3 Sistemas de ecuaciones lineales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Escribe en forma matricial los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 4 \\ x - y = 0 \\ 3x + 3z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_4 = 5 \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. Desarrolla el siguiente sistema dado en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = -1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

3. Dado el sistema $\begin{cases} \mathbf{4x + 2y - z = 6} \\ \mathbf{2x + 2y + 3z = -4} \\ \mathbf{3x + 6z = -9} \end{cases}$**, escribe sistemas equivalentes a él aplicando sucesivamente las siguientes transformaciones.**

I. $E_3 \to \frac{1}{3}E_3$ **III.** $E_2 \to E_2 - 2E_1$ **V.** $E_3 \to E_3 - E_2$

II. $E_1 \leftrightarrow E_3$ **IV.** $E_3 \to E_3 - 4E_1$

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = -4 \\ 3x + 6z = -9 \end{cases} \underset{E_3 = \frac{1}{3}E_3}{\rightarrow} \begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = -4 \\ x + 2z = -3 \end{cases} \underset{E_1 \leftrightarrow E_3}{\rightarrow} \begin{cases} x + 2z = -3 \\ 2x + 2y + 3z = -4 \\ 4x + 2y - z = 6 \end{cases} \underset{E_2 \to E_2 - 2E_1}{\rightarrow} \begin{cases} x + 2z = -3 \\ 2y - z = 2 \\ 4x + 2y - z = 6 \end{cases} \underset{E_3 \to E_3 - 4E_1}{\rightarrow} \begin{cases} x + 2z = -3 \\ 2y - z = 2 \\ 2y - 9z = 18 \end{cases} \rightarrow$$

$$\underset{E_3 \to E_3 - E_2}{\rightarrow} \begin{cases} x + 2z = -3 \\ 2y - z = 2 \\ -8z = 16 \end{cases}$$

4 a 8. Ejercicios resueltos.

9. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} 3x+7y=14 \\ -7x+3y=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -2x+y+z=7 \\ x-z=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=4 \\ 5x+2y-4z=9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+3y-z=0 \\ 4x+3y-2z=6 \\ 2y-z=-8 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ -7 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2\to 3F_2+7F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ 0 & 58 & 116 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x+7y=14 \\ 58y=116 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to F_2+2F_1 \\ F_3\to F_3-F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to 3F_3+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 3y-3z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -4 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-5F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -9 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to F_3-3F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-3z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-4F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -1 & -6 & -14 \\ 0 & 2 & -1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3\to F_3+F_2 \\ F_4\to F_4-2F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -9 & -24 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4\to 9F_4+5F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -9 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$

Como la matriz de la derecha es escalonada y su cuarta fila es nula salvo el último elemento, el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

10. Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ 3x-y-z=2 \\ x-2y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ x+y-z=7 \\ 3x-2y-z=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \\ 3x+2y-3z=2 \\ x-z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-y=7 \\ 2x+5y=15 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to 2F_2-3F_1 \\ F_3\to 2F_3-F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -11 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to F_3-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow$ No tiene solución.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to 2F_2-F_1 \\ F_3\to 2F_3-3F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & -7 & -5 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to F_3+7F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -26 & 26 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=8 \\ y-3z=6 \\ -26z=26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-3F_1 \\ F_4\to F_4-F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3\to F_3-F_2 \\ F_4\to F_4-F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$

d) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-3F_1 \\ F_3\to F_3-2F_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to 7F_3+F_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow$ No tiene solución.

11 y 12. Ejercicios resueltos.

13. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, comprueba si verifica las condiciones para aplicar la regla de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelos.

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x-5y=43 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x+5y=8 \\ 6x-10y=14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x+y)=1 \\ 6x+12y=-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+z=1 \\ 3x-2y=-7 \\ y+z=5 \end{cases}$

a) El sistema es cuadrado y el determinante de la matriz de coeficientes es $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=-22\neq 0$, por lo que se puede aplicar la regla de Cramer.

La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 43 & -5 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-154}{-22}=7 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 43 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{66}{-22}=-3$$

b) El sistema es cuadrado pero el determinante de la matriz de coeficientes es $|A|=\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}=0$, por lo que no se puede aplicar la regla de Cramer.

c) $\begin{cases} 2(x+y)=1 \\ 6x+12y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=1 \\ 6x+12y=-1 \end{cases}$.

El sistema es cuadrado y el determinante de la matriz de coeficientes es $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}=12\neq 0$, por lo que se puede aplicar la regla de Cramer.

La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 12 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-8}{12}=-\frac{2}{3}$$

d) El sistema es cuadrado y el determinante de la matriz de coeficientes es $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, por lo que se puede aplicar la regla de Cramer.

La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -7 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1}{-1}=-1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-2}{-1}=2 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-3}{-1}=3$$

14. Resuelve los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer a los mismos.

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ 3x + 3y - 3z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x - y - z = 2 \\ 13x + 2y + 2z = 41 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y + t = 2 \\ x + y - 2z - t = -1 \\ 2z + t = 2 \end{cases}$

a) El sistema no es cuadrado, pero haciendo $z = \lambda$ obtenemos un sistema cuadrado al que se le puede aplicar la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 + \lambda \\ 3x + 3y = -1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 4+\lambda & 1 \\ -1+3\lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{13}{3},\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4+\lambda \\ 3 & -1+3\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-14+3\lambda}{3} = -\frac{14}{3} + \lambda,\ z = \lambda$$

b) El sistema no es cuadrado, pero haciendo $y = \lambda$ obtenemos un sistema cuadrado al que se le puede aplicar la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ x + z = 4 - \lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 4-\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\lambda,\ y = \lambda,\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 4$$

c) El sistema es cuadrado pero el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 13 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, por lo que no se puede aplicar directamente la regla de Cramer.

Pero observemos que $E_3 = 5E_1 + 3E_2$, por lo que podemos suprimir la tercera ecuación obteniendo el sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$, que no es cuadrado, pero haciendo $z = \lambda$ obtenemos un sistema cuadrado al que se le puede aplicar la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 - \lambda \\ x - y = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 \\ 2+\lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{-3} = 3,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7-\lambda \\ 1 & 2+\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3+3\lambda}{-3} = 1 - \lambda,\ z = \lambda$$

d) El sistema no es cuadrado, pero haciendo $z = \lambda$ obtenemos un sistema cuadrado al que se le puede aplicar la regla de Cramer: $\begin{cases} 2x + y + t = 2 \\ x + y - t = -1 + 2\lambda \\ t = 2 - 2\lambda \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1+2\lambda & 1 & -1 \\ 2-2\lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = -1 + 2\lambda \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1+2\lambda & -1 \\ 0 & 2-2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 2 - 2\lambda \qquad z = \lambda \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1+2\lambda \\ 0 & 0 & 2-2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 2 - 2\lambda$$

15 a 18. Ejercicios resueltos.

19. Analizando los rangos de las matrices del sistema y la matriz ampliada, estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x+5y-4z=7 \\ x-2y-z=-2 \\ x+3y-z=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-4y-2z=2 \\ 2x-y-z=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ -2x+y+3z=0 \\ 3x+2y-z=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -4x-2y+8z=3 \\ 2x+y-4z=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-2y+2z=4 \\ -3x+y-z=2 \\ -4x-2y+2z=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+2z=5 \\ 2x-y+z=11 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+4y+z=2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y+3z+t=2 \\ 2x+2y+z+t=4 \\ 3x+3y+2z+t=7 \end{cases}$

a) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Como $|A|=-10\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado.

b) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=7\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

c) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$. Para calcular $\text{rg}(A^*)$ ampliamos el menor anterior añadiendo la columna de términos independientes y la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

d) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Observemos que en A $F_1=-2F_2 \Rightarrow \text{rg}(A)=1$, en cambio esta relación no se cumple en A^*, de hecho tenemos $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}=36\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$.

Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

e) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -3 & 1 & -1\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 4\\ -3 & 1 & -1 & 2\\ -4 & -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-5\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=2$. Para calcular $\text{rg}(A^*)$ ampliamos el menor anterior añadiendo la columna de términos independientes y la tercera fila:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ -3 & 1 & 2\\ -4 & -2 & 3\end{vmatrix}=45\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

f) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\ 1 & -2 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 1 & 11\end{pmatrix}$.

Como $|A|=6\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=\text{nº de incógnitas}$, el sistema es compatible determinado.

g) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=2$. Para calcular $\text{rg}(A^*)$ ampliamos el menor anterior añadiendo la columna de términos independientes y la tercera fila:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

h) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4\\ 3 & 3 & 2 & 1 & 7\end{pmatrix}$.

Como $|A|\underset{\substack{F_3\to F_3-2F_1\\ F_4\to F_4-3F_1}}{=}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\underset{F_3=F_4}{=}0$ y $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=3$. Para calcular $\text{rg}(A^*)$ ampliamos el menor anterior añadiendo la columna de términos independientes y la cuarta fila:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 4\\ 3 & 3 & 2 & 7\end{vmatrix}\underset{\substack{F_3\to F_3-2F_1\\ F_4\to F_4-3F_1}}{=}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{vmatrix}\underset{F_3=F_4}{=}0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3<\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

20. Ejercicio resuelto.

21. Para cada uno de los siguientes sistemas cuadrados de ecuaciones lineales:

a) Comprueba que la matriz de los coeficientes es regular.

b) Calcula la inversa de la matriz de los coeficientes.

c) Halla la solución única del sistema resolviéndole como si fuera una ecuación matricial.

i) $\begin{cases} 3x - 2y = -7 \\ -5x + y = 7 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 2x - 3y = -13 \\ 4x + 2y - 3z = -8 \\ -5x + 3y + 2z = 23 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} -2x + 2y - z = -4 \\ -2x + y - 3z = -7 \\ -4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = -1 \\ 4x + 4y - 3z = -6 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x - 2y = -7 \\ -5x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = -7 \neq 0$, es regular y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = -1, y = 2$.

ii) $\begin{cases} 2x - 3y = -13 \\ 4x + 2y - 3z = -8 \\ -5x + 3y + 2z = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -8 \\ 23 \end{pmatrix}$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 5 \neq 0$, es regular y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & 7 & 22 \\ 6 & 4 & 9 \\ 9 & 6 & 16 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} & \frac{6}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{22}{5} & \frac{9}{5} & \frac{16}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -13 \\ -8 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = -2, y = 3, z = 2$.

iii) $\begin{cases} -2x + 2y - z = -4 \\ -2x + y - 3z = -7 \\ -4x - 3y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 36 \neq 0$, es regular y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} -7 & 16 & 10 \\ -1 & -8 & -14 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{7}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{5}{36} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{5}{18} & -\frac{7}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = \frac{5}{6}, y = -\frac{1}{3}, z = \frac{5}{3}$.

iv) $\begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = -1 \\ 4x + 4y - 3z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = -7 \neq 0$, es regular y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -11 & -1 & -16 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{11}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{16}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = 1, y = -1, z = 2$.

22 y 23. Ejercicios resueltos.

24. Discute y resuelve, en el caso de tener solución distinta de la trivial, los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \\ 4x - 7y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y - z + 2t = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - 4z + 2t = 0 \\ x + 4y + z + 3t = 0 \end{cases}$

a) Es un sistema homogéneo y cuadrado. Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = -41 \neq 0$, el sistema es compatible determinado, es decir, su única solución es la trivial ($x = y = z = 0$).

b) Es un sistema homogéneo y cuadrado. Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 6 \neq 0$, el sistema es compatible determinado, es decir, su única solución es la trivial ($x = y = z = 0$).

25. Discute y resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} -x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

a) Es un sistema homogéneo con menos ecuaciones que incógnitas, por lo que es compatible indeterminado.

Como las ecuaciones son proporcionales ($E_2 = -2E_1$), eliminamos la segunda ecuación y hacemos $y = \lambda, z = \mu$, obteniendo que las soluciones del sistema son $x = -2\lambda + 3\mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$.

b) Es un sistema homogéneo con menos ecuaciones que incógnitas, por lo que es compatible indeterminado.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ hacemos $z = \lambda$ y resolvemos el sistema resultante:

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda \\ 2x - y = -\lambda \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = \lambda$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $x = 0, y = \lambda, z = \lambda$.

26. Ejercicio interactivo.

27 y 28. Ejercicios resueltos.

29. Aplicando el método de Gauss, discute y resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x-2y-z=3 \\ x-4y+z=11 \\ x+3y-2z=-9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y-z=4 \\ -2x+y+2z=7 \\ -3x-y+3z=18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y+2z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ -x-3y+3z=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+z=4 \\ 2y+z=5 \\ x+y+z=4 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & -2 & -9 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_2-F_1 \\ F_3\to F_3-F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & -12 \end{array}\right) \underset{F_3\to 2F_3+5F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado con solución:

$$\begin{cases} x-2y-z=3 \\ -2y+2z=8 \\ 8z=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases}$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & 3 & 18 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_2+2F_1 \\ F_3\to F_3+3F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 15 \\ 0 & -10 & 0 & 30 \end{array}\right) \underset{F_3\to F_3-2F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado, eliminando la tercera ecuación y haciendo $z=\lambda$, las soluciones son:

$$\begin{cases} x-3y-z=4 \\ -5y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5+\lambda \\ y=-3 \\ z=\lambda \end{cases}$$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 7 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3+F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -8 \\ 0 & -6 & 5 & 11 \end{array}\right) \underset{F_3\to 7F_3+6F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 29 & 29 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado con solución:

$$\begin{cases} x-3y+2z=4 \\ 7y-z=-8 \\ 29z=29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3\to F_3-F_1 \\ F_4\to F_4-2F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3\to 2F_3-F_2 \\ F_4\to 2F_4-3F_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -35 \end{array}\right) \underset{F_4\to F_4-7F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado con solución:

$$\begin{cases} x+z=4 \\ 2y+z=5 \\ -z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=5 \end{cases}$$

30. Aplicando el teorema de Rouché y la regla de Cramer, discute y resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ -3x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ -x - y + 15z = -40 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ 4x - y - 5z = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 2y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado, aplicando la regla de Cramer tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -14 & -1 & 3 \\ -4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-24}{12} = -2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -14 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12}{12} = 1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-36}{12} = -3$$

b) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 15 & -40 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$. Para calcular $\text{rg}(A^*)$ ampliamos el menor anterior añadiendo la columna de términos independientes y la tercera fila: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & -40 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$

Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible, no tiene solución.

c) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$. Para calcular $\text{rg}(A^*)$ ampliamos el menor anterior añadiendo la columna de términos independientes y la tercera fila: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$

Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z = \lambda$, obteniendo:

$$\begin{cases} 2x - y = -14 - 3\lambda \\ 3x - y = -4 + \lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -14 - 3\lambda & -1 \\ -4 + \lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = 10 + 4\lambda,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -14 - 3\lambda \\ 3 & -4 + \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = 34 + 11\lambda$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $x = 10 + 4\lambda,\ y = 34 + 11\lambda,\ z = \lambda$.

d) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Como $|A^*| = -9 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 4$, por otro lado, $\text{rg}(A) \leq 3$, por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible, no tiene solución.

31 a 34. Ejercicios resueltos.

35. Dado el sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = a} \\ \boldsymbol{3ax + 2ay + az = 1} \\ \boldsymbol{ay - 2z = 2} \end{cases}$$

a) Determina el valor del parámetro *a* para que el sistema sea compatible determinado.

b) ¿Existe algún valor del parámetro *a* para que el sistema sea compatible indeterminado? ¿E incompatible?

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3a & 2a & a \\ 0 & a & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & a & 1 \\ 0 & a & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

El sistema es compatible determinado si $|A| \neq 0$:

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1$$

Por tanto, el sistema es compatible determinado si $a \neq 0$ y $a \neq -1$.

b) Estudiamos que ocurre si $a = 0$ o $a = -1$.

- Para $a = 0$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor con la columna de términos independientes y la segunda fila tenemos:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3.$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a = -1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor con la columna de términos independientes y la tercera fila tenemos:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2.$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

En resumen, el sistema es compatible indeterminado si $a = -1$ e incompatible si $a = 0$.

36. Discute en función del valor del parámetro *a* el sistema: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+2y-2z=3 \\ 2x+2y+az=8 \end{cases}$

Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{pmatrix}$.

$$|A|=0 \Rightarrow 8a+14=0 \Rightarrow a=-\frac{7}{4}$$

- Para $a\neq-\frac{7}{4}$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado.
- Para $a=-\frac{7}{4}$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -\frac{7}{4} & 8 \end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=8\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$, ampliando este menor con la columna de términos independientes y la tercera fila tenemos $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix}=46\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$.

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

37. Ejercicio interactivo.

38 y 39. Ejercicios resueltos.

40. Tres jugadores convienen que el que pierda una partida doblará el dinero que en ese momento tengan los otros dos. Después de haber perdido todos ellos una partida, cada jugador se retira con 20 €. ¿Cuánto dinero tenían al principio del juego?

Sean *A*, *B* y *C* los jugadores, siendo *A* el primero en perder, *B* el segundo en perder y *C* el tercero en perder. Sean *x*, *y* y *z* las cantidades con las que comienza cada jugador respectivamente. La siguiente tabla recoge las condiciones del enunciado:

	Jugador *A*	**Jugador *B***	**Jugador *C***
Inicio	x	Y	z
Después de la 1ª partida	$x-y-z$	$2y$	$2z$
Después de la 2ª partida	$2(x-y-z)=$ $=2x-2y-2z$	$2y-(x-y-z)-2z=$ $=-x+3y-z$	$4z$
Después de la 3ª partida	$2(2x-2y-2z)=$ $=4x-4y-4z$	$2(-x+3y-z)=$ $=-2x+6y-2z$	$4z-(2x-2y-2z)-(-x+3y-z)=$ $=-x-y+7z$

Obtenemos, por tanto:

$$\begin{cases} 4x-4y-4z=20 \\ -2x+6y-2z=20 \\ -x-y+7z=20 \end{cases} \Rightarrow x=32{,}5\text{ €};\ y=17{,}5\text{ €};\ z=10\text{ €}$$

41. Una naviera ha vendido 128 cruceros de los tipos *A*, *B* y *C*, cuyos precios son 1550, 600 y 900 €, respectivamente, recaudando 112 800 €. Si por cada persona que va al crucero *A*, 2 van al crucero *C*, ¿cuántas personas van al crucero *B*?

Sean *x*, *y* y *z* las personas que van al crucero *A*, *B* y *C*, respectivamente.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=128 \\ 1500x+600y+900z=112800 \\ z=2x \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $x=24$, $y=56$ y $z=48$, es decir, van 56 personas al crucero *B*.

42. Una persona decide invertir un total de 60 000 €, repartidos en tres entidades de ahorro distintas: *A*, *B* y *C*. Esta persona decide que la cantidad invertida en la entidad *A* sea la mitad que la cantidad invertida en las entidades *B* y *C*. Además, se sabe que la entidad *A* le ha asegurado una rentabilidad del 5 %, la entidad *B*, una rentabilidad del 10 %, y la entidad *C*, una rentabilidad el 2 %. Calcula las cantidades invertidas en cada entidad de ahorro si se sabe que los beneficios totales han sido de 4200 €.

Sean *x*, *y* y *z* las cantidades invertidas en *A*, *B* y *C*, respectivamente.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=60000 \\ x=\dfrac{y+z}{2} \\ \dfrac{5}{100}x+\dfrac{10}{100}y+\dfrac{2}{100}z=4200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=60000 \\ 2x-y-z=0 \\ 5x+10y+2z=420000 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que se han invertido $x=20000$ € en la entidad *A*, $y=30000$ € en la entidad *B* y $z=10000$ € en la entidad *C*.

43 a 51. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Forma matricial de un sistema

52. Escribe en forma matricial los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 3x+2y-z=4 \\ 5x-y+z=7 \\ 2x+2y-3z=9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-2z=0 \\ 3x+3y=1 \\ 4y-4z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y-z+t=1 \\ 2x-2z+t=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=2 \\ x-3y=-2 \\ x+y=-4 \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

53. Para cada uno de los siguientes sistemas, escribe la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - y = 2 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ **c)** $\{3x + 2y = 0$ **e)** $\begin{cases} x + 2y - 3z + t = 2 \\ -x - 2y + 4z - t = -2 \\ x + y + z + t = 0 \\ -2x + 3y - z + 2t = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 2 \\ x - y - 3z = -2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3y = 2 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x = 0 \\ 4y = 1 \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

54. Escribe de forma desarrollada los siguientes sistemas.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -2 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = -3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2y = \frac{2}{3} \\ -2x + \frac{3}{4}y = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -x + 2y + z = 2 \\ -2y + 3z + t = -3 \end{cases}$

Soluciones de un sistema

55. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y - 3z = 1} \\ \mathbf{-2x + y - 4z = 5} \\ \mathbf{3x + 2y - z = -1} \end{cases}$

Escribe sistemas equivalentes a él aplicando sucesivamente las siguientes transformaciones.

I. $E_2 \to E_2 + E_1$ **II.** $E_3 \to 2E_3 - 3E_1$ **III.** $E_3 \to 4E_3 + 5E_2$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ -2x + y - 4z = 5 \\ 3x + 2y - z = -1 \end{cases} \xrightarrow[E_2 \to E_2 + E_1]{} \begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ 4y - 7z = 6 \\ 3x + 2y - z = -1 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to 2E_3 - 3E_1]{} \begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ 4y - 7z = 6 \\ -5y + 7z = -5 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to 4E_3 + 5E_2]{} \begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ 4y - 7z = 6 \\ -7z = 10 \end{cases}$$

56. Escribe un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas sabiendo que una de sus soluciones es (–2, 3, 7).

$$\begin{cases} x+y+z=8 \\ x+y-z=-6 \\ x-y-z=-12 \end{cases}$$

57. Dado el sistema: $\begin{cases} \mathbf{3x+2y-4z=a} \\ \mathbf{2x+2y-z=b} \\ \mathbf{3x+y-z=c} \end{cases}$

Calcula el valor de *a*, *b* y *c* para que la terna (2, −1, 4) sea solución del mismo.

Sustituyendo las incógnitas por los valores de la solución tenemos $a=-12$, $b=-2$, $c=1$.

Estudio y resolución de sistemas

58. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x+2y=2 \\ 3x-5y=-21 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3x-2y=7 \\ -2x+7y=-37 \end{cases}$

a) $$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & -21 \end{array}\right) \underset{F_2\to 2F_2-3F_1}{\to} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -16 & -48 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=2 \\ -16y=-48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -2 & 7 \\ -2 & 7 & -37 \end{array}\right) \underset{F_2\to 3F_2-2F_1}{\to} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -2 & 7 \\ 0 & 25 & -125 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -3x-2y=7 \\ 25y=-125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases}$$

59. Aplica el método de Gauss para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-2y+z=1 \\ 2x+2y-3z=1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} -x+3y+2z=1 \\ \frac{1}{6}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{2}z=\frac{5}{2} \\ 3x-11y+4z=10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x+2y-3z=11 \\ \frac{1}{13}x+\frac{1}{13}y=1 \\ 5x+8y-9z=59 \end{cases}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-2F_1}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \underset{F_3\to 3F_3-F_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=2 \\ -6y+3z=-3 \\ -6z=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & 8 \\ 4 & 2 & -6 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-4F_1}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -10 & 2 & -18 \end{array}\right) \underset{F_3\to 3F_3-10F_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -14z=-14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_2-3F_1 \\ F_3\to F_3-5F_1}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 10 & -14 \end{array}\right) \underset{F_3\to F_3-F_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sin solución.}$$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & 9 & -6 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 5 & -1 & 2 & 11 \\ 6 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 5F_1 \\ F_3 \to F_3 - 6F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -11 & 7 & 36 \\ 0 & -11 & 7 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -11 & 7 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sin solución.

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -6 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 8 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \\ 0 & -18 & 18 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ -9y + 9z = 18 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 15 \\ 3 & -11 & 4 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 + 3F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & -2 & 10 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sin solución.

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 13 \\ 5 & 8 & -9 & 59 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 11 \\ -y + 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 - 3\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

60. Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas.

a) $\begin{cases} x + 2y + 9z = 5 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 2 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & -6 & -18 & -12 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado, haciendo $z = \lambda$, las soluciones son:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 - 9\lambda \\ -6y = -12 + 18\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to 2F_2 + F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible, no tiene solución.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado, haciendo $y = \lambda$, las soluciones son:

$$\begin{cases} x + z = 3 - \lambda \\ -2z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado, haciendo $z = \lambda$, las soluciones son:

$$\begin{cases} x + y = 6 - \lambda \\ -2y = -6 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

61. Estudia y resuelve, por el método de Gauss, los siguientes sistemas de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas.

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-3y=-1 \\ x-12y=-11 \\ x+9y=10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x-2y=-1 \\ 2x-4y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -12 & -11 \\ 1 & 9 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-F_1 \\ F_4\to F_4-F_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -14 & -14 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3\to F_3-2F_2 \\ F_4\to F_4+F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado con solución:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ -7y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to 2F_2-F_1 \\ F_3\to F_3-F_1 \\ F_4\to 2F_4-F_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3\to F_3-F_2 \\ F_4\to F_4+5F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -24 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible, no tiene solución.

62. Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas.

a) $\begin{cases} x+y-2z+2w=-8 \\ x-y-z+w=-2 \\ 2x+3y-z-w=-1 \\ 3x+y+z-3w=10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y-z+w=2 \\ 2x-y-z+2w=4 \\ 2x+3y-z-4w=-2 \\ 3x-z-3w=0 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-F_1 \\ F_3\to F_3-2F_1 \\ F_4\to F_4-3F_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 15 \\ 0 & -2 & 7 & -9 & 34 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3\to 2F_3+F_2 \\ F_4\to F_4-F_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -11 & 36 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & 28 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4\to 7F_4-6F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -11 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado con solución:

$$\begin{cases} x+y-2z+2w=-8 \\ -2y+z-w=6 \\ 7z-11w=36 \\ 10w=-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2 \\ w=-2 \end{cases}$$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-2F_1 \\ F_4\to F_4-3F_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & 2 & -6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3\to 5F_3-F_2 \\ F_4\to 5F_4-6F_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -30 & -30 \\ 0 & 0 & 4 & -30 & -30 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4\to F_4-F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -30 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado, haciendo $w=\lambda$, las soluciones son:

$$\begin{cases} x+2y-z=2-\lambda \\ -5y+z=0 \\ 4z=-30+30\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-5+7\lambda}{2} \\ y=\dfrac{-3+3\lambda}{2} \\ z=\dfrac{-15+15\lambda}{2} \\ w=\lambda \end{cases}$$

63. Comprueba que los siguientes sistemas son compatibles determinados y resuélvelos utilizando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 5x - 4y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 2y = -23 \\ -2x + 4y = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y = 15 \\ -5x - y = 27 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - 3y = \frac{7}{3} \\ \frac{x}{2} - \frac{2}{5}y = \frac{21}{60} \end{cases}$

a) El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.

Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible determinado.

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{14}{7} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 14 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-7}{7} = -1$$

b) El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$.

Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible determinado.

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -23 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-72}{24} = -3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -23 \\ -2 & -10 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-96}{24} = -4$$

c) El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$.

Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible determinado.

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 27 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-96}{16} = -6 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 15 \\ -5 & 27 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{48}{16} = 3$$

d) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - 3y = \frac{7}{3} \\ \frac{x}{2} - \frac{2}{5}y = \frac{21}{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 9y = 7 \\ 10x - 8y = 7 \end{cases}$

El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 10 & -8 \end{vmatrix} = 74 \neq 0$.

Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible determinado.

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7}{74} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 10 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-56}{74} = -\frac{28}{37}$$

64. *Comprueba que los siguientes sistemas son compatibles determinados y resuélvelos utilizando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ -2x+y-2z=-10 \\ 3x-2y+5z=22 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3y=30-4z \\ -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+z=5 \\ -3x+y-5z=-33 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y-z=3 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y+2z=-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+2y-z=3 \\ 3x-2y-z=2 \\ -2x-6y+z=5 \end{cases}$

a) El determinante de la matriz de coeficientes es $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}=-4\neq 0$.

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 14 & -2 & 3 \\ -10 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-4}{-4}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ -2 & -10 & -2 \\ 3 & 22 & 5 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{8}{-4}=-2 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 14 \\ -2 & 1 & -10 \\ 3 & -2 & 22 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-12}{-4}=3$$

b) El determinante de la matriz de coeficientes es $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-7\neq 0$.

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-7}{-7}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{0}{-7}=0 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{14}{-7}=-2$$

c) $\begin{cases} 2x-3y=30-4z \\ -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+z=5 \\ -3x+y-5z=-33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y+4z=30 \\ -x-y+3z=15 \\ -3x+y-5z=-33 \end{cases}$

El determinante de la matriz de coeficientes es $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}=30\neq 0$.

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 30 & -3 & 4 \\ 15 & -1 & 3 \\ -33 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{60}{30}=2 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ -1 & 15 & 3 \\ -3 & -33 & -5 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-60}{30}=-2 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 30 \\ -1 & -1 & 15 \\ -3 & 1 & -33 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{150}{30}=5$$

d) El determinante de la matriz de coeficientes es $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$.

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & -6 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-36}{4}=-9 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-8}{4}=-2 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & -6 & 5 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-100}{4}=-25$$

65. Dado el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=4} \\ \boldsymbol{x+y+w=4} \\ \boldsymbol{y+z+w=5} \\ \boldsymbol{2x+y+w=5} \end{cases}$$

a) Comprueba que verifica las condiciones para aplicar la regla de Cramer.

b) Calcula su solución.

a) El sistema es cuadrado y el determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por tanto, se puede aplicar la regla de Cramer.

b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 1 \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 1 \quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 2 \quad w = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = 2$

66. Comprueba que la matriz de los coeficientes de los siguientes sistemas es regular y resuélvelos como si fueran una ecuación matricial.

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -5x + 2y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ x + 2y + z = 12 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 2x - z = -2 \\ -6x - y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -5x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 1 \neq 0$, es regular y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = 1, y = 2$.

b) $\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ x + 2y + z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 3 \neq 0$, es regular y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = -3, y = 6, z = 3$.

c) $\begin{cases} x+y=0 \\ -y+z=2 \\ -x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = -2 \neq 0$, es regular y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{5}{2}$.

d) $\begin{cases} x+y+2z=6 \\ 2x-z=-2 \\ -6x-y=-\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2z=6 \\ 2x-z=-2 \\ -12x-2y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -12 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 2 \neq 0$, es regular y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 12 & -4 \\ -4 & 24 & -10 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 6 & 12 & \frac{5}{2} \\ -2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ z = 3$.

67. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{z} = \dfrac{5}{12} \\ \dfrac{5}{y} + \dfrac{3}{z} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

El sistema es no lineal, pero si hacemos $a = \frac{4}{x},\ b = \frac{5}{y}$ y $c = \frac{3}{z}$ se transforma en un sistema lineal:

$$\begin{cases} a+b = \dfrac{1}{4} \\ a+c = \dfrac{5}{12} \\ b+c = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+4b=1 \\ 12a+12c=5 \\ 3b+3c=1 \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 12 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 3F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 12 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 4F_3 + F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 24 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 4a+4b=1 \\ -12b+12c=2 \\ 24c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = \dfrac{1}{12} \\ c = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Deshaciendo los cambios tenemos que la solución del sistema no lineal es $x = 24, y = 60, z = 12$.

Teorema de Rouché

68. Calcula las soluciones del sistema: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

Si se añade la ecuación $x = 3$, ¿tiene solución el nuevo sistema?

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ hacemos $z = \lambda$ y resolvemos el sistema resultante: $\begin{cases} x - y = 2 - \lambda \\ x + y = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Si añadimos la ecuación $x = 3$, las soluciones del nuevo sistema tienen que ser soluciones del sistema original, por tanto, al añadir la nueva ecuación, el sistema resultante no tiene solución.

69. Discute con la ayuda del teorema de Rouché y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ x + y = \dfrac{3}{2} \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{7}{2} = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}y - 5 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ x + y = \dfrac{3}{2} \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 2x + 2y = 3 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$

Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Como $|A^*| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. Para resolverlo eliminamos la primera ecuación:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-10} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{7}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ con $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < \text{nº de incógnitas}$, por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo eliminamos la primera ecuación y hacemos $y = \lambda$, obteniendo como soluciones $x = 7 - \lambda,\ y = \lambda$.

c) $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ -2x + y = 15 \end{cases}$

Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 15 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$, como $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$, por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

d) $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$

Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado con solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{5}$$

70. Discute con la ayuda del teorema de Rouché y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -17 \\ -5x + 2y - 4z = -17 \\ 4x + y - 5z = 17 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = 18 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 3 \\ 3x - 3z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2z = 2 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + 4z = 2 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -17 \\ -5 & 2 & -4 & -17 \\ 4 & 1 & -5 & 17 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 51 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado con solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -17 & -2 & 1 \\ -17 & 2 & -4 \\ 17 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{357}{51} = 7 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -17 & 1 \\ -5 & -17 & -4 \\ 4 & 17 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1139}{51} = \frac{67}{3} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -17 \\ 3 & -2 & -17 \\ -2 & -6 & 17 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{340}{51} = \frac{20}{3}$$

b) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$. Para calcular $\text{rg}(A^*)$ ampliamos el menor anterior añadiendo la columna de términos independientes y la tercera fila: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 96 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$

Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

c) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -2\\ 4 & 9 & -6\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 4\\ 2 & 5 & -2 & 10\\ 4 & 9 & -6 & 18\end{pmatrix}$.

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$. Para calcular $\text{rg}(A^*)$ ampliamos el menor anterior añadiendo la columna de términos independientes y la tercera fila: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 10\\ 4 & 9 & 18\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z=\lambda$, obteniendo:

$$\begin{cases}x+2y=4+2\lambda\\ 2x+5y=10+2\lambda\end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}4+2\lambda & 2\\ 10+2\lambda & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}}=6\lambda,\ y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4+2\lambda\\ 2 & 10+2\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}}=2-2\lambda,\ z=\lambda$$

d) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

Como $|A|=-4\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado con solución:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}$$

e) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 3\\ 3 & 5 & 7 & 3\\ 3 & 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-4\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$. Para calcular $\text{rg}(A^*)$ ampliamos el menor anterior añadiendo la columna de términos independientes y la tercera fila: $\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ 3 & 5 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-22\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$

Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

f) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 6\\ 2 & 5 & 4\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2 & 2 & 6 & 0\\ 2 & 5 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=6\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$. Para calcular $\text{rg}(A^*)$ ampliamos el menor anterior añadiendo la columna de términos independientes y la tercera fila: $\begin{vmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z=\lambda$, obteniendo:

$$\begin{cases}2x+2y=-6\lambda\\ 2x+5y=2-4\lambda\end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}-6\lambda & 2\\ 2-4\lambda & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}}=\frac{-4-22\lambda}{6}=\frac{-2-11\lambda}{3},\ y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -6\lambda\\ 2 & 2-4\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}}=\frac{4+4\lambda}{6}=\frac{2+2\lambda}{3},\ z=\lambda$$

71. Estudia y resuelve, si es posible, el sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y=4} \\ \boldsymbol{z+w=3} \\ \boldsymbol{2z+w=5} \end{cases}$$

Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3<$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 3 anterior, hacemos $x=\lambda$, obteniendo:

$$\begin{cases} y=4-\lambda \\ z+w=3 \\ 2z+w=5 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda,\ y=4-\lambda,\ z=2,\ w=1$$

72. Discute con la ayuda del teorema de Rouché y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas:

a) $\begin{cases} x+z=4 \\ 2y+z=5 \\ x+y+z=4 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y+z=3 \\ x+3y+2z=6 \\ x-y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 2y+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x+5y+4z=1 \\ 8y+6z=5 \\ 4y+8z=1 \\ x+6y+4z=3 \end{cases}$

a) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Como $|A^*|=0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)\leq 3$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 3 anterior, eliminamos la cuarta ecuación y resolvemos el sistema resultante, obteniendo:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1}{-1}=-1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{0}{-1}=0 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-5}{-1}=5$$

b) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\1&3&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&2&1&3\\1&3&2&6\\1&-1&0&0\end{pmatrix}$.

Como $|A^*|=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)\le 3$. Todos los menores de orden 3 en A son nulos y $\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Los menores de orden 3 de A^* que se obtienen ampliando el menor de orden 2 anterior son nulos, con lo que $\text{rg}(A^*)=2$.

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera y cuarta ecuación y hacemos $z=\lambda$, obteniendo:

$$\begin{cases}x+y=3-\lambda\\2y=3-\lambda\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\3-\lambda&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}}=\frac{3-\lambda}{2},\ y=\frac{\begin{vmatrix}1&3-\lambda\\0&3-\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}}=\frac{3-\lambda}{2},\ z=\lambda$$

c) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&1\\1&2&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2&1&1&4\\0&2&1&3\\1&2&-1&2\\2&-1&0&2\end{pmatrix}$.

Como $|A^*|=-9\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=4$, además, $\text{rg}(A)=3$, con lo que $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

d) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}-2&5&4\\0&8&6\\0&4&8\\1&6&4\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}-2&5&4&1\\0&8&6&5\\0&4&8&1\\1&6&4&3\end{pmatrix}$.

Como $|A^*|=154\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=4$, además, $\text{rg}(A)=3$, con lo que $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

Discusión y resolución de sistemas con parámetros

73. Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro *a* y resuélvelos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{cases}2x-3y=0\\3x-2y=a\end{cases}$

b) $\begin{cases}3x+(2a+3)y=1\\3ax-y=-1\end{cases}$

c) $\begin{cases}2x+(3-a)y=26\\-3x+(2+a)y=-a-26\end{cases}$

d) $\begin{cases}ax+ay=6\\x+(a-1)y=3\end{cases}$

e) $\begin{cases}ax+y=a\\a^2x+ay=1\end{cases}$

f) $\begin{cases}ax-y=1\\-2x+(a-1)y=2\end{cases}$

g) $\begin{cases}ax-y=1\\x-ay=2a-1\end{cases}$

h) $\begin{cases}x+y=1\\ax+3y=3\end{cases}$

a) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}2&-3\\3&-2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2&-3&0\\3&-2&a\end{pmatrix}$, con $|A|=5\neq 0$, por tanto, para cualquier valor de *a*, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&-3\\a&-2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3a}{5}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2&0\\3&a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2a}{5}$$

b) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}3 & 2a+3\\ 3a & -1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}3 & 2a+3 & 1\\ 3a & -1 & -1\end{pmatrix}$.

$$|A|=0\Rightarrow -6a^2-9a-3=0\Rightarrow a=-1,\ a=-\frac{1}{2}$$

- Para $a\neq -1$ y $a\neq -\frac{1}{2}$ tenemos $|A|\neq 0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2=\text{n}^\text{o}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2a+3\\ -1 & -1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2a+2}{-6a^2-9a-3}=\frac{-2}{6a+3}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3a & -1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-3a-3}{-6a^2-9a-3}=\frac{1}{2a+1}$$

- Para $a=-1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -3 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

  Tanto en A como en A^* las filas son proporcionales, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=1<\text{n}^\text{o}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo eliminamos la segunda ecuación y hacemos $x=\lambda$, obteniendo $y=1-3\lambda$.

- Para $a=-\frac{1}{2}$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -\frac{3}{2} & -1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -\frac{3}{2} & -1 & -1\end{pmatrix}$.

  Las filas de A son proporcionales, pero no las de A^*, por lo que $\text{rg}(A)=1\neq\text{rg}(A^*)=2$ y el sistema es incompatible.

c) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}2 & 3-a\\ -3 & 2+a\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2 & 3-a & 26\\ -3 & 2+a & -a-26\end{pmatrix}$.

$$|A|=0\Rightarrow 13-a=0\Rightarrow a=13$$

- Para $a\neq 13$ tenemos $|A|\neq 0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2=\text{n}^\text{o}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}26 & 3-a\\ -a-26 & 2+a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-a^2+3a+130}{13-a}=a+10\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 26\\ -3 & -a-26\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{26-2a}{13-a}=2$$

- Para $a=13$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}2 & -10\\ -3 & 15\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2 & -10 & 26\\ -3 & 15 & -39\end{pmatrix}$.

  Tanto en A como en A^* las filas son proporcionales, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=1<\text{n}^\text{o}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo eliminamos la segunda ecuación y hacemos $y=\lambda$, obteniendo $x=13+5\lambda$.

d) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}a & a\\ 1 & a-1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}a & a & 6\\ 1 & a-1 & 3\end{pmatrix}$.

$$|A|=0\Rightarrow a^2-2a=0\Rightarrow a=0,\ a=2$$

- Para $a\neq 0$ y $a\neq 2$ tenemos $|A|\neq 0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2=\text{n}^\text{o}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6 & a\\ 3 & a-1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3a-6}{a^2-2a}=\frac{3}{a}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a & 6\\ 1 & 3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3a-6}{a^2-2a}=\frac{3}{a}$$

- Para $a = 0$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

  Las filas de A son proporcionales, pero no las de A^*, por lo que $\text{rg}(A) = 1 \neq \text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es incompatible.

- Para $a = 2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

  Tanto en A como en A^* las filas son proporcionales, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo eliminamos la segunda ecuación y hacemos $y = \lambda$, obteniendo $x = 3 - \lambda$.

e) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$, con $|A| = 0$ para cualquier valor de a.

Como $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$ para cualquier valor de a, ampliando este menor tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{rg}(A^*) = 2 \text{ si } a \neq -1 \text{ y } a \neq 1 \\ \text{rg}(A^*) = 1 \text{ si } a = -1 \text{ o } a = 1 \end{cases}.$$

- Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ tenemos $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.
- Para $a = -1$ tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo eliminamos la segunda ecuación y hacemos $y = \lambda$, obteniendo $x = 1 + \lambda$.
- Para $a = 1$ tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo eliminamos la segunda ecuación y hacemos $y = \lambda$, obteniendo $x = 1 - \lambda$.

f) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -2 & a-1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -2 & a-1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$$

- Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$ tenemos $|A| \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a+1}{a^2 - a - 2} = \frac{1}{a-2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2a+2}{a^2 - a - 2} = \frac{2}{a-2}$$

- Para $a = -1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

  Tanto en A como en A^* las filas son proporcionales, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo eliminamos la segunda ecuación y hacemos $y = \lambda$, obteniendo $x = -1 - \lambda$.

- Para $a = 2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  Las filas de A son proporcionales, pero no las de A^*, por lo que $\text{rg}(A) = 1 \neq \text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es incompatible.

g) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$.

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+1=0 \Rightarrow a=-1, a=1$$

- Para $a\neq-1$ y $a\neq1$ tenemos $|A|\neq0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2a-1 & -a \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a-1}{-a^2+1}=-\frac{1}{a+1} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2a-1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2a^2-a-1}{-a^2+1}=-\frac{2a+1}{a+1}$$

- Para $a=-1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

  Las filas de A son proporcionales, pero no las de A^*, por lo que $\text{rg}(A)=1\neq\text{rg}(A^*)=2$ y el sistema es incompatible.

- Para $a=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

  Tanto en A como en A^* las filas son proporcionales, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=1<$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo eliminamos la segunda ecuación y hacemos $y=\lambda$, obteniendo $x=1+\lambda$.

h) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 3 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

$$|A|=0 \Rightarrow 3-a=0 \Rightarrow a=3$$

- Para $a\neq3$ tenemos $|A|\neq0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{0}{3-a}=0 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-a}{3-a}=1$$

- Para $a=3$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

  Tanto en A como en A^* las filas son proporcionales, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=1<$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo eliminamos la segunda ecuación y hacemos $y=\lambda$, obteniendo $x=1-\lambda$.

74. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax-\dfrac{y}{a}=1 \\ -ax+ay=2 \end{cases}$$

Donde *a* es un cierto parámetro que no es nunca cero. ¿Existe algún valor de *a* para el que el sistema sea incompatible?

Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} a & -\dfrac{1}{a} \\ -a & a \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a & -\dfrac{1}{a} & 1 \\ -a & a & 2 \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea incompatible, es necesario (pero no suficiente) que $|A|=0$:

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-1=0 \Rightarrow a=-1, a=1$$

- Para $a=-1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

  Las filas de A son proporcionales, pero no las de A^*, por lo que $\text{rg}(A)=1\neq \text{rg}(A^*)=2$ y el sistema es incompatible.

- Para $a=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

  Las filas de A son proporcionales, pero no las de A^*, por lo que $\text{rg}(A)=1\neq \text{rg}(A^*)=2$ y el sistema es incompatible.

Por tanto, el sistema es incompatible si $a=-1$ o $a=1$.

75. Discute según los valores del parámetro *k* el sistema:

$$\begin{cases}\boldsymbol{kx+3y=4}\\ \boldsymbol{3x-y=2}\\ \boldsymbol{2x-y=k}\end{cases}$$

Resuélvelo cuando sea posible.

Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}k & 3\\ 3 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}k & 3 & 4\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & k\end{pmatrix}$.

$$|A^*|=0\Rightarrow -k^2-7k+8=0\Rightarrow k=-8,\ k=1$$

- Para $k\neq -8$ y $k\neq 1$ tenemos $|A^*|\neq 0$, por lo que $\text{rg}(A^*)=3$, además $\text{rg}(A)=2$, por tanto $\text{rg}(A)\neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $k=-8$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix}-8 & 3\\ 3 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -8\end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix}-8 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

  Para resolverlo eliminamos la última ecuación:

$$\begin{cases}-8x+3y=4\\ 3x-y=2\end{cases}\Rightarrow x=10,\ y=28$$

- Para $k=1$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-10\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

  Para resolverlo eliminamos la última ecuación:

$$\begin{cases}x+3y=4\\ 3x-y=2\end{cases}\Rightarrow x=1,\ y=1$$

76. Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ 4x - y - 5z = a \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ -2x + 3y + 4z = 6 \\ (a-3)x + 12y + (a+3)z = 27 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = a \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ x + az = a \\ 3x + ay + az = a \end{cases}$

e) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 - 2a + 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ ax + y + z = -a^2 \\ a^2x + ay + z = -a^3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x + ay - z = 0 \\ ax + y + z = 2a \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x + ay = 1 \\ 2x - y + az = 1 \\ ax - 3y + 2z = 1 \end{cases}$

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & a \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor tenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & a \end{vmatrix} = a - 6 \Rightarrow \begin{cases} \text{rg}(A^*) = 3 \text{ si } a \neq 6 \\ \text{rg}(A^*) = 2 \text{ si } a = 6 \end{cases}$$

- Para $a \neq 6$ tenemos $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.
- Para $a = 6$ tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

  Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z = \lambda$:

$$\begin{cases} 2x - y = -14 - 3\lambda \\ 3x - y = -4 + \lambda \end{cases} \Rightarrow x = 10 + 4\lambda,\ y = 34 + 11\lambda,\ z = \lambda$$

b) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 4\\ a-3 & 12 & a+3\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 5\\ -2 & 3 & 4 & 6\\ a-3 & 12 & a+3 & 27\end{pmatrix}$.

$$|A|=0 \Rightarrow 18a-36=0 \Rightarrow a=2$$

- Para $a\neq 2$ tenemos $|A|\neq 0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & 2 & -1\\ 6 & 3 & 4\\ 27 & 12 & a+3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1}{6}\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\ -2 & 6 & 4\\ a-3 & 27 & a+3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{7}{3}\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ -2 & 3 & 6\\ a-3 & 12 & 27\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{1}{6}$$

- Para $a=2$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 4\\ -1 & 12 & 5\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 5\\ -2 & 3 & 4 & 6\\ -1 & 12 & 5 & 27\end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=7\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ -2 & 3 & 6\\ -1 & 12 & 27\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$.

  Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z=\lambda$:

$$\begin{cases}x+2y=5+\lambda\\ -2x+3y=6-4\lambda\end{cases} \Rightarrow x=\frac{3+11\lambda}{7},\ y=\frac{16-2\lambda}{7},\ z=\lambda$$

c) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -2\\ 4 & 9 & -6\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 4\\ 2 & 5 & -2 & 10\\ 4 & 9 & -6 & a\end{pmatrix}$.

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A)=2$, ampliando este menor tenemos:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 10\\ 4 & 9 & a\end{vmatrix}=a-18 \Rightarrow \begin{cases}\text{rg}(A^*)=3 \text{ si } a\neq 18\\ \text{rg}(A^*)=2 \text{ si } a=18\end{cases}$$

- Para $a\neq 18$ tenemos $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.
- Para $a=18$ tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

  Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z=\lambda$:

$$\begin{cases}x+2y=4+2\lambda\\ 2x+5y=10+2\lambda\end{cases} \Rightarrow x=6\lambda,\ y=2-2\lambda,\ z=\lambda$$

d) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&a\\3&a&a\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&3&5\\1&0&a&a\\3&a&a&a\end{pmatrix}$.

$$|A|=0\Rightarrow -a^2+5a=0\Rightarrow a=0,\ a=5$$

- Para $a\neq 0$ y $a\neq 5$ tenemos $|A|\neq 0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5&1&3\\a&0&a\\a&a&a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2a}{a-5}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&5&3\\1&a&a\\3&a&a\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{4a}{a-5}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&5\\1&0&a\\3&a&a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a-7}{a-5}$$

- Para $a=0$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&3&5\\1&0&0&0\\3&0&0&0\end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix}1&1&5\\1&0&0\\3&0&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$.

  Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z=\lambda$:

$$\begin{cases}x+y=5-3\lambda\\x=0\end{cases}\Rightarrow x=0,\ y=5-3\lambda,\ z=\lambda$$

- Para $a=5$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&5\\3&5&5\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&3&5\\1&0&5&5\\3&5&5&5\end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix}1&1&5\\1&0&5\\3&5&5\end{vmatrix}=10\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$.

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

e) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&a\\1&1&a&a^2-2a+2\end{pmatrix}$.

$$|A|=0\Rightarrow a^3-3a+2=0\Rightarrow a=-2,\ a=1$$

- Para $a\neq -2$ y $a\neq 1$ tenemos $|A|\neq 0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\a&a&1\\a^2-2a+2&1&a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1-a}{a+2}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&a^2-2a+2&a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3}{a+2}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&a\\1&1&a^2-2a+2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a^2-1}{a+2}$$

- Para $a=-2$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&10\end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}=3\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-2&-2\\1&1&10\end{vmatrix}=27\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$.

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

  Tanto en A como en A^* las filas son iguales, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=1<\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo, eliminamos dos ecuaciones y hacemos $y=\lambda_1$, $z=\lambda_2$, obteniendo $x=1-\lambda_1-\lambda_2$.

f) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&1&1\\a^2&a&1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\a&1&1&-a^2\\a^2&a&1&-a^3\end{pmatrix}$.

$$|A|=0\Rightarrow a^2-2a+1=0\Rightarrow a=1$$

- Para $a\neq1$ tenemos $|A|\neq0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1&1&1\\-a^2&1&1\\-a^3&a&1\end{vmatrix}}{|A|}=-a-1 \quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\a&-a^2&1\\a^2&-a^3&1\end{vmatrix}}{|A|}=a \quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&-1\\a&1&-a^2\\a^2&a&-a^3\end{vmatrix}}{|A|}=0$$

- Para $a=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&1&1&-1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}$.

  Tanto en A como en A^* las filas son iguales, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=1<\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo, eliminamos dos ecuaciones y hacemos $y=\lambda_1$, $z=\lambda_2$, obteniendo $x=-1-\lambda_1-\lambda_2$.

g) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\-1&a&-1\\a&1&1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&a&1&2\\-1&a&-1&0\\a&1&1&2a\end{pmatrix}$.

$$|A|=0\Rightarrow -2a^2+2a=0\Rightarrow a=0,\ a=1$$

- Para $a\neq0$ y $a\neq1$ tenemos $|A|\neq0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&a&1\\0&a&-1\\2a&1&1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2a+1}{a} \quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&a&1\\-1&a&-1\\a&1&1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1}{a} \quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&a&1\\-1&a&-1\\a&1&1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-a-1}{a}$$

- Para $a=0$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-1&0&-1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1\neq0\Rightarrow\text{rg}(A)=2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=-2\neq0\Rightarrow\text{rg}(A^*)=3$.

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a = 1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$.

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x + y = 2 - \lambda \\ -x + y = \lambda \end{cases} \Rightarrow x = 1 - \lambda,\ y = 1,\ z = \lambda$$

h) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 2 & -1 & a \\ a & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & a & 1 \\ a & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^3 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = 1$$

- Para $a \neq 1$ tenemos $|A| \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a+2}{a^2+a+6} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a-2}{a^2+a+6} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a}{a^2+a+6}$$

- Para $a = 1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$.

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $x = \lambda$:

$$\begin{cases} y = 1 - 3\lambda \\ -y + z = 1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = 1 - 3\lambda,\ z = 2 - 5\lambda$$

77. Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro *a* y resuélvelos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 6 + a \\ y + z = 6 \\ 3x + y - z = 17 \\ 2y - z = a \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax - 3y + z = -10 \\ ay + z = 3 \\ -3x - 3y + z = -10 \\ -3y + z = 3 \end{cases}$

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 6+a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & a \end{pmatrix}$.

$$|A^*| = 0 \Rightarrow 2a - 12 = 0 \Rightarrow a = 6$$

- Para $a \neq 6$ tenemos $|A^*| \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A^*) = 4$, además, $\text{rg}(A) = 3$, por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a = 6$ tenemos $|A^*| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado.

  Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 3 anterior, eliminamos la cuarta ecuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 17 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{55}{11} = 5 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 3 & 17 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{44}{11} = 4 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{22}{11} = 2$$

b) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} a & -3 & 1 & -10 \\ 0 & a & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$|A^*| = 0 \Rightarrow 13a^2 + 78a + 117 = 0 \Rightarrow a = -3$$

- Para $a \neq -3$ tenemos $|A^*| \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A^*) = 4$, además, $\text{rg}(A) = 3$, por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a = -3$ tenemos $|A^*| = 0$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

  Tanto en A como en A^* tenemos $F_1 = F_3$ y $F_2 = F_4$, con lo que sus rangos son menores o iguales a 2, como $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

  Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos las ecuaciones tercera y cuarta y hacemos $z = \lambda$:

$$\begin{cases} -3x - 3y = -10 - \lambda \\ -3y = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{13}{3},\ y = \frac{\lambda - 3}{3},\ z = \lambda$$

Sistemas homogéneos

78. Estudia y resuelve cuando tengan más de una solución los siguientes sistemas homogéneos.

a) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ 3y - 4z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = z \\ x - y = z \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 6y - 8z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \\ -4x - 12y + 4z = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

a) Es un sistema homogéneo y cuadrado. Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 16 \neq 0$, el sistema es compatible determinado, es decir, su única solución es la trivial ($x = y = z = 0$).

b) Es un sistema homogéneo con más ecuaciones que incógnitas. La matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado, es decir, su única solución es la trivial ($x = y = z = 0$).

c) $\begin{cases} x + y = z \\ x - y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

Es un sistema homogéneo con menos ecuaciones que incógnitas, por lo que es compatible indeterminado.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ hacemos $z = \lambda$ y resolvemos el sistema resultante:

$$\begin{cases} x + y = \lambda \\ x - y = \lambda \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = 0,\ z = \lambda$$

d) Es un sistema homogéneo con menos ecuaciones que incógnitas, por lo que es compatible indeterminado.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ hacemos $w = \lambda,\ z = \mu$ y resolvemos el sistema resultante:

$$\begin{cases} x + y = -\mu - \lambda \\ x - y = -\mu + \lambda \end{cases} \Rightarrow x = -\mu,\ y = -\lambda,\ z = \mu,\ w = \lambda$$

e) Es un sistema homogéneo y cuadrado. Como el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 0$, el sistema es compatible indeterminado. Como $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ hacemos $z = \lambda$ y resolvemos el sistema resultante:

$$\begin{cases} 2x - 6y = 8\lambda \\ x - y = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5\lambda}{2},\ y = -\frac{\lambda}{2},\ z = \lambda$$

f) Es un sistema homogéneo con menos ecuaciones que incógnitas, por lo que es compatible indeterminado.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ hacemos $x_3 = \lambda_1,\ x_4 = \lambda_2,\ x_5 = \lambda_3$ y resolvemos el sistema resultante:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ x_1 - 2x_2 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\lambda_1 - \lambda_3,\ x_2 = -\lambda_2,\ x_3 = \lambda_1,\ x_4 = \lambda_2,\ x_5 = \lambda_3$$

Síntesis

79. Calcula los valores de *k* para que el sistema: $\begin{cases}(2k-2)x-y=-2k\\(k-1)x+(k+1)y=17\end{cases}$

a) Sea incompatible. **b)** Sea compatible indeterminado.

Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}2k-2 & -1\\ k-1 & k+1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2k-2 & -1 & -2k\\ k-1 & k+1 & 17\end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea incompatible o compatible determinado es necesario que $|A|=0$:

$$|A|=0\Rightarrow 2k^2+k-3=0\Rightarrow k=-\frac{3}{2},\ k=1$$

a) Para $k=-\frac{3}{2}$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 3\\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 17\end{pmatrix}$. Las filas de A son proporcionales, pero no las de A^*, por lo que $\text{rg}(A)=1\neq\text{rg}(A^*)=2$ y el sistema es incompatible.

Para $k=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 17\end{pmatrix}$. Las filas de A son proporcionales, pero no las de A^*, por lo que $\text{rg}(A)=1\neq\text{rg}(A^*)=2$ y el sistema es incompatible.

b) Según el apartado anterior, para ningún valor de *k* el sistema es compatible indeterminado.

80. Dado el sistema: $\begin{cases}x-2y+z=-5\\2x-5y+z=-12\\-x+y+az=4\end{cases}$

a) Discútelo según los distintos valores del parámetro *a*.

b) Resuélvelo en todos los casos en que sea compatible determinado.

a) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -5 & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -5\\ 2 & -5 & 1 & -12\\ -1 & 1 & a & 4\end{pmatrix}$.

$$|A|=0\Rightarrow -a-2=0\Rightarrow a=-2$$

- Para $a\neq-2$ tenemos $|A|\neq0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado.
- Para $a=-2$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -5 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -5\\ 2 & -5 & 1 & -12\\ -1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -5\end{vmatrix}=-1\neq0\Rightarrow\text{rg}(A)=2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix}1 & -2 & -5\\ 2 & -5 & -12\\ -1 & 1 & 4\end{vmatrix}=-1\neq0\Rightarrow\text{rg}(A^*)=3$.

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

b) Según el apartado anterior, el sistema es compatible determinado cuando $a\neq-2$, con solución:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-5 & -2 & 1\\ -12 & -5 & 1\\ 4 & 1 & a\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{a+5}{a+2}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -5 & 1\\ 2 & -12 & 1\\ -1 & 4 & a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2a+3}{a+2}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & -5\\ 2 & -5 & -12\\ -1 & 1 & 4\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1}{a+2}$$

81. **a)** Calcula el valor de *a* para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible indeterminado y expresa, para este valor, sus infinitas soluciones con ayuda de un parámetro.

$$\begin{cases} 4x - 3y + z = 7 \\ 2x - 2y + z = 6 \\ 2x - z = a \end{cases}$$

b) ¿Existe algún valor real de *a* para el cual el sistema anterior sea compatible determinado?

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$, con $|A| = 0$.

Como $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor tenemos:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = -2a - 8 \Rightarrow \begin{cases} \text{rg}(A^*) = 3 \text{ si } a \neq -4 \\ \text{rg}(A^*) = 2 \text{ si } a = -4 \end{cases}$$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado si $a = -4$. Para resolverlo eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z = \lambda$:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7 - \lambda \\ 2x - 2y = 6 - \lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\lambda - 4}{2}, \ y = \lambda - 5, \ z = \lambda$$

b) Como $|A| = 0$ para cualquier valor de *a*, el sistema nunca es compatible determinado.

82. **Dado el sistema:** $\begin{cases} \mathbf{2x + 2y - z = 6} \\ \mathbf{-4x + 3y + 4z = 2} \\ \mathbf{2ax + 12y + (a+6)z = 21 - a} \end{cases}$

a) Estudia su compatibilidad según los diferentes valores del parámetro *a*.

b) Resuélvelo para $a = -1$.

c) Resuélvelo para $a = 0$.

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2a & 12 & a+6 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ -4 & 3 & 4 & 2 \\ 2a & 12 & a+6 & 21-a \end{pmatrix}$.

$$|A| = 0 \Rightarrow 36a + 36 = 0 \Rightarrow a = -1$$

- Para $a \neq -1$ tenemos $|A| \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado.
- Para $a = -1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ -2 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 \\ -4 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 12 & 5 & 22 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & 12 & 22 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$.

Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado, lo resolvemos eliminando la tercera ecuación y haciendo $z = \lambda$:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 + \lambda \\ -4x + 3y = 2 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{14 + 11\lambda}{14}, \ y = \frac{14 - 2\lambda}{7}, \ z = \lambda$$

c) Para $a=0$ el sistema es compatible determinado con solución:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6&2&-1\\2&3&4\\21&12&6\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2&6&-1\\-4&2&4\\0&21&6\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{84}{36}=\frac{7}{3}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}2&2&6\\-4&3&2\\0&12&21\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-42}{36}=-\frac{7}{6}$$

83. Dado el sistema: $\begin{cases}\boldsymbol{x+y+z=1}\\ \boldsymbol{x+ay+z=a}\\ \boldsymbol{x+y+z=a^2-2a+2}\end{cases}$

a) Estudia su compatibilidad según los diferentes valores del parámetro *a*.

b) Resuélvelo para $a=1$.

c) ¿Existe algún valor de *a* para el cual el sistema tenga una única solución?

a) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&1&a\\1&1&1&a^2-2a+2\end{pmatrix}$, con $|A|=0$ para cualquier *a*.

Tenemos $\text{rg}A=\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&1\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}1&1\\1&a\end{pmatrix}=\begin{cases}2 & \text{si } a\neq 1\\1 & \text{si } a=1\end{cases}$.

- Para $a\neq 1$ tenemos $\text{rg}(A^*)=3$, ya que $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&a\\1&1&a^2-2a+2\end{vmatrix}=(a-1)^2\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.
- Para $a=1$ tenemos $\text{rg}(A^*)=\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=1$, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=1<$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a=1$ el sistema es compatible indeterminado y se resuelve eliminando dos ecuaciones y haciendo $y=\mu$ y $z=\lambda$, obteniendo $x=1-\mu-\lambda$.

c) Como $|A|=0$ para cualquier *a*, no existe ningún valor de *a* para el cual el sistema tenga una única solución.

84. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$ **y** $D = \begin{pmatrix} -2x \\ mx \end{pmatrix}$.

a) Si $(AB - BA)C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por *x* e *y*) en función del parámetro *m*.

b) ¿Para qué valores de *m* el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

a) $(AB - BA)C = D \Rightarrow \begin{pmatrix} -y & y \\ -1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ mx \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (1-m)y \\ -m+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ mx \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + (1-m)y = 0 \\ -mx + y = m \end{cases}$

b) Las matrices del sistema son $E = \begin{pmatrix} 2 & 1-m \\ -m & 1 \end{pmatrix}$ y $E^* = \begin{pmatrix} 2 & 1-m & 0 \\ -m & 1 & m \end{pmatrix}$.

$$|E| = 0 \Rightarrow -m^2 + m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 2$$

- Para $m \neq -1$ y $m \neq 2$ tenemos $|E| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(E) = \text{rg}(E^*) = 2 = \text{n.º de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $m = -1$ tenemos $|E| = 0$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $E^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

  Las filas de *A* son proporcionales, pero no las de *A**, por lo que $\text{rg}(A) = 1 \neq \text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es incompatible.

- Para $m = 2$ tenemos $|E| = 0$, $E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $E^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  Las filas de *A* son proporcionales, pero no las de *A**, por lo que $\text{rg}(A) = 1 \neq \text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es incompatible.

En resumen, el sistema tiene solución cuando $m \neq -1$ y $m \neq 2$, siendo la solución siempre única.

Para $m = 1$ la solución es:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1$$

85. Dado el sistema: $\begin{cases} 2x + y + (m-1)z = 1 \\ 4x + (m-1)y = m-2 \\ y + 2z = m \end{cases}$

a) Estudia su compatibilidad según los diferentes valores del parámetro *m*.

b) Resuélvelo para $m = 0$.

c) Resuélvelo para $m = 2$.

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m-1 \\ 4 & m-1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m-1 & 1 \\ 4 & m-1 & 0 & m-2 \\ 0 & 1 & 2 & m \end{pmatrix}$.

$$|A| = 0 \Rightarrow 8m - 16 = 0 \Rightarrow m = 2$$

- Para $m \neq 2$ tenemos $|A| \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $m = 2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$.

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $m=0$ el sistema es compatible determinado con solución:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{4}{-16}=-\frac{1}{4}\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-16}{-16}=1\quad z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{8}{-16}=-\frac{1}{2}$$

c) Para $m=2$ el sistema es compatible indeterminado, lo resolvemos eliminando la tercera ecuación y haciendo $x=\lambda$:

$$\begin{cases}y+z=1-2\lambda\\ y=-4\lambda\end{cases}\Rightarrow x=\lambda,\ y=-4\lambda,\ z=1+2\lambda$$

86. **Dado el sistema:** $\begin{cases}\boldsymbol{kx+y+z=1}\\ \boldsymbol{y+z=1}\\ \boldsymbol{x+ky+z=2}\end{cases}$

a) Estudia su compatibilidad según los diferentes valores del parámetro *k*.

b) Resuélvelo para $k=2$.

c) Resuélvelo para $k=0$.

a) Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix}k & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & k & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}k & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 2\end{pmatrix}$.

$$|A|=0\Rightarrow -k^2+k=0\Rightarrow k=0,\ k=1$$

- Para $k\neq 0$ y $k\neq 1$ tenemos $|A|\neq 0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

- Para $k=0$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$.

  Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

- Para $k=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$.

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

b) Para $k=2$ el sistema es compatible determinado con solución:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{0}{-2}=0\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-2}{-2}=1\quad z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{0}{-2}=0$$

c) Para $k=0$ el sistema es compatible indeterminado, lo resolvemos eliminando la primera ecuación y haciendo $z=\lambda$:

$$\begin{cases}y=1-\lambda\\ x=2-\lambda\end{cases}\Rightarrow x=2-\lambda,\ y=1-\lambda,\ z=\lambda$$

87. Dado el sistema: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ a & -4 & -2 \\ -2 & -a & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Estudia su compatibilidad según los diferentes valores del parámetro *a*.

b) Resuélvelo para $a = 3$.

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ a & -4 & -2 \\ -2 & -a & 7 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ a & -4 & -2 & -15 \\ -2 & -a & 7 & -7 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 0 \Rightarrow 5a^2 - 11a - 12 = 0 \Rightarrow a = 3,\ a = -\frac{4}{5}$$

- Para $a \neq -\frac{4}{5}$ y $a \neq 3$ tenemos $|A| \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $a = 3$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & -2 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 3 & -4 & -2 & -15 \\ -2 & -3 & 7 & -7 \end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -15 \\ -2 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$.

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible indeterminado.

- Para $a = -\frac{4}{5}$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -\frac{4}{5} & -4 & -2 \\ -2 & \frac{4}{5} & 7 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ -\frac{4}{5} & -4 & -2 & -15 \\ -2 & \frac{4}{5} & 7 & -7 \end{pmatrix}$.

  $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -22 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -4 & -2 & -15 \\ \frac{4}{5} & 7 & -7 \end{vmatrix} = \frac{1463}{5} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$.

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

b) Para $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado, lo resolvemos eliminando la tercera ecuación y haciendo $z = \lambda$:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 + 5\lambda \\ 3x - 4y = -15 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow x = -1 + 2\lambda,\ y = 3 + \lambda,\ z = \lambda$$

88. Calcula el valor de *m* para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible indeterminado y escribe las infinitas soluciones para este valor hallado.

$$\begin{cases} \mathbf{2x + 3y - z = 4} \\ \mathbf{4x - y - 2z = 1} \\ \mathbf{2x - 4y - z = -3} \\ \mathbf{2x - my - z = 4} \end{cases}$$

Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & -m & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 2 & -m & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \geq 2$, ampliando este menor tenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -m & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -m & 4 \end{vmatrix} = -14m - 42 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = \begin{cases} 2 & \text{si } m = -3 \\ 3 & \text{si } m \neq -3 \end{cases}$$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado si $m = -3$. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos las ecuaciones tercera y cuarta y hacemos $z = \lambda$:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 + \lambda \\ 4x - y = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1+\lambda}{2},\ y = 1,\ z = \lambda$$

NOTA: Alternativamente, podríamos aplicar el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 2 & -m & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & -m-3 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & -m-3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado, la última fila debe ser nula, por tanto $m = -3$, siendo la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ -7y = -7 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1+\lambda}{2},\ y = 1,\ z = \lambda$$

89. Calcula los valores de *a* y *b* para que estos sistemas de ecuaciones lineales sean compatibles y equivalentes.

a) $\begin{cases} 2x + ay - 3z = -9 \\ x + 2y - z = -6 \\ 3x - y - z = b \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax - by + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + z = 11 \end{cases}$

Para que los sistemas sean compatibles y equivalentes deben tener las mismas soluciones, es decir, verificarán las seis ecuaciones, en particular, serán soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ 2x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + z = 11 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema tenemos $x = 1,\ y = -2,\ z = 3$, por tanto, ambos sistemas debe ser compatibles determinados y

$$\begin{cases} 2 - 2a - 9 = -9 \\ 3 + 2 - 3 = b \\ a + 2b + 9 = 14 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = 2$$

90. Encuentra los valores de *a* y *b* que hacen que el siguiente sistema sea incompatible.

$$\begin{cases} \mathbf{3x - 4y + z = a} \\ \mathbf{-x + y + z = b} \\ \mathbf{2x - 3y + 2z = 4} \end{cases}$$

Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, con $|A| = 0$.

Como $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix} 3 & -4 & a \\ -1 & 1 & b \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = a + b - 4$.

Por tanto, el sistema es incompatible si $a + b \neq 4$.

CUESTIONES

91. a) Escribe razonadamente un sistema compatible indeterminado y que tenga cuatro ecuaciones y tres incógnitas.

b) Escribe razonadamente un sistema lineal homogéneo con tres ecuaciones y tres incógnitas de forma que (−2, 1, 0) sea una solución.

a) Una forma de conseguirlo es escribir dos ecuaciones independientes, la siguiente igual a la suma de las dos primeras y la última igual a la diferencia de las dos primeras.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = 2 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ -x + z = -1 \end{cases}$$

b) Se escriben, por ejemplo, dos ecuaciones independientes cuya solución sea (−2, 1, 0) y otra que sea la suma de las dos primeras.

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

92. Escribe dos sistemas equivalentes compatibles indeterminados de forma que el primero tenga dos ecuaciones y tres incógnitas y el segundo tenga tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = 9 \end{cases}$$

93. Dado el sistema $\begin{cases} \mathbf{2x + y + 3z = 5} \\ \mathbf{x - 2y + z = 1} \end{cases}$**:**

a) Añade una tercera ecuación para que sea incompatible.

b) Añade una tercera ecuación para que sea compatible determinado.

c) Añade una ecuación para que resulte un sistema compatible indeterminado.

a) Basta añadir, por ejemplo, la ecuación $2x + y + 3z = 0$.

b) Basta añadir, por ejemplo, la ecuación $z = 0$, obteniendo un sistema compatible determinado con solución $x = \frac{11}{5}$, $y = \frac{3}{5}$, $z = 0$.

c) Basta añadir una ecuación que sea combinación lineal de las dadas, por ejemplo, $3x - y + 4z = 6$.

94. Dado el sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x+y-z=0} \\ \boldsymbol{2x-3y+z=-2} \\ \boldsymbol{x-z=-1} \end{cases}$**:**

a) Añade una ecuación para que resulte un sistema incompatible.

b) Añade una ecuación para que resulte un sistema compatible determinado.

c) ¿Se puede añadir alguna ecuación para que resulte un sistema compatible indeterminado?

a) Basta añadir, por ejemplo, la ecuación $x+y-z=1$.

b) El sistema dado es compatible determinado con solución $x=0, y=1, z=1$. Por tanto, basta añadir una ecuación que también tenga esta solución, por ejemplo, $x=0$.

c) Como el sistema inicial tiene una única solución, al añadir una nueva ecuación puede ocurrir que siga teniendo esta única solución o ninguna pero no infinitas soluciones.

95. Escribe un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas, que sea compatible indeterminado y que tenga como infinitas soluciones $\boldsymbol{x=y=z=\lambda}$.

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$$

96. Escribe de forma razonada:

a) Un sistema lineal de tres ecuaciones y dos incógnitas con infinitas soluciones.

b) Un sistema lineal de cuatro ecuaciones y dos incógnitas con infinitas soluciones.

c) Un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas y una única solución.

d) Un sistema lineal homogéneo con tres ecuaciones y tres incógnitas, de tal manera que dos de sus soluciones sean (−2, 0, 1) y (3, 2, −1).

a) Basta con elegir tres ecuaciones proporcionales, por ejemplo:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}.$$

b) Basta con elegir cuatro ecuaciones proporcionales, por ejemplo:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 3x+3y=0 \\ 4x+4y=0 \end{cases}.$$

c) No es posible, ya que el rango de *A* no coincidiría con el número de incógnitas.

d) Las soluciones del sistema serán de la forma $\begin{cases} x=-2\lambda+3\mu \\ y=2\mu \\ z=\lambda-\mu \end{cases}$.

Considerando éste como un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas λ y μ, dicho sistema debe ser compatible indeterminado, con lo que $\begin{vmatrix} -2 & 3 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2x-y+4z=0$.

Por tanto, es sistema buscado podría ser:

$$\begin{cases} 2x-y+4z=0 \\ 2x-y+4z=0 \\ 2x-y+4z=0 \end{cases}$$

PROBLEMAS

97. María y Luis han realizado un desplazamiento en coche que ha durado 13 horas, durante el que María ha conducido una parte y Luis otra, descansando el resto del tiempo. Luis ha conducido 2 horas más de las que han descansado, y el total de horas de descanso junto con las de conducción de Luis es 1 hora menos que las que ha conducido María. Encuentra el número de horas que cada uno ha pasado al volante y las que han descansado.

x: horas de conducción de Luis *y*: horas de conducción de María *z*: horas de descanso

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=13 \\ x=z+2 \\ z+x=y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=13 \\ x-z=2 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que Luis ha conducido durante $x=4$ horas, María durante $y=7$ horas y han descansado durante $z=2$ horas.

98. Una empresa copra tres inmuebles por un valor total de 2 millones de euros. Al venderlos, espera obtener unas ganancias del 20 %, del 50 % y del 25 %, respectivamente, que le reportarán unos beneficios totales de 600 000 €. Sin embargo, en el momento de ponerlos en venta, consigue unas ganancias del 80 %, del 90 % y del 85 %, respectivamente, lo que le reporta unos beneficios totales de 1,7 millones de euros. ¿Cuánto había pagado por cada inmueble?

Sean *x*, *y*, y *z* el precio que pagó la empresa por cada inmueble.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 0,20x+0,50y+0,25z=0,6 \\ 0,80x+0,90y+0,85z=1,7 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $x=0,5$, $y=0,5$ y $z=1$, es decir, pagaron 500 000, 500 000 y 1 000 000 de euros, respectivamente.

99. La producción de bicicletas de montaña precisa las siguientes acciones: montaje de las piezas, ajuste de los cambios y control de calidad. Una empresa produce tres tipos de bicicletas: para niños, para jóvenes y para adultos mayores de 40 años. La siguiente tabla muestra las horas necesarias para llevar a cabo cada una de las acciones en cada una de las clases de bicicleta mencionadas:

	Niño	Joven	Adulto
Montaje	2	4	3
Ajuste	1	2	2
Control	2	1	1

La disponibilidad total de horas de trabajo es: Montaje: 510 Ajuste: 270 Control: 180

Comprueba si existe alguna posibilidad de fabricación que consuma todas las horas disponibles.

Sean *x*, *y*, y *z*, respectivamente, las bicicletas de niño, joven y adulto fabricadas.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} 2x+4y+3z=510 \\ x+2y+2z=270 \\ 2x+y+z=180 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que fabricando $x=30$ bicicletas de niño, $y=90$ de joven y $z=30$ de adulto mayor de 40 años, se consumen exactamente las horas disponibles.

100. Se conocen los siguientes datos sobre cómo ha variado la población de una determinada localidad:

- **La población al comienzo del período era de 14 520 habitantes, y al final, de 14 958.**
- **El número de nacimientos más el de inmigrantes llegados fue de 900.**
- **El número de fallecimientos más el de emigrantes fue de 462.**
- **El número de emigrantes fue igual al 48 % del número de inmigrantes.**

Calcula el número de nacimientos y de emigrantes.

La ecuación fundamental de la población es:

P. final = P. inicial + Nacimientos – Defunciones + Inmigrantes – Emigrantes $\Rightarrow P_f = P_i + N - D + I - E$

Teniendo en cuenta esta ecuación y los datos del enunciado, se puede escribir el sistema:

$$\begin{cases} 14958 = 14520 + N - D + I - E \\ N + I = 900 \\ D + E = 462 \\ E = 0{,}48I \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $N = 900,\ D = 462,\ I = 0$ y $E = 0$, es decir, hubo 900 nacimientos y ningún emigrante.

101. Un establecimiento pone a la venta tres tipos de abrigos *A*, *B* y *C*. Se sabe que la razón entre los precios de los abrigos *A* y *C* es 2 a 3 y entre los de *B* y *A* es 3 a 1. Al comprar tres abrigos, uno de cada clase, se pagan 330 €. Plantea el sistema de ecuaciones que permite conocer el precio de cada abrigo.

Sean *x*, *y*, y *z*, respectivamente, los precios de un abrigo *A*, *B* y *C*.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y + z = 330 \\ \dfrac{x}{z} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 330 \\ 3x - 2z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

NOTA: Resolviendo el sistema obtenemos que los abrigos cuestan, respectivamente, $x = 60$ €, $y = 180$ € y $z = 90$ €.

102. En un estudio de mercado, se eligen tres productos, *A*, *B* y *C* y cuatro tiendas. En la primera, por una unidad de cada producto cobran, en total, 4,25 €. En la segunda, 2 unidades de *A* y tres de *C* valen 8,25 € más que una unidad de *B*. En la tercera, una unidad de *A* y 2 de *C* valen 4 € más que 2 unidades de *B* y, en la cuarta, una unidad de *B* vale 1,25 € menos que una de *C*. ¿Tienen *A*, *B* y *C* el mismo precio en las cuatro tiendas? Si la respuesta es no, justifícalo y si la respuesta es sí, indica cuál es el precio.

Supongamos que los precios de los tres productos son los mismos en las tres tiendas, pongamos *x*, *y* y *z*, respectivamente.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y + z = 4{,}25 \\ 2x + 3z = y + 8{,}25 \\ x + 2z = 2y + 4 \\ y = z - 1{,}25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4{,}25 \\ 2x - y + 3z = 8{,}25 \\ x - 2y + 2z = 4 \\ y - z = -1{,}25 \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 2 & -1 & 3 & 8{,}25 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1{,}25 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & 1 & -1 & -1{,}25 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \to 3F_4 + F_2]{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Por tanto, el sistema es compatible determinado, es decir, los precios de los productos sí tienen el mismo precio en las cuatro tiendas, y estos precios son:

$$\begin{cases} x + y + z = 4{,}25 \\ -3y + z = -0{,}25 \\ -2z = -4 \end{cases} \Rightarrow x = 1{,}5 \text{ €},\ y = 0{,}75 \text{ €},\ z = 2 \text{ €}$$

103. El cajero de un banco solo dispone de billetes de 10 €, 20 € y 50 €. Se han sacado 16 billetes con un total de 440 €. El doble de billetes de 10 € excede en una unidad al número de billetes de 50 €. Plantea y resuelve el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que se han sacado.

Sean x, y y z el número de billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=16 \\ 10x+20y+50z=440 \\ 2x=1+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=16 \\ x+2y+5z=44 \\ 2x-z=1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que hay $x=3$ billetes de 10 €, $y=8$ billetes de 20 € y $z=5$ billetes de 50 €.

104. El precio de la pensión completa en un hotel es de 30 € por persona y día. A los niños menores de 10 años se les cobra el 50 %, y a las personas mayores de 65, el 70 % de ese precio. Determina el número de niños menores de 10 años y de personas mayores de 65 que había cierto día en el hotel, si se sabe que: había 200 personas, el número de mayores de 65 era igual al 25 % del número de niños y se recaudaron 4620 € por las pensiones completas de todas ellas.

Sea x el número de niños menores de 10 años, y, el de mayores de 65 años, y z, el resto de personas.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=200 \\ y=0{,}25x \\ 0{,}50\cdot 30x+0{,}70\cdot 30y+30z=4620 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=200 \\ -0{,}25x+y=0 \\ 15x+21y+30z=4620 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que hay $x=80$ niños menores de 10 años e $y=20$ personas mayores de 65 años (y $z=100$ personas entre 10 y 65 años).

105. Determina la medida de cuatro pesas de una balanza si se sabe que pesadas en grupos de tres dan como resultados respectivos 9, 10, 11 y 12 g.

Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son las medidas de las pesas, las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=9 \\ x_1+x_2+x_4=10 \\ x_1+x_3+x_4=11 \\ x_2+x_3+x_4=12 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $x_1=2$ g, $x_2=3$ g, $x_3=4$ g y $x_4=5$ g.

106. La suma de la inversión en acciones de una empresa textil, una empresa de gas y una compañía de telefonía es de 7400 €. Las acciones de la empresa textil pagan un 2 % de interés anual, las de la empresa de gas, un 4 % y las de la compañía de telefonía pagan un 5 %. La suma del interés anual es de 278 €. La inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 1000 € menos que la suma de la inversión en acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas.

a) Calcula la cantidad invertida en cada una de las acciones.

b) ¿Puede calcularse el capital invertido en cada una de las acciones si se cambia la tercera condición por "el doble de la inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 2000 € menos que la diferencia de la inversión en las acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas"?

a) Sean x, y y z las cantidades invertidas en acciones de la empresa textil, la empresa de gas y la compañía de telefonía, respectivamente.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=7400 \\ 0{,}02x+0{,}04y+0{,}05z=278 \\ z=x+y-1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=7400 \\ 0{,}02x+0{,}04y+0{,}05z=278 \\ -x-y+z=-1000 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que se han invertido $x=2500$ € en la empresa textil, $y=1700$ € en la empresa de gas y $z=3200$ € en la compañía de telefonía.

b) En este caso obtendríamos el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=7400 \\ 0{,}02x+0{,}04y+0{,}05z=278 \\ 2z=x-y-2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=7400 \\ 0{,}02x+0{,}04y+0{,}05z=278 \\ -x+y+2z=-2000 \end{cases}$$

Al intentar resolver el nuevo sistema concluimos que no tiene solución.

107. Un individuo hace fotografías con una cámara digital. Sabe que cada fotografía de calidad normal ocupa siempre 0,20 MB de memoria. Cada fotografía de calidad óptima ocupa siempre una cantidad *a* de megabytes que no conoce. Esta semana ha llevado a imprimir 24 fotografías que le han ocupado 9,2 MB de memoria.

a) Plantea un sistema de ecuaciones en función de a donde las incógnitas sean el número de fotos de cada clase que ha realizado. ¿Hay alguna cantidad de megabytes que es imposible que ocupe cada foto de calidad óptima?

b) La semana pasada también hizo 24 fotografías y ocupó 9,2 MB. ¿Es posible que el número de fotografías de cada tipo fuera diferente al de esta semana?

a) Sean x el número de fotografías de calidad normal e y el de calidad óptima que realiza.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y=24 \\ 0{,}2x+ay=9{,}2 \end{cases}$$

Las matrices del sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}2 & a \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 24 \\ 0{,}2 & a & 9{,}2 \end{pmatrix}$, con $|A|=a-0{,}2$.

- Para $a\neq 0{,}2$ tenemos $|A|\neq 0$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2=\text{nº de incógnitas}$ y el sistema es compatible determinado.
- Para $a=0{,}2$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 24 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 9{,}2 \end{pmatrix}$.

  Las filas de A son proporcionales, pero las de A^* no, por lo que $\text{rg}(A)=1\neq\text{rg}(A^*)=2$ y el sistema es incompatible.

Por tanto, una foto de calidad óptima no puede ocupar 0,2 MB.

b) Según el apartado anterior, si $a\neq 0{,}2$ el sistema tiene una única solución, por lo que el número de fotos de cada tipo tiene que ser la misma en las dos semanas.

NOTA: Podemos ajustar mejor el valor que puede tomar a en el primer apartado observando que si $a\neq 0{,}2$, resolviendo el sistema, tenemos $x=24-\dfrac{22}{5a-1}$ e $y=\dfrac{22}{5a-1}$, que deben ser enteros no negativos, es decir:

$$y=\frac{22}{5a-1}\in\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 24\}$$

Por tanto, una fotografía de calidad óptima debe ocupar $a=\dfrac{k+22}{5k}$ MB, donde $k\in\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 24\}$.

108. Un camión trae, en su carga, cajas de tres productos *A*, *B* y *C*. Se ha perdido la hoja de carga, pero uno de los operarios recuerda que en total hay 120 cajas, que las de tipo *A* eran tantas como del tipo *B* y *C* juntas y que las del tipo *C* eran la cuarta parte de las del tipo *B*.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo trae el camión?

b) Otro operario dice que del tipo *A* eran 12 más que del tipo *B*. Comprueba si esta información se contradice con la del primer operario.

a) Sean x, y y z el número de cajas de tipo *A*, *B* y *C*, respectivamente.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=120 \\ x=y+z \\ z=\dfrac{y}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=120 \\ x-y-z=0 \\ -y+4z=0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos hay $x=60$ cajas *A*, $y=48$ cajas *B* y $z=12$ cajas *C*.

b) Como la solución también cumple la nueva condición, $x=y+12$, la nueva información no contradice la anterior.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Escribe la expresión matricial del siguiente sistema de ecuaciones lineales y especifica las matrices de los coeficientes, ampliada y de los términos independientes.

$$\begin{cases} -2x+3z=-4 \\ -3x-y+2z=5 \\ y=-6 \end{cases}$$

Expresión matricial: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

Matriz de coeficientes: $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $A^*=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Matriz de términos independientes: $B=\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

2. Comprueba que los siguientes sistemas son compatibles determinados y resuélvelos aplicando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-3y=23 \\ 4x-\dfrac{2}{3}y=44 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-3y+5z=0 \\ 3x+5y-z=17 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-3y=23 \\ 4x-\dfrac{2}{3}y=44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6y=46 \\ 12x-2y=132 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 46 \\ 12 & -2 & 132 \end{array}\right) \underset{F_2\to F_2-12F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & 46 \\ 0 & 70 & -420 \end{array}\right)$

El sistema es compatible determinado con solución:

$$\begin{cases} x-6y=46 \\ 70y=-420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=-6 \end{cases}$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 17 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 19 & -17 & 34 \\ 0 & 6 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_3 \to 19F_3 - 6F_1}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 19 & -17 & 34 \\ 0 & 0 & 83 & -166 \end{array}\right)$

El sistema es compatible determinado con solución:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 19y - 17z = 34 \\ 83z = -166 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

3. Comprueba que los siguientes sistemas son compatibles determinados y resuélvelos aplicando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 4x - \dfrac{1}{3}y = 34 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 4y + 3z = 2 \\ x - 2y - 3z = -16 \\ 4x - 2y + 5z = 10 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - \dfrac{1}{3}y = 34 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - y = 102 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$

El sistema es cuadrado y el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 12 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 77 \neq 0$, por lo que el sistema es compatible determinado con solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 102 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{616}{77} = 8 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 102 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-462}{77} = -6$$

b) El sistema es cuadrado y el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 38 \neq 0$, por lo que el sistema es compatible determinado con solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -16 & -2 & -3 \\ 10 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-76}{38} = -2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -16 & -3 \\ 4 & 10 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{38}{38} = 1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -16 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{152}{38} = 4$$

4. Estudia la compatibilidad y resuelve, en cada caso.

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -3 \\ -3x - y + 7z = 2 \\ 5x + 9y - 31z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -7 \\ 3x - 2y = -8 \\ 4x - 2y - 2z = -10 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & -3 \\ -3 & -1 & 7 & 2 \\ 5 & 9 & -31 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to 2F_2 + 3F_1 \\ F_3 \to 2F_3 - 5F_1}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -11 & 29 & -5 \\ 0 & 33 & -87 & 23 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + 3F_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -11 & 29 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$

El sistema es incompatible.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 0 & -8 \\ 4 & -2 & -2 & -10 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 4 & -12 & 4 \end{array}\right) \underset{F_3 \to 5F_3 - 4F_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

El sistema es compatible indeterminado, con solución:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -7 \\ 5y - 15z = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2\lambda - 2,\ y = 1 + 3\lambda,\ z = \lambda$$

5. Estudia, según los valores del parámetro *a*, y resuelve en los casos en que sea posible los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x - 4y + az = -a \\ ax - 4y + z = 8 \\ x - 2z = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - ay + z = 14 \\ 3x - 3y = 27 \\ x - az = 5 \\ y + 2z = -4 \end{cases}$

a) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & a \\ a & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & a & -a \\ a & -4 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 0 \Rightarrow -4a + 12 = 0 \Rightarrow a = 3$$

- Para $a \neq 3$ tenemos $|A| \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a & -4 & a \\ 8 & -4 & 1 \\ 11 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = -9 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & a \\ a & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{9(a+2)}{4} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & a \\ a & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = -10$$

- Para $a = 3$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ampliando este menor tenemos $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \\ 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$.

Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z = \lambda$:

$$\begin{cases} 2x - 4y = -3 - 3\lambda \\ 3x - 4y = 8 - \lambda \end{cases} \Rightarrow x = 11 + 2\lambda,\ y = \frac{25 + 7\lambda}{4},\ z = \lambda$$

b) Las matrices del sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & -a & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -a & 1 & 14 \\ 3 & -3 & 0 & 27 \\ 1 & 0 & -a & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

$$|A^*| = 0 \Rightarrow 12a^2 + 12a - 24 = 0 \Rightarrow a = -2,\ a = 1$$

- Para $a \neq -2$ y $a \neq 1$ tenemos $|A^*| \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A^*) = 4$, además, $\text{rg}(A) = 3$, por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a = -2$ tenemos $|A^*| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 14 \\ 3 & -3 & 0 & 27 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 3 anterior, eliminamos la cuarta ecuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 2 & 1 \\ 27 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-177}{-21} = \frac{59}{7} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 3 & 27 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{-21} = -\frac{4}{7} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 14 \\ 3 & -3 & 27 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{36}{-21} = -\frac{12}{7}$$

- Para $a=1$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 14\\ 3 & -3 & 0 & 27\\ 1 & 0 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$.

  Como $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=6\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

  Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 3 anterior, eliminamos la cuarta ecuación:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}14 & -1 & 1\\ 27 & -3 & 0\\ 5 & 0 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}=\frac{30}{6}=5 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 14 & 1\\ 3 & 27 & 0\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-24}{6}=-4 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & 14\\ 3 & -3 & 27\\ 1 & 0 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}=\frac{0}{6}=0$$

6. Mafalda ha gastado un total de 34 € en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la octava parte, el del bolígrafo, a la mitad, y el del libro, a la cuarta parte de sus respectivos precios iniciales, Mafalda pagaría un total de 6 € por ellos. Calcula el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que el precio de la mochila excede en 4 € al doble de la suma de los precios del bolígrafo y del libro juntos.

Sea x, y y z, respectivamente, el precio de la mochila, el bolígrafo y el libro.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases}x+y+z=34\\ \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=6\\ x=4+2(y+z)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=34\\ x+4y+2z=48\\ x-2y-2z=4\end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que la mochila cuesta $x=24$ €, el bolígrafo $y=2$ € y el cuaderno $z=8$ €.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Dadas las dos ecuaciones siguientes: $\begin{cases}\mathbf{2x-y+2z=0}\\ \mathbf{2x-y-z=-2}\end{cases}$

¿Qué ecuación de las siguientes debe añadirse a estas dos para que el sistema sea incompatible?

A. $4x-2y+z=-2$ **B.** $4x-2y+z=2$ **C.** $z=\dfrac{2}{3}$ **D.** $x+y+z=1$

Estudiando la compatibilidad de los distintos sistemas posibles se concluye que la respuesta correcta es B.

2. El rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas en un sistema de ecuaciones lineales es 2. El rango de la matriz ampliada:

A. Es seguro que vale 2.
C. Puede valer 1 o 2.
B. Es seguro que vale 3.
D. Puede valer 2 o 3.

La respuesta correcta es D, ya que en un sistema de ecuaciones lineales, el rango de la matriz ampliada es siempre igual o una unidad mayor que el rango de la matriz de coeficientes.

3. El sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - y - z = 0} \\ \boldsymbol{x + y = 2} \\ \boldsymbol{3x + y - z = 4} \end{cases}$$

A. Tiene como única solución $(x = 1, y = 1, z = 0)$.

B. Una de sus soluciones es $(x = 2, y = 0, z = 2)$.

C. Es incompatible.

D. Tiene como soluciones únicas $(x = 1, y = 1, z = 0)$ y $(x = 2, y = 0, z = 2)$.

Sustituyendo comprobamos que $(x = 1, y = 1, z = 0)$ y $(x = 2, y = 0, z = 2)$ son soluciones del sistema, por tanto, A y C son incorrectas y B es correcta.

También D es incorrecta, ya que un sistema lineal o no tiene solución, o tiene solución única o tiene infinitas soluciones.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. En un sistema de *n* ecuaciones lineales con *m* incógnitas:

A. Si $n = 2$ y $m = 3$, entonces el sistema no puede ser compatible determinado.

B. Si $n = 2$ y $m = 3$, entonces el sistema es compatible indeterminado.

C. Si $n = 2$, $m = 3$ y el sistema es homogéneo, entonces es compatible indeterminado.

D. Ninguna de las anteriores opciones es cierta.

A es correcta, ya que si $n = 2$ y $m = 3$, el rango de la matriz de coeficientes no puede coincidir con el número de incógnitas y, por tanto, el sistema no puede ser compatible determinado.

C también es correcta, ya que si el sistema es homogéneo es compatible, y según lo dicho anteriormente, no puede ser determinado, por lo que debe ser compatible indeterminado.

B es incorrecta, si $n = 2$ y $m = 3$ el sistema no puede ser compatible determinado, pero sí puede ser incompatible, por ejemplo, el sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

D es obviamente incorrecta.

En conclusión, las respuestas correctas son A y C.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

5. Se considera un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

1. El rango de la matriz de los coeficientes es 2.

2. El sistema es compatible determinado.

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

La segunda afirmación equivale a que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{nº de incógnitas}$, por tanto, la relación correcta es D.

Señala el dato innecesario para contestar

6. ***Se quiere resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Para ello se dan los siguientes datos:**

   1. El determinante de la matriz de los coeficientes vale 4.

   2. El sistema tiene una única solución.

   3. El rango de la matriz de los coeficientes es 3.

   A. El dato 1 es innecesario.

   B. El dato 2 es innecesario.

   C. El dato 3 es innecesario.

   D. Nada de lo anterior.

   Cualquiera de las afirmaciones, por sí sola, implica que el sistema es compatible determinado, por tanto, la respuesta correcta es D.