2 Determinantes

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Calcula el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} -a & 2 \\ a^2 & 3a \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ a+1 & -1 & a \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1) - 3\cdot 6 = -4 - 18 = -22$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} = -20 + 14 = -6$

c) $\begin{vmatrix} -a & 2 \\ a^2 & 3a \end{vmatrix} = -a\cdot 3a - 2\cdot a^2 = -3a^2 - 2a^2 = -5a^2$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 1 - (-2)\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 4 = 1 - 24 + 0 + 2 + 3 + 0 = -18$

e) $\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 1 + 16 + 4 + 12 + 2 = 39$

f) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ a+1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 + a - (a+1) - a^2(a+1) - a + a = -a^2 - 1$

4. **Comprueba que se obtiene el mismo valor al desarrollar el determinante** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ **por los elementos de la tercera fila y al desarrollarlo por los de la cuarta columna.**

Desarrollando por la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2A_{31} - A_{32} + A_{33} + A_{34} = 2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} - (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-16) + 1 - 14 - 4 = -49$$

Desarrollando por la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0A_{41} + 2A_{42} + A_{43} + 3A_{44} = 2(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 9 - 4 + 3\cdot(-21) = -49$$

5. **Calcula el valor del determinante** $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -7 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **desarrollándolo por los elementos de la línea que creas más conveniente.**

Desarrollamos por la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -7 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3A_{31} - 3A_{33} = 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 75 - 3\cdot(-202) = 831$$

6. **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ x+1 & 2x \end{vmatrix} = 11$

c) $\begin{vmatrix} -x & 2 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 13$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & x-2 \\ x & x-1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow 3x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ x+1 & 2x \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 11 \Rightarrow 2x^2 + x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -\dfrac{5}{2}$

c) $\begin{vmatrix} -x & 2 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 13 \Rightarrow x^2 + 2 + 2 = 13 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3,\ x = 3$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & x-2 \\ x & x-1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow -2(x-1) + 2 + x(x-2) - (x-2)(x-1) + 1 - 4x = -7 \Rightarrow -5x + 3 = -7 \Rightarrow x = 2$

7. Ejercicio resuelto.

8. Justifica, sin desarrollar, las siguientes igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} q & s \\ p & r \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, ya que los elementos de la tercera fila son nulos.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_1 \to F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_3=2F_1}{=} 0$

c) $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} -\begin{vmatrix} q & p \\ s & r \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=} -\begin{vmatrix} q & s \\ p & r \end{vmatrix}$

9. Comprueba, sin desarrollar, la siguiente igualdad.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a+b-c} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{d+e-f} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{p+q-r} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{t} & \boldsymbol{s+t-u} & \boldsymbol{u} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

El determinante es nulo, ya que $C_3 = C_1 + C_2 - C_4$.

10 a 12. Ejercicios resueltos.

13. Reduce los siguientes determinantes de orden tres a un determinante de orden 2.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & -12 \\ 0 & 11 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - 5F_2}}{=} \begin{vmatrix} -7 & 0 & 11 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 11 \\ -6 & 9 \end{vmatrix}$

14. Reduce el siguiente determinante de orden 4 a un determinante de orden 3 y, posteriormente, a un determinante de orden 2.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{-5} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & -5 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - 2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & 1 \\ -7 & 6 & -11 \end{vmatrix} \underset{C_2 \to C_2 - 4C_3}{=} \begin{vmatrix} -5 & 32 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & 50 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & 32 \\ -7 & 50 \end{vmatrix}$$

15. Calcula el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{F_2 \to F_2 - F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -42$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \\ F_4 \to F_4 - 2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -4 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 24$

c) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1 \to F_1 - 3F_3 \\ F_2 \to F_2 - 3F_3 \\ F_4 \to F_4 - 6F_3}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -17 & -10 \\ -1 & 0 & -12 & -14 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -17 & 0 & -27 & -26 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -17 & -10 \\ -1 & -12 & -14 \\ -17 & -27 & -26 \end{vmatrix} = 1702$

16. Calcula el valor de k para que se cumpla: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & k \end{vmatrix} = 11$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & k \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - 4F_2 \\ F_4 \to F_4 - F_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & k-3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -11 \\ 0 & -1 & k-3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -11 & -11 \\ -1 & k-3 \end{vmatrix} = 11k - 22$

Por tanto, tenemos $11k - 22 = 11 \Rightarrow k = 3$.

17. Halla el valor de los siguientes determinantes haciendo previamente ceros.

a) $\begin{vmatrix} x+5 & x+8 & x+11 \\ x+6 & x+9 & x+12 \\ x+7 & x+10 & x+13 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & b & a^2 \\ b & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x+5 & x+8 & x+11 \\ x+6 & x+9 & x+12 \\ x+7 & x+10 & x+13 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} x+5 & x+8 & x+11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{=} \begin{vmatrix} x+5 & x+8 & x+11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & b & a^2 \\ b & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix} \underset{C_3 \to C_3 - aC_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & b & a^2 - ab \\ b & a^2 & 0 \\ a^2 & a^3 & 0 \end{vmatrix} = \left(a^2 - ab\right)\begin{vmatrix} b & a^2 \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} \underset{C_2 \to C_2 - aC_1}{=} \left(a^2 - ab\right)\begin{vmatrix} b & a^2 - ab \\ a^2 & 0 \end{vmatrix} = -a^2\left(a^2 - ab\right)^2 =$

$= -a^2\left[a\left(a-b\right)\right]^2 = -a^4\left(a-b\right)^2$

18. **Transforma los siguientes determinantes en sus equivalentes triangulares y calcula su valor.**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} x & x & x \\ x+y & x & x \\ x & x+z & x \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} x & x & x \\ x+y & x & x \\ x & x+z & x \end{vmatrix} \underset{\text{Transponiendo}}{=} \begin{vmatrix} x & x+y & x \\ x & x & x+z \\ x & x & x \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} x & x+y & x \\ 0 & -y & z \\ 0 & -y & 0 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_2}{=} \begin{vmatrix} x & x+y & x \\ 0 & -y & z \\ 0 & 0 & -z \end{vmatrix} = xyz$

19. **Ejercicio interactivo.**

20 y 21. **Ejercicios resueltos.**

22. **Calcula el rango de las siguientes matrices.**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-6} & \mathbf{-4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$|A| = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$

$F_2 = -2F_1 \Rightarrow \text{rg}(B) = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $\text{rg}(B) = 2$.

23. **Estudia el rango de la matriz según los diferentes valores del parámetro λ.**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda+1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda+2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$|A| = (\lambda+1)(\lambda+2) - (\lambda+1) = (\lambda+1)^2$, por tanto, el único menor de orden 3 se anula si $\lambda = -1$.

Así, si $\lambda \neq -1$ tenemos $\text{rg}(A) = 3$ y si $\lambda = -1$ tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$.

24 y 25. **Ejercicios resueltos.**

26. Calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

Inversa de A: $|A|=-1\neq 0\Rightarrow A$ es invertible, $\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ y $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Inversa de B: $|B|=4\neq 0\Rightarrow B$ es invertible, $\text{Adj}(B)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B^{-1}=\frac{1}{|B|}(\text{Adj}(B))^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

Inversa de C: $|C|=\frac{1}{2}\neq 0\Rightarrow C$ es invertible, $\text{Adj}(C)=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 2 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ y $C^{-1}=\frac{1}{|C|}(\text{Adj}(C))^t=\frac{1}{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

27. Calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Inversa de A: $|A|=1\neq 0\Rightarrow A$ es invertible, $\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}7 & -5 & -2\\ -6 & 5 & 2\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}$ y $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}7 & -6 & 4\\ -5 & 5 & -3\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$

Inversa de B: $|B|=-3\neq 0\Rightarrow B$ es invertible, $\text{Adj}(B)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -3\\ 0 & -3 & -3\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}(\text{Adj(B)})^t=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & -3 & -1\\ -3 & -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

28. Calcula los valores de *a* para los cuales la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & a\\ a-1 & -1\end{pmatrix}$ posee inversa y halla dicha matriz inversa para $\boldsymbol{a=-2}$.

La matriz A tiene inversa si $|A|\neq 0$:

$$|A|=0\Rightarrow 2-a(a-1)=0\Rightarrow -a^2+a+2=0\Rightarrow a=-1, a=2$$

Por tanto, si $a\neq -1$ y $a\neq 2$, la matriz A tiene inversa.

Para $a=-2$ tenemos $A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ y $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

29. Halla los valores de *k* para los cuales no posee inversa la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & k & 2\\ k-1 & 1 & 1\\ k-2 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

La matriz A tiene inversa si $|A|\neq 0$:

$$|A|=0\Rightarrow -1+k(k-2)-4(k-1)-2(k-2)+2+k(k-1)=0\Rightarrow 2k^2-9k+9=0\Rightarrow k=3, k=\frac{3}{2}$$

Por tanto, la matriz A no tiene inversa si $k=3$ o $k=\frac{3}{2}$.

30 y 31. Ejercicios resueltos.

32. Suponiendo que, en cada caso, todas las matrices que aparecen son cuadradas del mismo orden y que las matrices *A* y *B* poseen inversa, despeja la matriz *X* en las siguientes expresiones.

a) $XA = AB$ **c)** $XA + AB = C$ **e)** $AXB = A^2$ **g)** $XAB + AB = BA$

b) $AX = AB$ **d)** $AXA = B$ **f)** $XA^t + B^t = (AB)^t$ **h)** $AXB + AB = BA$

a) $XA = AB \Rightarrow X = ABA^{-1}$

b) $AX = AB \Rightarrow X = A^{-1}AB = B$

c) $XA + AB = C \Rightarrow XA = C - AB \Rightarrow X = (C - AB)A^{-1}$

d) $AXA = B \Rightarrow X = A^{-1}BA^{-1}$

e) $AXB = A^2 \Rightarrow X = A^{-1}A^2B^{-1} = AB^{-1}$

f) $XA^t + B^t = (AB)^t \Rightarrow XA^t = (AB)^t - B^t \Rightarrow X = \left[(AB)^t - B^t\right](A^t)^{-1}$

g) $XAB + AB = BA \Rightarrow XAB = (BA - AB) \Rightarrow X = (BA - AB)B^{-1}A^{-1}$

h) $AXB + AB = BA \Rightarrow AXB = BA - AB \Rightarrow X = A^{-1}(BA - AB)B^{-1}$

33. Halla todas las matrices *X* tales que $X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}X$.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ c-d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ b = 0 \\ c = a + d \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = d \end{cases}$$

Por tanto, las matrices buscadas son de la forma $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix}$ para algún $c \in \mathbb{R}$.

34. Calcula la matriz *X* tal que $XA - 3B = 4C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Si A tiene inversa tendremos $XA - 3B = 4C \Rightarrow XA = 4C + 3B \Rightarrow X = (4C + 3B)A^{-1}$.

Como $|A| = -7 \neq 0$, existe $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$, por tanto:

$$X = (4C + 3B)A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 15 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{27}{7} & -\frac{5}{7} \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

35. Ejercicio interactivo.

36 a 47. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Determinantes de orden 2 y 3

48. Calcula el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 2^3 & 2^{-2} \\ 2^4 & 2^{-4} \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^4 & a^5 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ **c)** $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = 25$ **e)** $\begin{vmatrix} 2^3 & 2^{-2} \\ 2^4 & 2^{-4} \end{vmatrix} = 2^{-1} - 2^2 = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -25$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 18$ **f)** $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^4 & a^5 \end{vmatrix} = a^6 - a^6 = 0$

49. Calcula el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & -5 & 9 \\ 10 & -10 & 19 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 1 \\ a & 1 & a+b \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 0 & \log 2 & \log 4 \\ \log 2 & \log 4 & \log 8 \\ \log 4 & \log 8 & \log 16 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -45 - 96 - 84 + 105 + 48 + 72 = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 42 - 6 - 4 - 90 = -58$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & -5 & 9 \\ 10 & -10 & 19 \end{vmatrix} = 95 - 240 + 450 + 400 - 90 - 285 = 330$

e) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 9 - 16 - 24 + 10 = -21$

f) $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 1 \\ a & 1 & a+b \end{vmatrix} = ab(a+b) - a^2b - a = ab^2 - a$

g) $\begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = 8 + a^3 + a^3 - 2a^2 - 2a^2 - 2a^2 = 2a^3 - 6a^2 + 8$

h) $\begin{vmatrix} 0 & \log 2 & \log 4 \\ \log 2 & \log 4 & \log 8 \\ \log 4 & \log 8 & \log 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \log 2 & \log 2^2 \\ \log 2 & \log 2^2 & \log 2^3 \\ \log 2^2 & \log 2^3 & \log 2^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \log 2 & 2\log 2 \\ \log 2 & 2\log 2 & 3\log 2 \\ 2\log 2 & 3\log 2 & 4\log 2 \end{vmatrix} = 6\log^3 2 + 6\log^3 2 - 8\log^3 2 - 4\log^3 2 = 0$

50. Calcula el valor de las expresiones siguientes.

a) $3\begin{vmatrix}5 & 8\\4 & -2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5 & 8\\3 & -2\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}5 & 5\\3 & 4\end{vmatrix}$

b) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0\\2 & 3 & -1\\1 & 1 & -2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\2 & 2 & -3\\3 & 4 & -5\end{vmatrix}$

a) $3\begin{vmatrix}5 & 8\\4 & -2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5 & 8\\3 & -2\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}5 & 5\\3 & 4\end{vmatrix}=3\cdot(-42)-4\cdot(-34)+5\cdot 5=35$

b) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0\\2 & 3 & -1\\1 & 1 & -2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\2 & 2 & -3\\3 & 4 & -5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 13-3\cdot 3=-\frac{5}{2}$

51. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{vmatrix}-1 & 3\\x & 2\end{vmatrix}=0$ **b)** $\begin{vmatrix}1 & 3\\4 & 4-x\end{vmatrix}=2$ **c)** $\begin{vmatrix}x & -3\\2x & -8x\end{vmatrix}=-20$ **d)** $\begin{vmatrix}2-x & 3\\5-x & 11+x\end{vmatrix}=0$

a) $\begin{vmatrix}-1 & 3\\x & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow -2-3x=0\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

b) $\begin{vmatrix}1 & 3\\4 & 4-x\end{vmatrix}=2\Rightarrow 4-x-12=2\Rightarrow x=-10$

c) $\begin{vmatrix}x & -3\\2x & -8x\end{vmatrix}=-20\Rightarrow -8x^2+6x=-20\Rightarrow -8x^2+6x+20=0\Rightarrow x=2,\ x=-\frac{5}{4}$

d) $\begin{vmatrix}2-x & 3\\5-x & 11+x\end{vmatrix}=0\Rightarrow (2-x)(11+x)-3(5-x)=0\Rightarrow -x^2-6x+7=0\Rightarrow x=1,\ x=-7$

52. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{vmatrix}-1 & 0 & x\\-2 & 5 & 6\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

c) $\begin{vmatrix}x & 3 & -1\\3 & x & 1\\x+1 & -1 & -2\end{vmatrix}=30$

b) $\begin{vmatrix}x & 2x & 3x\\4 & -5 & 6\\-1 & 2 & -3\end{vmatrix}=48$

d) $\begin{vmatrix}x & x+1 & x+2\\-2 & x & -2\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}+2x=-6$

a) $\begin{vmatrix}-1 & 0 & x\\-2 & 5 & 6\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -5-2x-5x+6=0\Rightarrow x=\frac{1}{7}$

b) $\begin{vmatrix}x & 2x & 3x\\4 & -5 & 6\\-1 & 2 & -3\end{vmatrix}=48\Rightarrow 15x+24x-12x-15x-12x+24x=48\Rightarrow x=2$

c) $\begin{vmatrix}x & 3 & -1\\3 & x & 1\\x+1 & -1 & -2\end{vmatrix}=30\Rightarrow -2x^2+3+3x+3+x^2+x+x+18=30\Rightarrow -x^2+5x-6=0\Rightarrow x=2, x=3$

d) $\begin{vmatrix}x & x+1 & x+2\\-2 & x & -2\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}+2x=-6\Rightarrow 3x^2-4x-8-2x-2-x^2-2x+4x+6x+6+2x=-6\Rightarrow 2x^2+4x+2=0\Rightarrow x=-1$

53. Resuelve las ecuaciones siguientes.

a) $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & x & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & x & -1 \\ 5 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5$ **b)** $\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ 2 & x & 0 \\ 0 & -3 & x \end{vmatrix} = 18$

a) $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & x & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & x & -1 \\ 5 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow -2x - x + 30 + 4 - 5x^2 + 3 - 5 + x^2 + 1 - 3x = 5 \Rightarrow -4x^2 - 6x + 28 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -\frac{7}{2}$

b) $\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ 2 & x & 0 \\ 0 & -3 & x \end{vmatrix} = 18 \Rightarrow x^3 + 18 - 4x = 18 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2,\ x = -2$

Propiedades de los determinantes

54. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los productos *AB* y *BA*.

b) Calcula el valor de los determinantes $|AB|$ y $|BA|$ y comprueba si son iguales.

a) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -7 & 9 \\ 14 & 5 & -5 & 12 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$.

b) $|AB| = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -7 & 9 \\ 14 & 5 & -5 & 12 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_2=-C_1}{=} 0$ y $|BA| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = -33$ no son iguales.

55. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

a) Calcula los productos *AB* y *BA*.

b) Calcula el valor de los determinantes $|AB|$ y $|BA|$ y comprueba si son iguales.

a) $AB = \begin{pmatrix} -5 & 7 & -2 \\ 2 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -9 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

b) $|AB| = \begin{vmatrix} -5 & 7 & -2 \\ 2 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -120$ y $|BA| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -9 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -120$ son iguales.

56. Calcula el valor de los siguientes determinantes sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -2$$

a) $\begin{vmatrix} x & 2x+y \\ a & 2a+b \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 10a & 100x \\ 10b & 100y \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ -x & -y \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x & 2x+y \\ a & 2a+b \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 9}}{=} \begin{vmatrix} x & 2x \\ a & 2a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 2}}{=} -2$

b) $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 5}}{=} -\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=} -\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 2$

c) $\begin{vmatrix} 10a & 100x \\ 10b & 100y \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 6}}{=} 1000\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 5}}{=} -1000\begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=} -1000\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = 2000$

d) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ -x & -y \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 6}}{=} -3\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 5}}{=} 3\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -6$

57. Calcula el valor de los siguientes determinantes sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$$

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 4p & 4q & 4r \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x+2a & y+2b & z+2c \\ a+x+p & b+y+q & c+z+r \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a+x & x+p & 2p \\ b+y & y+q & 2q \\ c+z & z+r & 2r \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 4p & 4q & 4r \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 6}}{=} 4\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 5}}{=} -4\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = -24$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x+2a & y+2b & z+2c \\ a+x+p & b+y+q & c+z+r \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-F_1}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x+p & y+q & z+r \end{vmatrix} \underset{F_3\to F_3-F_2}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$

c) $\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 5}}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 5}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$

d) $\begin{vmatrix} a+x & x+p & 2p \\ b+y & y+q & 2q \\ c+z & z+r & 2r \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 6}}{=} 2\begin{vmatrix} a+x & x+p & p \\ b+y & y+q & q \\ c+z & z+r & r \end{vmatrix} \underset{C_2\to C_2-C_3}{=} 2\begin{vmatrix} a+x & x & p \\ b+y & y & q \\ c+z & z & r \end{vmatrix} \underset{C_1\to C_1-C_2}{=} 2\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 12$

58. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = -3$**, calcula el valor de los determinantes siguientes.**

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -3x & -3y & -3z \\ -r & -s & -t \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2r & 2s & 2t \\ a & b & c \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -3x & -3y & -3z \\ -r & -s & -t \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 6}}{=} 6\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = -18$

b) $\begin{vmatrix} 2r & 2s & 2t \\ a & b & c \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 6}}{=} 2\begin{vmatrix} r & s & t \\ a & b & c \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3+F_2}{=} 2\begin{vmatrix} r & s & t \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 5}}{=} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 5}}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = -6$

59. Se sabe que $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$**. Calcula el valor de los determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} m+1 & n+1 & p+1 \\ m & n & p \\ m-1 & n-2 & p-3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3-F_1}{=} \begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 6}}{=} \frac{1}{3}\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3}$

b) $\begin{vmatrix} m+1 & n+1 & p+1 \\ m & n & p \\ m-1 & n-2 & p-3 \end{vmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{=} -\begin{vmatrix} m & n & p \\ m+1 & n+1 & p+1 \\ m-1 & n-2 & p-3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2-F_1 \\ F_3 \to F_3-F_1}}{=} -\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 6}}{=} \frac{1}{3}\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3}$

60. Calcula el valor de siguiente suma de determinantes sin desarrollar previamente cada determinante por separado.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 9}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3-2 & 4-4 & -1+5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -20$$

61. Prueba, sin necesidad de desarrollar, que el valor del siguiente determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 & 23 \\ 25 & 27 & 29 & 31 \end{vmatrix}$$

Las filas del determinante son linealmente dependientes, ya que $F_4 = -F_1 + F_2 + F_3$, por tanto, el determinante es nulo.

62. Calcula el valor de la suma de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2 & x^2+y^2 & p^2+q^2 \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2ab & 2xy & 2pq \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix}$$

Aplicando la propiedad 9 tenemos:

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2 & x^2+y^2 & p^2+q^2 \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2ab & 2xy & 2pq \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2+2ab & x^2+y^2+2xy & p^2+q^2+2pq \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} \underset{F_1=F_2}{=} 0$$

Cálculo de determinantes

63. Desarrolla el siguiente determinante por los elementos de su tercera columna y calcula su valor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 54 = -42$$

64. Desarrolla los siguientes determinantes por los elementos de la fila o columna que más ceros posea y calcula su valor.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

a) Desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -14 + 48 = 34$$

b) Desarrollando por los elementos de la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$$

65. Haz ceros en una de las filas o columnas de los siguientes determinantes y calcula su valor.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - 2F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -10$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_4 \to C_4 + 2C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

66. Calcula los siguientes determinantes por el método de Gauss.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 10 & -9 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -9 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 10F_2}{=} 7\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & a+2 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = 1 - a$

67. Transforma el siguiente determinante para que la primera fila tenga dos ceros y calcula su valor.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a+1} & \boldsymbol{a+2} & \boldsymbol{a+3} \\ \boldsymbol{a+4} & \boldsymbol{a+5} & \boldsymbol{a+6} \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+1 & a+2 & a+3 \\ a+4 & a+5 & a+6 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a+1 & 1 & 2 \\ a+4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

68. Calcula los siguientes determinantes de orden 4por el método de Gauss.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftrightarrow C_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 - 3F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 + 9F_2 \\ F_4 \to F_4 + 3F_2}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - \frac{1}{2}F_3}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix} = -72$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \\ F_4 \to F_4 - 4F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 - 2F_2 \\ F_4 \to F_4 - 7F_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} \underset{F_4 \to F_4 + F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 160$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_4 \to F_4 - 2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{F_4 \to F_4 + 2F_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$

Rango de una matriz

69. Dada la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

a) Escribe todos los menores de orden 3 a partir del menor de orden 2 determinado por las filas 1.ª y 3.ª y las columnas 2.ª y 4.ª

b) Escribe todos los menores de orden 4 a partir del menor de orden 3 determinado por las filas 1.ª, 2.ª y 3.ª, y las columnas 2.ª, 3.ª y 4.ª

a) El menor de orden 2 indicado es $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$. Los menores de orden 3 construidos a partir de este menor son:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

b) El menor de orden 3 indicado es $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. Los menores de orden 4 construidos a partir de este menor son:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

70. Calcula el rango de las siguientes matrices.

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **c)** $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **e)** $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ **g)** $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0{,}5 & 1 & -1{,}5 \end{pmatrix}$ **d)** $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ **f)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$ **h)** $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -10 & 8 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

a) $|A|=0 \Rightarrow \text{rg}(A)=1$.

b) $|A|=0 \Rightarrow \text{rg}(A)\le 2$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-6\ne 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$.

c) $|A|=-28\ne 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=3$.

d) $|A|=0 \Rightarrow \text{rg}(A)\le 2$. Como $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-10\ne 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$.

e) Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=6\ne 0 \Rightarrow \text{rg}(A)\ge 2$. Ampliando este menor de orden 2 añadiendo la cuarta columna y la tercera fila obtenemos $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=36\ne 0$, luego $\text{rg}(A)=3$.

f) Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2\ne 0 \Rightarrow \text{rg}(A)\ge 2$. Los dos menores de orden 3 que se obtienen ampliando este menor de orden 2 son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix}=0,$$

Por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

g) $F_3=F_1+F_2,\ C_1=C_5 \Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7\ne 0 \Rightarrow \text{rg}(A)\ge 2$. Los menores de orden 3 que se obtienen ampliando este menor de orden dos son:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix}=0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

Por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

h) Como $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=-6\ne 0 \Rightarrow \text{rg}(A)\ge 2$. Los menores de orden 3 que se obtienen ampliando este menor de orden dos son:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ -10 & 8 & 6 \end{vmatrix}=0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ -10 & 8 & -8 \end{vmatrix}=0,$$

Por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

71. Estudia, en cada caso, según los valores del parámetro *a*, el rango de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & a\\ 3 & -1 & 3\\ a & a & 1\end{pmatrix}$ **b)** $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & a\\ 4 & a & 1\\ -6 & 3 & -a\end{pmatrix}$

a) $|A|=0 \Rightarrow -1-6a+3a^2+a^2-3a+6=0 \Rightarrow 4a^2-9a+5=0 \Rightarrow a=1, a=\frac{5}{4}$

Si $a\neq 1$ y $a\neq \frac{5}{4}$ tenemos $|A|\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=3$.

Si $a=1$ tenemos $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, con $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

Si $a=\frac{5}{4}$ tenemos $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & \frac{5}{4}\\ 3 & -1 & 3\\ \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 1\end{pmatrix}$, con $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

b) $|A|=0 \Rightarrow 2a^2-6+12a+6a^2+6+4a=0 \Rightarrow 8a^2+16a=0 \Rightarrow a=0, a=-2$

Si $a\neq 0$ y $a\neq -2$ tenemos $|A|\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=3$.

Si $a=0$ tenemos $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\\ -6 & 3 & 0\end{pmatrix}$, con $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

Si $a=-2$ tenemos $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ 4 & -2 & 1\\ -6 & 3 & 2\end{pmatrix}$, con $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

72. Estudia, según los valores del parámetro *a*, el rango de la matriz:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a-2} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-3} & \boldsymbol{a+2} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a+1}\end{pmatrix}$$

$|A|=0 \Rightarrow (a-2)(a+2)(a+1)-10-6+10(a+2)-2(a-2)+3(a+1)=0 \Rightarrow a^3+a^2+7a+7=0 \Rightarrow a=-1$

Si $a\neq -1$ tenemos $|A|\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=3$.

Si $a=-1$ tenemos $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ -3 & 1 & 2\\ -5 & 1 & 0\end{pmatrix}$, con $|A|\neq 0$ y $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

73. Estudia, según los valores de los parámetros *a* y *b*, el rango:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a+b} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a+b} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a+b} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 3a+b & a & a \\ 3a+b & a+b & a \\ 3a+b & a & a+b \end{vmatrix} = (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a+b & a \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}}{=} (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} =$$

$= (3a+b)b^2$, con lo que $|A| = 0 \Rightarrow (3a+b)b^2 = 0 \Rightarrow b = 0,\ b = -3a$.

Si $b \neq 0$ y $b \neq -3a$ tenemos $|A| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 3$.

Si $b = 0$ tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$

Si $b = -3a$ tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} -2a & a & a \\ a & -2a & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } a \neq 0, \text{ ya que } \begin{vmatrix} -2a & a \\ a & -2a \end{vmatrix} = 3a^2 \neq 0 \text{ en este caso} \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$

Matriz inversa

74. Calcula las matrices adjuntas de las siguientes y halla, para cada caso, $\boldsymbol{A\left(\text{Adj}(A)\right)^t}$.

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

a) $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

$$A(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 0 \\ 0 & -26 \end{pmatrix}$$

b) $\text{Adj(A)} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$A(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -2 & -6 \\ -4 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

c) $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -25 & -25 & 25 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

$$A(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -25 & 5 \\ -5 & -25 & 5 \\ 5 & 25 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Observemos que, en cada caso, $A\left(\text{Adj}(A)\right)^t = |A|I$.

75. Calcula las matrices inversas de:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -7\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}$ **d)** $D=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

a) $|A|=-1\neq 0\Rightarrow A$ es invertible y $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

b) $|B|=3\neq 0\Rightarrow B$ es invertible y $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}(\text{Adj}(B))^t=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & 1\\ -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$.

c) $|C|=\dfrac{5}{8}\neq 0\Rightarrow C$ es invertible y $C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}(\text{Adj}(C))^t=\dfrac{1}{\frac{5}{8}}\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{16}{5} & \frac{6}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$.

d) $|D|=18\neq 0\Rightarrow D$ es invertible y $D^{-1}=\dfrac{1}{|D|}(\text{Adj}(D))^t=\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5\\ 6 & 4 & 2\\ -3 & 7 & -1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{7}{18}\\ \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{18}\end{pmatrix}$.

76. Calcula las matrices inversas de:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -13\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

a) $|A|=1\neq 0\Rightarrow A$ es invertible y $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}11 & 28 & 6\\ -7 & -19 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}11 & -7 & 2\\ 28 & -19 & 5\\ 6 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

b) $|B|=2\neq 0\Rightarrow B$ es invertible y $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}(\text{Adj}(B))^t=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 8 & -3\\ -2 & -8 & 4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 4 & -4\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}$.

77. Calcula la matriz inversa de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{4}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}$$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ -1 & -3 & 2 & 4\\ 1 & 2 & -1 & -3\end{vmatrix}\underset{\substack{F_2\to F_2+F_1\\ F_3\to F_3+F_1\\ F_4\to F_4-F_1}}{=}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow A$ es invertible y

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-3 & -1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & -2\\ -2 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

78. Calcula, en función de *a*, las matrices inversas de:

a) $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

a) $|A| = a+1-a = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ es invertible para cualquier valor de a y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\text{Adj}(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -a & a+1 \end{pmatrix}.$$

b) $|B| = 1+a-a = 1 \neq 0 \Rightarrow B$ es invertible para cualquier valor de a y

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\left(\text{Adj}(B)\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & -1 \\ -a & a^2 & 1+a \\ 1 & -a & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1-a & a^2 & -a \\ -1 & 1+a & -1 \end{pmatrix}.$$

Ecuaciones matriciales

79. Resuelve la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \boldsymbol{X} - \mathbf{2}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \mathbf{6}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}} \end{pmatrix}$$

Si la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene inversa tendremos:

$$AX = 6\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\dfrac{7}{6} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 2 \neq 0$, existe $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(\text{Adj}(A)\right)^t = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & 2 \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ y, por tanto:

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & 2 \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

80. Resuelve la ecuación matricial siguiente.

$$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa tendremos $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} A^{-1}$. Como $|A| = 1 \neq 0$, existe

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\text{Adj}(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y, por tanto:}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

81. Sean las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{4}&\mathbf{6}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{3}\\\mathbf{-2}&\mathbf{-2}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{-5}\\\mathbf{2}&\mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación matricial $\boldsymbol{AX-B=C}$.

Si la matriz A tiene inversa tendremos $AX=B+C\Rightarrow X=A^{-1}(B+C)$.

Como $|A|=0$, no existe A^{-1}, por tanto, usaremos el método directo para calcular *X.*

Pongamos $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, tenemos:

$$AX-B=C\Rightarrow AX=B+C\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\0&-4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+3c&2b+3d\\4a+6c&4b+6d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\0&-4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+3c=0\\4a+6c=0\\2b+3d=-2\\4b+6d=-4\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=-\frac{3}{2}c,\ b=-1-\frac{3}{2}d\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}c&-1-\frac{3}{2}d\\c&d\end{pmatrix}\text{ con } c,d\in\mathbb{R}.$$

82. Resuelve la ecuación matricial $\boldsymbol{AX+2X=B}$, siendo:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{-2}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}\\\mathbf{2}&\mathbf{-2}&\mathbf{2}\\\mathbf{-3}&\mathbf{0}&\mathbf{-3}\end{pmatrix}$$

Tenemos $AX+2X=B\Rightarrow(A+2I)X=B$, por tanto, si la matriz $C=A+2I=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&4&0\\-2&1&3\end{pmatrix}$ tiene inversa tendremos $X=C^{-1}B$. Como $|C|=20\neq0$, existe

$$C^{-1}=\frac{1}{|C|}(\mathrm{Adj}(C))^t=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}12&0&8\\-5&5&-5\\-4&0&4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{5}\\0&\frac{1}{4}&0\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\text{ y, por tanto:}$$

$$X=C^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{5}\\0&\frac{1}{4}&0\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\2&-2&2\\-3&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

83. Resuelve la ecuación matricial $XA+B=C$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&0\\-2&1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&4&4\\-1&-1&-1\\7&1&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&0&5\\1&-2&1\\-2&1&-3\end{pmatrix}$$

Si la matriz A tiene inversa tendremos $XA=C-B\Rightarrow X=(C-B)A^{-1}$. Como $|A|=2\neq 0$, existe

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&4\\-1&1&-3\\-2&0&-2\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\0&\frac{1}{2}&0\\2&-\frac{3}{2}&-1\end{pmatrix}$$ y, por tanto:

$$X=(C-B)A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-4&1\\2&-1&2\\-9&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\0&\frac{1}{2}&0\\2&-\frac{3}{2}&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\6&-\frac{9}{2}&-4\\-15&9&12\end{pmatrix}$$

84. Resuelve, sin usar el método directo, $AX-BX=C$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4&5\\2&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-10&-2\\-1&-2\end{pmatrix}$$

Tenemos $AX-BX=C\Rightarrow(A-B)X=C$, por tanto, si la matriz $D=A-B=\begin{pmatrix}-2&-2\\-1&0\end{pmatrix}$ tiene inversa tendremos $X=D^{-1}C$. Como $|D|=-2\neq 0$ existe

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}(\mathrm{Adj}(D))^t=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}0&1\\2&-2\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0&-1\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$ y, por tanto:

$$X=D^{-1}C=\begin{pmatrix}0&-1\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10&-2\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\4&-1\end{pmatrix}$$

85. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-4} & \mathbf{-4} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

a) Resuelve la ecuación $AX=B$.

b) Resuelve la ecuación $XA=B$.

c) Resuelve la ecuación $(A-I)X=B$.

a) Si la matriz *A* tiene inversa tendremos $X=A^{-1}B$. Como $|A|=-1\neq 0$ existe

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\text{ y, por tanto:}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -4 & 0\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

b) La ecuación $XA=B$ no puede tener solución, ya que XA debería tener 2 columnas y *B* tiene tres columnas. De hecho, si despejamos $X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 0\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ no se puede realizar.

c) Si la matriz $A-I=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ tiene inversa tendremos $X=(A-I)^{-1}B$. Como $|A-I|=0$, no existe A^{-1}, por tanto, usaremos el método directo para calcular *X.* Observemos que *X* tiene que tener dimensión 2 x 3, pongamos $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$, tenemos:

$$(A-I)X=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 0\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a-3d & b-3e & c-3f\\ a-3d & b-3e & c-3f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 0\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-3d=-4\\ a-3d=-3\end{cases},\ \begin{cases}b-3e=-4\\ b-3e=-2\end{cases}\text{ y }\begin{cases}c-3f=0\\ c-3f=-1\end{cases}$$

Estos sistemas no tienen solución, por tanto, la ecuación matricial no tiene solución.

86. Resuelve la ecuación $\boldsymbol{ABXBA=C}$, siendo las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{21} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{22} & \mathbf{-14}\end{pmatrix}$$

Si las matrices *A* y *B* tienen inversa tendremos $X=B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1}$. Como $|A|=5\neq 0$ y $|B|=1\neq 0$ existen

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}^t=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\text{ y }B^{-1}=\frac{1}{|B|}(\mathrm{Adj}(B))^t=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X=B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}21 & -2\\ 22 & -14\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}21 & -2\\ 22 & -14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}20 & 10\\ 45 & -40\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}50 & 50\\ 50 & -75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

87. Sean las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

a) Efectúa la operación AB^t .

b) Determina la matriz X tal que $A + 2X = B$.

c) Halla la matriz Y tal que $BY = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

a) $AB^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$

b) $A + 2X = B \Rightarrow X = \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) Si la matriz B tiene inversa tendremos $Y = B^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Como $|B| = 14 \neq 0$ existe $B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{Adj}(B))^t = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y, por tanto:

$$Y = B^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 42 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Síntesis

88. Se considera la ecuación $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Siendo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuál debe ser la dimensión de X?

b) ¿Crees que sería correcto escribir $X = A^{-1}B$?

c) Encuentra todas las posibles matrices X que verifiquen la ecuación.

a) X debe ser una matriz cuadrada de orden 2.

b) No es correcto, ya que al no ser cuadrada, A no tiene inversa.

c) Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tenemos:

$$AX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c = 2 \\ 2b+d = 1 \\ a = 1 \quad b = 1 \\ c = 0 \quad d = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 1, c = 0, d = -1$$

Luego, $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

89. Considerando la ecuación $AX = B$ y las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es correcto escribir $X = A^{-1}B$?

b) ¿Cuál debe ser la dimensión de X?

c) Calcula todas las matrices X soluciones de la ecuación.

a) No es correcto, ya que $|A| = 0$ y, por tanto, A no tiene inversa.

b) La dimensión de X debe ser 3 x 1.

c) Si $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c \\ b \\ a+b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2c = -4 \\ b = 2 \\ a+b+2c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4-2c \\ b = 2 \end{cases}$$

Las matrices del tipo $X = \begin{pmatrix} -4-2c \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$ con $c \in \mathbb{R}$ verifican la ecuación.

90. Estudia, según los valores del parámetro *a*, el rango de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & a \\ a & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & -a & a-4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2a & 2a \\ 3 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$$

Rango de A: $|A| = 0 \Rightarrow -9a - 27 = 0 \Rightarrow a = -3$

Si $a \neq -3$ tenemos $|A| \neq 0$ y, por tanto, $\text{rg}(A) = 3$.

Si $a = -3$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ con $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

Rango de B: $|B| = 0 \Rightarrow -2a^2 + 6a = 0 \Rightarrow -2a(a-3) = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 3$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 3$ tenemos $|B| \neq 0$ y, por tanto, $\text{rg}(B) = 3$.

Si $a = 0$ tenemos $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ con $|B| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(B) = 2$.

Si $a = 3$ tenemos $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ con $|B| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(B) = 2$.

Rango de C: $|C| = 0 \Rightarrow a^2 - 6a + 12 = 0$ sin solución, por tanto, para cualquier valor de a, $|C| \neq 0$ y $\text{rg}(C) = 3$.

Rango de D: $|D| = 0 \Rightarrow -4a^2 + 8a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$

Si $a \neq 1$ tenemos $|D| \neq 0$ y, por tanto, $\text{rg}(D) = 3$.

Si $a = 1$ tenemos $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ con $|D| = 0$ y $\text{rg}(D) = 1$, ya que las tres filas de D son proporcionales.

91. Estudia, según los valores de *m*, el rango de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -2 \\ 2m & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2m \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$ para cualquier valor de *m*, por tanto, $\text{rg}(A) \le 2$ para cualquier valor de *m*.

Observemos que $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m-1=0 \Rightarrow m=1$, por tanto, si $m \ne 1$ tenemos $\text{rg}(A)=2$ y si $m=1$ tenemos

$\text{rg}(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2=2F_1 \\ F_3=F_1}}{=} 1$.

92. Estudia, según los valores de λ, el rango de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & \lambda \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Rango de *A*: Como $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -5 \ne 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \ge 2$ para cualquier valor de λ.

Analicemos los menores de orden 3 a partir de este determinante de orden 2:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -6\lambda + 6 = -6(\lambda - 1) \qquad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = 3(\lambda-1)^2$$

Si $\lambda = 1$ estos dos menores se anulan y, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

Si $\lambda \ne 1$ cualquiera de estos menores es no nulo y, por tanto, $\text{rg}(A) = 3$.

Rango de *B*: $\text{rg}(B) \underset{C_4=2C_3}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \lambda = 1$

Si $\lambda \ne -2$ y $\lambda \ne 1$ tenemos $|B| \ne 0$ y, por tanto, $\text{rg}(B) = 3$.

Si $\lambda = -2$ tenemos $\text{rg}(B) = \text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \ne 0$.

Si $\lambda = 1$ tenemos $\text{rg}(B) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$.

93. Estudia, según los valores de *k*, el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-k \\ 1 & k+1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El menor de orden 3 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-k \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$ para cualquier valor de *k*, por tanto, $\text{rg}(A) = 3$ para cualquier valor de *k*.

94. **a)** Determina para que valores de λ tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1-\lambda \\ -1-\lambda & -4 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la expresión de dicha matriz inversa para $\lambda = 4$.

c) Para dicho valor, resuelve la ecuación $AX = I$ siendo *I* la matriz identidad de segundo orden.

a) $|A| = 0 \Rightarrow 4-(1+\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \\ 1+\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -3 \end{cases}$, por tanto, *A* tiene inversa si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -3$.

b) Para $\lambda = 4$ tenemos $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{21} & -\frac{5}{21} \\ -\frac{5}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$.

c) $AX = I \Rightarrow X = A^{-1}I = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{21} & -\frac{5}{21} \\ -\frac{5}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$

95. **¿Para qué valores de λ tiene inversa la matriz *A*?**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \lambda & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Calcula la expresión de dicha matriz inversa para $\lambda = 0$.

$|A| = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -2,\ \lambda = \frac{3}{2}$, por tanto, *A* tiene inversa si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq \frac{3}{2}$.

Para $\lambda = 0$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -6 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

96. **¿Para qué valores de λ tiene inversa la siguiente matriz?**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \lambda & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \lambda \\ \mathbf{7} & \lambda & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

Calcula la expresión de dicha matriz inversa para $\lambda = 3$.

$|A| = 0 \Rightarrow 6\lambda^2 + 12\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2,\ \lambda = 0$, por tanto, *A* tiene inversa si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 0$.

Para $\lambda = 3$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} -9 & 30 & 9 \\ 12 & -10 & 18 \\ 9 & 0 & -9 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

97. Calcula los valores del parámetro λ para los cuales la siguiente matriz cuadrada tiene inversa. Calcula el valor de dicha matriz inversa para el valor $\lambda = 4$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, \lambda = 3$, por tanto, A tiene inversa si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 3$.

Para $\lambda = 4$ tenemos $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & -6 & -14 \\ 8 & -4 & -12 \\ -11 & 7 & 17 \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 & -\frac{11}{4} \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{7}{4} \\ -\frac{7}{2} & -3 & \frac{17}{4} \end{pmatrix}$.

98. Calcula todas las matrices *X* tales que:

$$X\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tenemos:

$$X\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ -2a & -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a(a-b) & 2b(a-b) \\ 2a(c-d) & 2b(c-d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a(a-b) = 2 \\ 2a(c-d) = 2 \\ 2b(a-b) = 0 \\ 2b(c-d) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a-b) = 1 \\ a(c-d) = 1 \\ b = 0 \text{ o } a = b \\ b = 0 \text{ o } c = d \end{cases}$$

Si $b = 0$ tenemos $\begin{cases} a^2 = 1 \\ a(c-d) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, c = -1+d \\ a = 1, c = 1+d \end{cases}$; si $b \neq 0$ tenemos $\begin{cases} a(a-b) = 1 \\ a(c-d) = 1 \\ a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 \\ a = b \\ c = d \end{cases}$, que no tiene solución, por tanto, las soluciones de la ecuación son las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1+d & d \end{pmatrix}$ o $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+d & d \end{pmatrix}$ para $d \in \mathbb{R}$.

99. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{t} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$**,**

a) Calcula los valores de *t* para los cuales existe A^{-1}.

b) Calcula dicha matriz inversa para $t = 2$.

c) Resuelve la ecuación matricial $AX = B$ siendo *A* la matriz correspondiente al valor $t = 2$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

a) $|A| = -t^2 - t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2, t = 1$, por tanto, *A* tiene inversa si $t \neq -2$ y $t \neq 1$.

b) Para $t = 2$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

c) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

100. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{k} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$**.**

a) Estudia el rango de *A* según los valores del parámetro real *k*.

b) Calcula, si existe, la matriz inversa de *A* para $k = 3$.

a) $|A| = 0 \Rightarrow 8 - 4k = 0 \Rightarrow k = 2$

Si $k \neq 2$ tenemos $|A| \neq 0$ y, por tanto, $\text{rg}(A) = 3$.

Si $k = 2$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ con $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

b) Según el apartado anterior, para $k = 3$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $|A| \neq 0$, con lo que existe

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

101. Resuelve la ecuación:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 8 & -56 \\ 5 & 4 & 33 \\ 3 & 4 & 28 \end{pmatrix}$$

Si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$ tiene inversa tendremos:

$$X = \left[\begin{pmatrix} -9 & 8 & -56 \\ 5 & 4 & 33 \\ 3 & 4 & 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right] A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -61 \\ 5 & 0 & 33 \\ 5 & 2 & 25 \end{pmatrix} A^{-1}$$

Como $|A| = -1 \neq 0$ existe $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} -20 & 11 & 3 \\ 26 & -15 & -4 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 20 & -26 & -7 \\ -11 & 15 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y, por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -61 \\ 5 & 0 & 33 \\ 5 & 2 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 & -26 & -7 \\ -11 & 15 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

102. Calcula el valor de los determinantes de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

El determinante de Vandermonde de orden 3 es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

En particular, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} = (3-2)(4-2)(4-3) = 2$

De manera análoga se demuestra que el determinante de Vandermonde de orden 3 es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

En particular, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1^2 & 2 & 3 & 4 \\ 1^3 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^4 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 12$

103. Calcula el valor de $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & x+y \\ u+2 & v+2 & u+v \\ s+3 & t+3 & s+t \end{vmatrix}$ **sabiendo que** $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ u & v & 2 \\ s & t & 3 \end{vmatrix} = 5$.

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & x+y \\ u+2 & v+2 & u+v \\ s+3 & t+3 & s+t \end{vmatrix} \underset{C_3 \to C_3 - C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & -2 \\ u+2 & v+2 & -4 \\ s+3 & t+3 & -6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & 1 \\ u+2 & v+2 & 2 \\ s+3 & t+3 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1 \to C_1 - C_3 \\ C_2 \to C_2 - C_3}}{=} -2\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ u & v & 2 \\ s & t & 3 \end{vmatrix} = -10$$

104. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x-1 & x-2 & x-3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x-1 & x-2 & x-3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_2 \to C_2 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \end{vmatrix} \underset{F_2 = -F_1}{=} 0$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{=} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{=} 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 160$$

105. Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 80x - 96$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{=} \begin{vmatrix} x+6 & 1 & 2 & 3 \\ x+6 & x & 1 & 2 \\ x+6 & 3 & x & 1 \\ x+6 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{=} (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & x-2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+6) \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 2 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x+6)\left(x^3 - 6x^2 + 16x - 16\right) = x^4 - 20x^2 + 80x - 96$$

Por tanto,

$$x^4 - 20x^2 + 80x - 96 = 80x - 96 \Rightarrow x^4 - 20x^2 = 0 \Rightarrow x^2\left(x^2 - 20\right) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},\ x = -\sqrt{20} = -2\sqrt{5}$$

106. Indica si el resultado del siguiente producto de matrices tiene inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -10 \\ 8 & -12 & 20 \end{pmatrix}$$

Las filas de esta matriz son proporcionales, por tanto su determinante es 0 y no tiene inversa.

CUESTIONES

107. Los elementos de la matriz cuadrada de orden 4, $A=(a_{ij})$ son:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j=1\\ 0 & \text{si } i=j\neq 1\\ -1 & \text{si } i\neq j\end{cases}$$

a) Escribe la matriz.

b) Calcula el valor del determinante de la matriz.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

b) $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{vmatrix}\underset{\substack{F_2\to F_2+F_1\\ F_3\to F_3+F_1\\ F_4\to F_4+F_1}}{=}\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -2\\ -2 & -2 & -1\end{vmatrix}=-5$

108. Calcula el valor del determinante de orden 2, $|A|$, tal que $a_{ij}=i+2j$.

$|A|=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-2$

109. Calcula el valor del determinante de orden 3, $|A|$, tal que $a_{ij}=2i-j$.

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 3\end{vmatrix}=0$

110. Determina las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix}-a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ para que no admita inversa. Escribe algún ejemplo.

La matriz A no admite inversa si $|A|=0$, es decir, si $-a^2+b^2=0\Rightarrow b^2=a^2\Rightarrow b=\pm a$, por tanto, las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix}-a & a\\ -a & a\end{pmatrix}$ o $A=\begin{pmatrix}-a & -a\\ a & a\end{pmatrix}$ no admiten inversa. Por ejemplo, la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ no admite inversa.

111. Despeja X en las siguientes ecuaciones suponiendo que las matrices que intervienen son todas cuadradas del mismo orden y poseen matriz inversa.

a) $AX+BX=AB$ **b)** $AXB+C=D$ **c)** $XA^2=BA$ **d)** $A(X+B)=CX$

a) $AX+BX=AB\Rightarrow (A+B)X=AB\Rightarrow X=(A+B)^{-1}AB$

b) $AXB+C=D\Rightarrow AXB=D-C\Rightarrow X=A^{-1}(D-C)B^{-1}$

c) $XA^2=BA\Rightarrow X=BAA^{-1}A^{-1}=BA^{-1}$

d) $A(X+B)=CX\Rightarrow AX+AB=CX\Rightarrow AX-CX=-AB\Rightarrow (A-C)X=-AB\Rightarrow X=-(A-C)^{-1}AB$

112. Dada la matriz regular *A* de orden tres, con $|A| = 5$, calcula el valor del determinante de su inversa y el valor del determinante de su adjunta.

$$AA^{-1} = I \Rightarrow |AA^{-1}| = |I| \Rightarrow |A||A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$$

$$A(\mathrm{Adj}(A))^t = |A|I \Rightarrow |A(\mathrm{Adj}(A))^t| = ||A|I| \Rightarrow |A||(\mathrm{Adj}(A))^t| = |A|^3 \Rightarrow |(\mathrm{Adj}(A))^t| = |A|^2 \Rightarrow |\mathrm{Adj}(A)| = |A|^2 = 25$$

113. Escribe, si es posible, una matriz de dimensión tres por cuatro tal que su rango valga:

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

114. Aplicando las propiedades de los determinantes, indica la razón por la que los siguientes determinantes son todos nulos.

a) $\begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}75 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2{,}3 & -2{,}5 & -4{,}25 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 0{,}25 & 0{,}6 & 0{,}75 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 1 \\ -0{,}5 & -0{,}2 & -0{,}25 \end{vmatrix}$

a) El determinante es 0, ya que $F_3 = F_1 - F_2$.

b) El determinante es 0, ya que $C_3 = 1{,}25C_2$.

115. Indica, sin resolverlos, la razón por la que los siguientes determinantes son todos nulos.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & -4 & 6 \\ 9 & 3 & -3 & 14 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 12 & -10 & -22 & 5 \\ 12 & 20 & -15 & -10 \\ 13 & -14 & -16 & 7 \\ 23 & 14 & -13 & -7 \end{vmatrix}$

a) El determinante es 0, ya que $F_4 = F_1 + F_2 + F_3$.

b) El determinante es 0, ya que $C_2 = -2C_4$.

116. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para un determinante de orden 4:

a) Si la fila primera y la columna segunda son iguales, el determinante vale 0.

b) Si el producto de las dos primeras filas es igual a la tercera, el determinante vale 0.

a) Falsa, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

b) Falsa, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

117. ¿Qué relación deben verificar los números *a*, *b* y *c* para que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0$?

Observemos que el determinante de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$, con lo que el determinante será nulo si al menos dos de los tres números *a*, *b* y *c* son iguales.

PROBLEMAS

118. a) Comprueba que los números 297, 351 y 405 son todos múltiplos de 27.

b) Demuestra, sin necesidad de desarrollarlo, que el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 27.

Nota: Aplica $C_3 \to C_3 + 10C_2 + 100C_1$

a) $297 = 27 \cdot 11$ $\qquad 351 = 27 \cdot 13$ $\qquad 297 = 27 \cdot 15$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + 10C_2 + 100C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 9 & 297 \\ 3 & 5 & 351 \\ 4 & 0 & 405 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 27 \cdot 11 \\ 3 & 5 & 27 \cdot 13 \\ 4 & 0 & 27 \cdot 15 \end{vmatrix} = 27 \begin{vmatrix} 2 & 9 & 11 \\ 3 & 5 & 13 \\ 4 & 0 & 15 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 27.

119. Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{x} & -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{x} & -\boldsymbol{x} & -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -x & y & x & x \\ -x & -x & y & x \\ -x & -x & -x & y \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \\ F_4 \to F_4 + F_1}}{=} \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x+y & 2x & 2x \\ 0 & 0 & x+y & 2x \\ 0 & 0 & 0 & x+y \end{vmatrix} = x(x+y)^3$$

120. En un país hay tres comunidades autónomas *A*, *B* y *C*. La probabilidad de que un residente en *A* permanezca en *A* al año siguiente es de 0,90; la de que se vaya a *B*, de 0,06, y la de que se vaya a *C*, de 0,04. La probabilidad de que un residente en *B* permanezca en *B* es de 0,95; la de que se vaya a *A*, de 0,03, y la de que se vaya a *C*, de 0,02. Finalmente, la probabilidad de que un residente en *C* se quede en *C* es de 0,96; la de que se vaya a *A*, de 0,02, y la de que se vaya a *B*, de 0,02.

Si las poblaciones en 2015 eran de 1,52, 2,56 y 5,48 millones de personas, respectivamente, ¿cuáles eran las de 2014?

La matriz de transición de la población de un año al siguiente es $T = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,06 & 0,04 \\ 0,03 & 0,95 & 0,02 \\ 0,02 & 0,02 & 0,96 \end{pmatrix}$, por tanto, si P_{2014} y P_{2015} son las matrices 3 x 1 cuyos elementos son las poblaciones de las comunidades en 2014 y 2015, tenemos:

$P_{2015} = P_{2014}T \Rightarrow P_{2014} = P_{2015}T^{-1}$ con

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}\left(\text{Adj}(T)\right)^t = \frac{1}{0,818}\begin{pmatrix} 0,9116 & -0,0284 & -0,0184 \\ -0,0568 & 0,8632 & -0,0168 \\ -0,0184 & -0,0168 & 0,8532 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1,1144 & -0,0694 & -0,0450 \\ -0,0347 & 1,0553 & -0,0205 \\ -0,0225 & -0,0205 & 1,0430 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$P_{2014} = P_{2015}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1,52 & 2,56 & 5,48 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,1144 & -0,0694 & -0,0450 \\ -0,0347 & 1,0553 & -0,0205 \\ -0,0225 & -0,0205 & 1,0430 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,48 & 2,48 & 5,59 \end{pmatrix}$$

Es decir, en 2014 las poblaciones respectivas de cada comunidad eran 1,48, 2,48 y 5,59 millones.

121. En una determinada localidad existen tres compañías *A*, *B* y *C* que ofrecen el suministro de electricidad.

La siguiente matriz representa las probabilidades que tiene un cliente de cada zona de permanecer en la misma compañía o cambiarse a otra el año que viene:

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}80} & \mathbf{0{,}15} & \mathbf{0{,}05} \\ \mathbf{0{,}10} & \mathbf{0{,}70} & \mathbf{0{,}20} \\ \mathbf{0{,}05} & \mathbf{0{,}05} & \mathbf{0{,}90} \end{pmatrix}$$

Calcula el número de clientes correspondientes a los años 2013 y 2014 si el número de clientes en 2015 es:

***A*: 12 500 *B*: 25 000 *C*: 18 000**

Tenemos $P_{2015} = P_{2014}T$ y $P_{2014} = P_{2013}T$, es decir, $P_{2014} = P_{2015}T^{-1}$ y $P_{2013} = P_{2014}T^{-1}$, con

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}\left(\text{Adj}(T)\right)^t = \frac{1}{0{,}4825}\begin{pmatrix} 0{,}62 & -0{,}08 & -0{,}005 \\ -0{,}1325 & 0{,}7175 & -0{,}155 \\ -0{,}005 & -0{,}0325 & 0{,}545 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1{,}285 & -0{,}2746 & -0{,}0104 \\ -0{,}1658 & 1{,}487 & -0{,}3212 \\ -0{,}0622 & -0{,}0674 & 1{,}1295 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$P_{2014} = P_{2015}T^{-1} = \begin{pmatrix} 12500 & 25000 & 18000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}285 & -0{,}2746 & -0{,}0104 \\ -0{,}1658 & 1{,}487 & -0{,}3212 \\ -0{,}0622 & -0{,}0674 & 1{,}1295 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10798 & 32531 & 12171 \end{pmatrix}$$

$$P_{2013} = P_{2014}T^{-1} = \begin{pmatrix} 10798 & 32531 & 12171 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}285 & -0{,}2746 & -0{,}0104 \\ -0{,}1658 & 1{,}487 & -0{,}3212 \\ -0{,}0622 & -0{,}0674 & 1{,}1295 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7725 & 44590 & 3185 \end{pmatrix}$$

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el valor de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{4} & -5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & -6 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{4} & -5 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} + \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -18 + 60 + 30 + 25 + 27 + 48 = 172$

2. Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{-3} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{vmatrix} = \mathbf{-4}$$

$\begin{vmatrix} 1 & x & -3 \\ x & x & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow 4x - x + 3x - 4x^2 = -4 \Rightarrow 4x^2 - 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -\frac{1}{2}$

3. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} \end{vmatrix}$**.**

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2+4F_1 \\ F_3\to F_3+5F \\ F_4\to F_4+6F}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 11 & -6 & 9 & 0 \\ 12 & -11 & 19 & 0 \\ 17 & -10 & 17 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -6 & 9 \\ 12 & -11 & 19 \\ 17 & -10 & 17 \end{vmatrix} = -2057 - 1080 - 1938 + 1683 + 2090 + 1224 = -78$$

4. Calcula el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

b) Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, $\text{rg}(B) \geq 2$. Ampliando este menor de orden 2 con la segunda fila y tercera columna tenemos $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 3$.

5. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{5} & \mathbf{11} \\ \mathbf{13} & \mathbf{5} & \mathbf{15} \\ \mathbf{12} & \mathbf{8} & \mathbf{28} \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz X tal que $AXA = B$.

Si la matriz A tiene inversa, tendremos $X = A^{-1}BA^{-1}$. Como $|A| = 4 \neq 0$ existe

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}BA^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 5 & 11 \\ 13 & 5 & 15 \\ 12 & 8 & 28 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 32 & 32 & 16 \\ 32 & -32 & 16 \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Calcula el rango de las matrices *A* y *B* para los diferentes valores del parámetro *t*.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{t} & \boldsymbol{t} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \boldsymbol{t} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$$

Rango de A: $|A| = 0$ para cualquier valor de t y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$ para cualquier valor de t.

Rango de B: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) \geq 2$ para cualquier valor de t. Ampliando este menor de orden 2 obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - t \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ t & 0 & t \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, si $t = 2$ tenemos $\text{rg}(B) = 2$ y si $t \neq 2$ tenemos $\text{rg}(B) = 3$.

7. Calcula la inversa de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-7} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{32} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$|A| = 2 \neq 0 \Rightarrow A$ tiene inversa y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -103 & -8 & 256 \\ 129 & 10 & -320 \\ 25 & 2 & -62 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{103}{2} & \frac{129}{2} & \frac{25}{2} \\ -4 & 5 & 1 \\ 128 & -160 & -31 \end{pmatrix}.$

8. Dada las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{a} & -\mathbf{2} & -\mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & -\mathbf{1} & -\mathbf{4} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{6} & -\mathbf{8} \\ -\mathbf{5} & -\mathbf{4} & -\mathbf{3} \end{pmatrix}$**:**

a) Calcula los valores de *a* para los cuales la matriz *A* tiene inversa.

b) Calcula la inversa de *A* para $a = -1$.

c) Para $a = -1$ resuelve la ecuación matricial $XA = B$.

a) La matriz *A* tiene inversa si $|A| \neq 0$:

$$|A| = 0 \Rightarrow 5a + 4 = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{5}$$

Por tanto, la matriz *A* tiene inversa si $a \neq -\frac{4}{5}$.

b) Para $a = -1$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

c) $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -8 \\ -5 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

9. Sabiendo que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & -\mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{4}$ **, calcula:**

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2a & 2b+4 & 2c-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 8$

b) $\begin{vmatrix} 2a & 2b+4 & 2c-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 0 = 8$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Los valores de *a* que anulan el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4a \end{vmatrix}$ **son:**

A. $a = 2$

B. $a = 2$ y $a = -\dfrac{9}{2}$

C. $a = 2$ y $a = -3$

D. Es nulo para cualquier valor de *a*.

$\begin{vmatrix} a & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4a^2 - 10a + 36 = 0 \Rightarrow a = 2,\ a = -\dfrac{9}{2}$, la respuesta B.

2. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$ **, el valor de** $\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix}$ **es :**

A. 10

B. $\dfrac{5}{2}$

C. -10

D. $-\dfrac{5}{2}$

$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} \underset{F_1 \to F_1 - F_2}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_2}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10$, la respuesta A.

3. Los adjuntos A_{32} **y** A_{13} **de la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ -a & 2 & a^2 \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix}$ **se anulan a la vez en el caso de que:**

A. $a = 1$

B. $a = -1$

C. $a = 0$

D. Ningún valor de *a* anula los dos adjuntos a la vez.

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & a^2 \end{vmatrix} = 0$ para cualquier valor de *a* y $A_{13} = \begin{vmatrix} -a & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2a - 2$, por tanto, la respuesta correcta es B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. En relación con el rango de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{m} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{m}^2 & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{m}-\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$**:**

A. Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ entonces $\text{rg}(A) = 2$.

B. Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ entonces $\text{rg}(A) \geq 2$.

C. El valor del rango de *A* solo puede ser 2 o 3.

D. El valor del rango de *A* es 3 en todos los casos excepto para $m = 0$, $m = 4$ o $m = 1$, que vale 2.

A es falsa y B verdadera, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ implica $\text{rg}(A) \geq 2$, pero no necesariamente implica $\text{rg}(A) = 2$. Como además $\text{rg}(A) \leq 3$, también C es verdadera.

Para verificar la validez de D observemos que ampliando el menor de orden 2 anterior obtenemos:

$$\begin{vmatrix} m & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ m^2 & -3 & 1 \\ m-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4m^2 + 4m = -4m(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0,\ m = 1$$

Por tanto, si $m = 1$ tenemos $\text{rg}(A) = 2$ y si $m \neq 1$ tenemos $\text{rg}(A) = 3$, con lo que D es falsa.

En conclusión, las respuestas correctas son B y C.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

5. Sea la ecuación matricial $\boldsymbol{AXA} = \boldsymbol{B}$ **donde** ***A*** **y** ***B*** **son matrices cuadradas de orden 3 y la matriz** ***X*** **es la matriz incógnita.**

1. Tiene solución, es decir, se puede calcular *X*.

2. La matriz *A* es regular, es decir, $\det(A) \neq 0$.

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

2 implica 1, ya que si $\det(A) \neq 0$ existe A^{-1} y obtenemos $X = A^{-1}BA^{-1}$. En cambio 1 no implica necesariamente 2, por tanto, la relación correcta es B.