11 Distribuciones de probabilidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La distribución de probabilidad de *X*: “número de unidades de un artículo que se venden diariamente en una tienda” es:

$$\boldsymbol{P(X=0)=\frac{1}{9} \quad P(X=1)=\frac{4}{9} \quad P(X=2)=\frac{1}{3} \quad P(X=3)=\frac{1}{9}}$$

a) Calcula el número esperado de ventas diario y su varianza.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un día elegido al azar se vendan 2 o más artículos?

a) El número esperado o esperanza de la variable *X* es:

$$E[X]=0\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{9}=\frac{13}{9}=1,4444$$

La varianza de *X* resulta:

$$\text{Var}[X]=\left(0^2\cdot\frac{1}{9}+1^2\cdot\frac{4}{9}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{13}{9}\right)^2=\frac{56}{81}=0,6914$$

b) Se calcula esta probabilidad como sigue:

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$$

2. Un jugador lanza un dado equilibrado y, si sale número par, gana tantos euros como puntos obtiene en su lanzamiento, mientras que si se sale impar, paga esos puntos en euros.

a) ¿Cuál es la ganancia esperada en cada jugada?

b) Calcula varianza y la deviación típica de la ganancia del jugador.

c) Calcula la probabilidad de ganar al menos 4 €.

Sea la variable aleatoria *X*: “puntos obtenidos en cada lanzamiento”. Si el dado está equilibrado, la probabilidad de los posibles valores de *X* es:

$$P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)=P(X=6)=\frac{1}{6}$$

Se considera la variable *Y*: “ganancia del jugador”, su distribución de probabilidad se muestra en la tabla:

$$Y:\begin{cases} -1 & P(Y=-1)=P(X=1)=\frac{1}{6} \\ +2 & P(Y=+2)=P(X=2)=\frac{1}{6} \\ -3 & P(Y=-3)=P(X=3)=\frac{1}{6} \\ +4 & P(Y=+4)=P(X=4)=\frac{1}{6} \\ -5 & P(Y=-5)=P(X=5)=\frac{1}{6} \\ +6 & P(Y=+6)=P(X=6)=\frac{1}{6} \end{cases}$$

a) Se calcula la esperanza de la variable *Y*:

$$E[Y]=-1\cdot P(Y=-1)+2\cdot P(Y=2)-3\cdot P(Y=-3)+4\cdot P(Y=4)-5\cdot P(Y=-5)+6\cdot P(Y=6)=$$
$$=(-1+2-3+4-5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=0,5$$

Por tanto, la ganancia esperada es de 0,5 €.

b) Para calcular la varianza de la ganancia del jugador, se calcula en primer lugar:

$$E\left[Y^2\right] = (-1)^2 \cdot P(Y=-1) + 2^2 \cdot P(Y=2) + (-3)^2 \cdot P(Y=-3) + 4^2 \cdot P(Y=4) + (-5)^2 \cdot P(Y=-5) + 6^2 \cdot P(Y=6) =$$
$$= (1+4+9+16+25+36) \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

Y, de esta manera, la varianza es:

$$\text{Var}(Y) = E\left[Y^2\right] - (E[Y])^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{179}{12} = 14{,}9167$$

La desviación típica de Y es la raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$\sigma = +\sqrt{\text{Var}(Y)} = +\sqrt{14{,}9167} = 3{,}8622$$

c) La probabilidad de ganar al menos 4 € es:

$$P(Y \geq 4) = P(X=4) + P(X=6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

3 y 4. Ejercicios resueltos.

5. En primero de Bachillerato el 60 % de la matrícula son chicas. Se eligen al azar 5 alumnos. Calcula la probabilidad de que entre los seleccionados haya:

a) Dos chicas.

b) Al menos dos chicas.

c) Ninguna chica.

Sea X: “número de chicas entre los cinco alumnos seleccionados”. La variable aleatoria X tiene distribución binomial con n = 5 y p la probabilidad de que un estudiante de primero de Bachillerato elegido al azar sea chica, que es p = 0,6. Es decir:

$$X \sim \text{Bin}(n=5,\ p=0{,}6)$$

a) La probabilidad de que la variable X tome el valor 2 es:

$$P(X=2) = \binom{5}{2} 0{,}6^2 (1-0{,}6)^3 = 0{,}2304$$

b) La probabilidad de que la variable X tome al menos el valor 2 es:

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) =$$
$$= \binom{5}{2} 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 + \binom{5}{3} 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 + \binom{5}{4} 0{,}6^4 \cdot 0{,}4 + \binom{5}{5} 0{,}6^5 =$$
$$= 0{,}2304 + 0{,}3456 + 0{,}2592 + 0{,}07776 = 0{,}91296$$

c) La probabilidad de que la variable X tome el valor 0 es:

$$P(X=0) = \binom{5}{0} 0{,}4^5 = 0{,}01024$$

6. **En un proceso de fabricación se sabe que la probabilidad de que un producto sea defectuoso es 0,1. Si se seleccionan al azar 7 de estos productos, calcula la probabilidad de que:**

a) Al menos uno de ellos sea defectuoso.

b) Exactamente uno sea defectuoso.

c) Por lo menos 2 y como mucho 4 sean defectuosos.

Se considera la variable aleatoria *X*: "número de productos defectuosos de los 7 seleccionados", que tiene distribución binomial:

$$X \sim \text{Bin}(n = 7,\ p = 0{,}1)$$

a) La probabilidad de que al menos uno sea defectuoso puede obtenerse por el suceso contrario:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9^7 = 1 - 0{,}4783 = 0{,}5217$$

b) La probabilidad de que exactamente uno sea defectuoso es:

$$P(X = 1) = \binom{7}{1} 0{,}1 \cdot 0{,}9^6 = 0{,}3720$$

c) La probabilidad de este caso es:

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}1240 + 0{,}0230 + 0{,}0026 = 0{,}1496$$

Probabilidades que se han obtenido de la tabla de la binomial.

7. **Ejercicio resuelto.**

8. **Una aseguradora tiene en su cartera pólizas de seguros de vida para deportistas de riesgo. Se estima que un 20 % de los clientes de esta póliza tendrá un accidente. Si se seleccionan al azar 25 de estos clientes, calcula el número esperado de ellos que sufrirá un accidente y su desviación típica.**

Se considera la variable aleatoria *X*: "número de clientes, deportistas de riesgo, que sufrirá un accidente, entre los 25 seleccionados". La variable aleatoria *X* tiene distribución binomial $\text{Bin}(n = 25,\ p = 0{,}2)$.

El número esperado, entre los 25, que sufrirá un accidente es la esperanza de la variable *X*:

$$E[X] = np = 25 \cdot 0{,}2 = 5$$

Su varianza y su desviación típica son, respectivamente:

$$\text{Var}(X) = np(1 - p) = 25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 4$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = +\sqrt{4} = 2$$

9. **Un dispositivo electrónico en fase de experimentación está compuesto por 8 componentes que funcionan de manera independiente. En esta fase, la probabilidad de fallo de un componente es 0,25. Calcula el número esperado de fallos y su varianza.**

Sea *X*: "número de componentes, de los 8 seleccionados, que fallan". La distribución de probabilidad de *X* es:

$$\text{Bin}(n = 8,\ p = 0{,}25)$$

El número esperado de fallos es la esperanza de la variable *X*:

$$E[X] = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}25 = 2$$

Y su varianza es:

$$\text{Var}(X) = np(1 - p) = 8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 1{,}5$$

10. La probabilidad de que en una fábrica se produzca un accidente en una semana es 0,15. Si se eligen al azar 7 semanas, calcula:

a) La probabilidad de que no se hayan producido accidentes.

b) La probabilidad de que se hayan producido exactamente 2 accidentes.

c) El número esperado de accidentes y su desviación típica.

Se considera la variable X: "número de semanas, de las 7, en las que se ha producido un accidente". La variable X tiene distribución $\text{Bin}(n = 7,\ p = 0{,}15)$.

a) La probabilidad de que la variable X tome el valor cero, se puede ver en la tabla de la binomial o calcularla:

$$P(X = 0) = 0{,}85^7 = 0{,}3206$$

b) La probabilidad de que la variable X tome el valor 2 es:

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^5 = 0{,}2097$$

c) El numero esperado de accidentes, o esperanza matemática de la variable X es:

$$E[X] = 7 \cdot 0{,}15 = 1{,}05$$

Se procede a calcular la desviación típica:

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = 7 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85 = 0{,}8925 \Rightarrow \sigma = +\sqrt{0{,}8925} = 0{,}9447$$

11. Ejercicio interactivo.

12. Ejercicio resuelto.

13. Sea *X* una variable aleatoria continua cuya función de densidad es:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} c(x^2+2) & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}}$$

a) Calcula *c* y dibuja su gráfica.

b) Calcula su esperanza y su varianza.

c) Calcula $P(X > 2)$ y $P(1 < X < 2)$.

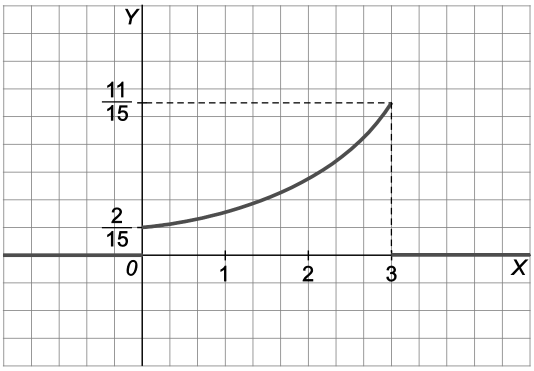
a) El valor de *c* debe ser tal que el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 3$, sea 1. Es decir:

$$1 = \int_0^3 c(x^2+2)\,dx = c\left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^3 = c(9+6) = 15c \Rightarrow c = \frac{1}{15}$$

Así:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{15}(x^2+2) & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Y su gráfica:



b) La esperanza de *X* se obtiene de la siguiente manera:

$$E[X] = \int_0^3 \frac{1}{15}x(x^2+2)\,dx = \frac{1}{15}\left[\frac{x^4}{4} + x^2\right]_0^3 = \frac{1}{15}\left(\frac{81}{4} + 9\right) = \frac{39}{20} = 1{,}95$$

Para calcular la varianza de *X*, en primer lugar se calcula:

$$E[X^2] = \int_0^3 \frac{1}{15}x^2(x^2+2)\,dx = \frac{1}{15}\left[\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{15}\left(\frac{243}{5} + \frac{54}{3}\right) = \frac{111}{25} = 4{,}44$$

Y, por último:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 4{,}44 - 1{,}95^2 = 0{,}6375$$

c) La probabilidades se calculan como sigue:

$$P(X > 2) = \int_2^3 \frac{1}{15}(x^2+2)\,dx = \frac{1}{15}\left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_2^3 = \frac{1}{15}\left[9 + 6 - \left(\frac{8}{3} + 4\right)\right] = \frac{5}{9} = 0{,}5556$$

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{15}(x^2+2)\,dx = \frac{1}{15}\left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_1^2 = \frac{1}{15}\left[\frac{8}{3} + 4 - \left(\frac{1}{3} + 2\right)\right] = \frac{13}{45} = 0{,}2889$$

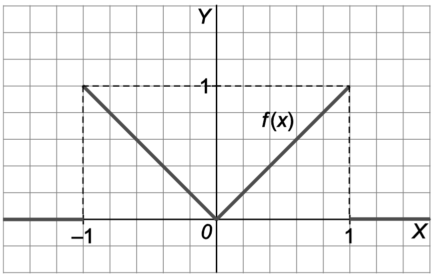
14. Sea la variable aleatoria *X* con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Dibuja su gráfica.

b) Calcula las probabilidades $P(X > 0)$ y $P\left(|X| < \frac{3}{4}\right)$.

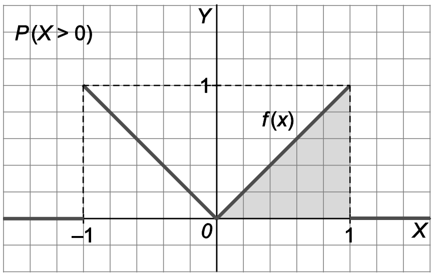
a) La gráfica de la función de densidad es:

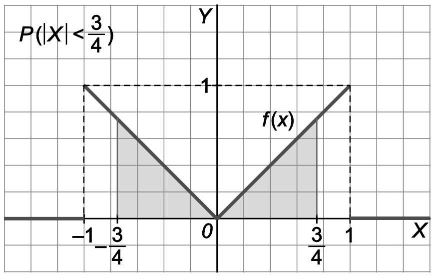


b) Las probabilidades que se piden se calculan como sigue y corresponden a las áreas que se representan en las gráficas:

$$P(X > 0) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$P\left(|X| < \frac{3}{4}\right) = P\left(-\frac{3}{4} < X < \frac{3}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$





15. Utilizando la tabla de la distribución $N(0, 1)$, halla:

a) $P(Z \le -0{,}17)$

b) $P(Z \ge -0{,}12)$

c) $P(0{,}33 \le Z < 1{,}95)$

d) $P(-1{,}28 < Z \le 0{,}78)$

a) $P(Z \le -0{,}17) = 1 - \Phi(0{,}17) = 1 - 0{,}5675 = 0{,}4325$

b) $P(Z \ge -0{,}12) = \Phi(0{,}12) = 0{,}5478$

c) $P(0{,}33 \le Z \le 1{,}95) = \Phi(1{,}95) - \Phi(0{,}33) = 0{,}9744 - 0{,}6293 = 0{,}3451$

d) $P(-1{,}28 < Z \le 0{,}78) = \Phi(0{,}78) - \Phi(-1{,}28) = \Phi(0{,}78) - (1 - \Phi(1{,}28)) = 0{,}7823 - 1 + 0{,}8997 = 0{,}6820$

16. Encuentra el valor de *a* en cada uno de los casos siguientes.

a) $P(Z \le a) = 0{,}1736$

b) $P(-2a < Z \le 2a) = 0{,}8654$

c) $P(Z \ge a) = 0{,}1335$

d) $P(Z \ge a) = 0{,}8686$

a) $P(Z \le a) = 0{,}1736 \Rightarrow 1 - P(Z \le -a) = 0{,}1736 \Rightarrow P(Z \le -a) = 0{,}8264 \Rightarrow -a = 0{,}94 \Rightarrow a = -0{,}94$

b) $P(-2a < Z \le 2a) = 0{,}8654 \Rightarrow P(0 < Z \le 2a) = 0{,}4327 \Rightarrow P(Z \le 2a) = 0{,}9327 \Rightarrow 2a = 1{,}496 \Rightarrow a = 0{,}748$

c) $P(Z \ge a) = 0{,}1335 \Rightarrow P(Z \le a) = 0{,}8665 \Rightarrow a = 1{,}11$

d) $P(Z \ge a) = 0{,}8686 \Rightarrow P(Z \le -a) = 0{,}8686 \Rightarrow -a = 1{,}12 \Rightarrow a = -1{,}12$

17 y 18. Ejercicios resueltos.

19. Los salarios mensuales de los recién titulados que acceden a su primer empleo se distribuyen según una ley normal de media 1300 € y desviación típica 600 €. Calcula el porcentaje de titulados que cobran:

a) Menos de 600 € al mes.

b) Entre 1000 y 1500 € al mes.

c) Más de 2200 € al mes.

Sea la variable aleatoria *X*: “salarios mensuales, en euros, de los recién titulados en su primer empleo”. La distribución de la variable *X* es $N(\mu = 1300,\ \sigma = 600)$. En los cálculos de los dos apartados, se utiliza la tipificación de la variable para obtener las probabilidades a partir de la tabla de la $N(0,\ 1)$.

a) Se debe calcular la probabilidad de que la variable *X* no supere los 600 € al mes:

$$P(X < 600) = P\left(Z < \frac{600-1300}{600}\right) = P(Z < -1{,}17) = 1 - \Phi(1{,}17) = 1 - 0{,}8790 = 0{,}1210$$

Luego el 12,1 % de los recién titulados cobra menos de 600 € al mes en su primer trabajo.

b) En este caso, se calcula la siguiente probabilidad:

$$P(1000 < X < 1500) = P\left(\frac{1000-1300}{600} < Z < \frac{1500-1300}{600}\right) = P(-0{,}5 < Z < 0{,}33) = \Phi(0{,}33) - (1 - \Phi(0{,}5)) =$$
$$= 0{,}6293 - (1 - 0{,}6915)) = 0{,}3208$$

De modo que el 32,08 % de los recién titulados cobra entre 1000 y 1500 € al mes.

c) De igual forma que en los partidos anteriores:

$$P(X > 2200) = P\left(Z > \frac{2200-1300}{600}\right) = P(Z > 1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

Por tanto, el 6,68 % de los recién titulados cobra más de 2200 €.

20. En una panadería se cortan panecillos con un peso que se ajusta a una distribución normal de media 100 g y desviación típica 9 g. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un panecillo cuyo peso oscila entre 80 gramos y la media?

Sea la variable aleatoria *X*: “peso, en gramos, de los panecillos”, cuya distribución es $N(\mu = 100,\ \sigma = 9)$.

Se debe calcular la probabilidad de que el valor de la variable *X* esté entre 80 y 100 gramos:

$$P(80 < X < 100) = P\left(\frac{80-100}{9} < Z < \frac{100-100}{9}\right) = P(-2{,}22 < Z < 0) = \Phi(0) - (1 - \Phi(2{,}22)) =$$
$$= 0{,}5 - (1 - 0{,}9868) = 0{,}4868$$

21. En un almacén hay un gran número de cajas. El peso de cada una de ellas es una variable aleatoria con distribución normal de media 50 kg y desviación típica 5 kg.

a) Calcula el porcentaje de cajas que pesan más de 53 kg.

b) Halla el porcentaje de cajas que pesan entre 50 y 55 kg.

c) Para transportar las cajas se dispone de un camión que tiene autorizado un peso máximo de 2000 kg en total. ¿Cuál es la probabilidad de que el camión soporte la carga de 41 cajas sin exponerse a superar el peso máximo autorizado?

Sea la variable aleatoria *X*: "peso, en kg, de las cajas", con distribución $N(\mu = 50,\ \sigma = 5)$.

a) Se calcula la probabilidad de que la variable *X* supere los 53 kg. Es decir:

$$P(X > 53) = P\left(Z > \frac{53-50}{5}\right) = P(Z > 0{,}6) = 1 - \Phi(0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$$

El 27,43 % de las cajas pesan más de 53 kg.

b) En este caso, se calcula la probabilidad siguiente:

$$P(50 < X < 55) = P\left(\frac{50-50}{5} < Z < \frac{55-50}{5}\right) = P(0 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0{,}8413 - 0{,}5 = 0{,}3413$$

El 34,13 % de las cajas pesan entre 50 y 55 kg.

c) Sea la variable *Y*: "la suma de los pesos de las 41 cajas", la cual sigue una distribución normal de media $\mu_{41} = n\mu = 41 \cdot 50 = 2050$ y varianza $\sigma_{41}^2 = n\sigma^2 = 41 \cdot 5^2 = 1025$.

De manera que para que el camión pueda transportar las 41 cajas, el peso de éstas no debe superar los 2000 kg. Por tanto:

$$P(Y < 2000) = P\left(Z < \frac{2000-2050}{\sqrt{1025}}\right) = P(Z < -1{,}56) = 1 - \Phi(1{,}56) = 1 - 0{,}9406 = 0{,}0594$$

22. Ejercicio interactivo.

23 y 24. Ejercicios resueltos.

25. En una ciudad, el 55 % de los hogares tiene conexión a internet. De la ciudad se eligen al azar 90 viviendas. Calcula la probabilidad de que:

a) Más de 50 viviendas tengan conexión a internet.

b) Entre 35 y 45 de las viviendas no tengan conexión a internet.

c) Tengan conexión a internet menos de 45 viviendas.

Se considera la variable aleatoria X: "número de hogares, de los 90, que tienen conexión a internet". La variable aleatoria X tiene distribución binomial, $X \sim \text{Bin}(n = 90,\ p = 0{,}55)$, que como n es grande y $np = 90 \cdot 0{,}55 = 49{,}5 > 5$ y $n(1-p) = 90 \cdot 0{,}45 = 40{,}5 > 5$, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal $Y \sim N(\mu = 49{,}5,\ \sigma^2 = 90 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}45 = 22{,}275)$.

De esta manera, efectuando en todos los casos la corrección por continuidad:

a) La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor superior a 50 es:

$$P(X > 50) \simeq P(Y \geq 50{,}5) = P\left(Z \geq \frac{50{,}5 - 49{,}5}{\sqrt{22{,}275}}\right) = P(Z \geq 0{,}21) = 1 - \Phi(0{,}21) = 1 - 0{,}5832 = 0{,}4168$$

b) Si la variable aleatoria es T: "número de hogares, de los 90, que no tienen conexión a internet", su distribución de probabilidad es $T \sim \text{Bin}(n = 90,\ p = 0{,}45)$ que se puede aproximar por una variable W con distribución normal $W \sim N(\mu_W = 90 \cdot 0{,}45 = 40{,}5,\ \sigma^2 = 90 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 22{,}275)$.

De modo que la probabilidad de que entre 35 y 45 viviendas no tengan acceso a internet es:

$$P(35 \leq T \leq 45) \simeq P(34{,}5 \leq W \leq 45{,}5) = P\left(\frac{34{,}5 - 40{,}5}{\sqrt{22{,}275}} \leq Z \leq \frac{45{,}5 - 40{,}5}{\sqrt{22{,}275}}\right) = P(-1{,}27 \leq Z \leq 1{,}06) =$$
$$= \Phi(1{,}06) - (1 - \Phi(1{,}27)) = 0{,}8554 - 1 + 0{,}8980 = 0{,}7534$$

c) Debe calcularse la probabilidad de que la variable X tome un valor inferior a 45. Es decir:

$$P(X < 45) \simeq P(Y \leq 44{,}5) = P\left(Z \leq \frac{44{,}5 - 49{,}5}{\sqrt{22{,}275}}\right) = P(Z \leq -1{,}06) = 1 - \Phi(1{,}06) = 1 - 0{,}8554 = 0{,}1446$$

26. La administración de un medicamento produce una mejoría en el 75 % de los pacientes de malaria. Calcula la probabilidad de que:

a) Si se eligen al azar 8 personas que padecen la enfermedad, al menos 6 mejoren.

b) Si se eligen 250 personas que padecen la enfermedad, mejoren más de 170 y como mucho 190.

a) Sea la variable aleatoria X: "número de pacientes, de los 8 seleccionados, que mejoran con el tratamiento". La variable X tiene distribución $X \sim \text{Bin}(n = 8,\ p = 0{,}75)$. La probabilidad de que al menos 6 mejoren es:

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \binom{8}{6} 0{,}75^6 \cdot 0{,}25^2 + \binom{8}{7} 0{,}75^7 \cdot 0{,}25 + \binom{8}{8} 0{,}75^8 =$$
$$= 0{,}3115 + 0{,}2670 + 0{,}1001 = 0{,}6786$$

Estas probabilidades se pueden obtener de la tabla de la distribución binomial, teniendo en cuenta la variable W con distribución $\text{Bin}(n = 8,\ p = 0{,}25)$ y que:

$$P(X = 6) = P(W = 2) = 0{,}3115 \qquad P(X = 7) = P(W = 1) = 0{,}2670 \qquad P(X = 8) = P(W = 0) = 0{,}1001$$

b) En este caso, la variable binomial X: "número de personas, de las 250, que mejoran con el tratamiento" tiene una distribución binomial, $X \sim \text{Bin}(n = 250,\ p = 0{,}75)$, que puede aproximarse por una variable aleatoria Y con distribución normal $Y \sim N(\mu = 250 \cdot 0{,}75 = 187{,}5,\ \sigma^2 = 250 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 46{,}875)$, de manera que:

$$P(170 < X \leq 190) \simeq P(170{,}5 \leq Y \leq 190{,}5) = P\left(\frac{170{,}5 - 187{,}5}{\sqrt{46{,}875}} \leq Z \leq \frac{190{,}5 - 187{,}5}{\sqrt{46{,}875}}\right) =$$
$$= P(-2{,}48 \leq Z \leq 0{,}44) = \Phi(0{,}44) - (1 - \Phi(2{,}48)) = 0{,}67 - 1 + 0{,}9934 = 0{,}6634$$

27 a 35. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Variable aleatoria discreta

36. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada en la siguiente tabla.

x_j	–2	–1	1	3	5
p_j	0,15	0,30	a	0,20	0,10

a) Calcula a y representa gráficamente la distribución.

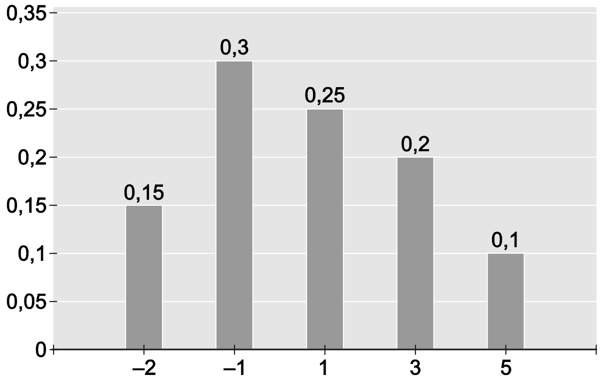
b) Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica.

c) Calcula $P(-1 \leq X < 3{,}5)$ y $P(X < 1)$.

a) Para calcular el valor de a, basta con tener en cuenta que no puede ser negativo y que las probabilidades deben sumar 1:

$$0{,}15 + 0{,}30 + a + 0{,}20 + 0{,}10 = 1 \Rightarrow a = 0{,}25$$

La distribución de probabilidad se puede representar mediante un diagrama de barras:



b) La esperanza, la varianza y la desviación son, respectivamente:

$$E[X] = -2 \cdot 0{,}15 - 1 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}75$$

Para calcular la varianza, se obtiene en primer lugar $E[X^2]$:

$$E[X^2] = (-2)^2 \cdot 0{,}15 + (-1)^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}25 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 5^2 \cdot 0{,}1 = 5{,}45$$

Y entonces:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 5{,}45 - 0{,}75^2 = 4{,}8875$$

De manera que la desviación típica es:

$$\sigma = +\sqrt{\text{Var}(X)} = +\sqrt{4{,}8875} = 2{,}2107$$

c) $P(-1 \leq X < 3{,}5) = P(X = -1) + P(X = 1) + P(X = 3) = 0{,}30 + 0{,}25 + 0{,}20 = 0{,}75$

$P(X < 1) = P(X = -1) + P(X = -2) = 0{,}30 + 0{,}15 = 0{,}45$

37. Sea *X* una variable aleatoria con función de masa de probabilidad:

$$P(X=j)=\frac{c}{3j} \qquad j=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

a) Calcula el valor de la constante c.

b) Representa gráficamente la función de masa.

c) Calcula la esperanza y la varianza de X.

a) Para calcular el valor de la constante c, debe tenerse en cuenta que las probabilidades son no negativas y que tienen que sumar 1:

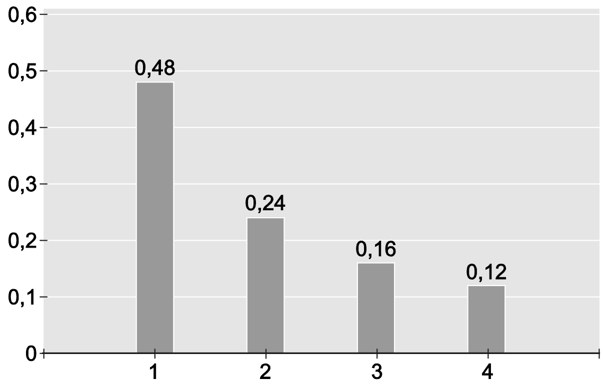
$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{c}{3}+\frac{c}{6}+\frac{c}{9}+\frac{c}{12}=\frac{25}{36}c=1\Rightarrow c=\frac{36}{25}$$

De manera que la distribución de probabilidad de la variable X es:

$$P(X=1)=\frac{\frac{36}{25}}{3}=\frac{12}{25}=0,48 \qquad P(X=2)=\frac{\frac{36}{25}}{6}=\frac{6}{25}=0,24$$

$$P(X=3)=\frac{\frac{36}{25}}{9}=\frac{4}{25}=0,16 \qquad P(X=4)=\frac{\frac{36}{25}}{12}=\frac{3}{25}=0,12$$

b) La función de masa de probabilidad de X se puede representar en un diagrama de barras:



c) La esperanza de X es:

$$E[X]=1\cdot 0,48+2\cdot 0,24+3\cdot 0,16+4\cdot 0,12=1,92$$

Para calcular la varianza, se calcula en primer lugar $E[X^2]$:

$$E[X^2]=1^2\cdot 0,48+2^2\cdot 0,24+3^2\cdot 0,16+4^2\cdot 0,12=4,8$$

De manera que la varianza es:

$$\text{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=4,8-1,92^2=1,1136$$

Variables aleatorias binomiales

38. La variable aleatoria *X* tiene una distribución binomial de parámetros *n* = 7 y *p* = 0,4. Calcula:

a) La esperanza y la varianza de *X*.

b) $P(X<1)$ y $P(X\geq 5)$.

c) $P(2\leq X<5)$.

Se tiene que $X \sim \text{Bin}(n=7,\ p=0{,}4)$.

a) La esperanza y la varianza de *X* son respectivamente:

$$E[X]=np=7\cdot 0{,}4=2{,}8 \qquad \text{Var}(X)=np(1-p)=7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=1{,}68$$

b) Las probabilidades se pueden calcular o bien obtenerlas directamente de la tabla de la distribución binomial:

$$P(X<1)=P(X=0)=0{,}0280$$

$$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)=0{,}0774+0{,}0172+0{,}0016=0{,}0962$$

c) En este caso:

$$P(2\leq X<5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=0{,}2613+0{,}2903+0{,}1935=0{,}7451$$

39. En un instituto aprueba la materia de Filosofía el 80 % de los alumnos. ¿Cuál es la probabilidad de que de un grupo formado por 8 alumnos elegidos al azar hayan aprobado 6 alumnos?

La variable aleatoria *X*: “número de alumnos, de los 8 elegidos, que aprueban filosofía” tiene distribución $\text{Bin}(n=8,\ p=0{,}8)$. Entonces:

$$P(X=6)=\binom{8}{6}0{,}8^6\cdot 0{,}2^2=0{,}2936$$

Esta probabilidad se puede obtener de la tabla teniendo en cuenta que la variable *W*: “número de alumnos, de los 8, que no aprueban filosofía” es binomial $\text{Bin}(n=8,\ p=0{,}2)$ y, por tanto, resulta:

$$P(X=6)=P(W=2)=0{,}2936$$

40. El 10 % de los huevos de un supermercado están rotos. Halla la probabilidad de que un cliente que compra media docena de huevos encuentre como máximo un huevo roto.

La variable aleatoria *X*: “número de huevos rotos, de los 6 elegidos” tiene distribución:

$$\text{Bin}(n=6,\ p=0{,}1)$$

Se pide la probabilidad de que la variable *X* tome un valor menor o igual a 1. Es decir:

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}5314+0{,}3543=0{,}8857$$

donde las probabilidades se han obtenido directamente de la tabla de la distribución binomial.

41. Por término medio en el último mes, un vendedor de periódicos ha devuelto el 30 % de los ejemplares diarios que le han servido del periódico *A*. Si un día elegido al azar le sirven 15 unidades, calcula la probabilidad de que:

a) Devuelva por lo menos 4.

b) Venda todos los periódicos.

c) Venda más de 12 si se sabe que al menos ha vendido 10.

Se considera la variable aleatoria *X*: "número de periódicos devueltos, de los 15 ejemplares".

La distribución de probabilidad de *X* es $\text{Bin}(n=15,\ p=0,3)$.

a) Se calcula la probabilidad de que devuelva menos de 4 ejemplares. Es decir:

$$P(X<4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$$

$$=\binom{15}{0}0,7^{15}+\binom{15}{1}0,3\cdot 0,7^{14}+\binom{15}{2}0,3^2\cdot 0,7^{13}+\binom{15}{3}0,3^3\cdot 0,7^{12}=$$

$$=0,0047+0,0305+0,0916+0,1700=0,2968$$

De manera que la probabilidad de que devuelva por lo menos 4 es:

$$P(X\geq 4)=1-P(X<4)=1-0,2968=0,7032$$

b) La probabilidad de que venda todos los periódicos es la de que la variable *X* tome el valor 0, esto es:

$$P(X=0)=\binom{15}{0}0,7^{15}=0,0047$$

c) Vender más de 12 ejemplares es equivalente a devolver menos de 3. Y vender al menos 10 es equivalente a devolver como mucho 5. De modo que, en este caso se trata de calcular la probabilidad condicionada:

$$P(X<3|X\leq 5)=\frac{P(X<3\cap X\leq 5)}{P(X\leq 5)}=\frac{P(X<3)}{P(X\leq 5)}$$

Se calcula la probabilidad del numerador:

$$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\binom{15}{0}0,7^{15}+\binom{15}{1}0,3\cdot 0,7^{14}+\binom{15}{2}0,3^2\cdot 0,7^{13}=$$
$$=0,0047+0,0305+0,0916=0,1268$$

Se calculan la probabilidad del denominador:

$$P(X\leq 5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$
$$=\binom{15}{0}0,7^{15}+\binom{15}{1}0,3\cdot 0,7^{14}+\binom{15}{2}0,3^2\cdot 0,7^{13}+\binom{15}{3}0,3^3\cdot 0,7^{12}+\binom{15}{4}0,3^4\cdot 0,7^{11}+\binom{15}{5}0,3^5\cdot 0,7^{10}=$$
$$=0,0047+0,0305+0,0916+0,1700+0,2186+0,2061=0,7215$$

Entonces, la probabilidad pedida es:

$$P(X<3|X\leq 5)=\frac{0,1268}{0,7215}=0,1757$$

42. En un proceso de fabricación, se sabe que la probabilidad de que un producto sea defectuoso es 0,1. Se selecciona una muestra aleatoria de 8 productos. Calcula la probabilidad de que:

a) Exactamente uno sea defectuoso.

b) Al menos uno sea defectuoso.

c) Haya más de dos defectuosos.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de productos defectuosos, de los 8 seleccionados".

La distribución de probabilidad de la variable *X* es $\text{Bin}(n = 8,\ p = 0{,}1)$, cuya función de masa se puede ver en la tabla de la distribución binomial.

a) La probabilidad de que exactamente uno de los ocho sea defectuosos es:

$$P(X = 1) = 0{,}3826$$

b) En este caso, se procede calculando la probabilidad de que ningún producto de los 8 sea defectuoso:

$$P(X = 0) = 0{,}4305$$

Y la probabilidad de que al menos uno de los 8 sea defectuoso es:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}4305 = 0{,}5695$$

c) Se calcula la probabilidad de que haya como mucho 2 defectuosos:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}4305 + 0{,}3826 + 0{,}1488 = 0{,}9619$$

De manera que la probabilidad de que haya más de dos defectuosas es:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}9619 = 0{,}0381$$

Variables aleatorias continuas

43. Sea *X* una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} k(10-x) & \text{si } 0<x<10 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) Calcula el valor de *k* y dibuja la gráfica de la función de densidad.

b) Calcula $P(X>5)$.

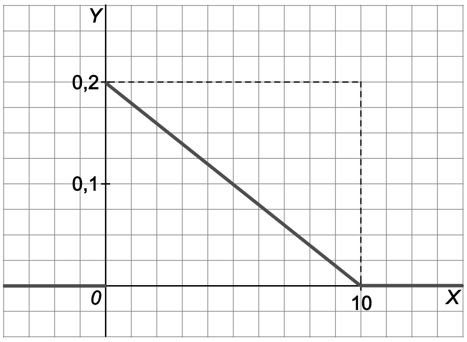
c) Calcula la esperanza y la varianza de la variable *X*.

a) La función $f(x)$ es no negativa siempre que $k>0$. Además, el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas y las rectas verticales $x=0$ y $x=10$, debe ser la unidad. Esto es:

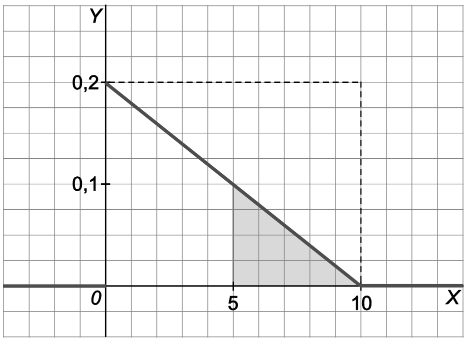
$$1=\int_0^{10} f(x)\ \mathrm{dx}=\int_0^{10} k(10-x)dx=k\left[10x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}=k\left(100-\frac{100}{2}\right)=50k\Rightarrow k=\frac{1}{50}$$

De manera que la función de densidad de la variable aleatoria *X* es: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{50}(10-x) & \text{si } 0<x<10 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$.

La gráfica de la función de densidad queda:



b) El cálculo de la probabilidad de que el valor de la variable sea superior a 5, se puede obtener gráficamente:



La probabilidad de que *X* sea mayor que 5 es el área del triángulo coloreado en la figura:

$$P(X>5)=\frac{5\cdot 0{,}1}{2}=0{,}25$$

c) La esperanza de la variable *X* es:

$$E[X]=\int_0^{10}\frac{1}{50}(10-x)x\,dx=\frac{1}{50}\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}=\frac{1}{50}\left(500-\frac{1000}{3}\right)=\frac{10}{3}$$

Para calcular la varianza se debe calcular antes:

$$E\left[X^2\right]=\int_0^{10}\frac{1}{50}(10-x)x^2dx=\frac{1}{50}\left[\frac{10x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}=\frac{1}{50}\left(\frac{10000}{3}-\frac{10000}{4}\right)=\frac{50}{3}$$

Finalmente: $\mathrm{Var}(X)=E\left[X^2\right]-(E[X])^2=\frac{50}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$

44. Un tren de cercanías sale de la estación cada 10 minutos. Si un viajero llega al andén de forma aleatoria:

a) Escribe la función de densidad de la variable *X*: "tiempo de espera del viajero en el andén".

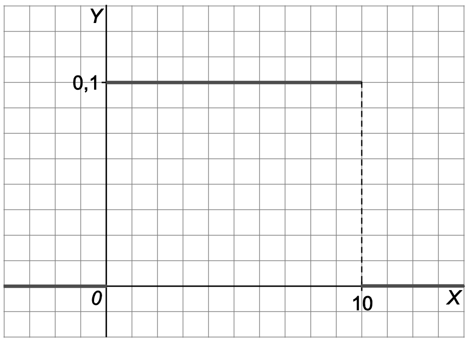
b) Calcula la probabilidad de que el viajero deba esperar menos de 3 minutos.

c) Calcula la esperanza y la varianza de la variable *X*.

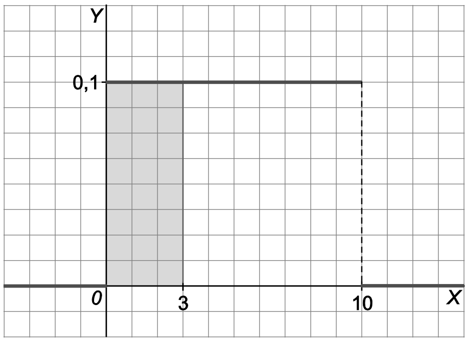
a) La función de densidad de la variable aleatoria *X*: "tiempo de espera del viajero en el andén", para un viajero que llega de forma aleatoria es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{si } 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Cuya gráfica es:



b) La probabilidad de que el viajero tenga que esperar menos de tres minutos se puede obtener gráficamente como el área del rectángulo coloreado de la figura:



De manera que:

$$P(X < 3) = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$$

c) La esperanza de la variable *X* es:

$$E[X] = \int_0^{10} \frac{1}{10} x\, dx = \left[\frac{x^2}{20} \right]_0^{10} = 5$$

Para calcular la varianza se debe calcular antes:

$$E[X^2] = \int_0^{10} \frac{1}{10} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{30} \right]_0^{10} = \frac{1000}{30} = \frac{100}{3}$$

Finalmente:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{100}{3} - 5^2 = \frac{25}{3}$$

45. Considera una variable aleatoria continua con función de densidad:

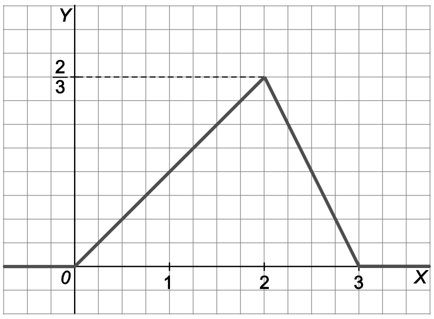
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x & \text{si } 0<x<2\\ \frac{2}{3}(3-x) & \text{si } 2<x<3\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) Dibuja la gráfica de la función de densidad.

b) Calcula su esperanza y su varianza.

c) Calcula $P(X<1)$, $P(X>2)$ y $P(1<X<2{,}5)$.

a) La gráfica de la función de densidad es:



b) La esperanza de la variable X es:

$$E[X]=\int_0^2\frac{1}{3}x\cdot x\,dx+\int_2^3\frac{2}{3}(3-x)x\,dx=\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\frac{2}{3}\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_2^3=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{27}{2}-\frac{27}{3}-\left(6-\frac{8}{3}\right)\right)=\frac{8}{9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6}=\frac{5}{3}$$

Y para la varianza se calcula en primer lugar $E[X^2]$:

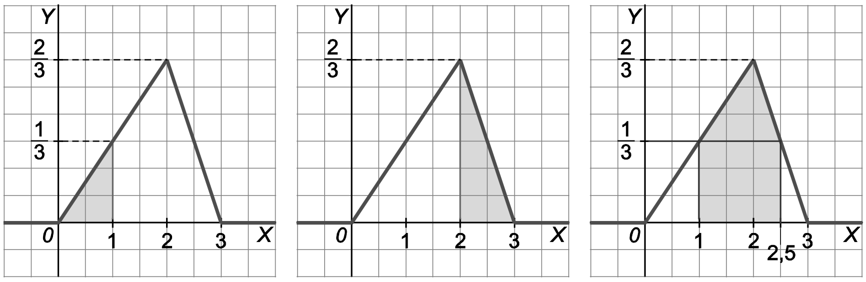
$$E[X^2]=\int_0^2\frac{1}{3}x\cdot x^2\,dx+\int_2^3\frac{2}{3}(3-x)x^2\,dx=\frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2+\frac{2}{3}\left[x^3-\frac{x^4}{4}\right]_2^3=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{2}{3}\left(27-\frac{81}{4}-(8-4)\right)=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{4}=\frac{19}{6}$$

Con lo que la varianza de X es:

$$\text{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{19}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{7}{18}$$

c) Las probabilidades se pueden obtener gráficamente en este caso:



La primera se puede obtener por medio del área de un triángulo:

$$P(X<1)=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{6}$$

La segunda, de forma análoga, mediante el área de un triángulo:

$$P(X>2)=\frac{1\cdot\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

Y la tercera, sumando el área de un triángulo y un rectángulo:

$$P(1<X<2,5)=\frac{1,5\cdot\frac{1}{3}}{2}+1,5\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

46. La demanda diaria *X*, en kilogramos, de un determinado producto es una variable aleatoria que puede tomar cualquier valor del intervalo [0, 10]. Se sabe que *X* tiene una distribución continua con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{60} & \text{si } 0\le x\le 10\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) Halla la probabilidad de que la demanda supere los 7 kg.

b) Calcula su esperanza y su varianza.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la demanda sea superior a la media?

a) La probabilidad de que la variable *X* supero los 7 kg es:

$$P(X>7)=\int_7^{10}\frac{x+1}{60}dx=\frac{1}{60}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_7^{10}=\frac{1}{60}\left(50+10-\left(\frac{49}{2}+7\right)\right)=\frac{1}{60}\cdot\frac{57}{2}=\frac{19}{40}=0,475$$

b) La esperanza o valor esperado medio de la demanda diaria, en kg, de este producto es:

$$E[X]=\int_0^{10}\frac{x+1}{60}x\,dx=\frac{1}{60}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}=\frac{1}{60}\left(\frac{1000}{3}+50\right)=\frac{115}{18}=6,389\text{ kg}$$

Para la varianza se necesita calcular:

$$E\left[X^2\right]=\int_0^{10}\frac{x+1}{60}x^2\,dx=\frac{1}{60}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}=\frac{1}{60}\left(2500+\frac{1000}{3}\right)=\frac{425}{9}=47,222\text{ kg}$$

De manera que: $\mathrm{Var}(X)=E\left[X^2\right]-\left(E[X]\right)^2=\frac{425}{9}-\left(\frac{115}{18}\right)^2=6,404\text{ kg}$

c) La probabilidad de que la demanda sea superior a la media calculada en el apartado anterior es:

$$P(X>6,389)=\int_{6,389}^{10}\frac{x+1}{60}dx=\frac{1}{60}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{6,389}^{10}=\frac{1}{60}\left(50+10-\left(\frac{6,389^2}{2}+6,389\right)\right)=0,5534$$

Variables aleatorias con distribución normal

47. La duración de la batería de un teléfono móvil sigue una distribución normal de media 3 años y desviación típica 0,5 años. Calcula la probabilidad de que una batería dure entre 2 y 4 años.

La variable aleatoria X: "duración, en años, de una batería de móvil" tiene una distribución normal:

$$N(\mu = 3,\ \sigma = 0{,}5)$$

La probabilidad de que una batería elegida al azar dure entre 2 y 4 años es:

$$P(2 < X < 4) = P\left(\frac{2-3}{0{,}5} < Z < \frac{4-3}{0{,}5}\right) = P(-2 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$$

48. Se estima que el tiempo en horas que se necesita para memorizar un tema de Historia de la Filosofía es una variable aleatoria con distribución normal, pero cuya media y varianza se desconocen. Calcula la media y la varianza de esta distribución si se conoce que las tres cuartas partes de los estudiantes necesitan más de tres horas y que el 5 % necesita más de 6 horas para hacerlo.

Sea la variable aleatoria X: "tiempo, en horas, necesario para memorizar un tema de Historia de la Filosofía". La variable X tiene distribución $N(\mu,\ \sigma^2)$, ambos parámetros desconocidos.

Si las tres cuartas partes de los estudiantes necesitan más de tres horas, significa que:

$$P(X > 3) = 0{,}75$$

Si el 5% necesita más de 6 horas, entonces se tiene que:

$$P(X > 6) = 0{,}05$$

Tipificando ambas expresiones, se obtiene:

$$P\left(Z > \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}75 \Rightarrow \Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25$$

$$P\left(Z > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}95$$

De la tabla de la distribución normal estándar se tiene que:

$$\Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25 \Rightarrow \frac{3-\mu}{\sigma} = -0{,}675 \Rightarrow \mu - 0{,}675\sigma = 3$$

$$\Phi\left(\frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{6-\mu}{\sigma} = 1{,}645 \Rightarrow \mu + 1{,}645\sigma = 6$$

Resolviendo el sistema se obtienen los valores de la media y la varianza de la distribución normal:

$$\begin{cases} \mu - 0{,}675\sigma = 3 \\ \mu + 1{,}645\sigma = 6 \end{cases} \Rightarrow \mu = 3{,}8728 \ \text{ y } \ \sigma = 1{,}2931 \ (\sigma^2 = 1{,}6721)$$

49. El número de páginas que se pueden escribir con los bolígrafos de una determinada marca sigue una distribución normal de media 80 páginas y desviación típica 12 páginas.

a) Si se elige un bolígrafo al azar, calcula:

I. La probabilidad de que el número de páginas escritas sea superior a 100.

II. La probabilidad de que el número de páginas escritas sea inferior a 50.

III. La probabilidad de que el número de páginas escritas esté comprendido entre 75 y 85.

b) ¿Cuál es el número máximo de páginas que se pueden escribir con uno de estos bolígrafos, con una probabilidad del 95 %?

Se considera la variable aleatoria *X*: "número de páginas que se pueden escribir con los bolígrafos de una determinada marca". La variable sigue una distribución normal: $N(\mu = 80, \sigma = 12)$.

a) Elegido al azar un bolígrafo de esa marca:

I. $P(X > 100) = P\left(Z > \frac{100-80}{12}\right) = P(Z > 1{,}67) = 1 - \Phi(1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$

II. $P(X < 50) = P\left(Z < \frac{50-80}{12}\right) = P(Z < -2{,}5) = 1 - \Phi(2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$

III. $P(75 < X < 85) = P\left(\frac{75-80}{12} < Z < \frac{85-80}{12}\right) = P(-0{,}42 < Z < 0{,}42) = 2\Phi(0{,}42) - 1 = = 2 \cdot 0{,}6628 - 1 = 0{,}3256$

b) Sea *a* el número máximo de páginas que, con probabilidad 0,95, se puede escribir con uno de estos bolígrafos elegidos al azar. Ello quiere decir que $P(X \le a) = 0{,}95$.

Tipificando la expresión y mediante la tabla de la normal estándar se tiene que:

$$P\left(Z \le \frac{a-80}{12}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{a-80}{12} = 1{,}645 \Rightarrow a = 99{,}74 \text{ páginas}$$

50. El retraso con el que los trenes llegan a una estación tiene una distribución normal de media 4 minutos. Además el 80 % de los trenes llega con un retraso inferior a 7 minutos. Calcula:

a) La desviación típica de la distribución.

b) La probabilidad de que llegue antes de la hora prevista.

c) La probabilidad de que el retraso supere los 10 minutos.

Sea la variable aleatoria *X*: "retraso, en minutos, con el llegan los trenes a la estación". La distribución de probabilidad de *X* es $N(\mu = 4, \sigma)$ con σ desconocida.

a) Si el 80 % de los trenes llegan con retraso inferior a 7 minutos, se tiene que:

$$P(X < 7) = 0{,}8 \Rightarrow P\left(Z < \frac{7-4}{\sigma}\right) = 0{,}8 \Rightarrow \frac{3}{\sigma} = 0{,}84 \Rightarrow \sigma = \frac{3}{0{,}84} = 3{,}5714$$

b) Debe calcularse la probabilidad de que la variable *X* sea inferior a cero:

$$P(X < 0) = P\left(Z < \frac{0-4}{3{,}5714}\right) = P(Z < -1{,}12) = 1 - \Phi(1{,}12) = 1 - 0{,}8686 = 0{,}1314$$

c) La probabilidad de que el retraso supere los 10 minutos es:

$$P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-4}{3{,}5714}\right) = P(Z > 1{,}68) = 1 - \Phi(1{,}68) = 1 - 0{,}9535 = 0{,}0465$$

51. Se sabe que el tiempo necesario para trasladarse desde el domicilio a un campus universitario sigue una distribución normal de media 45 minutos y desviación típica 15 minutos. Se pide calcular las siguientes probabilidades expresando el resultado en porcentajes.

a) Probabilidad de que el traslado dure menos de una hora.

b) Probabilidad de que dure entre 30 y 45 minutos.

c) Probabilidad de que el traslado dure menos de 20 minutos.

La variable aleatoria X: "tiempo necesario, en minutos, para trasladarse del domicilio al campus" tiene una distribución de probabilidad normal $N(\mu = 45,\ \sigma = 15)$.

a) La probabilidad de que el traslado dure menos de 60 minutos es:

$$P(X < 60) = P\left(Z < \frac{60-45}{15}\right) = P(Z < 1) = 0{,}8413$$

El 84,13 % de los traslados dura menos de una hora.

b) La probabilidad de que el traslado dure entre 30 y 45 minutos es:

$$P(30 < X < 45) = P\left(\frac{30-45}{15} < Z < \frac{45-45}{15}\right) = P(-1 < Z < 0) = \Phi(0) - (1-\Phi(1)) = 0{,}5 - 1 + 0{,}8413 = 0{,}3413$$

El 34,13 % de los traslados tienen una duración de entre 30 y 45 minutos.

c) La probabilidad de que el traslado dure menos de 20 minutos es:

$$P(X < 20) = P\left(Z < \frac{20-45}{15}\right) = P(Z < -1{,}67) = 1 - \Phi(1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$$

El 4,75 % de los traslados al campus desde el domicilio dura menos de 20 minutos.

Aproximación de la binomial a la normal

52. Se sabe que aprueban el 65 % de las personas que se presentan por primera vez al examen para obtener el carné de conducir. Si un día se van a presentar 180 personas por primera vez:

a) ¿Cuántos se espera que suspendan?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben al menos 110?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben como mínimo 100 y como máximo 115?

Sea la variable aleatoria X: "número de personas, de las 180, que aprueban a la primera el carné de conducir". La distribución de probabilidad de X es $\text{Bin}(n = 180,\ p = 0{,}65)$.

a) El valor esperado de aprobados o esperanza matemática de X es:

$$E[X] = np = 180 \cdot 0{,}65 = 117$$

Por tanto, se espera que suspendan $180 - 117 = 63$ personas (este valor, también podría haberse calculado mediante el producto $n(1-p) = 180 \cdot 0{,}35 = 63$).

b) Para calcular esta probabilidad, se aproxima la distribución binomial de la variable X por la distribución normal de la variable Y, siendo esta:

$$Y \sim N(\mu = 117,\ \sigma^2 = 180 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35 = 40{,}95)$$

De modo que la probabilidad de que aprueben a la primera al menos 110, utilizando la aproximación normal y aplicando la corrección por continuidad es:

$$P(X \geq 110) \simeq P(Y \geq 109{,}5) = P\left(Z \geq \frac{109{,}5 - 117}{\sqrt{40{,}95}}\right) = P(Z \geq -1{,}17) = \Phi(1{,}17) = 0{,}8790$$

c) La probabilidad de que aprueben como mínimo 100 y como máximo 115, se obtiene utilizando la aproximación normal, aplicando la corrección por continuidad:

$$P(100 \leq X \leq 115) \simeq P(99{,}5 \leq Y \leq 115{,}5) = P\left(\frac{99{,}5-117}{\sqrt{40{,}95}} \leq Z \leq \frac{115{,}5-117}{\sqrt{40{,}95}}\right) = P(-2{,}73 \leq Z \leq -0{,}23) =$$

$$\Phi(2{,}73) - \Phi(0{,}23) = 0{,}9968 - 0{,}5910 = 0{,}4058$$

53. En la consulta de un médico especialista, 3 de cada 10 pacientes son diagnosticados con una enfermedad grave. Si se eligen 60 pacientes al azar de esta consulta, calcula la probabilidad de que hayan sido diagnosticados:

a) Como máximo 10 pacientes.

b) Más de 20 pacientes.

c) Entre 15 y 25 pacientes.

Se considera la variable aleatoria *X*: "número de pacientes, de los 60, diagnosticados con enfermedad grave". La distribución de probabilidad de la variable *X* es $\text{Bin}(n = 60,\ p = 0{,}3)$.

Para calcular las probabilidades de ambos apartados, se puede aproximar la distribución de *X* por la de una variable aleatoria normal, *Y*, con la media y la varianza siguientes:

$$\mu = np = 60 \cdot 0{,}3 = 18 \qquad \sigma^2 = npq = 60 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 12{,}6$$

a) La probabilidad de que, como máximo, 10 pacientes sean diagnosticados con enfermedad grave se obtiene utilizando la aproximación normal, la corrección por continuidad y tipificando a la normal estándar:

$$P(X \le 10) \simeq P(Y \le 10{,}5) = P\left(Z \le \frac{10{,}5 - 18}{\sqrt{12{,}6}}\right) = P(Z \le -2{,}11) = 1 - \Phi(2{,}11) = 1 - 0{,}9826 = 0{,}0174$$

b) Del mismo modo se calcula la probabilidad de que se diagnostique con enfermedad grave a más de 20 pacientes:

$$P(X > 20) \simeq P(Y \ge 20{,}5) = P\left(Z \ge \frac{20{,}5 - 18}{\sqrt{12{,}6}}\right) = P(Z \ge 0{,}70) = 1 - \Phi(0{,}70) = 1 - 0{,}7580 = 0{,}2420$$

c) La probabilidad de que hayan sido diagnosticados entre 15 y 25 pacientes es:

$$P(15 \le X \le 25) \simeq P(14{,}5 \le Y \le 25{,}5) = P\left(\frac{14{,}5 - 18}{\sqrt{12{,}6}} \le Z \le \frac{25{,}5 - 18}{\sqrt{12{,}6}}\right) = P(-0{,}99 \le Z \le 2{,}11) =$$
$$= \Phi(2{,}11) - (1 - \Phi(0{,}99)) = 0{,}9826 - 1 + 0{,}8389 = 0{,}8215$$

54. En una población el 10 % tiene suscrita alguna póliza de seguro de vida. Si en dicha población se seleccionan 350 personas, calcula la probabilidad de que:

a) Al menos 40 tengan suscrito algún seguro de vida.

b) Como máximo 30 tengan suscrito algún seguro de vida.

c) Entre 30 y 40 personas tengan suscrito algún seguro de vida.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de personas, de las 350, que tiene suscrito una póliza de seguro de vida". *X* tiene una distribución binomial $\text{Bin}(n = 350,\ p = 0{,}1)$.

Para los cálculos de las probabilidades que se piden en los apartados se utiliza la aproximación por una variable aleatoria *Y* con distribución normal de media y varianza respectivas:

$$\mu = np = 350 \cdot 0{,}1 = 35 \qquad \sigma^2 = npq = 350 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 31{,}5$$

a) La probabilidad de que al menos 40 tengan suscrito un seguro de vida, se aproxima por la normal, mediante la corrección por continuidad y tipificando a la normal estándar:

$$P(X \ge 40) \simeq P(Y \ge 39{,}5) = P\left(Z \ge \frac{39{,}5 - 35}{\sqrt{31{,}5}}\right) = P(Z \ge 0{,}80) = 1 - \Phi(0{,}8) = 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119$$

b) En este caso se trata de calcular la probabilidad siguiente:

$$P(X \le 30) \simeq P(Y \le 30{,}5) = P\left(Z \le \frac{30{,}5 - 35}{\sqrt{31{,}5}}\right) = P(Z \le -0{,}8) = 1 - \Phi(0{,}8) = 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119$$

c) La probabilidad de que haya entre 30 y 40 personas suscritas a algún seguro de vida es:

$$P(30 \le X \le 40) \simeq P(29{,}5 \le Y \le 40{,}5) = P\left(\frac{29{,}5 - 35}{\sqrt{31{,}5}} \le Z \le \frac{40{,}5 - 35}{\sqrt{31{,}5}}\right) = P(-0{,}98 \le Z \le 0{,}98) =$$
$$= \Phi(0{,}98) - (1 - \Phi(0{,}98)) = 2\Phi(0{,}98) - 1 = 2 \cdot 0{,}8365 - 1 = 0{,}6730$$

55. *En el balance final del último año en una entidad financiera, la morosidad (créditos concedidos y no pagados) ha ascendido al 28 %. Si de dicha entidad se eligen al azar 60 clientes a los que se les ha concedido un crédito, calcula probabilidad de que entre los 60:

a) Haya al menos 18 morosos.

b) Los morosos sean exactamente 12.

c) El número de créditos impagados esté entre 20 y 25.

Se considera la variable *X*: "número de clientes morosos, entre los 60". La distribución de probabilidad de *X* es binomial $\text{Bin}(n=60,\ p=0{,}28)$. Para calcular las probabilidades de los apartados se puede aproximar por la distribución de una variable aleatoria normal *Y* de media y varianza respectivas:

$$\mu = np = 60 \cdot 0{,}28 = 16{,}8 \qquad \sigma^2 = np(1-p) = 60 \cdot 0{,}28 \cdot (1-0{,}28) = 12{,}096$$

a) La probabilidad de que entre los 60 clientes haya al menos 18 morosos es:

$$P(X \geq 18) \simeq P(Y \geq 17{,}5) = P\left(Z \geq \frac{17{,}5-16{,}8}{\sqrt{12{,}096}}\right) = P(Z \geq 0{,}2) = 1-\Phi(0{,}2) = 1-0{,}5793 = 0{,}4207$$

b) La probabilidad de que haya exactamente 12 morosos es:

$$P(X=12) \simeq P(11{,}5 \leq Y \leq 12{,}5) = P\left(\frac{11{,}5-16{,}8}{\sqrt{12{,}096}} \leq Z \leq \frac{12{,}5-16{,}8}{\sqrt{12{,}096}}\right) = P(-1{,}52 \leq Z \leq -1{,}24) =$$
$$= \Phi(1{,}52) - \Phi(1{,}24) = 0{,}9357 - 0{,}8925 = 0{,}0432$$

Esta probabilidad se puede calcular directamente con la binomial:

$$P(X=12) = \binom{60}{12} 0{,}28^{12} \cdot 0{,}72^{48} = 0{,}0461.$$

Y, como puede observarse, la aproximación realizada con la normal es bastante buena. En realidad, las diferencias que se observan se deben a los redondeos necesarios para poder utilizar la tabla de la distribución normal.

c) La probabilidad de que el número de créditos impagados esté entre 20 y 25, ambos incluidos, es:

$$P(20 \leq X \leq 25) \simeq P(19{,}5 \leq Y \leq 25{,}5) = P\left(\frac{19{,}5-16{,}8}{\sqrt{12{,}096}} \leq Z \leq \frac{25{,}5-16{,}8}{\sqrt{12{,}096}}\right) = P(0{,}78 \leq Z \leq 2{,}5) =$$
$$= \Phi(2{,}5) - \Phi(0{,}78) = 0{,}9938 - 0{,}7823 = 0{,}2115$$

CUESTIONES

56. Si Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, prueba que la variable aleatoria $X = aZ + b$ tiene distribución normal de media b y varianza a^2.

Para responder a esta cuestión, basta con conocer las siguientes propiedades lineales del operador esperanza. Si X e Y son variables aleatorias y k es una constante cualquiera:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] \qquad E[kX] = kE[X]$$

Dado que $Z \sim N(\mu = 0,\ \sigma^2 = 1)$, la media o esperanza de X es:

$$\mu_X = E[X] = E[aZ+b] = aE[Z] + E[b] = b$$

donde $E[Z] = \mu = 0$ y $E[b] = b$ por tratarse de una constante.

En cuanto a la varianza, en primer lugar se calcula:

$$E\left[X^2\right] = E\left[(aZ+b)^2\right] = E\left[a^2Z^2 + 2abZ + b^2\right] = a^2E\left[Z^2\right] + 2abE[Z] + b^2 = a^2 + b^2$$

donde $E\left[Z^2\right] = \sigma^2 + \mu^2 = 1 + 0 = 1$.

De modo que la varianza de X es:

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = a^2 + b^2 - b^2 = a^2$$

Otra forma de verlo es mediante la siguiente propiedad de la varianza: $\text{Var}(aY+b) = a^2\text{Var}(Y)$. Luego:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(aZ+b) = a^2\text{Var}(Z) = a^2 \cdot 1 = a^2$$

57. Si X es una variable aleatoria con distribución $\text{Bin}(n,\ p)$ e Y es otra variable aleatoria, independiente de X, con distribución $\text{Bin}(m,\ p)$:

a) ¿Cuál será la distribución de la variable $X+Y$?

b) ¿Cuál es la esperanza y la varianza de las variables $W = kX$ y $T = Y + c$?, donde k y c son constantes arbitrarias.

a) La distribución de la variable $X+Y$ es binomial de parámetros $n+m$ y p, ya que:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = np + mp = (n+m)p$$

Y al ser independientes: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = npq + mpq = (n+m)pq$.

b) Si k y c son constantes cualesquiera:

$$E[W] = E[kX] = kE[X] = knp$$

$$\text{Var}(W) = Var(kX) = k^2Var(X) = k^2npq$$

En cuanto a la variable $Y = T + c$:

$$E[T] = E[Y+c] = E[Y] + c = mp + c$$

$$\text{Var}(T) = \text{Var}(Y+c) = \text{Var}(Y) = mpq$$

58. Sean las variables aleatorias $X \sim \text{Bin}(n,\ p)$ e $Y \sim \text{Bin}\left(2n,\ \frac{p}{2}\right)$.

a) Comprueba que tienen la misma media.

b) ¿Cuál de las dos distribuciones tiene los datos menos dispersos respecto a su media?

a) En efecto, ambas variables tiene la misma media puesto que:

$$E[X] = np \qquad E[Y] = 2n\frac{p}{2} = np$$

b) Se procede a calcular la varianza de cada una de las variables:

$$Var(X) = np(1-p)$$

$$\text{Var}(Y) = 2n\frac{p}{2}\left(1-\frac{p}{2}\right) = np\left(1-\frac{p}{2}\right)$$

Y como $1-p<1-\frac{p}{2}$, resulta que:

$$\text{Var}(X) < \text{Var}(Y)$$

Por tanto, la distribución de la variable *X* tiene los datos menos dispersos respecto a su media.

59. Sea *X* una variable aleatoria cuya distribución es continua.

a) ¿Cuál es la media y la varianza de la distribución de la variable $2X$?

b) ¿Y de la distribución de $X + 2$?

a) La esperanza o media de la variable $Y = 2X$ es:

$$E[Y] = E[2X] = 2E[X]$$

Para obtener la varianza de $Y = 2X$ se calcula en primer lugar $E\left[Y^2\right]$:

$$E\left[Y^2\right] = E\left[4X^2\right] = 4E\left[X^2\right]$$

Con lo que:

$$\text{Var}(Y) = E\left[Y^2\right] - (E[Y])^2 = 4E\left[X^2\right] - (2E[X])^2 = 4\left(E\left[X^2\right] - (E[X])^2\right) = 4\,\text{Var}(X)$$

Otra forma de verlo es mediante la siguiente propiedad de la varianza: $\text{Var}(aX+b) = a^2\text{Var}(X)$. Luego:

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(2X) = 2^2\,\text{Var}(X) = 4\,\text{Var}(X)$$

Por tanto, la esperanza de $Y = 2X$ es el doble de la esperanza de *X* y la varianza de $Y = 2X$ es cuatro veces la varianza de *X*.

b) En cuanto a la media y la varianza de la variable $W = X + 2$:

$$E[W] = E[X+2] = E[X] + E[2] = E[X] + 2$$

$$\text{Var}(X+2) = \text{Var}(X)$$

PROBLEMAS

60. Según una encuesta de opinión se sabe que el 80 % de la población adolescente de una determinada ciudad es seguidora de una serie de televisión. Se elige una muestra aleatoria de 225 adolescentes de esa ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que sigan la serie de televisión entre 170 y 190 adolescentes, incluyendo los extremos?

Sea la variable aleatoria *X*: “número de adolescentes, de los 225, que sigue la serie de televisión”. La distribución de probabilidad de *X* es binomial, $\text{Bin}(n = 225,\ p = 0{,}8)$.

Para calcular la probabilidad que se pide, la distribución de *X* puede aproximarse por la de una variable aleatoria *Y* con distribución normal de media y varianza respectivas:

$$\mu = np = 225 \cdot 0{,}8 = 180 \qquad \sigma^2 = np(1-p) = 225 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 36$$

De manera que la probabilidad de que, de los 225 adolescentes, sigan la serie al menos 170 y como mucho 190 se obtiene efectuando la corrección por continuidad, tipificando y usando las tablas de la normal estándar:

$$P(170 \le X \le 190) \simeq P(169{,}5 \le Y \le 190{,}5) = P\left(\frac{169{,}5-180}{\sqrt{36}} \le Z \le \frac{190{,}5-180}{\sqrt{36}}\right) =$$
$$= P(-1{,}75 \le Z \le 1{,}75) = 2\Phi(1{,}75) - 1 = 2 \cdot 0{,}9599 - 1 = 0{,}9198$$

61. En el control de calidad de un gran lote de artículos manufacturados se estima que el 8 % de los artículos tiene algún defecto. Si se examinan al azar 10 artículos del lote, calcula la probabilidad de que no se obtendrá más de un artículo defectuoso:

a) Mediante la distribución binomial.

b) Mediante la aproximación normal a la distribución binomial.

c) Interpreta la diferencia obtenida en los resultados de los dos apartados anteriores.

Se considera la variable aleatoria *X*: “número de artículos, de los 10 examinados, que presentan algún defecto”.

La variable *X* tiene distribución de probabilidad binomial, $\text{Bin}(n = 10,\ p = 0{,}08)$.

a) La probabilidad de que no se obtendrá más de un artículo defectuoso, es decir, que como mucho *X* tome el valor 1 es:

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0} 0{,}92^{10} + \binom{10}{1} 0{,}08 \cdot 0{,}92^{9} = 0{,}4344 + 0{,}3777 = 0{,}8121$$

b) La distribución binomial de *X*, se puede aproximar por la distribución normal de una variable *Y* con media y varianzas respectivas:

$$\mu = np = 10 \cdot 0{,}08 = 0{,}8 \qquad \sigma^2 = np(1-p) = 10 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92 = 0{,}736$$

Entonces, efectuando la corrección por continuidad, tipificando y usando las tablas de la normal estándar:

$$P(X \le 1) \simeq P(Y \le 1{,}5) = P\left(Z \le \frac{1{,}5-0{,}8}{\sqrt{0{,}736}}\right) = P(Z \le 0{,}82) = 0{,}7939$$

c) La diferencia observada en las probabilidades de los dos apartados anteriores es de aproximadamente 2 puntos porcentuales que son fundamentalmente debidos a que:

- El tamaño de la muestra (*n* = 10) no es suficientemente grande para que la aproximación sea fiable.
- El valor de la proporción $p = 0{,}08$ está muy alejado del valor $p = 0{,}5$.
- Además, puede comprobarse que $np = 0{,}8$ es claramente inferior a 5.

62. En la zona comercial de la ciudad se sabe que el 54 % de las compras realizadas se pagan con tarjeta de crédito. Si en un día cualquiera se realizan 250 compras:

a) ¿Cuál es el número esperado de las que no han sido pagadas con tarjeta de crédito?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que hayan sido pagadas con tarjeta de crédito entre 130 y 145?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que más de 115 no se paguen con tarjeta de crédito?

Sea la variable aleatoria *X*: "número de compras realizadas con tarjeta de crédito, de las 250 compras observadas". La variable *X* tiene distribución de probabilidad binomial, $\text{Bin}(n = 250,\ p = 0{,}54)$.

Dado el tamaño de la muestra (250 compras) y el valor de *p*, es factible aproximar los cálculos de las probabilidades binomiales por los de una distribución de probabilidad normal:

$$Y \sim N\left(\mu = 250 \cdot 0{,}54 = 135,\ \ \sigma^2 = 250 \cdot 0{,}54 \cdot 0{,}46 = 62{,}1\right)$$

a) El número esperado de las que no han sido pagadas con tarjeta de crédito es: $250 \cdot (1 - 0{,}54) = 115$.

b) Esta probabilidad se obtiene, aproximado por la distribución normal, aplicando la corrección por continuidad, tipificando y usando las tablas de la normal estándar:

$$P(130 \le X \le 145) \simeq P(129{,}5 \le Y \le 145{,}5) = P\left(\frac{129{,}5 - 135}{\sqrt{62{,}1}} \le Z \le \frac{145{,}5 - 135}{\sqrt{62{,}1}}\right) = P(-0{,}7 \le Z \le 1{,}33) =$$

$$\Phi(1{,}33) - (1 - \Phi(0{,}7)) = 0{,}9082 - 1 + 0{,}7580 = 0{,}6662$$

c) Que más de 115 no se paguen con tarjeta de crédito equivale a que como mucho 135 (= 250 − 115) se paguen con tarjeta de crédito. Es decir:

$$P(X \le 135) \simeq P(Y \le 135{,}5) = P\left(Z \le \frac{135{,}5 - 135}{\sqrt{62{,}1}}\right) = P(Z \le 0{,}06) = 0{,}5239$$

63. En el último balance anual, las ventas de un comercio se han distribuido según una variable normal $N(\mu = 3{,}4,\ \sigma = 0{,}8)$, en millones de euros. Calcula la probabilidad de que:

a) En un mes elegido al azar, las ventas superen los 4 millones de euros.

b) La diferencia de ventas entre dos meses elegidos al azar sea superior a 1 millón de euros.

c) Las ventas acumuladas de tres meses elegidos al azar superen los 12 millones de euros.

La variable aleatoria *X*: "ventas mensuales del comercio en millones de euros" tiene distribución:

$$N(\mu_X = 3{,}4,\ \sigma_X = 0{,}8)$$

a) En este caso, se pide calcular la probabilidad:

$$P(X > 4) = P\left(Z > \frac{4 - 3{,}4}{0{,}8}\right) = P(Z > 0{,}75) = 1 - \Phi(0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$$

b) Si X_1, X_2 representan las ventas de dos meses elegidos al azar, se pide $P(|X_1 - X_2| > 1)$.

La distribución de probabilidad de la variable $Y = X_1 - X_2$ es normal, con media y varianza:

$$\mu_Y = \mu_{X_1} - \mu_{X_2} = 3{,}4 - 3{,}4 = 0 \ \text{ y } \ \sigma_Y^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 = 0{,}64 + 0{,}64 = 1{,}28 \ \Rightarrow \ Y = X_1 - X_2 \sim N(\mu_Y = 0,\ \sigma_Y^2 = 1{,}28)$$

Entonces, se calcula:

$$P(|X_1 - X_2| < 1) = P(-1 \le X_1 - X_2 \le 1) = P\left(\frac{-1 - 0}{\sqrt{1{,}28}} \le Z \le \frac{1 - 0}{\sqrt{1{,}28}}\right) = P(-0{,}88 < Z < 0{,}88) = 2\Phi(0{,}88) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}8106 - 1 = 0{,}6212$$

Por tanto, $P(|X_1 - X_2| > 1) = 1 - P(|X_1 - X_2| \le 1) = 1 - 0{,}6212 = 0{,}3788$.

c) Sean X_1, X_2, X_3 las ventas de tres meses elegidos al azar, la distribución de la variable suma de los tres meses, T, es normal con la media y varianza siguientes:

$$\mu_T = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \mu_{X_3} = 3{,}4 + 3{,}4 + 3{,}4 = 10{,}2 \qquad \sigma_T^2 = \sigma_{X_2}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \sigma_{X_3}^2 = 0{,}64 + 0{,}64 + 0{,}64 = 1{,}92$$

De modo que la probabilidad de que T supere los 12 millones de euros es:

$$P(T > 12) = P\left(Z > \frac{12 - 10{,}2}{\sqrt{1{,}92}}\right) = P(Z > 1{,}3) = 1 - \Phi(1{,}3) = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$$

64. En el control de calidad de una máquina envasadora de botellas de vino de 750 cL se comprueba que la cantidad media que contienen las botellas analizadas es 745 cL, con una desviación típica de 4 cL. Si solo se admiten para la venta botellas que contengan entre 745 y 755 cL:

a) Calcula el porcentaje de botellas no admisibles que está produciendo la máquina envasadora.

b) Si la máquina se ajusta a una media de 750 cL y se mantiene la desviación típica en 4 cL, ¿cuál es el porcentaje de botellas listas para su distribución?

c) Si la media se ajusta a 750 cL, ¿cuál debería ser la desviación típica para que el 99 % de las botellas fuera admisible?

Se considera la variable aleatoria X: "cantidad, en cL, que contienen las botellas". Se supone que la variable X tiene distribución de probabilidad normal, $X \sim N(\mu = 745,\ \sigma = 4)$.

a) Se calcula el porcentaje de botellas que están dentro de los límites admisibles, es decir, la probabilidad de que los valores de la variable X estén entre 745 y 755 cL:

$$P(745 < X < 755) = P\left(\frac{745 - 745}{4} < Z < \frac{755 - 745}{4}\right) = P(0 < Z < 2{,}5) = \Phi(2{,}5) - \Phi(0) = 0{,}9938 - 0{,}5 = 0{,}4938$$

Es decir, el 49,38 % de las botellas son admisibles y, por tanto, el 50,62 % no son admisibles.

b) Se procede como en el apartado anterior, pero ahora teniendo en cuenta que $X \sim N(\mu = 750,\ \sigma = 4)$.

$$P(745 < X < 755) = P\left(\frac{745 - 750}{4} < Z < \frac{755 - 750}{4}\right) = P(-1{,}25 < Z < 1{,}25) = 2\Phi(1{,}25) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}8944 - 1 = 0{,}7888$$

El 78,88 % de las botellas están listas para su distribución.

c) En este caso, $X \sim N(\mu = 750,\ \sigma)$, y se debe calcular la desviación típica para que el 99 % de las botellas sea admisible. Es decir:

$$P(745 < X < 755) = P\left(\frac{745 - 750}{\sigma} < Z < \frac{755 - 750}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-5}{\sigma} < Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1$$

De modo que igualando a 0,99 y usando las tablas de la distribución normal estándar, resulta:

$$2\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}99 \Rightarrow \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}995 \Rightarrow \frac{5}{\sigma} = 2{,}575 \Rightarrow \sigma = 1{,}9417$$

65. Se planifica llevar a cabo una encuesta con pequeñas y medianas empresas de una determinada población. Se elige una muestra aleatoria simple de empresas a partir del listado telefónico. Por experiencia, se sabe que solo la mitad de las empresas con las que se contacta responden a la encuesta. Si se contacta con 150 empresas:

a) ¿Cuál es el número esperado de empresas que responderán a la encuesta?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo respondan 70 empresas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de empresas que responden a la encuesta sea superior a la media?

Sea *X*: "número de empresas, de las 150, que responden". Dado que la mitad de las empresas responden, la variable *X* tiene distribución binomial $\text{Bin}(n = 150,\ p = 0{,}5)$.

a) El número esperado de empresas que responderán es la esperanza matemática de la variable *X*:

$$E[X] = np = 150 \cdot 0{,}5 = 75$$

b) Para el cálculo de esta probabilidad, se aproxima la distribución de la variable *X* por la de una variable *Y* con distribución normal de media $\mu = 75$ y varianza $\sigma^2 = npq = 150 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 37{,}5$. De manera que:

$$P(X \le 70) \simeq P(Y \le 70{,}5) = P\left(Z \le \frac{70{,}5 - 75}{\sqrt{37{,}5}}\right) = P(Z \le -0{,}73) = 1 - \Phi(0{,}73) = 1 - 0{,}7673 = 0{,}2327$$

c) Si se tiene en cuenta la variable *Y* del apartado anterior, se pide calcular:

$$P(X > 75) \simeq P(Y \ge 75{,}5) = P\left(Z \ge \frac{75{,}5 - 75}{\sqrt{37{,}5}}\right) = P(Z \ge 0{,}08) = 1 - \Phi(0{,}08) = 1 - 0{,}5319 = 0{,}4681$$

66. Una moneda está trucada de modo que la probabilidad de obtener cara es 0,7. Si se lanza 10 veces la moneda, calcula:

a) La probabilidad de obtener al menos 8 caras.

b) La probabilidad de obtener menos de 5 caras.

c) El número medio de caras y la desviación típica de la variable *X*: "número de caras en los 10 lanzamientos".

Sea la variable aleatoria *X*: "número de veces que se obtiene cara en los 10 lanzamientos". La distribución de *X* es binomial, $\text{Bin}(n = 10,\ p = 0{,}7)$.

a) La probabilidad de obtener al menos 8 caras es:

$$P(X \ge 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{8} 0{,}7^8 \cdot 0{,}3^2 + \binom{10}{9} 0{,}7^9 \cdot 0{,}3 + \binom{10}{10} 0{,}7^{10} = 0{,}3828$$

b) La probabilidad de obtener menos de 5 caras es:

$$P(X < 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$$
$$= \binom{10}{0} 0{,}3^{10} + \binom{10}{1} 0{,}7 \cdot 0{,}3^9 + \binom{10}{2} 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^8 + \binom{10}{3} 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^7 + \binom{10}{4} 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^6 =$$
$$= 0{,}0000 + 0{,}0001 + 0{,}0014 + 0{,}0090 + 0{,}0368 = 0{,}0473$$

c) El número medio de caras o esperanza matemática de la variable *X* es:

$$E[X] = np = 10 \cdot 0{,}7 = 7$$

La varianza y la desviación típica de *X* son, respectivamente:

$$\text{Var}(X) = npq = 10 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 2{,}1 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2{,}1} = 1{,}4491$$

67. Un examen tipo test de una oposición consta de 300 preguntas, cada una de ellas con cuatro respuestas posibles y de las cuales solo una es correcta. Un opositor que no ha preparado el examen, responde al azar.

a) Calcula el número esperado de respuestas que tendrá correctas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente 100 o más preguntas?

La variable aleatoria X: "número de respuestas correctas, de las 300 preguntas" tiene distribución de probabilidad binomial, $\text{Bin}(n = 300,\ p = 0{,}25)$, ya que la probabilidad de acertar, cuando se responde al azar, una de las 4 posibles respuestas es 0,25.

a) El número esperado de respuestas correctas si se responde al azar es: $E[X] = np = 300 \cdot 0{,}25 = 75$.

b) Para calcular la probabilidad de responder correctamente a más de 100 preguntas, se aproxima la distribución de probabilidad de la variable binomial X por la de una variable Y con distribución normal:

$$Y \sim N\left(\mu = 75,\ \sigma^2 = 300 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 56{,}25\right)$$

De manera que, aplicando la corrección por continuidad, tipificando y usando la tabla de la normal estándar:

$$P(X \geq 100) \simeq P(Y \geq 99{,}5) = P\left(Z \geq \frac{99{,}5 - 75}{\sqrt{56{,}25}}\right) = P(Z \geq 3{,}27) = 1 - \Phi(3{,}27) = 1 - 0{,}9995 = 0{,}0005$$

68. *La pensión de los jubilados de una región es una variable con distribución normal de media 750 € y desviación típica 100 €.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un jubilado de esa región tenga una pensión de, al menos, 850 €?

b) Para una muestra de 200 jubilados de esa región, ¿cuál es la estimación del número de los que tienen una pensión entre 600 y 800 €?

c) Para la muestra de 200 jubilados, ¿cuál es la probabilidad de que más de 40 tengan una pensión de al menos 850 €?

Sea X: "pensión, en euros, de los jubilados", variable aleatoria con distribución $N(\mu = 750,\ \sigma = 100)$.

a) Esta probabilidad se calcula tipificando y utilizando las tablas de la normal estándar:

$$P(X \geq 850) = P\left(Z \geq \frac{850 - 750}{100}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

b) Se calcula la probabilidad de que la pensión de un jubilado elegido al azar esté entre 600 y 800 €:

$$P(600 < X < 800) = P\left(\frac{600 - 750}{100} < Z < \frac{800 - 750}{100}\right) = P(-1{,}5 < Z < 0{,}5) = \Phi(0{,}5) - (1 - \Phi(1{,}5)) =$$
$$= 0{,}6915 - 1 + 0{,}9332 = 0{,}6247$$

De modo que el 62,47 % de los jubilados cobra una pensión entre 600 y 800 €. Por tanto, como el 62,47 % de 200 es 124,94, puede decirse que, de la muestra aleatoria de 200, unos 125 jubilados tienen una pensión entre 600 y 800 €.

c) La probabilidad de que un jubilado elegido al azar tenga una pensión de al menos 850 € es $p = 0{,}1587$, calculada en el apartado a). Sea ahora la variable aleatoria Y: "número de jubilados, de los 200, que cobra una pensión de al menos 850 €". La distribución de probabilidad de la variable Y es binomial:

$$Y \sim \text{Bin}(n = 200,\ p = 0{,}1587)$$

Debe calcularse la probabilidad de que la variable Y sea mayor que 40. Para ello, se aproxima la distribución de probabilidad de Y por la de una variable T con distribución normal:

$$T \sim N\left(\mu_T = 200 \cdot 0{,}1587 = 31{,}74,\ \sigma^2 = 200 \cdot 0{,}1587 \cdot (1 - 0{,}1587) = 26{,}7029\right)$$

De esta manera:

$$P(Y > 40) \simeq P(T \geq 40{,}5) = P\left(Z \geq \frac{40{,}5 - 31{,}74}{\sqrt{26{,}7029}}\right) = P(Z \geq 1{,}7) = 1 - \Phi(1{,}7) = 1 - 0{,}9554 = 0{,}0446$$

69. *El tiempo de atención a un paciente, en una consulta médica, tiene distribución normal de media 10 minutos y desviación típica igual a 3 minutos.

a) Si hay citados 5 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que la consulta de al menos uno de ellos dure menos de 5 minutos?

b) Si hay citados 8 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que dos de ellos sean atendidos en más de 12 minutos?

c) Si hay citados 300 pacientes, ¿cuál es la estimación del número de pacientes cuya consulta durará más de 12 minutos?

Sea la variable aleatoria *X*: "tiempo, en minutos, de atención a un paciente en una consulta médica". La distribución de *X* es normal, $X \sim N(\mu = 10,\ \sigma = 3)$.

a) La probabilidad de que la consulta de un paciente elegido al azar dure menos de 5 minutos es:

$$P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-10}{3}\right) = P(Z < -1{,}67) = 1 - \Phi(1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$$

Sea la variable *Y*: "número de pacientes, de los 5, que son atendidos en menos de 5 minutos". La distribución de probabilidad de *Y* es binomial, $Y \sim \text{Bin}(n = 5,\ p = 0{,}0475)$.

Por tanto, la probabilidad de que la consulta de al menos uno de los 5 dure menos de 5 minutos es:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0{,}9525^5 = 0{,}2160$$

b) La probabilidad de que la consulta de un paciente elegido al azar dure más de 12 minutos es:

$$P(X > 12) = P\left(Z > \frac{12-10}{3}\right) = P(Z > 0{,}67) = 1 - \Phi(0{,}67) = 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$$

Sea la variable *T*: "número de pacientes, de los 8, que son atendidos en más de 12 minutos". La distribución de probabilidad de *T* es binomial, $T \sim \text{Bin}(n = 8,\ p = 0{,}2514)$.

Por tanto, la probabilidad de que la consulta de 2 de los 8 pacientes dure más de 12 minutos es:

$$P(Y = 2) = \binom{8}{2} 0{,}2514^2 (1 - 0{,}2514)^6 = 0{,}3114$$

c) Elegido un paciente al azar, la probabilidad de que su consulta dure más de 12 minutos es:

$$P(X > 12) = P\left(Z > \frac{12-10}{3}\right) = P(Z > 0{,}67) = 1 - \Phi(0{,}67) = 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$$

Es decir, el 25,14 % de las consultas duran más de 12 minutos. Como el 25,14 % de 300 es 75,42, aproximadamente 75 pacientes tendrán una consulta de más de 12 minutos.

70. Una máquina produce arandelas de acero inoxidable. La medida del diámetro interior sigue una distribución normal de media $\mu = 16$ mm y desviación típica $\sigma = 0,3$ mm. Las referencias especifican que solo son admisibles las arandelas con un diámetro interior entre 14,85 y 16,5 mm.

a) Calcula el porcentaje de arandelas producidas que cumplen las especificaciones.

b) Si se eligen 300 arandelas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que más de 210 sean admisibles?

c) Calcula el diámetro máximo que pueden tener las arandelas para que sean admisibles el 98 % de ellas.

Se considera la variable *X*: "diámetro interior, en mm, de las arandelas". La distribución de probabilidad de *X* es:

$$X \sim N(\mu = 16,\ \sigma = 0,3)$$

a) La probabilidad de que una arandela elegida al azar sea admisible es:

$$P(14,85 \le X \le 16,5) = P\left(\frac{14,85-16}{0,3} \le Z \le \frac{16,5-16}{0,3}\right) = P(-3,83 \le Z \le 1,67) = \Phi(1,67) - (1-\Phi(3,83)) =$$
$$= 0,9525 - 1 + 0,9999 = 0,9524$$

De manera que el 95,24 % de las arandelas producidas por esta máquina son admisibles.

b) La variable aleatoria *Y*: "número de arandelas, de las 300, que son admisibles" tiene una distribución de probabilidad binomial, con la probabilidad de que una arandela sea admisible obtenida en el apartado anterior, $Y \sim \text{Bin}(n = 300,\ p = 0,9524)$. Para calcular la probabilidad de que más de 210 sean admisibles se aproxima la distribución de *Y* por la de una variable normal *T* cuya media y varianza son respectivamente:

$$\mu = np = 300 \cdot 0,9524 = 285,72 \qquad \sigma^2 = npq = 300 \cdot 0,9524 \cdot 0,0476 = 13,6003$$

Utilizando la corrección por continuidad:

$$P(Y > 210) \simeq P(T \ge 210,5) = P\left(Z \ge \frac{210,5 - 285,72}{\sqrt{13,6003}}\right) = P(Z \ge -20,4) = 1$$

c) Se quiere hallar el diámetro máximo, *k*, de tal forma que $P(14,85 \le X \le k) = 0,98$. Luego:

$$P(14,85 \le X \le k) = P\left(\frac{14,85-16}{0,3} \le Z \le \frac{k-16}{0,3}\right) = 0,98 \Rightarrow P\left(-3,83 \le Z \le \frac{k-16}{0,3}\right) =$$
$$\Phi\left(\frac{k-16}{0,3}\right) - \Phi(-3,83) = 0,98 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k-16}{0,3}\right) - (1-\Phi(3,83)) = 0,98 \Rightarrow$$
$$\Phi\left(\frac{k-16}{0,3}\right) - (1-0,9999) = 0,98 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k-16}{0,3}\right) = 0,9801 \Rightarrow \frac{k-16}{0,3} = 2,06 \Rightarrow k = 16,618$$

Luego el diámetro máximo exigido que pueden tener las arandelas es de 16,618 mm.

71. Un examen de tipo test consta de 100 preguntas, cada una de las cuales va acompañada por 5 respuestas de las que solo una es correcta. Si un estudiante contesta al azar, ¿qué es más probable, que el número de respuestas acertadas sea menor que 15, o que esté entre 20 y 30?

Sea *X*: "número de respuestas acertadas, de las 100 preguntas". Dado que solo una de las 5 posibles respuestas es correcta, la probabilidad de acertar una respondiendo al azar es $p = 0,2$. Por tanto, *X* es una variable aleatoria con distribución de probabilidad binomial, $X \sim \text{Bin}(n = 100,\ p = 0,2)$.

La distribución de *X* puede aproximarse por la de una variable *T* con distribución normal:

$$T \sim N(\mu = 100 \cdot 0,2 = 20,\ \sigma^2 = 100 \cdot 0,20 \cdot 0,8 = 16)$$

De esta manera, la probabilidad de que el número de respuestas acertadas sea inferior a 15 es:

$$P(X < 15) \simeq P(T \le 14,5) = P\left(Z \le \frac{14,5-20}{4}\right) = P(Z \le -1,38) = 1 - \Phi(1,38) = 1 - 0,9162 = 0,0838$$

Mientras que la probabilidad de que el número de respuestas esté entre 20 y 30 es:

$$P(20 \le X \le 30) \simeq P(19,5 \le T \le 30,5) = P\left(\frac{19,5-20}{4} \le Z \le \frac{30,5-20}{4}\right) = P(-0,13 \le Z \le 2,63) =$$
$$= \Phi(2,63) - (1-\Phi(0,13)) = 0,9957 - 1 + 0,5517 = 0,5474$$

Por tanto, es más probable que el número de respuestas acertadas esté entre 20 y 30.

72. Las puntuaciones obtenidas en una prueba de aptitud de una empresa multinacional se distribuyen normalmente con media 76 y desviación típica 15. Calcula:

a) La puntuación por debajo de la cual se sitúan el 10 % de los peores resultados.

b) La puntuación por encima de la cual se sitúan el 15 % de los mejores**.**

La variable aleatoria X: "puntuaciones obtenidas en la prueba de aptitud" es normal con $N(\mu = 76,\ \sigma = 15)$.

a) Sea a la puntuación por debajo de la cual está el 10% de los resultados más bajos: $P(X < a) = 0{,}1$.

Tipificando la expresión y utilizando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P\left(Z < \frac{a-76}{15}\right) = 0{,}1 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a-76}{15}\right) = 0{,}1 \Rightarrow \frac{a-76}{15} = -1{,}28 \Rightarrow a = 56{,}8$$

b) Sea b la puntuación por encima de la cual está el 15 % de los resultados más altos: $P(X > b) = 0{,}15$.

Tipificando la expresión y utilizando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P\left(Z > \frac{b-76}{15}\right) = 0{,}15 \Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{b-76}{15}\right) = 0{,}15 \Rightarrow \Phi\left(\frac{b-76}{15}\right) = 0{,}85 \Rightarrow \frac{b-76}{15} = 1{,}037 \Rightarrow b = 91{,}555$$

73. Según un estudio, el tiempo que tardan los estudiantes de cierta titulación universitaria en completar el grado sigue una distribución normal, de media 5,6 años y desviación típica 0,5 años.

a) ¿Qué proporción de estudiantes completa el grado en 5 años o menos?

b) ¿Cuánto tiempo ha tardado un titulado en completar el grado, si el 91,92 % de los titulados ha necesitado menos tiempo que él?

La variable aleatoria X: "tiempo, en años, que tardan los estudiantes en completar el grado en cuestión" tiene una distribución normal $N(\mu = 5{,}6,\ \sigma = 0{,}5)$.

a) Debe calcularse la probabilidad de que la variable X sean inferior o igual a 5 años:

$$P(X \le 5) = P\left(Z \le \frac{5-5{,}6}{0{,}5}\right) = P(Z \le -1{,}2) = 1 - \Phi(1{,}2) = 1 - 0{,}8849 = 0{,}1151$$

Por tanto, la proporción de estudiantes que completa el grado en 5 años o menos es $\frac{1151}{10\,000}$.

b) Sea a el tiempo que ha tardado dicho titulado en completar el grado. Si el 91,92% ha tardado en completar el grado menos que él, se tiene que $P(X < a) = 0{,}9192$.

Tipificando y utilizando la tabla de la distribución normal se obtiene el valor de a:

$$P\left(Z < \frac{a-5{,}6}{0{,}5}\right) = 0{,}9192 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a-5{,}6}{0{,}5}\right) = 0{,}9192 \Rightarrow \frac{a-5{,}6}{0{,}5} = 1{,}4 \Rightarrow a = 6{,}3$$

Luego el titulado ha tardado 6,3 años en completar el grado.

74. El porcentaje de vacas que contraen una enfermedad después de suministrarles una determinada vacuna es del 2 %. En una granja se vacuna a 600 vacas.

a) Halla el número esperado de animales vacunados que no contraerán la enfermedad.

b) Halla la probabilidad de que, como máximo, enfermen 20 vacas que ya han sido vacunadas.

Se considera la variable aleatoria *X*: "número de vacas, de las 600 vacunadas, que contraen la enfermedad". La variable *X* tiene distribución binominal, $\text{Bin}(n = 600,\ p = 0{,}02)$.

a) El número esperado de vacas que contraerán la enfermedad es la esperanza de *X*: $E[X] = 600 \cdot 0{,}02 = 12$

Por lo que el número esperado de vacas que no contraerán la enfermedad es $600 - 12 = 588$.

Nota: Este número se podría haber obtenido mediante el producto $600 \cdot 0{,}98 = 588$.

b) Debe calcularse la probabilidad que la variable *X* tome un valor inferior o igual a 20. Para ello, se aproxima la distribución de probabilidad de *X* por la de una variable *Y* con distribución normal de media y varianza:

$$\mu = 600 \cdot 0{,}02 = 12 \qquad \sigma^2 = 600 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 11{,}76$$

De manera que la probabilidad pedida se obtiene utilizando la corrección por continuidad, tipificando y usando la tabla de la distribución normal estándar es:

$$P(X \le 20) \simeq P(Y \le 20{,}5) = P\left(Z \le \frac{20{,}5 - 12}{\sqrt{11{,}76}}\right) = P(Z \le 2{,}48) = 0{,}9934$$

75. Según un estudio realizado con los tiques de compra de un hipermercado, el gasto que hicieron los clientes un día determinado se ajustaba a una distribución normal de media 35 € y desviación típica 10 €. Halla:

a) La proporción de clientes que gastaron entre 20 y 40 €.

b) El gasto que realizó el cliente *C*, si solo hubo un 10 % de clientes que gastaron más que él.

La variable aleatoria *X*: "gasto, en euros, de los clientes en el día elegido" tiene una distribución de probabilidad normal, $N(\mu = 35,\ \sigma = 10)$.

a) La probabilidad de que el gasto se encuentre entre 20 y 40 euros es:

$$P(20 \le X \le 40) = P\left(\frac{20 - 35}{10} \le Z \le \frac{40 - 35}{10}\right) = P(-1{,}5 \le Z \le 0{,}5) = \Phi(0{,}5) - (1 - \Phi(1{,}5)) =$$
$$= 0{,}6915 - 1 + 0{,}9332 = 0{,}6247$$

b) Sea *c* el gasto que realizó el cliente *C*. Puesto que el 10 % de los clientes gastó más que él, se tiene que:

$$P(X > c) = 0{,}1 \Rightarrow P(X < c) = 0{,}9$$

Tipificando la expresión y usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P\left(Z < \frac{c - 35}{10}\right) = 0{,}9 \Rightarrow \frac{c - 35}{10} = 1{,}28 \Rightarrow c = 47{,}8$$

Luego el gasto que hizo dicho cliente fue de 47,8 €.

76. Los salarios netos, es decir, después de descontar impuestos, que reciben los trabajadores de una región siguen una variable con distribución normal de media igual a 950 € y desviación típica igual a 125 €.

a) ¿Cuál es probabilidad de que, elegido un trabajador, su salario neto sea de, al menos, 800 €?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, elegido un trabajador, su salario neto sea mayor que 700 € y, como máximo, igual a 1100 €?

c) Si se seleccionan 675 trabajadores, ¿cuántos se espera que tengan un salario neto de, al menos, 1000 €?

La variable *X*: "salario neto, en euros, de los trabajadores de la región" tiene distribución $N(\mu = 950,\ \sigma = 125)$.

a) La probabilidad de que un trabajador elegido al azar tenga un salario neto de al menos 800 euros es:

$$P(X \geq 800) = P\left(Z \geq \frac{800-950}{125}\right) = P(Z \geq -1{,}2) = \Phi(1{,}2) = 0{,}8849$$

b) En este caso, debe calcularse la probabilidad siguiente:

$$P(700 < X \leq 1100) = P\left(\frac{700-950}{125} < Z \leq \frac{1100-950}{125}\right) = P(-2 < Z \leq 1{,}2) = \Phi(1{,}2) - (1-\Phi(2)) =$$
$$= 0{,}8849 - 1 + 0{,}9772 = 0{,}8621$$

c) Se calcula la probabilidad de que un trabajador elegido al azar tenga un salario neto de al menos 1000 €:

$$P(X > 1000) = P\left(Z > \frac{1000-950}{125}\right) = P(Z > 0{,}4) = 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = 0{,}3446$$

De manera que si se seleccionan aleatoriamente 675 trabajadores, el número esperado de ellos que tiene un salario de al menos 1000 € es de $675 \cdot 0{,}3446 = 232{,}6 \simeq 233$ trabajadores.

77. Una urna contiene dos bolas rojas y tres verdes. De la urna se extraen 6 bolas una a una con reemplazamiento. Si se llama *X* al número de bolas verdes extraídas:

a) Describe la distribución de probabilidad de *X*.

b) Calcula la media y la varianza de *X*.

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos bolas verdes?

a) Dado que las extracciones son con reemplazamiento, en cada extracción la probabilidad de obtener bola verde es la misma:

$$p = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Cada extracción es una variable de Bernoulli de parámetro $p = 0{,}6$, $\text{Ber}(p = 0{,}6)$. Las extracciones son independientes, por tanto, la distribución de la variable aleatoria *X*: "número de bolas verdes extraídas en los seis intentos" es binomial, $X \sim \text{Bin}(n = 6,\ p = 0{,}6)$.

b) La media o esperanza matemática de *X* y su varianza son, respectivamente:

$$E[X] = 6 \cdot 0{,}6 = 3{,}6 \qquad \text{Var}(X) = 6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 1{,}44$$

c) La probabilidad de que la variable *X* tome un valor igual o superior a 2 es:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

Se procede a calcular las siguientes probabilidades:

$$P(X = 0) = 0{,}4^6 = 0{,}0041 \qquad P(X = 1) = \binom{6}{1} 0{,}6\ 0{,}4^5 = 0{,}0369$$

De modo que:

$$P(X \geq 2) = 1 - (0{,}0041 + 0{,}0369) = 0{,}959$$

78. En un concurso de televisión se debe responder a 10 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 posibles respuestas y solo una de ellas es correcta. Para ganar el premio es preciso contestar correctamente al menos a 6 preguntas. Calcula la probabilidad de que un concursante gane el premio si:

a) Contesta al azar a todas las preguntas.

b) Sabe seguro la mitad de las respuestas.

Si se responde al azar, la probabilidad de acertar con la respuesta correcta de una pregunta es $p = 0{,}25$. Como el concurso consta de 10 preguntas (se supone que independientes), la variable *X*: "número de preguntas acertadas, de las 10" tiene una distribución binomial, $X \sim \text{Bin}(n = 10,\ p = 0{,}25)$.

a) Para ganar, el concursante debe acertar al menos a 6 preguntas ($X \geq 6$) , de modo que la probabilidad de que gane el premio si contesta a todas las preguntas al azar es:

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$
$$= \binom{10}{6}0{,}25^6 \cdot 0{,}75^4 + \binom{10}{7}0{,}25^7 \cdot 0{,}75^3 + \binom{10}{8}0{,}25^8 \cdot 0{,}75^2 + \binom{10}{9}025^9 \cdot 0{,}75 + \binom{10}{10}0{,}25^{10} =$$
$$= 0{,}0162 + 0{,}0031 + 0{,}0004 + 0{,}0000 + 0{,}0000 = 0{,}0197$$

b) En este caso, como sabe con seguridad 5 de las 10 preguntas, se considera la variable *Y*: "número de preguntas acertadas, de las 5 que no sabe" cuya distribución es binomial, $Y \sim \text{Bin}(n = 5,\ p = 0{,}25)$.

Y, para ganar el concurso debe acertar al menos una de las cinco que no sabe, cuya probabilidad es:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}75^5 = 0{,}7627$$

79. *El tiempo de un usuario en ser atendido en una ventanilla sigue una normal de media 8 minutos con una desviación típica de 2,5 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario tarde entre 5 y 10 minutos?

b) ¿Cuánto tiempo emplea un usuario si el 80 % de los clientes tarda menos que él?

c) Si en la cola hay 24 usuarios, ¿cuántos de ellos se espera que tarden más de 8 minutos?

La variable aleatoria *X*: "tiempo de espera en ventanilla, en minutos," tiene una distribución $N(\mu = 8,\ \sigma = 2{,}5)$.

a) Para calcular esta probabilidad, se tipifica y se consulta la tabla de la distribución normal estándar:

$$P(5 < X < 10) = P\left(\frac{5-8}{2{,}5} < Z < \frac{10-8}{2{,}5}\right) = P(-1{,}2 < Z < 0{,}8) = \Phi(0{,}8) - (1 - \Phi(1{,}2)) =$$
$$= 0{,}7881 - 1 + 0{,}8849 = 0{,}6730$$

b) Sea *t* el tiempo que este usuario emplea en ventanilla. Si el 80 % de los clientes emplea menos tiempo que él, entonces $P(X < t) = 0{,}8$. Tipificando y utilizando la tabla de la normal estándar:

$$P\left(Z < \frac{t-8}{2{,}5}\right) = 0{,}8 \Rightarrow \Phi\left(\frac{t-8}{2{,}5}\right) = 0{,}8 \Rightarrow \frac{t-8}{2{,}5} = 0{,}84 \Rightarrow t = 10{,}1 \text{ minutos}$$

c) Se considera la variable *Y*: "número de usuarios, de los 24, que esperen más de 8 minutos", que tiene una distribución de probabilidad binomial, $Y \sim \text{Bin}(n = 24,\ p = 0{,}5)$, donde $p = P(X > 8) = P(Z > 0) = 0{,}5$.

El número esperado de usuarios que tardará más de 8 minutos en ser atendido, es la esperanza matemática de la variable *Y*:

$$E[Y] = 24 \cdot 0{,}5 = 12 \text{ usuarios}$$

80. Las cápsulas de café de una determinada marca contienen una cantidad que sigue una distribución normal de media 30 g y desviación típica 1,5 g. Calcula el porcentaje de cápsulas que contienen una cantidad:

a) Superior a 32 g.

b) Inferior a 27 g.

c) Se considera que una cápsula es admisible si tiene entre 27 y 33 gramos de café.

I. Si elegimos al azar 10 cápsulas, calcula la probabilidad de que más de 8 sean admisibles.

II. Si elegimos 100 cápsulas, calcula la probabilidad de que más de 90 sean admisibles.

La variable aleatoria *X*: "contenido, en gramos, de las cápsulas de café" tiene distribución de probabilidad normal:

$$X \sim N(\mu = 30,\ \sigma = 1{,}5)$$

a) Se calcula la probabilidad de que una cápsula elegida al azar supere los 32 gramos de café:

$$P(X > 32) = P\left(Z > \frac{32-30}{1{,}5}\right) = P(Z > 1{,}33) = 1 - \Phi(1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

Es decir, el 9,18 % de las cápsulas contienen una cantidad superior a 32 gramos.

b) Se calcula la probabilidad de que una cápsula elegida al azar contenga menos de 27 gramos de café:

$$P(X < 27) = P\left(Z < \frac{27-30}{1{,}5}\right) = P(Z < -2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Es decir, el 2,28 % de las cápsulas contienen una cantidad inferior a 27 gramos.

c) La probabilidad de que una cápsula elegida al azar sea admisible es:

$$P(27 < X < 33) = P\left(\frac{27-30}{1{,}5} < Z < \frac{33-30}{1{,}5}\right) = P(-2 < Z < 2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$$

I. Se considera, ahora, la variable *Y*: "número de cápsulas admisibles, de las 10 elegidas al azar". La distribución de *Y* es binomial, $Y \sim \text{Bin}(n = 10,\ p = 0{,}9544)$, de manera que la probabilidad de que más de 8 sean admisibles es:

$$P(Y > 8) = P(Y = 9) + P(Y = 10) = \binom{10}{9} 0{,}9544^9 \cdot (1 - 0{,}9544) + \binom{10}{10} 0{,}9544^{10} = 0{,}2996 + 0{,}6271 = 0{,}9267$$

II. Si se eligen 100 cápsulas, la variable *T*: "número de cápsulas que son admisibles, de las 100 elegidas al azar" tiene distribución de probabilidad binomial, $T \sim \text{Bin}(n = 100,\ p = 0{,}9544)$.

Para calcular la probabilidad de que más de 90, de las 100, sean admisibles, se puede proceder directamente calculando las probabilidades binomiales o aproximando la distribución de *T* por la de una variable *W* con distribución normal:

$$W \sim N(\mu = 100 \cdot 0{,}9544 = 95{,}44,\ \sigma^2 = 100 \cdot 0{,}9544 \cdot (1 - 0{,}9544) = 4{,}3521)$$

De modo que:

$$P(T > 90) \simeq P(W \geq 90{,}5) = P\left(Z \geq \frac{90{,}5 - 95{,}44}{\sqrt{4{,}3521}}\right) = P(Z \geq -2{,}37) = \Phi(2{,}37) = 0{,}9911$$

81. La probabilidad de que se entregue un cheque sin fondos en una entidad bancaria es 0,14. Si en dicha entidad se reciben 900 cheques en un mes, calcula:

a) El número esperado de cheques sin fondos.

b) La probabilidad de que se entreguen más de 110 cheques sin fondos en ese mes

c) ¿Cuántos cheques sin fondos se entregarán ese mes, como máximo, con una probabilidad del 90 %?

Sea la variable aleatoria *X*: "número de cheques sin fondos, de los 900". La distribución de probabilidad de la variable *X* es binomial, $X \sim \text{Bin}(n = 900,\ p = 0{,}14)$.

a) El número esperado de cheques sin fondos es la esperanza matemática de la variable *X*:

$$E[X] = 900 \cdot 0{,}14 = 126$$

b) Para calcular esta probabilidad se aproxima la distribución de la variable *X* por la de una variable *Y* con distribución normal de media y varianza respectivas:

$$\mu = 900 \cdot 0{,}14 = 126 \qquad \sigma^2 = 900 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86 = 108{,}36$$

De esta manera:

$$P(X > 110) \simeq P(Y \geq 110{,}5) = P\left(Z \geq \frac{110{,}5 - 126}{\sqrt{108{,}36}}\right) = P(Z \geq -1{,}49) = \Phi(1{,}49) = 0{,}9319$$

c) Sea *k* el número de cheques sin fondo que se entregarán como máximo con probabilidad 0,9. Entonces:

$$P(X \leq k) \simeq P(Y \leq k + 0{,}5) = P\left(Z \leq \frac{k + 0{,}5 - 126}{\sqrt{108{,}36}}\right) = 0{,}9 \Rightarrow \frac{k - 125{,}5}{\sqrt{108{,}36}} = 1{,}28 \Rightarrow k = 138{,}82$$

Es decir, con probabilidad 0,9, se entregarán como máximo aproximadamente 139 cheques sin fondos.

82. *El programa de noticias del fin semana de una determinada cadena de televisión es seguido por el 40 % de la audiencia. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 1500 personas. Calcula:

a) La probabilidad de que entre 550 y 700 personas vean el programa de noticias del fin de semana en dicha cadena.

b) El valor de la constante *k*, de tal manera que el 95 % de espectadores del programa esté comprendido en el intervalo $(600 - k,\ 600 + k)$.

La probabilidad de que una persona elegida al azar siga el programa de noticias de fin de semana de la cadena de televisión es $p = 0{,}4$. Por lo que la variable aleatoria *X*: "número de personas, de las 1500, que ven el programa de noticias de fin de semana" tiene distribución binomial, $X \sim \text{Bin}(n = 1500,\ p = 0{,}4)$.

Para el cálculo de probabilidades, la distribución de probabilidad de *X* puede aproximarse por la de una variable *T* con distribución normal: $T \sim N(\mu = 1500 \cdot 0{,}4 = 600,\ \sigma^2 = 1500 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 360)$.

a) Para calcular esta probabilidad se procede de la siguiente manera:

$$P(550 \leq X \leq 700) \simeq P(549{,}5 \leq T \leq 700{,}5) = P\left(\frac{549{,}5 - 600}{\sqrt{360}} \leq Z \leq \frac{700{,}5 - 600}{\sqrt{360}}\right) = P(-2{,}66 \leq Z \leq 5{,}3) =$$

$$= \Phi(5{,}3) - (1 - \Phi(2{,}66)) = 1 - 1 + 0{,}9961 = 0{,}9961$$

b) En este caso:

$$P(600 - k \leq X \leq 600 + k) \simeq P(599{,}5 - k \leq T \leq 600{,}5 + k) = P\left(\frac{599{,}5 - k - 600}{\sqrt{360}} \leq Z \leq \frac{600{,}5 + k - 600}{\sqrt{360}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-0{,}5 - k}{\sqrt{360}} \leq Z \leq \frac{0{,}5 + k}{\sqrt{360}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}5 + k}{\sqrt{360}}\right) - 1$$

De manera que, igualando esta probabilidad a 0,95 y usando la tabla de la distribución normal estándar:

$$2\Phi\left(\frac{0{,}5 + k}{\sqrt{360}}\right) - 1 = 0{,}95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0{,}5 + k}{\sqrt{360}}\right) = 0{,}975 \Rightarrow \frac{0{,}5 + k}{\sqrt{360}} = 1{,}96 \Rightarrow k = 36{,}69$$

83. La probabilidad de romper una galleta al ser envasada es el 1 %. Si en un envase hay 10 galletas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ninguna galleta rota debido a la operación de envasado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una galleta esté rota debido a la operación de envasado?

La variable aleatoria X: "número de galletas rotas, de las 10 envasadas (al azar)" tiene distribución de probabilidad binomial, $X \sim \text{Bin}(n = 10,\ p = 0{,}01)$.

a) La probabilidad de que no haya ninguna galleta rota es:

$$P(X = 0) = 0{,}99^{10} = 0{,}9044$$

b) La probabilidad que se pide es la de que la variable X tome un valor igual o superior a 1:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9044 = 0{,}0956$$

84. En un reconocimiento médico a los trabajadores de una empresa, la media de la presión arterial sistólica se situó en 122 mm de Hg con una varianza de 121 para los hombres y de 118 de media con una varianza de 100 para las mujeres. Si se supone que la presión arterial sistólica tiene distribución normal, y que valores por encima de 140 mm de Hg significa riesgo de hipertensión:

a) ¿Cuál es el porcentaje de hombres en riesgo de hipertensión? ¿Y el porcentaje de mujeres?

b) Si se eligen al azar un hombre y una mujer de esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que la tensión arterial sistólica de la mujer sea más alta?

c) Si las varianzas se mantienen en su actual valor, ¿cuál debería ser el valor medio de la presión arterial de cada colectivo, para que solo el 5 % esté en riesgo de hipertensión?

Se consideran las variables aleatorias con sus respectivas distribuciones de probabilidad:

X: "presión arterial sistólica, en mm de Hg, para los hombres", $X \sim N\left(\mu_X = 122,\ \sigma_X^2 = 121\right)$.

Y: "presión arterial sistólica, en mm de Hg, para las mujeres", $Y \sim N\left(\mu_Y = 118,\ \sigma_X^2 = 100\right)$.

a) Elegidos un hombre y una mujer al azar, se calculan las probabilidades respectivas de que un hombre y una mujer tengan la presión arterial sistólica por encima de 140 mm de Hg:

$$P(X > 140) = P\left(Z > \frac{140 - 122}{11}\right) = P(Z > 1{,}64) = 1 - \Phi(1{,}64) = 1 - 0{,}9495 = 0{,}0505$$

$$P(Y > 140) = P\left(Z > \frac{140 - 118}{10}\right) = P(Z > 2{,}2) = 1 - \Phi(2{,}2) = 1 - 0{,}9861 = 0{,}0139$$

Es decir, el 5,05 % de los hombres y el 1,39 % de las mujeres de la empresa están en riesgo de hipertensión.

b) Debe calcularse la probabilidad de que la variable X sea menor que la variable Y. La distribución de probabilidad de la variable $X - Y$ también es normal con la siguiente media y varianza:

$$\mu_{X-Y} = \mu_X - \mu_Y = 4 \qquad \sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 221$$

De esta forma:

$$P(X < Y) = P(X - Y < 0) = P\left(Z < \frac{0 - 4}{\sqrt{221}}\right) = P(Z < -0{,}27) = 1 - \Phi(0{,}27) = 1 - 0{,}6064 = 0{,}3936$$

c) En el caso de los hombres, para estar en riesgo de hipertensión la variable X debe tomar valores superiores a 140 mm HG. Es decir:

$$P(X > 140) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z > \frac{140-\mu_X}{11}\right) = 0{,}05 \Rightarrow 1-\Phi\left(\frac{140-\mu_X}{11}\right) = 0{,}05$$

De donde, utilizando la tabla de la distribución normal estándar, se obtiene que:

$$\Phi\left(\frac{140-\mu_X}{11}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{140-\mu_X}{11} = 1{,}645 \Rightarrow \mu_X = 121{,}905$$

En el caso de las mujeres, para estar en riesgo de hipertensión la variable Y debe tomar valores superiores a 140 mm HG. Es decir:

$$P(Y > 140) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z > \frac{140-\mu_Y}{10}\right) = 0{,}05 \Rightarrow 1-\Phi\left(\frac{140-\mu_Y}{10}\right) = 0{,}05$$

Y utilizando nuevamente la tabla de la distribución normal estándar:

$$\Phi\left(\frac{140-\mu_Y}{10}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{140-\mu_Y}{10} = 1{,}645 \Rightarrow \mu_Y = 123{,}55$$

Debe observarse que en el caso de los hombres, la tensión media requerida es prácticamente igual a la que se observó, ya que como se ha visto en el apartado a) el porcentaje de hombres en riesgo de hipertensión es de 5,05 %, muy parecido al que ahora se requiere.

Mientras que en el caso de las mujeres, la tensión sistólica que se requiere es superior a la que se observó, puesto que en ese caso tan solo el 1,39 % de las mujeres estaba en riesgo de hipertensión.

85. Una universidad pública recibe 800 solicitudes de acceso para uno de los grados en los que la oferta de plazas se reduce a 120. Sabiendo que la nota final de un solicitante después de las pruebas de acceso sigue una distribución normal de media 7,3 y desviación típica 0,7, calcula la nota mínima necesaria para obtener una de las 120 plazas ofertadas.

La variable X: "calificación final" tiene una distribución normal, $N(\mu = 7{,}3,\ \sigma = 0{,}7)$.

De las 800 solicitudes solo admitirán 120, lo que representa el 15 % de las solicitudes, es decir, para que un solicitante tenga acceso debe tener una calificación k tal que:

$$P(X > k) = 0{,}15 \Rightarrow P(X < k) = 0{,}85$$

Sea k la nota mínima necesaria para obtener una de las 120 plazas ofertadas. En consecuencia, el valor de k se obtiene de tipificar la expresión y utilizar la tabla de la distribución normal estándar:

$$P\left(Z < \frac{k-7{,}3}{0{,}7}\right) = 0{,}85 \Rightarrow \frac{k-7{,}3}{0{,}7} = 1{,}036 \Rightarrow k = 8{,}025$$

86. Se considera que la cotización en bolsa de la acción de una compañía sigue una distribución normal, aunque se desconocen sus parámetros. Se sabe que con probabilidad 0,03 la acción superará el valor de 120 € y que con probabilidad 0,3 no alcanzará los 105 €.

a) Calcula la media y la varianza de esta distribución.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento elegido al azar la cotización esté entre 110 y 115 €?

Sea la variable aleatoria X: "cotización en bolsa, en euros, de la acción de la compañía". La distribución de probabilidad de X es normal, $X \sim N(\mu, \sigma)$, con ambos parámetros desconocidos.

Con probabilidad 0,03 la acción superará los 120 €. Es decir:

$$P(X > 120) = 0{,}03 \Rightarrow P\left(Z > \frac{120-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}03 \Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{120-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}03 \Rightarrow \Phi\left(\frac{120-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}97$$

Y mediante la tabla de la normal estándar, se obtiene la ecuación: $\frac{120-\mu}{\sigma} = 1{,}88 \Rightarrow \mu + 1{,}88\sigma = 120$

Con probabilidad 0,3, la cotización de la acción no alcanzará los 105 €. Es decir:

$$P(X < 105) = 0{,}3 \Rightarrow P\left(Z < \frac{105-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}3 \Rightarrow \Phi\left(\frac{105-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}3$$

Y mediante la tabla de la normal estándar, se obtiene la ecuación: $\frac{105-\mu}{\sigma} = -0{,}525 \Rightarrow \mu - 0{,}525\sigma = 105.$

a) Resolviendo el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \mu + 1{,}88\sigma = 120 \\ \mu - 0{,}525\sigma = 105 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 108{,}27443 \simeq 108{,}27 \text{ €} \\ \sigma = 6{,}237 \simeq 6{,}24 \text{ €} \Rightarrow \sigma^2 = 38{,}94 \text{ €} \end{cases}$

b) La probabilidad de que la cotización esté entre 110 y 115 € es:

$$P(110 < X < 115) = P\left(\frac{110-108{,}27}{6{,}24} < Z < \frac{115-108{,}27}{6{,}24}\right) = P(0{,}28 < Z < 1{,}08) = \Phi(1{,}08) - \Phi(0{,}28) =$$
$$= 0{,}8599 - 0{,}6103 = 0{,}2496$$

87. Se sabe que el gasto mensual en gas y electricidad de las familias de una determinada región sigue una distribución normal de media 90 € y desviación típica 30 €. Se pide calcular las siguientes probabilidades expresando el resultado en porcentajes.

a) Probabilidad de que el gasto sea superior a 140 €.

b) Probabilidad de que el gasto esté comprendido entre 70 € y 100 €.

c) Probabilidad de que el gasto sea inferior a 60 €.

d) Sabiendo que la probabilidad de que el gasto sea superior a una determinada cantidad es del 5 %, ¿cuál es esa cantidad?

La variable aleatoria X: "gasto mensual, en euros, en gas y electricidad de las familias" tiene una distribución de probabilidad normal, $X \sim N(\mu = 90,\ \sigma = 30)$.

a) La probabilidad de que X tome un valor superior a 140 euros es:

$$P(X > 140) = P\left(Z > \frac{140-90}{30}\right) = P(Z > 1{,}67) = 1 - \Phi(1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$$

El 4,75 % de las familias de la región tiene un gasto mensual en gas y electricidad superior a 140 €.

b) En este caso:

$$P(70 < X < 100) = P\left(\frac{70-90}{30} < Z < \frac{100-90}{30}\right) = P(-0{,}67 < Z < 0{,}33) = \Phi(0{,}33) - (1 - \Phi(0{,}67)) =$$
$$= 0{,}6293 - 1 + 0{,}7486 = 0{,}3779$$

El 37,79 % de las familias de la región tiene un gasto en gas y electricidad entre 70 y 100 €.

c) La probabilidad de que le gasto sea menor de 60 € es:

$$P(X < 60) = P\left(Z < \frac{60-90}{30}\right) = P(Z < -1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

El 15,87 % de las familias de la región tiene un gasto en gas y electricidad inferior a 60 €.

d) Sea k dicha cantidad. Entonces:

$$P(X > k) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z > \frac{k-90}{30}\right) = 0{,}05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k-90}{30}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{k-90}{30} = 1{,}645 \Rightarrow k = 139{,}35 \text{ €}$$

88. En un centro educativo, a pesar de los controles rigurosos, un 12 % de los ordenadores resulta infectado por algún tipo de virus informático.

a) Si en un aula hay 10 ordenadores, calcula la probabilidad de que más de un ordenador tenga virus.

b) Si se quiere que la probabilidad de que haya, como máximo, dos ordenadores infectados sea al menos 0,7, ¿cuál tiene que ser el número máximo de ordenadores en el aula?

c) Si en todo el centro el número de ordenadores es 150, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos el 10 % de ellos tenga virus?

La probabilidad de que un ordenador elegido al azar esté infectado es $p = 0{,}12$. Sea la variable aleatoria X: "número de ordenadores con virus, de los 10 del aula" con $X \sim \text{Bin}(n = 10,\ p = 0{,}12)$.

a) La probabilidad de que más de un ordenador resulte infectado, se calcula por la del suceso contrario:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \binom{10}{0}0{,}88^{10} - \binom{10}{1}0{,}12 \cdot 0{,}88^{9} =$$

$$= 1 - 0{,}2785 - 0{,}3798 = 0{,}3417$$

b) En este caso, la distribución de la variable Y: "número de ordenadores infectados, de los n del aula" es:

$$Y \sim \text{Bin}(n,\ p = 0{,}12)$$

Se quiere que se cumpla la condición $0{,}7 \le P(Y \le 2)$. Debe calcularse el valor de n para que se cumpla dicha condición. Dado que:

$$P(Y \le 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = \binom{n}{0}0{,}88^{n} + \binom{n}{1}0{,}12 \cdot 0{,}88^{n-1} + \binom{n}{2}0{,}12^{2} \cdot 0{,}88^{n-2} =$$

$$= 0{,}88^{n} + n \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}0{,}12^{2} \cdot 0{,}88^{n-2}$$

Se trata de encontrar el valor más alto de n que hace que esta expresión supere el valor 0,7. En la siguiente tabla se puede ver que el valor más alto de n que verifica la condición impuesta es n = 16 ordenadores por aula. Así, la probabilidad de que como mucho haya dos ordenadores infectados resulta mayor que 0,7.

n	$P(Y = 0)$	$P(Y = 1)$	$P(Y = 2)$	$P(Y \le 2)$
14	0,1670	0,3188	0,2826	0,7685
15	0,1470	0,3006	0,2870	0,7346
16	0,1293	0,2822	0,2886	0,7001
17	0,1138	0,2638	0,2878	0,6655
18	0,1002	0,2458	0,2850	0,6310

c) Si el número de ordenadores en todo el centro es n = 150, la variable T: "número de ordenadores infectados, de los 150" tiene distribución de probabilidad binomial, $T \sim \text{Bin}(n = 150,\ p = 0{,}12)$.

T se puede aproximar por la de una variable aleatoria W con distribución normal:

$$W \sim N(\mu = 150 \cdot 0{,}12 = 18,\ \sigma^2 = 150 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88 = 15{,}84)$$

De esta forma, la probabilidad de que tengan virus al menos 15 ordenadores (10 % de 150) es:

$$P(T \ge 15) \simeq P(W \ge 14{,}5) = P\left(Z \ge \frac{14{,}5 - 18}{\sqrt{15{,}84}}\right) = P(Z \ge -0{,}88) = \Phi(0{,}88) = 0{,}8106$$

89. En una localidad hay dos salas de cine que tienen el mismo aforo de *m* localidades y compiten por una clientela de 500 personas. Se supone que cada cliente elige al azar y de forma independiente el cine al que acudirá en cada ocasión.

a) Encuentra una expresión para *m*, mediante una distribución binomial, tal que la probabilidad de que un cliente no tenga entrada para el cine que eligió, sea menor que 0,05.

b) Halla el valor de *m*, por medio de la aproximación normal a la binomial.

Se considera la variable aleatoria *X*: "número de clientes, de los 500, que elige el cine *A* (o *B*)". La distribución de la variable *X* es binomial $X \sim \text{Bin}\left(n = 500,\ p = \frac{1}{2}\right)$.

a) Si un cliente elige el cine *A* (o *B*) y no encuentra entrada, se debe a que el número de clientes que eligió ese cine supera el aforo, *m*. Se calcula entonces la probabilidad de que la variable *X* supere el valor *m*:

$$P(X > m) = 1 - P(X \le m) = 1 - \sum_{k=0}^{m} P(X = k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{m} \binom{500}{k}$$

Dicha probabilidad debe ser menor que 0,05: $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{m} \binom{500}{k} < 0{,}05 \Rightarrow 0{,}95 < \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{m} \binom{500}{k}$.

b) La distribución de la variable *X* se puede aproximar por la de una variable *Y* con distribución normal de media y varianza respectivas:

$$\mu = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250 \qquad \sigma^2 = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 125$$

De forma que la probabilidad de que *X* supere el valor *m* se puede aproximar:

$$P(X > m) \simeq P(Y \ge m + 0{,}5) = P\left(Z \ge \frac{m + 0{,}5 - 250}{\sqrt{125}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{m - 245{,}5}{\sqrt{125}}\right)$$

Probabilidad que debe ser menor que 0,05: $1 - \Phi\left(\frac{m - 245{,}5}{\sqrt{125}}\right) < 0{,}05 \Rightarrow 0{,}95 < \Phi\left(\frac{m - 245{,}5}{\sqrt{125}}\right)$.

Que mediante el uso de la tabla de la normal estándar, permite obtener un valor para *m*:

$$1{,}645 < \frac{m - 245{,}5}{\sqrt{125}} \Rightarrow 263{,}9 < m$$

Es decir, el valor de *m* para asegurar la probabilidad pedida debe ser de al menos 264 localidades.

90. Una empresa fabrica minas de grafito para portaminas cuya longitud sigue una distribución $N(\mu = 30,\ \sigma = 5)$ en milímetros. Solo se aceptan las minas si su longitud está comprendida entre 29 y 31 mm. Si un control de calidad selecciona al azar 1000 minas, calcula la probabilidad de que sean aceptadas más de 950 minas.

Se tiene que *X*: "longitud, en mm, de las minas de grafito" tiene una distribución normal, $X \sim N(\mu = 30,\ \sigma = 0{,}5)$.

La probabilidad de que una mina elegida al azar sea aceptada es:

$$P(29 \le X \le 31) = P\left(\frac{29 - 30}{0{,}5} \le Z \le \frac{31 - 30}{0{,}5}\right) = P(-2 \le Z \le 2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$$

En el proceso de calidad se seleccionan al azar 1000 minas. La variable aleatoria *Y*: "número de minas aceptadas, de las 1000" tiene una distribución binomial, $Y \sim \text{Bin}(n = 1000,\ p = 0{,}9544)$, que puede aproximarse por la de una variable aleatoria *T* con distribución normal, de media y varianza respectivas:

$$\mu_T = 1000 \cdot 0{,}9544 = 954{,}4 \qquad \sigma_T^2 = 1000 \cdot 0{,}9544 \cdot (1 - 0{,}9544) = 43{,}521$$

La probabilidad de que sean aceptadas más de 950 minas es:

$$P(Y > 950) \simeq P(T \ge 950{,}5) = P\left(Z \ge \frac{950{,}5 - 954{,}4}{\sqrt{43{,}521}}\right) = P(Z \ge -0{,}59) = \Phi(0{,}59) = 0{,}7224$$

91. La cantidad de café depositada en cada bolsa por una máquina envasadora sigue una distribución normal con media $\mu = 1040$ gramos y desviación típica $\sigma = 50$ gramos.

a) Calcula el tanto por ciento de paquetes que contienen más de un kilo.

b) Calcula α sabiendo que el 97,5 % de los paquetes contienen menos de α gramos.

c) Calcula el tanto por ciento de paquetes cuyo contenido tiene un peso comprendido entre 950 y 1050 gramos.

Sea la variable aleatoria *X*: “cantidad de café, en gramos, depositada en cada bolsa”. Se tiene que:

$$X \sim N(\mu = 1040,\ \sigma = 50)$$

a) La probabilidad de que un paquete contenga más de un kilo (1000 gramos) es:

$$P(X > 1000) = P\left(Z > \frac{1000-1040}{50}\right) = P(Z > -0{,}8) = 1 - \Phi(0{,}8) = 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119$$

Por tanto, el 21,19 % de los paquetes contienen más de un kilo.

b) Lo que se plantea en el enunciado es encontrar un α tal que $P(X < \alpha) = 0{,}975$. Es decir:

$$P(X < \alpha) = P\left(Z < \frac{\alpha - 1040}{50}\right) = \Phi\left(\frac{\alpha - 1040}{50}\right) = 0{,}975$$

Mediante el uso de la tabla de la normal estándar, se obtiene un valor para α:

$$\Phi\left(\frac{\alpha - 1040}{50}\right) = 0{,}975 \Rightarrow \frac{\alpha - 1040}{50} = 1{,}96 \Rightarrow \alpha = 1138 \text{ gramos}$$

c) La probabilidad de que el contenido de un paquete esté entre 950 y 1050 gramos es:

$$P(950 \le X \le 1050) = P\left(\frac{950-1040}{50} \le Z \le \frac{1050-1040}{50}\right) = P(-1{,}8 \le Z \le 0{,}2) = \Phi(0{,}2) - (1 - \Phi(1{,}8)) =$$
$$= 0{,}5793 - 1 + 0{,}9641 = 0{,}5434$$

Por tanto, el 54,34 % tendrá un peso comprendido entre 950 y 1050 gramos.

AUTOEVALUACIÓN

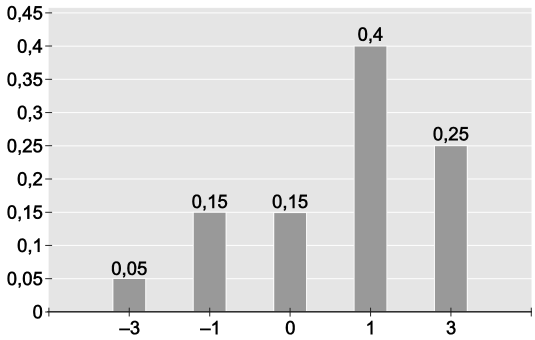
Comprueba qué has aprendido

1. Sea la variable aleatoria *X*, que toma los valores −3, −1, 0, 1 y 3 con probabilidades respectivas 0,05; 0,15; 0,15; 0,4 y 0,25.

a) Representa gráficamente la distribución de probabilidad.

b) Calcula la esperanza y la varianza de *X*.

a) La distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X* se puede representar mediante un diagrama de barras:



b)

x_j	p_j	$x_j p_j$	$x_j^2 p_j$
−3	0,05	−0,15	0,45
−1	0,15	−0,15	0,15
0	0,15	0	0
1	0,4	0,4	0,4
3	0,25	0,75	2,25
	1	0,85	3,25

$E[X] = \sum_{j=1}^{4} x_j p_j = 0{,}85.$

Para calcular la varianza se calcula en primer lugar: $E\left[X^2\right] = \sum_{j=1}^{4} x_j^2 p_j = 3{,}25$

Y la varianza es: $\text{Var}(X) = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2 = 3{,}25 - 0{,}85^2 = 2{,}5275$

2. De una baraja de 40 cartas se extraen 9 cartas una a una con reemplazamiento. Sea la variable aleatoria *X*: "número de ases extraídos".

a) Distribución de probabilidad de *X*.

b) Probabilidad de que *X* sea mayor 2.

c) Esperanza y varianza de *X*.

a) Al ser con reemplazamiento, las extracciones son independientes. Además, la probabilidad de obtener un "as" en cada una de las extracciones es $p = 0{,}1$. Entonces, la variable aleatoria *X*: "número de ases extraídos, en los 9 intentos" tiene distribución de probabilidad binomial, $\text{Bin}(n = 9,\ p = 0{,}1)$, que se puede escribir en una tabla (las probabilidades han sido obtenidos de la tabla de la distribución binomial):

x_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_j	0,3874	0,3874	0,1722	0,0446	0,0074	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000

b) La probabilidad de que *X* sea mayor que 2, se obtiene de la tabla anterior:

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) =$$
$$= 0{,}0446 + 0{,}0074 + 0{,}0008 + 0{,}0001 + 0{,}0000 + 0{,}0000 + 0{,}0000 = 0{,}0529$$

c) La esperanza y la varianza de *X* se pueden obtener a partir de la tabla o utilizando el hecho de que se trata de una variable con distribución binomial:

$$E[X] = np = 9 \cdot 0{,}1 = 0{,}9 \qquad \text{Var}(X) = npq = 9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$$

3. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-2x}{k} & \text{si } 0\le x\le 5\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) Calcula el valor de k y dibuja la gráfica de $f(x)$.

b) Calcula $P(X\ge 3)$.

c) Halla la esperanza y la varianza de X.

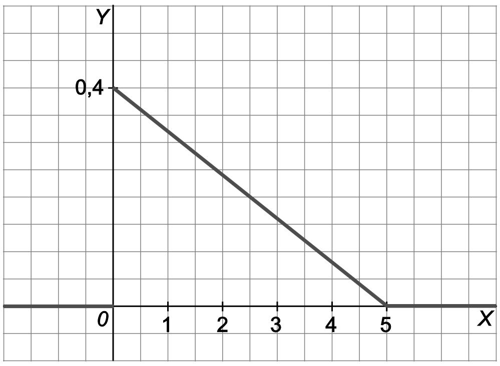
a) El valor de k debe ser tal que la función $f(x)$ sea no negativa en el intervalo [0, 5] y que el área limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 5$ sea la unidad. De modo que:

$$1=\int_0^5\frac{1}{k}(10-2x)\,dx=\frac{1}{k}\left[10x-x^2\right]_0^5=\frac{1}{k}(50-25)=\frac{25}{k}\Rightarrow k=25$$

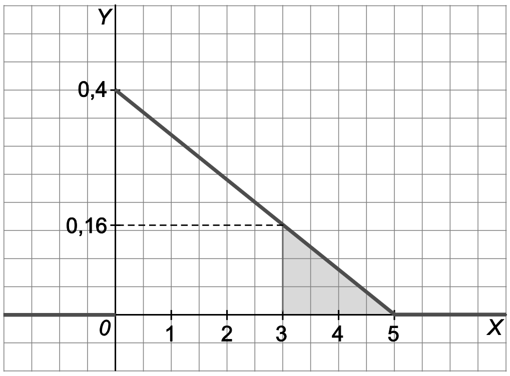
Por tanto, la función de densidad de la variable X es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-2x}{25} & \text{si } 0\le x\le 5\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Y su gráfica:



b) La probabilidad de $P(X\ge 3)$ puede obtener mediante la integral de la función de densidad o como el área del triángulo coloreado en la figura:



De esta manera: $P(X\ge 3)=\dfrac{2\cdot\frac{4}{25}}{2}=\dfrac{4}{25}=0{,}16$

c) $E[X]=\displaystyle\int_0^5\frac{10-2x}{25}\cdot x\,dx=\frac{1}{25}\int_0^5 10x-2x^2\,dx=\frac{1}{25}\left[5x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^5=\frac{1}{25}\left(125-\frac{250}{3}\right)=\frac{5}{3}$

Para la varianza se calcula en primer lugar $E\left[X^2\right]$:

$$E\left[X^2\right]=\int_0^5\frac{10-2x}{25}\cdot x^2\,dx=\frac{1}{25}\int_0^5 10x^2-2x^3\,dx=\frac{1}{25}\left[\frac{10x^3}{3}-\frac{x^4}{2}\right]_0^5=\frac{1}{25}\left(\frac{1250}{3}-\frac{625}{2}\right)=\frac{25}{6}$$

Por tanto, la varianza de X es: $\mathrm{Var}(X)=E\left[X^2\right]-\left(E[X]\right)^2=\dfrac{25}{6}-\left(\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{25}{18}$

4. **En una empresa cooperativa, los salarios mensuales netos siguen una distribución normal de media 1500 € y desviación típica 500 €. Calcula el porcentaje de trabajadores de esa empresa con salario:**

a) Inferior a 800 €.

b) Entre 1200 y 1800 €.

c) Del 10 % de los empleados con mejores sueldos, ¿cuál es el salario más bajo?

La variable aleatoria *X*: "salario mensual neto, en euros, de los empleados de la empresa" tiene distribución normal, $X \sim N(\mu = 1500,\ \sigma = 500)$.

a) La probabilidad de que un trabajador elegido al azar tenga un sueldo mensual neto inferior a 800 € es:

$$P(X < 800) = P\left(Z < \frac{800-1500}{500}\right) = P(Z < -1{,}4) = 1 - \Phi(1{,}4) = 1 - 0{,}9192 = 0{,}0808$$

El 8,08 % de los trabajadores de esta empresa tiene un salario neto mensual inferior a 800 €.

b) En este caso, elegido aleatoriamente un trabajador:

$$P(1200 < X < 1800) = P\left(\frac{1200-1500}{500} < Z < \frac{1800-1500}{500}\right) = P(-0{,}6 < Z < 0{,}6) = 2\Phi(0{,}6) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}7257 - 1 = 0{,}4514$$

El 45,14 % de los trabajadores tiene un salario neto mensual entre 1200 y 1800 €.

c) Sea *k* el salario más bajo del 10 % de la plantilla que más cobra. Esto es:

$$P(X > k) = 0{,}1 \Rightarrow P(X < k) = 0{,}9$$

Tipificando y utilizando la tabla de la distribución normal estándar:

$$P\left(Z < \frac{k-1500}{500}\right) = 0{,}9 \Rightarrow \frac{k-1500}{500} = 1{,}28 \Rightarrow k = 2140$$

Por tanto, del 10 % de los empleados con mejor sueldo, 2140 € es el sueldo más bajo.

5. **En una población, el 10 % de los bebés pesa más de 4 kg al nacer. Si de la población se eligen aleatoriamente 80 bebés, calcula la probabilidad de que:**

a) Al menos 10 pesen más de 4 kilos al nacer.

b) Más de 7 y como mucho 12, pesen más de 4 kilos al nacer.

La probabilidad de que un bebé elegido al azar pese más de 4 kg al nacer es $p = 0{,}1$. Si se eligen 80 bebés, sea la variable aleatoria *X*: "número de bebés, entre los 80, que pesan más de 4 kg al nacer". La distribución de probabilidad de *X* es binomial, $\text{Bin}(n = 80,\ p = 0{,}1)$. Para calcular las probabilidades siguientes, se puede aproximar la distribución de *X* por la de una variable aleatoria *Y* con distribución normal, de media y varianza respectivas:

$$\mu = 80 \cdot 0{,}1 = 8 \qquad \sigma^2 = 80 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 7{,}2$$

a) La probabilidad de que la variable *X* tome el valor 10 o superior es:

$$P(X \geq 10) \simeq P(Y \geq 9{,}5) = P\left(Z \geq \frac{9{,}5-8}{\sqrt{7{,}2}}\right) = P(Z \geq 0{,}56) = 1 - \Phi(0{,}56) = 1 - 0{,}7123 = 0{,}2877$$

b) En este caso, se debe calcular la siguiente probabilidad:

$$P(7 < X \leq 12) \simeq P(7{,}5 < Y < 12{,}5) = P\left(\frac{7{,}5-8}{\sqrt{7{,}2}} < Z \leq \frac{12{,}5-8}{\sqrt{7{,}2}}\right) = P(-0{,}19 < Z \leq 1{,}68) = \Phi(1{,}68) - (1 - \Phi(0{,}19)) =$$
$$= 0{,}9535 - 1 + 0{,}5753 = 0{,}5288$$

6. El proceso de producción de botellas de plástico de medio litro para envasar agua se ha ajustado a una media de 0,5 L. Una botella no es aceptable si su capacidad es inferior a 0,48 L o superior a 0,52 L. Suponiendo normalidad, ¿cuál debe ser la varianza del proceso para que como máximo se rechacen el 2 % de las botellas?

La variable aleatoria X: "contenido de agua, en litros, de la botella de medio litro" tiene distribución de probabilidad normal, $X \sim N\left(\mu = 0{,}5,\ \sigma^2\right)$. La varianza del proceso de embotellado debe establecerse para que el 98 % de las botellas sean admisibles, es decir, $P\left(0{,}48 \le X \le 0{,}52\right) = 0{,}98$. Tipificando la expresión, se obtiene:

$$P\left(\frac{0{,}48-0{,}5}{\sigma} \le Z \le \frac{0{,}52-0{,}5}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-0{,}02}{\sigma} \le Z \le \frac{0{,}02}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}02}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}98 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0{,}02}{\sigma}\right) = 0{,}99$$

Utilizando la tabla de la distribución de probabilidad de la normal estándar, se tiene que:

$$\frac{0{,}02}{\sigma} = 2{,}33 \Rightarrow \sigma = 0{,}0086 \text{ L} \Rightarrow \sigma^2 = 0{,}000074 \text{ L}$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. *La variable aleatoria *X* toma los valores 0, −2, 4, *m* y 6 con probabilidades respectivas 0,1; 0,3; 0,1; *p*; 0,3. Se sabe que la esperanza de *X* es 2,2. El valor de *m* y su probabilidad *p* son:

A. $m = 2 \quad p = 0{,}4$

B. $m = 3 \quad p = 0{,}3$

C. $m = 3 \quad p = 0{,}2$

D. $m = 2 \quad p = 0{,}2$

La solución es C. Si se aplica la definición de esperanza teniendo en cuenta que ésta vale 2,2, queda:

$$E\left[X\right] = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + mp + 6 \cdot 0{,}3 = 1{,}6 + mp = 2{,}2 \Rightarrow mp = 0{,}6$$

Por tanto, los valores de *m* y *p* que cumplen que *mp* = 0,6 son los de la opción C.

2. Si *X* es una variable aleatoria con distribución de probabilidad $\text{Bin}(n,\ p)$, su varianza es máxima cuando:

A. $p = 0{,}1$

B. $p = 0{,}5$

C. $p = 0{,}4$

D. $p = 0{,}25$

La solución es B. La varianza de una variable aleatoria cuya distribución es binomial viene dada por la expresión:

$$\text{Var}\left(X\right) = np\left(1-p\right) = n\left(p - p^2\right)$$

Independientemente del *n* dado, para ver cuando la varianza es máxima hay que derivar la siguiente expresión e igualar a cero para obtener el máximo de la función:

$$\left(p - p^2\right)' = 1 - 2p = 0 \Rightarrow p = 0{,}5$$

Si se vuelve a derivar se comprueba que *p* = 0,5 es máximo como se pretendía ver:

$$\left(p - p^2\right)'' = \left(1 - 2p\right)' = -2 < 0 \Rightarrow p = 0{,}5 \text{ proporciona el valor máximo para } \text{Var}\left(X\right).$$

3. **Si se sabe que la distribución $N(\mu = 100,\ \sigma = 7)$ aproxima la distribución binomial $\text{Bin}(n,\ p)$ los valores de n y p son:**

A. $n = 200 \quad p = 0,49$

B. $n = 196 \quad p = 0,51$

C. $n = 196 \quad q = 0,51$

D. $n = 200 \quad q = 0,49$

La solución es B. Si se aproxima la distribución de una binomial por la de una variable aleatoria con distribución normal, su media y varianza son, respectivamente:

$$\mu = np \qquad \sigma = +\sqrt{npq}$$

Los valores que cumplen las condiciones del enunciado son los de la opción B. Se puede comprobar que:

$$\mu = E[X] = np = 196 \cdot 0,51 = 99,96 \simeq 100 \qquad \sigma = +\sqrt{\text{Var}(X)} = +\sqrt{196 \cdot 0,51 \cdot 0,49} = 6,99 \simeq 7$$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Sea $X \sim N(\mu = 100,\ \sigma^2 = 25)$. La variable X aproxima una variable $\text{Bin}(n,\ p)$, tal que:**

A. n es mayor que 130.

B. $p = q$

C. La probabilidad de que ocurra el suceso A es el triple de que no ocurra.

D. n es inferior a 100.

Las soluciones son A y C. Si X es una variable aleatoria con distribución binomial, $\text{Bin}(n,\ p)$, y se aproxima a la de una variable aleatoria con distribución normal, su media y varianza son, respectivamente:

$$\mu = np \qquad \sigma^2 = npq$$

Con los datos del enunciado se obtiene que:

$$\begin{cases} \mu = np \Rightarrow 100 = np \\ \sigma^2 = npq \Rightarrow 25 = npq \end{cases} \Rightarrow 25 = 100q \Rightarrow q = 0,25 \Rightarrow p = 0,75$$

Además, ahora se puede despejar n: $100 = n \cdot 0,75 \Rightarrow n = \dfrac{100}{0,75} = 133,33.$

Con lo cual se concluye que n es mayor que 130 y que la probabilidad de que ocurra el suceso A (p = 0,75) es el triple de que no ocurra (q = 0,25).

5. **Sea X es una variable aleatoria con distribución normal $X \sim N(\mu,\ \sigma)$. Entonces, la variable $Y = X + k$, $k \neq 0$, también sigue una distribución normal:**

A. Igual que la de X.

B. De media $k\mu$.

C. De media $k + \mu$.

D. De varianza σ^2.

Las soluciones son C y D.

Si X e Y son variables aleatorias y a, b y k son constantes cualquiera, se tienen las siguientes propiedades respecto a la esperanza y la varianza:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] \qquad E[kX] = kE[X]$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$$

Dado que $X \sim N(\mu,\ \sigma)$, la media o esperanza de Y es:

$$\mu_Y = E[Y] = E[X + k] = E[X] + E[k] = \mu + k = k + \mu$$

Y, por otro lado, la varianza de Y es:

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X + k) = \text{Var}(X) = \sigma^2$$

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sean $X \sim \text{Bin}(n,\ p)$ e $Y \sim N(\mu,\ \sigma)$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. La distribución de *Y* aproxima la de *X*. **2.** $\sigma^2 < \mu$.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$

C. $2 \Rightarrow 1$

D. 1 y 2 son independientes una de otra.

La solución es B. Si *X* es una variable aleatoria con distribución binomial, $\text{Bin}(n,\ p)$, y se aproxima a la de una variable aleatoria *Y* con distribución normal, su media y varianza respectivas son:

$$\mu = np \qquad \sigma^2 = npq$$

Como $0 < q < 1 \Rightarrow npq < np \Rightarrow \sigma^2 < \mu$. Luego la relación correcta es la de la opción B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Si *X* es una variable aleatoria con distribución $N(0,\ \sigma)$. Para calcular la probabilidad $P(-k\sigma < X < k\sigma)$ es necesario conocer:

A. k

B. σ

C. k y σ

D. No hace falta conocer ningún dato.

La solución es B. Si se tipifica la variable se tiene que:

$$P(-k\sigma < X < k\sigma) = P\left(\frac{-k\sigma-\mu}{\sigma} < Z < \frac{k\sigma-\mu}{\sigma}\right) = P\left(-k-\frac{\mu}{\sigma} < Z < k-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

Como $\mu = 0$, queda: $P(-k\sigma < X < k\sigma) = P\left(-k-\frac{0}{\sigma} < Z < k-\frac{0}{\sigma}\right) = P(-k < Z < k)$.

Por tanto, solo se necesita el valor de *k* para hallar dicha probabilidad siendo el valor de σ innecesario.