer reloj extraído funciona correctamente".

$\overline{C}_1$ = "el primer reloj extraído no funciona correctamente".

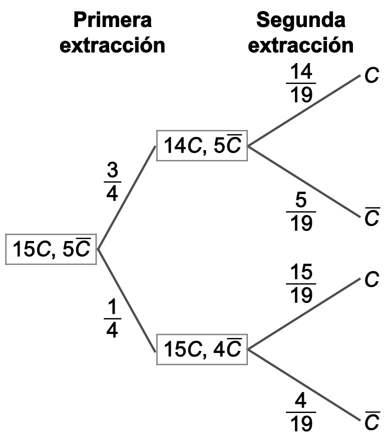
C_2 = "el segundo reloj extraído funciona correctamente".

$\overline{C}_2$ = "el segundo reloj extraído no funciona correctamente".

Se tienen las siguientes probabilidades:

$P(C_1)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$ $P(\overline{C}_1)=\frac{1}{4}$ $P(C_2|C_1)=\frac{14}{19}$ $P(\overline{C}_2|C_1)=\frac{5}{19}$ $P(C_2|\overline{C}_1)=\frac{15}{19}$ $P(\overline{C}_2|\overline{C}_1)=\frac{4}{19}$

a) En el diagrama de árbol se muestran las distintas posibilidades con sus probabilidades en cada rama:



b) Se trata de la probabilidad del suceso C_1: $P(C_1)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}=0,75$

c) Se debe calcular la probabilidad del suceso $C_1\cap C_2$: $P(C_1\cap C_2)=P(C_1)\cdot P(C_2|C_1)=\frac{3}{4}\cdot\frac{14}{19}=0,5526$

d) Se puede obtener directamente del diagrama de árbol: $P(\overline{C}_2|\overline{C}_1)=\frac{4}{19}=0,2105$

88. *En un centro comercial, las compras se pagan con tarjeta de crédito, de débito o en metálico. En una semana hubo 400 compras con tarjeta de crédito, 500, con tarjeta de débito, y 1100, en metálico. El 60 % de los pagos que se hicieron con tarjeta de crédito, y el 40 %, de los que se hicieron con tarjeta de débito correspondieron a compras superiores a 200 €. Además, 300 de la compras en metálico también fueron superiores a 200 €. Si se extrae al azar un comprobante de compra:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 200 €?

b) Si la compra es inferior a 200 € ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada en metálico?

Extraído al azar un comprobante de compra de esa semana, se consideran los sucesos:

C = “la compra se pagó con tarjeta de crédito”.

D = “la compra se pagó con tarjeta de débito”.

M = “la compra se pagó en metálico”.

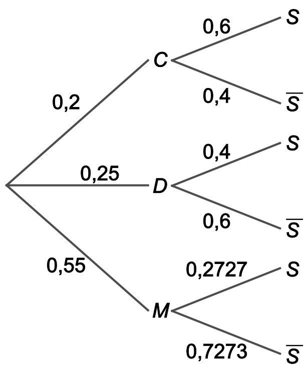
Los sucesos C, D y M constituyen un sistema completo de sucesos para este experimento. Las probabilidades de cada uno de estos sucesos son:

$$P(C)=\frac{400}{2000}=0,2 \qquad P(D)=\frac{500}{2000}=0,25 \qquad P(M)=\frac{1100}{2000}=0,55$$

Se considera, además, el suceso S = “la compra seleccionada fue de más de 200 €”. Así se tiene que:

$$P(S|C)=0,6 \qquad P(S|D)=0,4 \qquad P(S|M)=\frac{300}{1100}=0,2727$$

El diagrama de árbol muestra las distintas posibilidades con sus probabilidades:



a) Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(S)=P(S|C)\cdot P(C)+P(S|D)\cdot P(D)+P(S|M)\cdot P(M)=0,6\cdot 0,2+0,4\cdot 0,25+0,2727\cdot 0,55=0,37$$

b) Se trata de calcular la probabilidad de que, sabiendo que una compra ha sido inferior a 200 € (suceso $\bar{S}$) , se haya pagado en metálico:

$$P\left(M|\bar{S}\right)=\frac{P\left(\bar{S}|M\right)\cdot P(M)}{P\left(\bar{S}\right)}=\frac{0,7273\cdot 0,55}{1-0,37}=0,6349$$

89. Al 80 % de los trabajadores en educación (*E*) que se jubilan sus compañeros les hacen una fiesta de despedida (*FD*), también al 60 % de los trabajadores de justicia (*J*) y al 30 % de los de sanidad (*S*). En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) Calcula la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.

b) Se sabe que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcula la probabilidad de que fuera de sanidad.

Se consideran los sucesos:

E = "el trabajador jubilado es de educación".

J = "el trabajador jubilado es de justicia".

S = "el trabajador jubilado es de sanidad".

Se sabe que si $P(J) = p,$ entonces $P(E) = P(S) = 2p;$ y como las probabilidades deben sumar 1 se tiene que:

$$p + 2p + 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

De manera que:

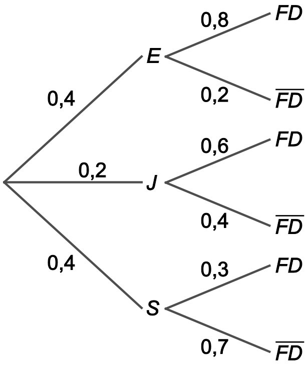
$$P(E) = P(S) = 0{,}4 \qquad P(J) = 0{,}2$$

Los sucesos *E*, *S* y *J* forman un sistema completo de sucesos.

Si se considera el suceso *FD*: "al trabajador le hacen una fiesta de despedida", se sabe que:

$$P(FD|E) = 0{,}8 \quad P(FD|J) = 0{,}6 \quad P(FD|S) = 0{,}3$$

El diagrama de árbol muestra las distintas posibilidades con sus probabilidades:



a) La probabilidad de que a un trabajador que se jubiló le hicieran fiesta de despedida se calcula mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(FD) = P(FD|E)\cdot P(E) + P(FD|J)\cdot P(J) + P(FD|S)\cdot P(S) = 0{,}8\cdot 0{,}4 + 0{,}6\cdot 0{,}2 + 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}56$$

b) En este caso, se trata de calcular la probabilidad de que el trabajador jubilado sea de sanidad, sabiendo que no le hicieron fiesta (suceso $\overline{FD}$):

$$P\left(S|\overline{FD}\right) = \frac{P\left(\overline{FD}|S\right)\cdot P(S)}{P\left(\overline{FD}\right)} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}4}{1-0{,}56} = 0{,}6364$$

90. En una población, se estima que la probabilidad de que una persona defraude a Hacienda es 0,05. Si una persona comete fraude, la probabilidad de que su declaración sea revisada es 0,8. La probabilidad de que una declaración sea revisada sin haber cometido fraude es 0,15. Se pide la probabilidad de que:

a) Una declaración sea revisada.

b) Habiendo sido revisada una declaración, esta no sea fraudulenta.

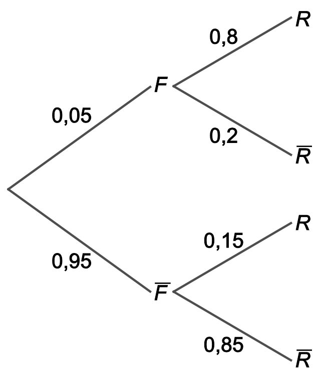
De la población se elige al azar una persona con obligación de declarar a Hacienda. Sean los sucesos:

F = "la persona ha cometido fraude en su declaración" con $P(F) = 0{,}05$ y $P(\overline{F}) = 0{,}95$.

R = "La declaración es revisada por Hacienda" con $P(R|F) = 0{,}8$ y $P(R|\overline{F}) = 0{,}15$.

Además se deducen las siguientes probabilidades: $P(\overline{R}|F) = 0{,}2$ y $P(\overline{R}|\overline{F}) = 0{,}85$.

El diagrama de árbol muestra las distintas posibilidades:



a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que una declaración sea revisada:

$$P(R) = P(R|F)\cdot P(F) + P(R|\overline{F})\cdot P(\overline{F}) = 0{,}8\cdot 0{,}05 + 0{,}15\cdot 0{,}95 = 0{,}1825$$

b) Utilizando la regla de Bayes, se obtiene esta probabilidad:

$$P(\overline{F}|R) = \frac{P(R|\overline{F})\cdot P(\overline{F})}{P(R)} = \frac{0{,}15\cdot 0{,}95}{0{,}1825} = 0{,}7808$$

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Sean *A* y *B* dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A\cap B)=0{,}1$; $P(\bar{A}\cap\bar{B})=0{,}6$ y $P(A\,|\,B)=0{,}5$. Calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(B)$

b) $P(A\cup B)$

c) $P(A)$

d) $P(\bar{B}\,|\,\bar{A})$

a) Mediante la regla del producto de probabilidades:

$$P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A|B)}=\frac{0{,}1}{0{,}5}=0{,}2$$

b) Por la probabilidad del suceso contrario y utilizando una de las leyes de De Morgan:

$$P(A\cup B)=1-P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)=1-0{,}6=0{,}4$$

c) De las propiedades de la probabilidad y de los resultados de los apartados anteriores:

$$P(A)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(B)=0{,}4+0{,}1-0{,}2=0{,}3$$

d) En este caso, se utiliza la definición de probabilidad condicionada:

$$P\left(\bar{B}|\bar{A}\right)=\frac{P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)}{P\left(\bar{A}\right)}=\frac{0{,}6}{1-0{,}3}=0{,}8571$$

2. Al 40 % de los habitantes de un municipio les gusta la lectura, al 50 %, el cine, y al 60 % les gusta el cine o la lectura o ambas cosas. Se elige un habitante al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine?

b) Si le gusta el cine, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura?

c) ¿Son independientes el gusto por la lectura y el cine? Razona la respuesta.

d) Halla la probabilidad de que le guste el cine y no le guste la lectura.

Elegido un habitante al azar, se consideran los sucesos:

L = “le gusta la lectura” *C* = “le gusta el cine”

Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(L)=0{,}4 \qquad P(C)=0{,}5 \qquad P(A\cup B)=0{,}6$$

a) Se trata de calcular la probabilidad del suceso $L\cap C$. Por las propiedades de la probabilidad:

$$P(L\cap C)=P(L)+P(C)-P(L\cup C)=0{,}4+0{,}5-0{,}6=0{,}3$$

b) Debe calcularse la probabilidad del suceso *L* sabiendo que ha ocurrido el suceso *C*:

$$P(L|C)=\frac{P(L\cap C)}{P(C)}=\frac{0{,}3}{0{,}5}=0{,}6$$

c) Los sucesos *L* y *C* no son independientes puesto que:

$$P(L\cap C)=0{,}3\neq 0{,}2=0{,}4\cdot 0{,}5=P(L)\cdot P(C)$$

d) Se trata de calcular la probabilidad del suceso $\bar{L}\cap C$:

$$P\left(\bar{L}\cap C\right)=P\left(\bar{L}|C\right)\cdot P(C)=\left(1-P(L|C)\right)\cdot P(C)=(1-0{,}6)\cdot 0{,}5=0{,}2$$

3. En un centro educativo hay 60 alumnos de Bachillerato. De ellos, 40 practican deporte, 24 estudian música y 12 las dos cosas. Se elige un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Realice al menos una de las dos cosas.

b) Estudie música sabiendo que también practica deporte.

c) No practique deporte.

Elegido un alumno al azar, se consideran los sucesos:

D = "el alumno practica deporte" *M* = "el alumno estudia música"

Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(D) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} = 0{,}6667 \qquad P(M) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad P(D \cap M) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

a) Se pide la probabilidad del sucesos unión $D \cup M$, que se calcula:

$$P(D \cup M) = P(D) + P(M) - P(D \cap M) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{13}{15} = 0{,}8667$$

b) Se trata de la probabilidad del suceso *M* condicionada por el suceso *D*:

$$P(M|D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

c) La probabilidad de que no practique deporte se obtiene por medio de la probabilidad del suceso contrario:

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$$

4. Se lanza una moneda equilibrada, de forma que si sale cara, se extrae una bola de la urna *A* que contiene siete bolas numeradas del 1 al 7 y si sale cruz, se extrae de la urna *B* que contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) La bola haya sido extraída de la urna *A* y el número sea par.

b) El número de la bola extraída sea par.

c) La bola sea de la urna *A*, si ha salido un número par.

d) La bola haya sido extraída de la urna *B*, sabiendo que ha salido número impar.

Sean los sucesos:

A = "la urna elegida es la *A*" *B* = "la urna elegida es la *B*"

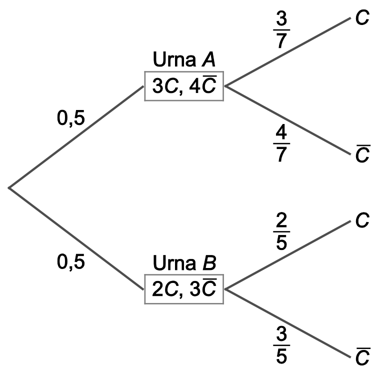
Dado que la moneda está equilibrada, se tiene que:

$$P(A) = P(B) = 0{,}5$$

Se considera el suceso *C* = "la bola tiene número par", entonces:

$$P(C|A) = \frac{3}{7} \qquad P(C|B) = \frac{2}{5}$$

En el diagrama de árbol se pueden ver las diferentes posibilidades con sus respectivas probabilidades:



a) Se trata de la probabilidad del suceso $A \cap C$, cuya probabilidad se calcula de la siguiente manera:

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C|A) = 0{,}5 \cdot \frac{3}{7} = 0{,}2143$$

b) En este caso, la probabilidad pedida se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B) = \frac{3}{7} \cdot 0{,}5 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}5 = 0{,}4143$$

c) Ahora se debe utilizar la regla de Bayes:

$$P(A|C)=\frac{P(C|A)\cdot P(A)}{P(C)}=\frac{\frac{3}{7}\cdot 0{,}5}{0{,}4143}=0{,}5172$$

d) Lo que se pide es calcular $P\left(B|\overline{C}\right)$, que mediante la regla de Bayes y la probabilidad del suceso contrario se obtiene que:

$$P\left(B|\overline{C}\right)=\frac{P\left(\overline{C}|B\right)\cdot P(B)}{P\left(\overline{C}\right)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot 0{,}5}{1-0{,}4143}=0{,}5122$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Se dispone de dos llaves para abrir la puerta de casa, cada una en un llavero. El primer llavero tiene 4 llaves y el segundo 6. Si elegimos al azar una llave de cada llavero, la probabilidad de que podamos entrar en casa es:

A. $\frac{9}{24}$ **B.** $\frac{1}{24}$ **C.** $\frac{10}{24}$ **D.** $\frac{6}{24}$

La solución es A. Sean los sucesos *A* = “extraer la llave que abre la casa del llavero *A*”, con $P(A)=\frac{1}{4}$, y *B* = “extraer la llave que abre la casa del llavero *B*”, con $P(B)=\frac{1}{6}$. Ambos sucesos son independientes:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Se quiere ver cuál es la probabilidad de que se pueda abrir la puerta (basta con acertar la llave de uno de los llaveros), es decir, la probabilidad de $A\cup B$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{9}{24}$$

2. Dos jugadores *A* y *B*, lanzan cada uno un dado. El que saque mayor puntación gana y si hay empate gana *A*. Si el jugador *A* ha ganado la partida, la probabilidad de que el jugador *B* haya obtenido 4 puntos es:

A. $\frac{7}{12}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{7}$

La solución es D. Se se considera la siguiente la tabla donde aparecen todos los posibles resultados que pueden obtener el jugador *A* y *B*:

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Se observa que hay 21 resultados favorables para que gane el jugador *A*, de entre los cuales, solo en 3 de ellos el jugador *B* obtiene 4 puntos. Por tanto, la probabilidad que se pide es $\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$.

3. **Si A y B son sucesos tales que $P(A)=0{,}3$; $P(B)=0{,}6$ y $P(A\cap B)=0{,}2$. Las probabilidades de los sucesos $A\cup B$ y $\bar{A}\,|\,\bar{B}$ son respectivamente:**

A. 0,7 y 0,25 **B.** 0,9 y $\frac{2}{3}$ **C.** 0,7 y $\frac{2}{3}$ **D.** 0,7 y 0,75

La solución es D. Utilizando las propiedades de la probabilidad se tiene que:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}3+0{,}6-0{,}2=0{,}7$$

Aplicando la definición de probabilidad condicionada se tiene que:

$$P\left(\bar{A}|\bar{B}\right)=\frac{P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)}{P\left(\bar{B}\right)}=\frac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{1-P(B)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-0{,}7}{1-0{,}6}=\frac{0{,}3}{0{,}4}=0{,}75$$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Dos sucesos A y B son tales que $P(A)=0{,}2$; $P(B)=0{,}5$ y $P(A\cup B)=0{,}6$. Entonces:**

A. A y B son incompatibles. **C.** $P(A\cap B)=0{,}1$

B. A y B son independientes. **D.** $P(B|A)=0{,}5$

Las soluciones correctas son B, C, D. Lo primero es calcular la probabilidad de la intersección:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}2+0{,}5-0{,}6=0{,}1$$

Ya se tiene que C es correcta. Si los sucesos A y B fueran incompatibles, la probabilidad de la intersección sería nula pero se acaba de probar que no es así.

Por otro lado, se tiene que los sucesos son independientes pues:

$$P(A\cap B)=0{,}1=0{,}2\cdot 0{,}5=P(A)\cdot P(B)$$

Por último, se calcula la probabilidad del suceso B condicionada por el suceso A:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}1}{0{,}2}=0{,}5$$

Por lo tanto, la solución D también es correcta.

5. **Si dos sucesos A y B, con $P(A)>0$ y $P(B)>0$ son independientes, entonces:**

A. $P(A\cup B)=P(A)+P\left(\bar{A}\right)\cdot P(B)$

B. $P(A|B)=P(B)$

C. $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

D. Son incompatibles.

Las soluciones correctas son A y C. Como los sucesos A y B son independientes se tiene que:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Luego la opción C es correcta Además, la opción A también es correcta pues usando que los sucesos son independientes y utilizando las propiedades de la probabilidad se observa que:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=P(A)+\left(1-P(A)\right)\cdot P(B)=P(A)+P\left(\bar{A}\right)\cdot P(B)$$

La opción B no es correcta ya que al ser los sucesos independientes se tiene que $P(A|B)=P(A)$. Por último, D es incorrecta ya que las condiciones del enunciado permiten asegurar que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)>0$, luego $P(A\cap B)\neq 0$ y, por tanto, son compatibles.

Señala el dato o los datos innecesarios para contestar

6. **Los sucesos *A*, *B* y *C* tienen probabilidad estrictamente positiva y son independientes dos a dos, pero no mutuamente independientes. Para calcular la probabilidad de la unión de los tres sucesos no es preciso conocer:**

A. $P(A),\ P(B), P(C)$

B. $P(A \cap B),\ P(A \cap C), P(B \cap C)$

C. $P(A \cap B \cap C)$

D. $P(A|B),\ P(B|C)$

Las soluciones correctas son B y D.

Por las propiedades de la probabilidad se tiene que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Si se sabe que los sucesos son independientes dos a dos se tiene que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \qquad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

Luego:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(C) - P(B) \cdot P(C) + P(A \cap B \cap C)$$

Por tanto, los datos que necesitamos para calcular la probabilidad de la unión son los de la opción A y C. Luego los datos de la opción B y D son innecesarios para contestar.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

7. **Sean *A* y *B* dos sucesos de un espacio muestral con $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$.**

1. ***A* y *B* son independientes.**

2. ***A* y *B* son incompatibles.**

A. $1 \Rightarrow 2$

B. $2 \Rightarrow 1$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. No se da ninguna de las anteriores.

La solución correcta es D. Por un lado, si dos sucesos, *A* y *B*, son independientes, implica que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Por otro lado, si dos sucesos, *A* y *B*, son incompatibles, se tiene que $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$. Estas propiedades son las únicas que se pueden asumir como ciertas pero no existe otra propiedad que permita relacionar ambas. Por tanto, no hay ninguna relación entre ambas.