4 Programación lineal

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado.

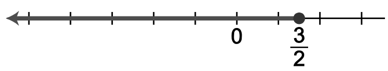
a) $3x+3(2x-5)-4(x-2)\le 2-x$

b) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x-1}{6}>1-\dfrac{2x-5}{2}$

c) $\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{x-2}{8}\le\dfrac{x}{2}$

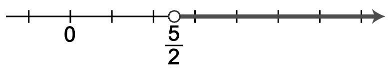
a) $3x+3(2x-5)-4(x-2)\le 2-x \Rightarrow 3x+6x-15-4x+8\le 2-x \Rightarrow 6x\le 9 \Rightarrow x\le\dfrac{3}{2}$

Solución: $x\in\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$



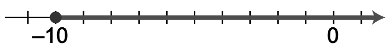
b) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x-1}{6}>1-\dfrac{2x-5}{2}\Rightarrow 3x-(x-1)>6-3(2x-5)\Rightarrow 3x-x+1>6-6x+15\Rightarrow 8x>20\Rightarrow x>\dfrac{5}{2}$

Solución: $x\in\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$



c) $\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{x-2}{8}\le\dfrac{x}{2}\Rightarrow 4(x-3)-(x-2)\le 4x\Rightarrow 4x-12-x+2\le 4x\Rightarrow -x\le 10\Rightarrow x\ge -10$

Solución: $x\in[-10, +\infty)$



2. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado.

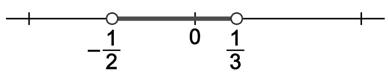
a) $2(x-1)^2+x<4-(2x+1)^2$

b) $\dfrac{x^2+2}{3}-\dfrac{1-x}{2}\ge\dfrac{1}{2}$

a) $2(x-1)^2+x<4-(2x+1)^2\Rightarrow 2x^2-4x+2+x<4-4x^2-4x-1\Rightarrow 6x^2+x-1<0\Rightarrow 6\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)<0$

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, +\infty)$
$x+\dfrac{1}{2}$	–	+	+
$x-\dfrac{1}{3}$	–	–	+
$6\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$	+	–	+

Solución: $x\in\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$

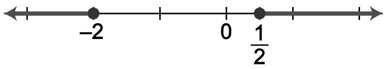


b) $\frac{x^2+2}{3}-\frac{1-x}{2}\geq\frac{1}{2}\Rightarrow 2x^2+4-3+3x\geq 3\Rightarrow 2x^2+3x-2\geq 0\Rightarrow 2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq 0$

$-\infty \quad -2 \quad \frac{1}{2} \quad +\infty$

$x+2$	–	+	+
$x-\frac{1}{2}$	–	–	+
$2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$	+	–	+

Solución: $x\in(-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$



3. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $x^3-4x^2-31x+70<0$

b) $x^3+3x(x-5)+6\geq 3(2-5x)$

c) $x^3+4x^2-3x-10<8$

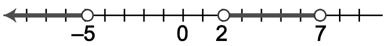
d) $6x^3+x^2-5x-1>1$

a) $x^3-4x^2-31x+70<0\Rightarrow(x+5)(x-2)(x-7)<0$

$-\infty \quad -5 \quad 2 \quad 7 \quad +\infty$

$x+5$	–	+	+	+
$x-2$	–	–	+	+
$x-7$	–	–	–	+
$(x+5)(x-2)(x-7)$	–	+	–	+

Solución: $x\in(-\infty,-5)\cup(2,7)$

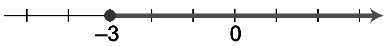


b) $x^3+3x(x-5)+6\geq 3(2-5x)\Rightarrow x^3+3x^2-15x+6\geq 6-15x\Rightarrow x^3+3x^2\geq 0\Rightarrow x^2(x+3)\geq 0$

$-\infty \quad -3 \quad 0 \quad +\infty$

$x+3$	–	+	+
x^2	+	+	+
$x^2(x+3)$	–	+	+

Solución: $x\in[-3,+\infty)$

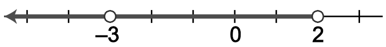


c) $x^3+4x^2-3x-10<8\Rightarrow x^3+4x^2-3x-18<0\Rightarrow(x-2)(x+3)^2<0$

$-\infty \quad -3 \quad 2 \quad +\infty$

$(x+3)^2$	+	+	+
$x-2$	–	–	+
$(x-2)(x+3)^2$	–	–	+

Solución: $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,2)$

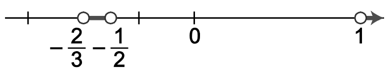


d) $6x^3+x^2-5x-1>1\Rightarrow 6x^3+x^2-5x-2>0\Rightarrow 6(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)>0$

$-\infty \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad +\infty$

$x+\frac{2}{3}$	–	+	+	+
$x+\frac{1}{2}$	–	–	+	+
$x-1$	–	–	–	+
$6(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$	–	+	–	+

Solución: $x\in\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$



4. Ejercicio resuelto.

5. Halla la solución de las siguientes inecuaciones.

a) $\dfrac{2x-1}{1-x}<-3$ **b)** $10+\dfrac{84}{x-5}\le -7-3x$

a) $\dfrac{2x-1}{1-x}<-3 \Rightarrow \dfrac{2x-1}{1-x}+3<0 \Rightarrow \dfrac{2x-1+3-3x}{1-x}<0 \Rightarrow \dfrac{2-x}{1-x}<0 \Rightarrow \dfrac{x-2}{x-1}<0$

$-\infty \qquad 1 \qquad 2 \qquad +\infty$

$x-1$	–	+	+
$x-2$	–	–	+
$\dfrac{x-2}{x-1}$	+	–	+

Solución: $x\in(1,2)$

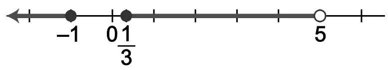
b) $10+\dfrac{84}{x-5}\le -7-3x \Rightarrow \dfrac{84}{x-5}+17+3x\le 0 \Rightarrow \dfrac{84+17x-85+3x^2-15x}{x-5}\le 0 \Rightarrow \dfrac{3x^2+2x-1}{x-5}\le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x-5}\le 0$

$-\infty \qquad -1 \qquad \frac{1}{3} \qquad 5 \qquad +\infty$

$x+1$	–	+	+	+
$x-\frac{1}{3}$	–	–	+	+
$x-5$	–	–	–	+
$\dfrac{3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x-5}$	–	+	–	+

Solución: $x\in(-\infty,-1]\cup\left[\dfrac{1}{3},5\right)$



6. Resuelve las siguientes inecuaciones.

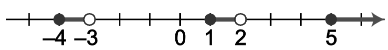
a) $\dfrac{x^3-2x^2-19x+20}{x^2+x-6}\ge 0$ **b)** $\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+10x^2+25x}\le 0$

a) $\dfrac{x^3-2x^2-19x+20}{x^2+x-6}\ge 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(x+4)(x-5)}{(x-2)(x+3)}\ge 0$

$-\infty \qquad -4 \qquad -3 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 5 \qquad +\infty$

$x+4$	–	+	+	+	+	+
$x+3$	–	–	+	+	+	+
$x-1$	–	–	–	+	+	+
$x-2$	–	–	–	+	+	+
$x-5$	–	–	–	–	–	+
$\dfrac{(x-1)(x+4)(x-5)}{(x-2)(x+3)}$	–	+	–	+	–	+

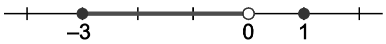
Solución: $x\in[-4,-3)\cup[1,2)\cup[5,+\infty)$



b) $\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+10x^2+25x} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2(x+3)}{x(x+5)^2} \le 0$

	$-\infty$	-5	-3	0	1	$+\infty$
$(x+5)^2$	+	+	+	+	+	
$x+3$	–	–	+	+	+	
x	–	–	–	+	+	
$(x-1)^2$	+	+	+	+	+	
Fracción	+	+	–	+	+	

Solución: $x \in [-3, 0) \cup \{1\}$



7. **Ejercicio resuelto.**

8. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.**

a) $\begin{cases} 2x-5>7-3x \\ 3-x>4-5x \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{-1}{x+5} \ge 0 \\ x-4(x-3)>5-4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-3>2-5x \\ x-1 \le 2(3-2x) \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x \le 5x-9 \\ 3x-2<2x-(7-2x) \\ x>2 \end{cases}$

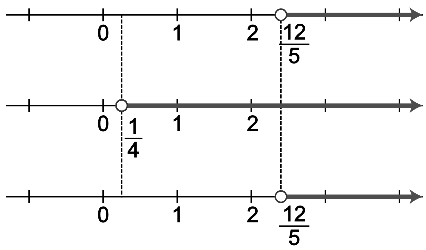
a) Inecuación $2x-5>7-3x$:

$2x-5>7-3x \Rightarrow 5x>12 \Rightarrow x>\dfrac{12}{5} \Rightarrow x \in \left(\dfrac{12}{5}, +\infty\right)$

Inecuación $3-x>4-5x$:

$3-x>4-5x \Rightarrow 4x>1 \Rightarrow x>\dfrac{1}{4} \Rightarrow x \in \left(\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$

La solución es del sistema es: $x \in \left(\dfrac{12}{5}, +\infty\right) \cap \left(\dfrac{1}{4}, +\infty\right) = \left(\dfrac{12}{5}, +\infty\right)$



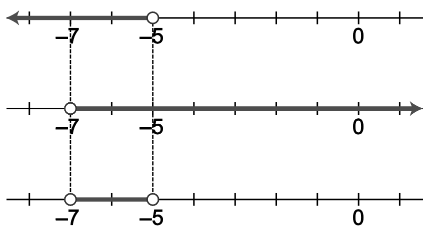
b) Inecuación $\dfrac{-1}{x+5} \ge 0$:

$\dfrac{-1}{x+5} \ge 0 \Rightarrow x+5<0 \Rightarrow x<-5 \Rightarrow x \in (-\infty, -5)$

Inecuación $x-4(x-3)>5-4x$:

$x-4(x-3)>5-4x \Rightarrow x>-7 \Rightarrow x \in (-7, +\infty)$

La solución del sistema es: $x \in (-\infty, -5) \cap (-7, +\infty) = (-7, -5)$



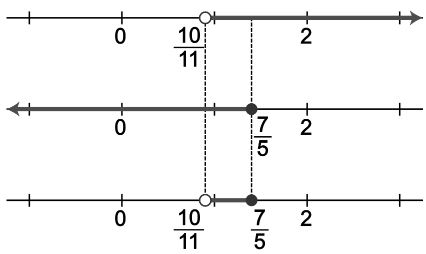
c) Inecuación $\dfrac{x}{2}-3>2-5x$:

$\dfrac{x}{2}-3>2-5x \Rightarrow x>\dfrac{10}{11} \Rightarrow x \in \left(\dfrac{10}{11}, +\infty\right)$

Inecuación $x-1 \le 2(3-2x)$:

$x-1 \le 2(3-2x) \Rightarrow x \le \dfrac{7}{5} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{7}{5}\right]$

La solución del sistema es: $x \in \left(\dfrac{10}{11}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \dfrac{7}{5}\right] = \left(\dfrac{10}{11}, \dfrac{7}{5}\right]$



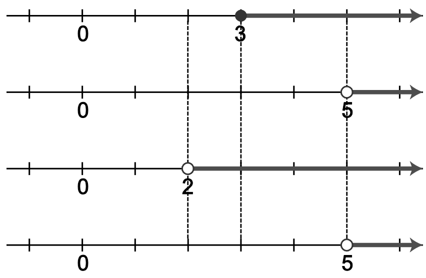
d) Inecuación $2x \le 5x - 9$:

$2x \le 5x - 9 \Rightarrow x \ge 3 \Rightarrow x \in [3, +\infty)$

Inecuación $3x - 2 < 2x - (7 - 2x)$:

$3x - 2 < 2x - (7 - 2x) \Rightarrow x > 5 \Rightarrow x \in (5, +\infty)$

Inecuación $x > 2$: $x \in (2, +\infty)$



La solución del sistema es: $x \in [3, +\infty) \cap (5, +\infty) \cap (2, +\infty) = (5, +\infty)$

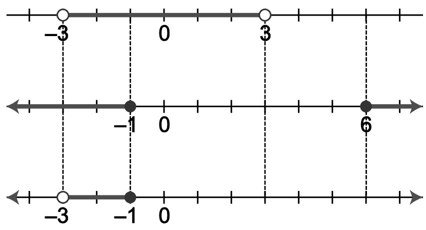
9. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x^2 - 5x - 6 \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 9} \ge 0 \\ -x^2 - 3x > 0 \end{cases}$

a) Inecuación $x^2 - 9 < 0$:

$x^2 - 9 < 0 \Rightarrow (x+3)(x-3) < 0 \Rightarrow x \in (-3, 3)$



$-\infty \quad -3 \quad 3 \quad +\infty$

$x+3$	–	+	+
$x-3$	–	–	+
$(x+3)(x-3)$	+	–	+

Inecuación $x^2 - 5x - 6 \ge 0$:

$x^2 - 5x - 6 \ge 0 \Rightarrow (x+1)(x-6) \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$

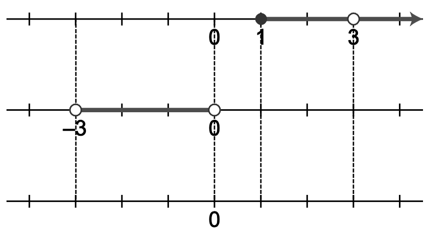
$-\infty \quad -1 \quad 6 \quad +\infty$

$x+1$	–	+	+
$x-6$	–	–	+
$(x+1)(x-6)$	+	–	+

La solución del sistema es la intersección de las soluciones obtenidas: $x \in (-3, -1]$

b) Inecuación $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 9} \ge 0$:

$\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 9} \ge 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-3)^2} \ge 0 \Rightarrow x \in [1, 3) \cup (3, +\infty)$



$-\infty \quad 1 \quad 3 \quad +\infty$

$x-1$	–	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+
$\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-3)^2}$	–	+	+

Inecuación $-x^2 - 3x > 0$:

$-x^2 - 3x > 0 \Rightarrow -x(x+3) > 0 \Rightarrow x \in (-3, 0)$

$-\infty \quad -3 \quad 0 \quad +\infty$

$x+3$	–	+	+
x	–	–	+
$-x(x+3)$	–	+	–

La intersección de las soluciones obtenidas es vacía, por lo que el sistema no tiene solución.

10. Ejercicio interactivo.

11. Ejercicio resuelto.

12. Representa los semiplanos determinados por las siguientes expresiones.

a) $x - 2 > 3$

b) $2x \le 4$

c) $4x - 2y > 6$

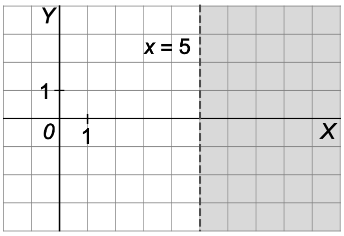
d) $3(2x-3) - (2-6y) < 1$

e) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} > -1$

f) $\frac{2x}{3} - \frac{3y}{2} \ge -6$

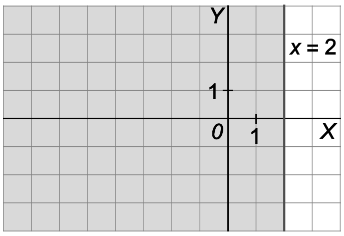
a) Semiplano sin borde limitado por la recta

$x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$



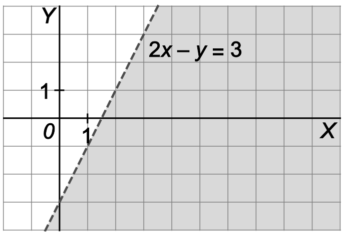
b) Semiplano con borde limitado por la recta

$2x = 4 \Rightarrow x = 2$



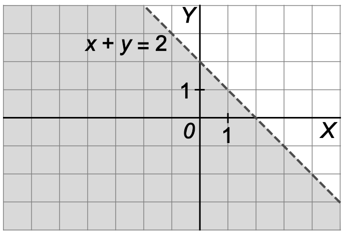
c) Semiplano sin borde limitado por la recta

$4x - 2y = 6 \Rightarrow 2x - y = 3$



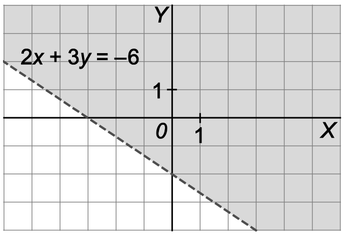
d) Semiplano sin borde limitado por la recta

$3(2x-3) - (2-6y) = 1 \Rightarrow x + y = 2$



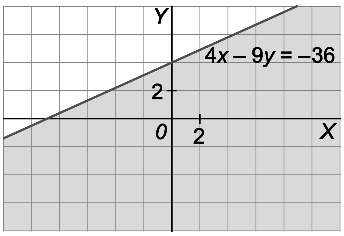
e) Semiplano sin borde limitado por la recta

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1 \Rightarrow 2x + 3y = -6$



f) Semiplano con borde limitado por la recta

$\frac{2x}{3} - \frac{3y}{2} = -6 \Rightarrow 4x - 9y = -36$



13. Comprueba si los puntos siguientes están o no a un mismo lado de la recta $r : 2x + 7y = 3$.

a) $A(0,-3)$ y $B(-4,1)$

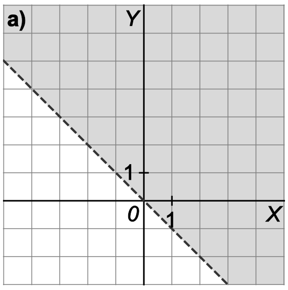
b) $A(2, 3)$ y $B(6, -1)$

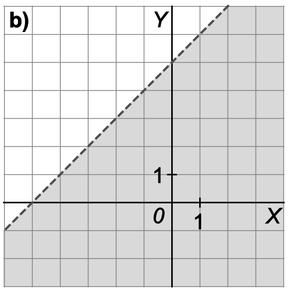
Sustituyendo las coordenadas de A y B en la expresión $2x + 7y - 3$ obtenemos:

a) $A : 2 \cdot 0 + 7 \cdot (-3) - 3 = -24 < 0$ y $B : 2 \cdot (-4) + 7 \cdot 1 - 3 = -4 < 0$, por tanto, A y B están a un mismo lado de r.

b) $A : 2 \cdot 2 + 7 \cdot 3 - 3 = 22 > 0$ y $B : 2 \cdot 6 + 7 \cdot (-1) - 3 = 2 > 0$, por tanto, A y B están a un mismo lado de r.

14. Establece las expresiones algebraicas que determinan cada uno de los siguientes semiplanos.





a) $y > -x$ o $x + y > 0$

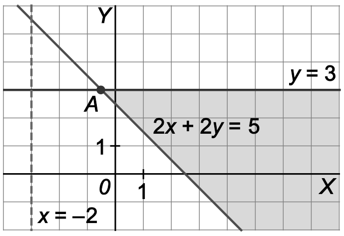
b) $y < x + 5$ o $x - y > -5$

15. Ejercicio resuelto.

16. Representa la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones, calcula sus vértices e indica si es o no acotada.

a) $\begin{cases} x > -2 \\ y \le 3 \\ 2x + 2y \ge 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 4y < -6 \\ x - 2y \ge -2 \\ y < 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x + y \le 12 \\ x + 6y > 18 \\ x + y \ge -5 \\ x \ge 0 \\ y \le 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 3y \le 15 \\ 4x + y \le 16 \\ x - y \le 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

a)

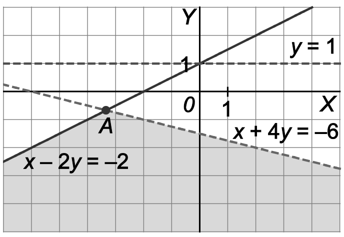


Región no acotada.

Vértices: $A\left(-\dfrac{1}{2}, 3\right)$

La restricción $x > -2$ es redundante.

b)

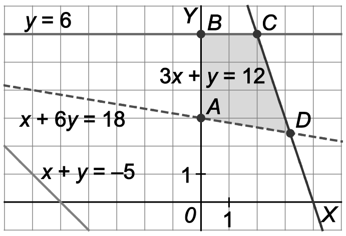


Región no acotada.

Vértices: $A\left(-\dfrac{10}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$

La restricción $y < 1$ es redundante.

c)

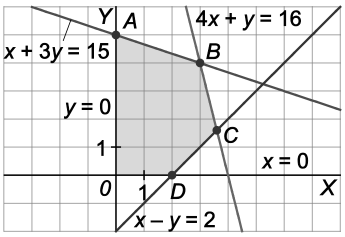


Región acotada.

Vértices: $A(0, 3)$, $B(0, 6)$, $C(2, 6)$ y $D\left(\dfrac{54}{17}, \dfrac{42}{17}\right)$

La restricción $x + y \ge -5$ es redundante.

d)



Región acotada.

Vértices: $O(0, 0)$, $A(0, 5)$, $B(3, 4)$,

$C\left(\dfrac{18}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$ y $D(2, 0)$

17. Ejercicio resuelto.

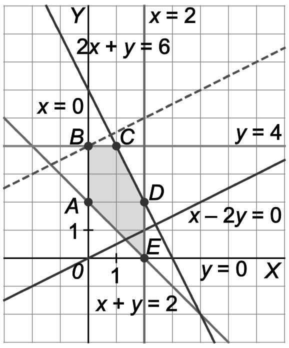
18. Considera la región definida por:

$$\begin{cases} x+y\geq 2 \\ 2x+y\leq 6 \\ 0\leq x\leq 2 \\ 0\leq y\leq 4 \end{cases}$$

a) Calcula gráficamente, si existen, los puntos que dan el valor mínimo a la función $f(x,y)=x-2y$ en la región *S*.

b) Obtén de forma gráfica los máximos y mínimos de la función $g(x,y)=3x+3y$ en la región *S*.

a) Representamos la región factible *S* y la recta $x-2y=0$.

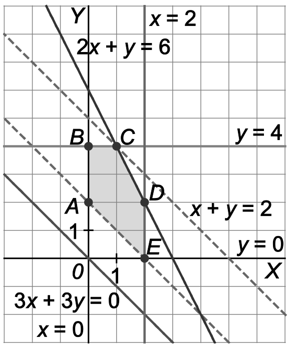


Al tener la función objetivo coeficiente de la *x* positivo y coeficiente de la *y* negativo, el mínimo se localizará en el último punto de *S* que toque la recta $x-2y=0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido positivo del eje *Y*.

Por tanto, el mínimo está en el vértice $B(0,\,4)$ y su valor es $f(0,\,4)=-8$.

Nota: El máximo se localizaría desplazando la recta $x-2y=0$ de forma paralela en el sentido negativo del eje *Y*, siendo el último punto de *S* que se toca el vértice $E(2,\,0)$. En este vértice estará el máximo, de valor $f(2,\,0)=2$.

b) En este caso, la función objetivo tiene coeficientes de la *x*, y de la *y*, positivos, por lo que el máximo se localizará en el último punto de *S* que toque la recta $x-2y=0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido positivo del eje *Y* y el mínimo en el último punto de *S* que toque al desplazarse en sentido negativo.



Por tanto:

El máximo se encuentra en el vértice $C(1,\,4)$ y su valor es $g(1,\,4)=15$.

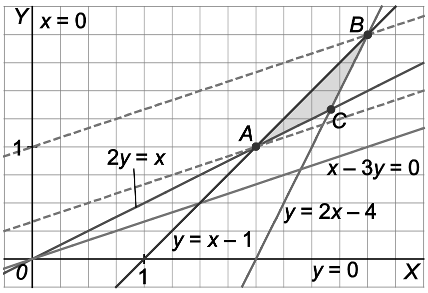
Para el mínimo existen infinitas soluciones, cualquier punto del segmento de extremos los vértices $A(0,\,2)$ y $E(2,\,0)$. Su valor en cualquiera de estos puntos es $g(0,\,2)=6$.

19. Considera la región *S* del plano definida por:

$$\begin{array}{l} y\geq 2x-4 \\ y\leq x-1 \\ 2y\geq x \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}$$

Obtén, de forma gráfica, los máximos y mínimos de la función $z=x-3y$ en la región *S*.

Representamos la región factible *S* y la recta $x-2y=0$. Como la función objetivo tiene coeficiente de la *x* positivo, y coeficiente de la *y*, negativo, el máximo se localizará en el último punto de *S* que toque la recta $x-3y=0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido negativo del eje *Y* y el mínimo en el último punto de *S* que toque al desplazarse en sentido positivo. Por tanto:



El máximo se encuentra en el vértice $A:\begin{cases} y=x-1 \\ 2y=x \end{cases}\Rightarrow A(2,1)$ y su valor es $z_A=-1$.

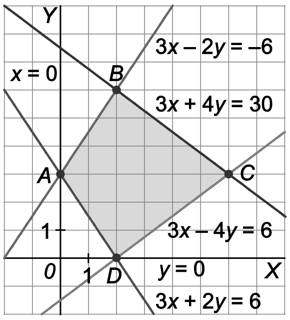
El mínimo se encuentra en el vértice $B:\begin{cases} y=2x-4 \\ y=x-1 \end{cases}\Rightarrow B(3,\,2)$ y su valor es $z_B=-3$.

20. Ejercicio resuelto.

21. Resuelve analíticamente el siguiente problema de programación lineal:

$$\textbf{Max y Min } z = x + 2y \textbf{ sujeto a: } \begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ 3x - 4y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 30 \\ 3x - 2y \geq -6 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:



$$A: \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow A(0, 3) \qquad B: \begin{cases} 3x + 4y = 30 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow B(2, 6)$$

$$C: \begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \Rightarrow C(6, 3) \qquad D: \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 3x - 4y = 6 \end{cases} \Rightarrow D(2, 0)$$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_A = 6 \qquad z_B = 14 \qquad z_C = 12 \qquad z_D = 2$

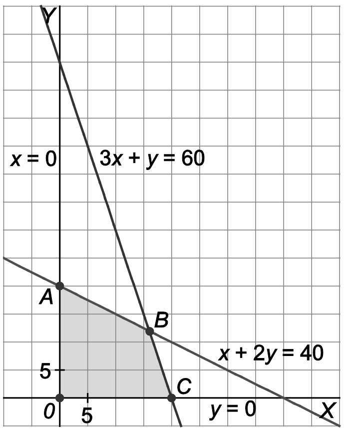
Por tanto:

El máximo se alcanza para $x = 2$, $y = 6$ (vértice *B*) y vale $z_B = 14$.

El mínimo se alcanza para $x = 2$, $y = 0$ (vértice *D*) y vale $z_D = 2$.

22. Halla el valor máximo de las funciones $F(x, y) = 6x + 5y$ y $G(x, y) = 2x + 4y$ en la región del plano definida por las inecuaciones: $0 \leq x$; $0 \leq y$; $3x + y \leq 60$ y $x + 2y \leq 40$.

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:



$$O(0, 0) \qquad A(0, 20) \qquad B: \begin{cases} 3x + y = 60 \\ x + 2y = 40 \end{cases} \Rightarrow B(16, 12) \qquad C(20, 0)$$

Evaluamos las funciones objetivo en los vértices:

$F_O = 0 \qquad F_A = 100 \qquad F_B = 156 \qquad F_C = 120$

$G_O = 0 \qquad G_A = 80 \qquad G_B = 80 \qquad G_C = 40$

Por tanto:

El máximo de *F* se alcanza para $x = 16$, $y = 12$ (vértice *B*) y vale $F_B = 156$.

El máximo de *G* se alcanza en cualquier punto del segmento de extremos *A* y *B* y vale $G_B = 80$.

23. Ejercicio interactivo.

24. Una empresa, que abastece los lotes de perfumería de un supermercado, dispone en el almacén de 240 frascos de gel, 95 de champú, y 270 de crema de manos. Los lotes son de dos tipos: A y B, de forma que el lote A está compuesto por 2 frascos de gel, 1 de champú y 3 de crema de manos, mientras que el lote B está formado por 3 frascos de gel, 1 de champú y 2 de crema de manos. Cada lote de tipo A le produce un beneficio de 25 €, y cada lote de tipo B de 22 €. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe preparar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es ese beneficio máximo?

	Gel	Champú	Crema	Beneficio
A (x lotes)	2	1	3	25 €
B (y lotes)	3	1	2	22 €
Cantidades máximas	240	95	270	

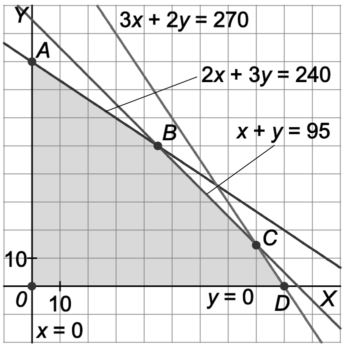
Las variables de decisión son:

x lotes de tipo A y lotes de tipo B

Queremos hallar el máximo de $z = 25x + 22y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 240 & \text{debido al total de gel disponible} \\ x + y \leq 95 & \text{debido al total de champú disponible} \\ 3x + 2y \leq 270 & \text{debido al total de crema disponible} \\ x \geq 0,\ y \geq 0 & \text{condiciones de no negatividad} \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:



$O(0, 0)$ $A(80, 0)$ $B: \begin{cases} 2x + 3y = 240 \\ x + y = 95 \end{cases} \Rightarrow B(45, 50)$

$C: \begin{cases} x + y = 95 \\ 3x + 2y = 270 \end{cases} \Rightarrow C(80, 15)$ $D(90, 0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_O = 0$ $z_A = 2000$ $z_B = 2225$ $z_C = 2330$ $z_D = 2250$

Por tanto, el máximo se alcanza en el vértice C, es decir, para obtener los máximos beneficios hay que preparar $x = 80$ lotes tipo A e $y = 15$ lotes tipo B, siendo el beneficio máximo $z_C = 2330$ €.

25. El terreno dedicado a una plantación de hortalizas precisa semanalmente un mínimo de 16 kg de abono mineral y un mínimo de 18 kg de abono vegetal. En el mercado existen dos paquetes de abonos P_1 y P_2. El paquete P_1 contiene 2 kg de de abono mineral y 5 kg de abono vegetal y cada paquete de tipo P_2 contiene 3 kg de abono mineral y 2 kg de abono vegetal. Cada paquete de tipo P_1 cuesta 15 euros y cada paquete de tipo P_2 cuesta 10 euros. Calcula el número de paquetes de cada tipo que se deben adquirir para que el coste sea mínimo.

	Mineral	Vegetal	Coste
P_1 (x paquetes)	2	5	15 €
P_2 (y paquetes)	3	2	10 €
Cantidades mínimas	16	18	

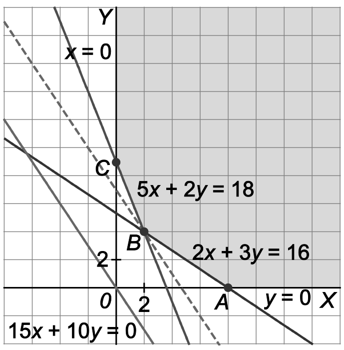
Las variables de decisión son:

x paquetes P_1 y paquetes P_2

Queremos hallar el mínimo de $z = 15x + 10y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 16 & \text{necesidad de abono mineral} \\ 5x + 2y \geq 18 & \text{necesidad de abono vegetal} \\ x \geq 0,\ y \geq 0 & \text{condiciones de no negatividad} \end{cases}$$

Representamos la región factible y, al ser no acotada, la recta $15x + 10y = 0$.



Como la función objetivo tiene coeficientes de la x y de la y, positivos, el mínimo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $15x + 10y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido negativo del eje Y.

Por tanto, el mínimo se localiza en el vértice B:

$$B: \begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 5x + 2y = 18 \end{cases} \Rightarrow B(2, 4)$$

Es decir, para obtener el coste mínimo hay que adquirir $x = 2$ paquetes P_1 e $y = 4$ paquetes P_2, con un coste de $z_B = 70$ €.

26. **Se deben transportar naranjas de las ciudades de Gandía y Cullera a las ciudades de Burgos, Oviedo y Coruña.**

Las cantidades ofertadas son 500 kg de Gandía y 750 kg de Cullera. Las cantidades demandadas son 250 kg por Burgos, 500 kg por Oviedo y 500 kg por Coruña. Los costes, en céntimos por kg, de transportar de una ciudad a otra son:

	Burgos	Oviedo	Coruña
Gandía	1	2	2
Cullera	2	2	3

Establece la mejor forma de realizar el transporte para que el coste total sea mínimo. ¿Hay una única solución?

La siguiente tabla de variables indica los kg de naranjas que se trasporta de un lugar a otro.

	Burgos	Oviedo	Coruña	Total
Gandía	x	y	$500 - x - y$	500
Cullera	$250 - x$	$500 - y$	$x + y$	750
Total	250	500	500	1250

Queremos hallar el mínimo coste:

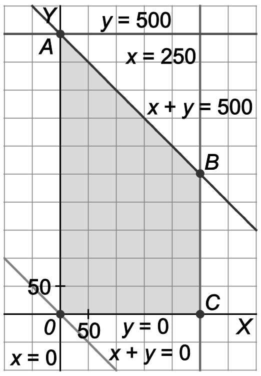
$$z = x + 2y + 2(500 - x - y) + 2(250 - x) + 2(500 - y) + 3(x + y) = y + 2500 .$$

Las restricciones del problema son las que resultan de obligar a que las variables de la tabla anterior no sean negativas, es decir, queremos resolver el problema de programación lineal:

Min $z = y + 2500$

Sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \le 500 \\ x + y \ge 0 \\ 0 \le x \le 250 \\ 0 \le y \le 500 \end{cases}$$



Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$O(0, 0)$ $A(0, 500)$ $B: \begin{cases} x + y = 500 \\ x = 250 \end{cases} \Rightarrow B(250, 250)$ $C(250, 0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_O = 2500$ $z_A = 3000$ $z_B = 2750$ $z_C = 2500$

Por tanto, el mínimo se alcanza en cualquier punto del segmento de extremos O y C, es decir, $y = 0$ kg pero x puede variar entre 0 y 250 kg. En todas estas las soluciones el coste será de 2500 €.

Las soluciones se muestran en la siguiente tabla, donde $0 \le x \le 250$.

	Burgos	Oviedo	Coruña
Gandía	x	0	$500 - x$
Cullera	$250 - x$	500	x

Por tanto los únicos envíos fijos son de Gandía a Oviedo, que no se envía nada, y de Cullera a Oviedo, que se envían 500 kg.

Dos posibles transportes con coste mínimo son los siguientes:

	Burgos	Oviedo	Coruña
Gandía	0	0	500
Cullera	250	500	0

	Burgos	Oviedo	Coruña
Gandía	100	0	400
Cullera	150	500	100

27. Una persona debe alimentar a un animal. En la tienda de mascotas hay dos tipos de pienso, A y B, para dicho animal, con las siguientes composiciones y precio por paquete:

	Proteínas	Hidratos de carbono	Grasas	Precio
A	1 g	5 g	3 g	2 €
B	2 g	2 g	2 g	1,7 €

Dicho animal debe comer diariamente, al menos 8 g de proteínas, 20 g de hidratos de carbono y 16 g de grasas. Determina cuántos paquetes de cada tipo debe comer el animal para que la dieta tenga un coste mínimo.

Las variables de decisión son:

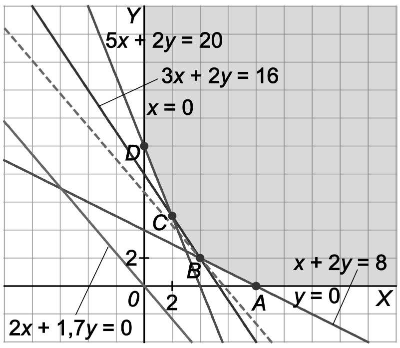
x paquetes A $\qquad$ y paquetes B

Queremos hallar el mínimo coste:

$$z = 2x + 1{,}7y$$

sujeto a:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 8 & \text{necesidad de proteinas} \\ 5x + 2y \geq 20 & \text{necesidad de hidratos} \\ 3x + 2y \geq 16 & \text{necesidad de grasas} \\ x \geq 0,\ y \geq 0 & \text{condiciones de no negatividad} \end{cases}$$



Representamos la región factible y, al ser no acotada, la recta $2x + 1{,}7y = 0$.

Como la función objetivo tiene coeficientes de la x, y de la y, positivos, el mínimo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $2x + 1{,}7y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido negativo del eje Y.

Por tanto, el mínimo se localiza en el vértice B:

$$B: \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases} \Rightarrow B(4,\ 2)$$

Es decir, para que la dieta tenga el animal debe comer diariamente $x = 4$ paquetes A e $y = 2$ paquetes B, siendo el coste de $z_B = 11{,}4$ €.

28 a 34. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Inecuaciones

35. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $3(x+2)-2(x-1)\geq -3x$

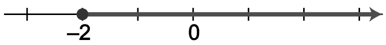
b) $2x-3(3x-1)-3\geq 4x-11$

c) $\frac{2x-1}{3}-\frac{x}{4}\geq 3x-\frac{11}{2}$

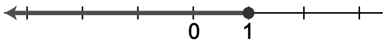
d) $x-\frac{x-1}{5}-\frac{x+3}{25}\geq \frac{x}{3}-\frac{6}{5}$

e) $\frac{3-x}{3}-\frac{x}{2}+\frac{3x-1}{4}<2(x-1)-\frac{67}{12}$

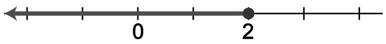
a) $3(x+2)-2(x-1)\geq -3x \Rightarrow 4x\geq -8 \Rightarrow x\geq -2 \Rightarrow$ Solución: $x\in[-2,+\infty)$



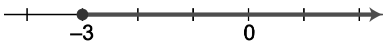
b) $2x-3(3x-1)-3\geq 4x-11 \Rightarrow -11x\geq -11 \Rightarrow x\leq 1 \Rightarrow$ Solución: $x\in(-\infty,1]$



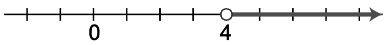
c) $\frac{2x-1}{3}-\frac{x}{4}\geq 3x-\frac{11}{2} \Rightarrow -31x\geq -62 \Rightarrow x\leq 2 \Rightarrow$ Solución: $x\in(-\infty,2]$



d) $x-\frac{x-1}{5}-\frac{x+3}{25}\geq \frac{x}{3}-\frac{6}{5} \Rightarrow 32x\geq -96 \Rightarrow x\geq -3 \Rightarrow$ Solución: $x\in[-3,+\infty)$



e) $\frac{3-x}{3}-\frac{x}{2}+\frac{3x-1}{4}<2(x-1)-\frac{67}{12} \Rightarrow -25x<-100 \Rightarrow x>4 \Rightarrow$ Solución: $x\in(4,+\infty)$



36. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $3x^2-5x+2\leq 0$

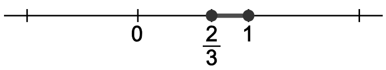
b) $-2x^2+6x-4\leq 0$

c) $(x-3)(x+4)-x\geq 13$

d) $-2x^2-3(3x-2)(x+4)-24\geq 0$

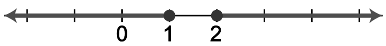
a) $3x^2-5x+2\leq 0 \Rightarrow 3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)\leq 0$

Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in\left[\frac{2}{3},1\right]$.



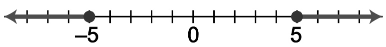
b) $-2x^2+6x-4\leq 0 \Rightarrow -2(x-1)(x-2)\leq 0$

Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.



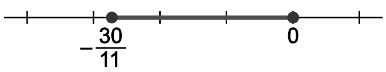
c) $(x-3)(x+4)-x\geq 13 \Rightarrow x^2-25\geq 0 \Rightarrow (x+5)(x-5)\geq 0$

Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$.



d) $-2x^2-3(3x-2)(x+4)-24\geq 0 \Rightarrow -11x^2-30x\geq 0 \Rightarrow -11x\left(x+\frac{30}{11}\right)\geq 0$

Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in\left[-\frac{30}{11},0\right]$.

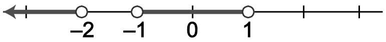


37. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $x^3+2x^2-x-2<0$ **b)** $x^3-x^2-8x+12\geq 0$ **c)** $-x^3+6x^2-12x+8\geq 0$ **d)** $6x^3+11x^2-19x+6\leq 0$

a) $x^3+2x^2-x-2<0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x+2)<0$

Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)$.



b) $x^3-x^2-8x+12\geq 0 \Rightarrow (x-2)^2(x+3)\geq 0$

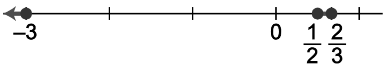
Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in[-3,+\infty)$.

c) $-x^3+6x^2-12x+8\geq 0 \Rightarrow -(x-2)^3\geq 0$

Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in(-\infty,2]$.

d) $6x^3+11x^2-19x+6\leq 0 \Rightarrow 6(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\leq 0$

Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in(-\infty,-3]\cup\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$.

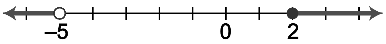


38. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{2x-4}{x+5}\geq 0$ **b)** $\frac{3x-2}{x-3}\geq\frac{5}{4}$ **c)** $\frac{x^2-2x}{3x-6}\geq 0$ **d)** $\frac{x^2+x-6}{2x^2-7x+3}\geq 0$

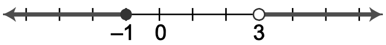
a) $\frac{2x-4}{x+5}\geq 0 \Rightarrow \frac{2(x-2)}{x+5}\geq 0$

Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in(-\infty,-5)\cup[2,+\infty)$.



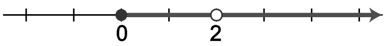
b) $\frac{3x-2}{x-3}\geq\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{7(x+1)}{4(x-3)}\geq 0$

Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in(-\infty,-1]\cup(3,+\infty)$.



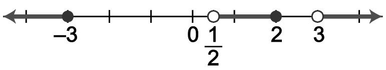
c) $\frac{x^2-2x}{3x-6}\geq 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{3(x-2)}\geq 0 \Rightarrow \frac{x}{3}\geq 0$

Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in[0,2)\cup(2,+\infty)$.



d) $\frac{x^2+x-6}{2x^2-7x+3}\geq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}\geq 0$

Realizando la correspondiente tabla de signos se obtiene como solución $x\in(-\infty,-3]\cup\left(\frac{1}{2},2\right]\cup(3,+\infty)$.



Sistemas de inecuaciones

39. Halla la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con una incógnita.

a) $\begin{cases} 4x-3(x+2)>7+2x \\ 20-2x<4(2x-15) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3-5(2x-1)\leq 8-5x \\ x-2-\dfrac{x-3}{2}\geq 1-2(x-3) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2-x}{3}+3\leq \dfrac{2+x}{2}-\dfrac{x-2}{6} \\ 2-\dfrac{5-2x}{2}+x<1-\dfrac{2x-3}{4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2-3(x-3)+\dfrac{1}{3}\leq \dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1-x}{2}-\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{1-x}{8}\geq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 1-\dfrac{2+3x}{5}\geq \dfrac{1-x}{10}-\dfrac{x+3}{2} \\ \dfrac{x+2}{3}-\dfrac{3+10x}{8}<2(1-x)+\dfrac{5}{4} \end{cases}$

a) $4x-3(x+2)>7+2x \Rightarrow -x>13 \Rightarrow x<-13 \Rightarrow$ Solución: $x\in(-\infty,\,-13)$

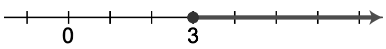
$20-2x<4(2x-15) \Rightarrow -10x<-80 \Rightarrow x>8 \Rightarrow$ Solución: $x\in(8,\,+\infty)$

La intersección de las soluciones obtenidas es vacía, por lo que el sistema no tiene solución.

b) $3-5(2x-1)\leq 8-5x \Rightarrow -5x\leq 0 \Rightarrow x\geq 0 \Rightarrow$ Solución: $x\in[0,\,+\infty)$

$x-2-\dfrac{x-3}{2}\geq 1-2(x-3) \Rightarrow 5x\geq 15 \Rightarrow x\geq 3 \Rightarrow$ Solución: $x\in[3,\,+\infty)$

La solución del sistema es la intersección de las soluciones obtenidas: $x\in[3,\,+\infty)$



c) $\dfrac{2-x}{3}+3\leq \dfrac{2+x}{2}-\dfrac{x-2}{6} \Rightarrow -4x\leq -14 \Rightarrow x\geq \dfrac{7}{2} \Rightarrow$ Solución: $x\in\left[\dfrac{7}{2},\,+\infty\right)$

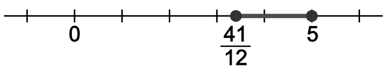
$2-\dfrac{5-2x}{2}+x<1-\dfrac{2x-3}{4} \Rightarrow 10x<9 \Rightarrow x<\dfrac{9}{10} \Rightarrow$ Solución: $x\in\left(-\infty,\,\dfrac{9}{10}\right)$

La intersección de las soluciones obtenidas es vacía, por lo que el sistema no tiene solución.

d) $2-3(x-3)+\dfrac{1}{3}\leq \dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{5}{6} \Rightarrow -24x\leq -82 \Rightarrow x\geq \dfrac{41}{12} \Rightarrow$ Solución: $x\in\left[\dfrac{41}{12},\,+\infty\right)$

$\dfrac{1-x}{2}-\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{1-x}{8}\geq -\dfrac{5}{2} \Rightarrow -5x\geq -25 \Rightarrow x\leq 5 \Rightarrow$ Solución: $x\in(-\infty,\,5]$

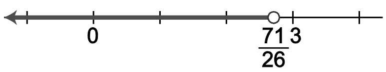
La solución del sistema es la intersección de las soluciones obtenidas: $x\in\left[\dfrac{41}{12},\,5\right]$



e) $1-\dfrac{2+3x}{5}\geq \dfrac{1-x}{10}-\dfrac{x+3}{2} \Rightarrow 0\geq -20 \Rightarrow$ Solución: $x\in\mathbb{R}=(-\infty,\,+\infty)$

$\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{3+10x}{8}<2(1-x)+\dfrac{5}{4} \Rightarrow 26x<71 \Rightarrow x<\dfrac{71}{26} \Rightarrow$ Solución: $x\in\left(-\infty,\,\dfrac{71}{26}\right)$

La solución del sistema es la intersección de las soluciones obtenidas: $x\in\left(-\infty,\,\dfrac{71}{26}\right)$



40. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} x^2 - 36 \le -11 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6(x^2 - 1) \ge -5x \\ 1 > x^2 \end{cases}$

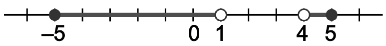
c) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x+2} \ge -3 \\ x^2 + 4x + 4 \ge 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} \ge 0 \\ x^2 - 2x + 4 \ge 0 \\ 2(x-3) > 5x + 3 \end{cases}$

a) $x^2 - 36 \le -11 \Rightarrow x^2 - 25 \le 0 \Rightarrow (x+5)(x-5) \le 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in [-5, 5]$

$x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) > 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$

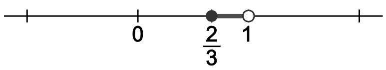
La solución del sistema es la intersección de las soluciones obtenidas: $x \in [-5, 1) \cup (4, 5]$



b) $6(x^2 - 1) \ge -5x \Rightarrow 6x^2 + 5x - 6 \ge 0 \Rightarrow 6\left(x + \dfrac{3}{2}\right)\left(x - \dfrac{2}{3}\right) \ge 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$

$1 > x^2 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) < 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in (-1, 1)$

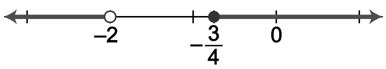
La solución del sistema es la intersección de las soluciones obtenidas: $x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right)$



c) $\dfrac{x-3}{x+2} \ge -3 \Rightarrow \dfrac{x-3}{x+2} + 3 \ge 0 \Rightarrow \dfrac{4\left(x + \dfrac{3}{4}\right)}{x+2} \ge 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup \left[-\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$

$x^2 + 4x + 4 \ge 0 \Rightarrow (x+2)^2 \ge 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in \mathbb{R}$

La solución del sistema es la intersección de las soluciones obtenidas: $x \in (-\infty, -2) \cup \left[-\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$

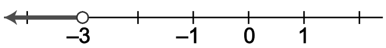


d) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} \ge 0 \Rightarrow \dfrac{-2x}{(x+1)(x-1)} \ge 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in (-\infty, -1) \cup [0, 1)$

$x^2 - 2x + 4 \ge 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in \mathbb{R}$

$2(x-3) > 5x + 3 \Rightarrow -3x > 9 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow$ Solución: $x \in (-\infty, -3)$

La solución del sistema es la intersección de las soluciones obtenidas: $x \in (-\infty, -3)$



41. Para cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales, representa el recinto correspondiente a la solución y calcula las coordenadas de sus vértices. Indica si es o no acotado.

a) $\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ 2x+3y\leq 7 \\ y\geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ y-1\geq 0 \\ x+y\geq 4 \end{cases}$

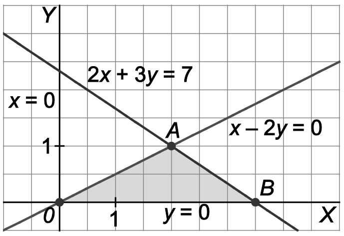
c) $\begin{cases} 3x+2y\leq 0 \\ y\geq x \\ 5x+6y\leq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-4y\leq -12 \\ 3x+4y\leq 12 \\ y\geq -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0\leq y\leq 4 \\ x+3y\leq 15 \\ 0\leq x\leq 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -3\leq y-x\leq 3 \\ y\leq -x+9 \\ x+y\leq 3 \\ x\geq 1 \\ x\leq 5 \end{cases}$

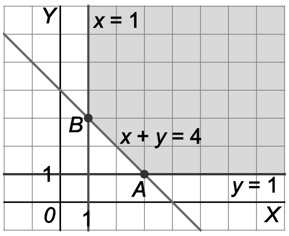
a)



Región acotada.

Vértices: $O(0,0)$, $A(2,1)$ y $B\left(\dfrac{7}{2},0\right)$

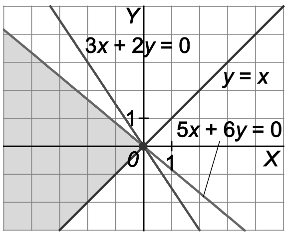
b)



Región no acotada.

Vértices: $A(3,1)$ y $B(1,3)$

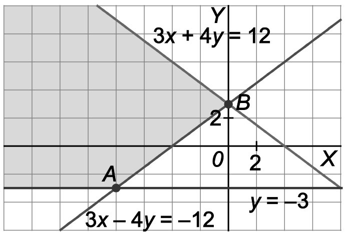
c)



Región no acotada.

Vértices: $O(0,0)$

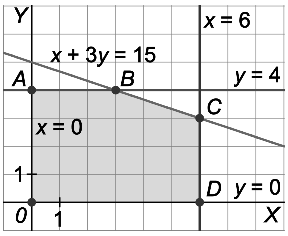
d)



Región no acotada.

Vértices: $A(-8,-3)$ y $B(0,3)$

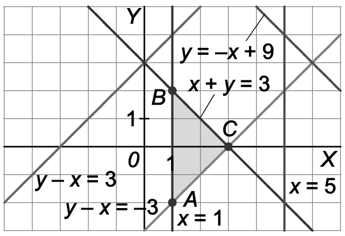
e)



Región acotada.

Vértices: $O(0,0)$, $A(0,4)$, $B(3,4)$, $C(6,3)$ y $D(6,0)$

f)



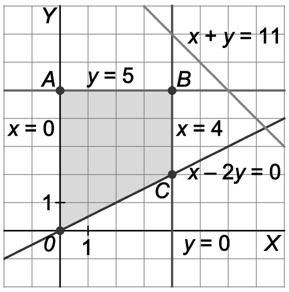
Región acotada.

Vértices: $A(1,-2)$, $B(1,2)$ y $C(3,0)$

42. Para cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones, representa la solución e indica si alguna de las inecuaciones que lo forman es redundante.

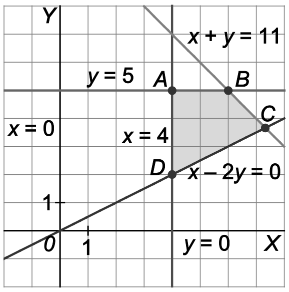
a) $\begin{cases} 0 \le y \le 5 \\ 0 \le x \le 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \le 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y \ge 5 \\ x \ge 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \le 11 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 0 \le y \le 5 \\ x \ge 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \le 11 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 0 \le y \le 5 \\ 0 \le x \le 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \ge 11 \end{cases}$

a)



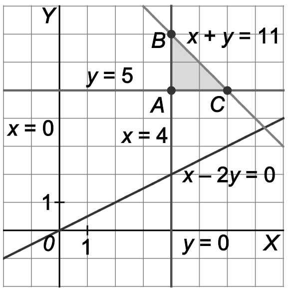
Las inecuaciones $x + y \le 11$ e $y \ge 0$ son redundantes.

c)



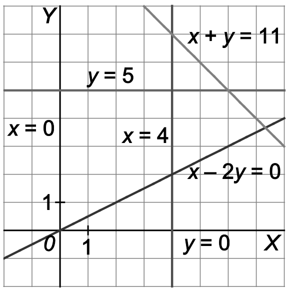
La inecuación $y \ge 0$ es redundante.

b)



La inecuación $x - 2y \le 0$ es redundante.

d)



La región es vacía.

43. Se considera el sistema de inecuaciones lineales: $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y \le 8} \\ \boldsymbol{2x + y \le 7} \\ \boldsymbol{0 \le x \le 3} \\ \boldsymbol{y \ge 0} \end{cases}$

Comprueba si la intersección de las rectas $x + 2y = 8$ y $x = 3$ es o no vértice del recinto solución.

El punto de intersección de las dos rectas es: $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow P\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$

Este punto no es vértice del recinto solución, ya que no verifica la segunda inecuación del sistema.

44. Se considera el sistema de inecuaciones lineales: $\begin{cases} \boldsymbol{x - 2y \le 7} \\ \boldsymbol{2x + y \le 7} \\ \boldsymbol{3x - y \le 7} \\ \boldsymbol{x \ge 0} \\ \boldsymbol{y \ge 0} \end{cases}$

Comprueba si la intersección de las rectas $2x + y = 7$ y $3x - y = 7$ es o no vértice del recinto solución.

El punto de intersección de las dos rectas es: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow P\left(\dfrac{14}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$

Este punto es vértice del recinto solución, ya que verifica todas las inecuaciones del sistema.

Resolución de problemas de programación lineal

45. Resuelve de forma gráfica los siguientes problemas de programación lineal.

a) Máximo y mínimo de $z = 2x + y$

Sujeta a:

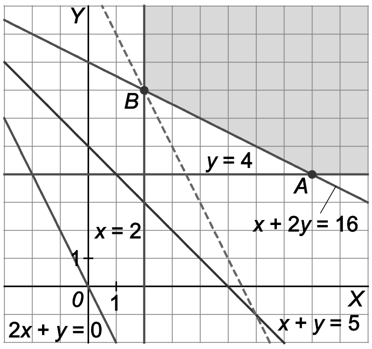
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 4 \\ x + y \geq 5 \\ x + 2y \geq 16 \end{cases}$$

b) Máximo y mínimo de $z = x + y$

Sujeta a:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 9 \\ x + y \geq 5 \\ x - 2y \leq 5 \end{cases}$$

a) Representamos la región factible y la recta $2x + y = 0$.



Al tener la función objetivo coeficientes de la x, y de la y, positivos, el máximo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $2x + y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido positivo del eje Y, y el mínimo, en el último punto que toque al desplazarse en sentido negativo.

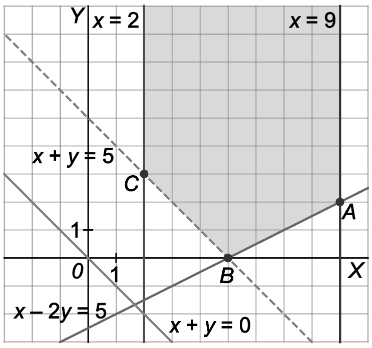
Por tanto:

No existe el máximo.

El mínimo se encuentra en el vértice $B(2, 7)$ y su valor es $z_B = 11$.

Nota: Observemos que la condición $x + y \geq 5$ es redundante.

b) Representamos la región factible y la recta $x + y = 0$.



Al tener la función objetivo coeficientes de la x, y de la y, positivos, el máximo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $x + y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido positivo del eje Y, y el mínimo, en el último punto que toque al desplazarse en sentido negativo.

Por tanto:

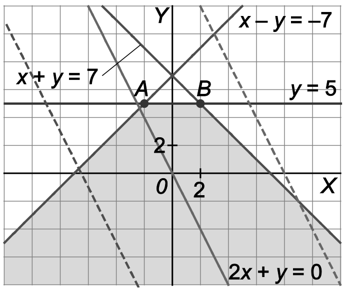
No existe el máximo.

El mínimo se encuentra en cualquier punto del segmento de extremos $B(5, 0)$ y $C(2, 3)$ y su valor es $z_B = 5$.

46. Comprueba que la función $f(x, y) = 2x + y$ no alcanza ni máximo ni mínimo si está sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 7 \\ x - y \geq -7 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

Representamos la región factible y la recta $2x + y = 0$.



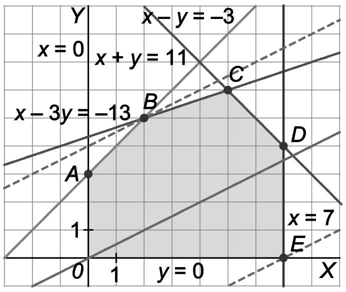
Al tener la función objetivo coeficientes de la x, y de la y, positivos, el máximo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $2x + y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido positivo del eje Y, y el mínimo, en el último punto que toque al desplazarse en sentido negativo.

Como al desplazarse en cualquiera de los dos sentidos la recta $2x + y = 0$ toca en todo momento la región factible, no existe ni el máximo ni el mínimo.

47. Dibuja la región determinada por las condiciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x - y} &\geq \mathbf{-3} \\ \boldsymbol{x - 3y} &\geq \mathbf{-13} \\ \boldsymbol{y} &\geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x + y} &\leq \mathbf{11} \\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} &\leq \mathbf{7} \end{aligned}$$

Halla de forma gráfica el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x - 2y$ si está sujeta a las anteriores condiciones.



Representamos la región factible y la recta $x - 2y = 0$.

Al tener la función objetivo coeficiente de la x positivo y coeficiente de la y negativo, el máximo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $x - 2y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido negativo del eje Y, y el mínimo, en el último punto que toque al desplazarse en sentido positivo.

Por tanto:

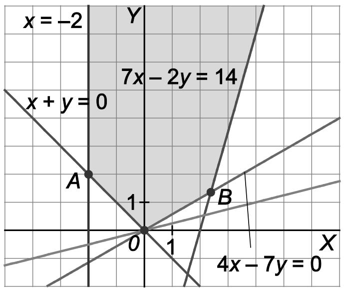
El máximo se encuentra en el vértice $E(7, 0)$ y su valor es $z_E = 7$.

El mínimo se encuentra en el vértice $B(2, 5)$ y su valor es $z_B = -8$.

48. Dibuja la región determinada por las condiciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{7}\boldsymbol{y} &\leq \mathbf{0} \\ \mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} &\leq \mathbf{14} \\ \boldsymbol{x + y} &\geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} &\geq \mathbf{-2} \end{aligned}$$

Halla de forma gráfica el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x - 4y$ si está sujeta a las anteriores condiciones.



Representamos la región factible y la recta $x - 4y = 0$.

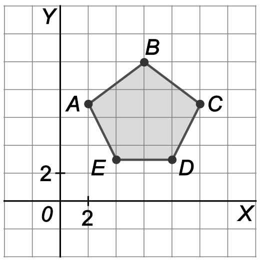
Al tener la función objetivo coeficiente de la x positivo y coeficiente de la y negativo, el máximo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $x - 4y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido negativo del eje Y, y el mínimo, en el último punto que toque al desplazarse en sentido positivo.

Por tanto:

El máximo se encuentra en el vértice $O(0, 0)$ y su valor es $z_O = 0$.

No existe el mínimo.

49. Evalúa la función objetivo $z = \frac{1}{2}x + \frac{7}{3}y$ en los vértices del recinto de la figura.



Los vértices del recinto son: $A(2, 7)$, $B(6, 10)$, $C(10, 7)$, $D(8, 3)$ y $E(4, 3)$.

Evaluando la función objetivo en ellos tenemos:

$$z_A = \frac{52}{3} \quad z_B = \frac{79}{3} \quad z_C = \frac{64}{3} \quad z_D = 11 \quad z_E = 9$$

50. Resuelve de forma analítica los siguientes problemas de programación lineal.

a) Min $z = 9x + y$

Sujeta a:

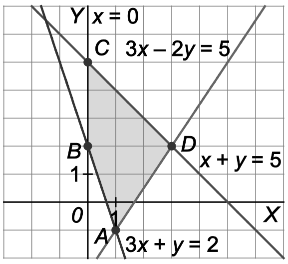
$$\begin{cases} x + y \le 5 \\ 3x + y \ge 2 \\ 3x - 2y \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

b) Min $z = 4x + 5y$

Sujeta a:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{8} \le 1 \\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{8} \ge 1 \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{4} \ge 1 \end{cases}$$

a) Representamos la región factible y calculamos sus vértices:



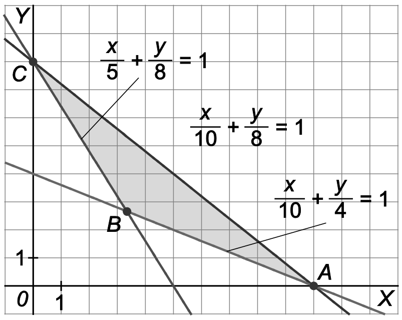
$$A(1, -1),\ B(0, 2),\ C(0, 5) \text{ y } D(3, 2)$$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$z_A = 8 \quad z_B = 2 \quad z_C = 5 \quad z_D = 29$$

Por tanto, el mínimo se alcanza en el vértice $B(0, 2)$ y su valor es $z_B = 2$.

b) Representamos la región factible y calculamos sus vértices:



$$A(10, 0),\ B: \begin{cases} \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{8} = 1 \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 5y = 40 \\ 2x + 5y = 20 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{8}{3}\right) \text{ y } C(0, 8)$$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$z_A = 40 \quad z_B = \frac{80}{3} \quad z_C = 40$$

Por tanto, el mínimo se alcanza en el vértice $B\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$ y su valor es $z_B = \dfrac{80}{3}$.

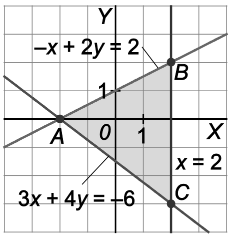
Síntesis

51. Para cada uno de los siguientes casos, escribe un sistema de ecuaciones lineales cuya solución sea el recinto acotado que tiene como vértices los puntos que se indican:

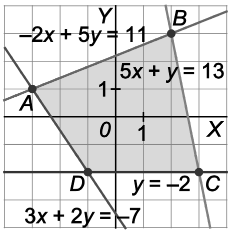
a) $A(-2, 0)$, $B(2, 2)$ y $C(2, -3)$

b) $A(-3, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, -2)$ y $D(-1, -2)$

a) $\begin{cases} 3x + 4y \ge -6 \\ -x + 2y \le 2 \\ x \le 2 \end{cases}$



b) $\begin{cases} -2x + 5y \le 11 \\ 5x + y \le 13 \\ 3x + 2y \ge -7 \\ y \ge -2 \end{cases}$



52. Sea *R* la región factible definida por las inecuaciones:

$$x \geq 3 \qquad x \leq 5 \qquad y \geq 1$$

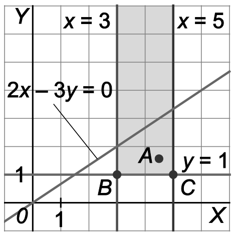
a) Razona si el punto $A(4{,}5;\ 1{,}55)$ pertenece a *R*.

b) Calcula los extremos de $f(x,y) = 2x - 3y$ en *R*.

c) Razona si hay algún punto de *R* donde la función *f* valga 3,5. ¿Y 7,5?

a) El punto *A* pertenece a *R*, ya que cumple todas las inecuaciones que definen *R*.

b) Representamos la región *R* y, al ser no acotada, la recta $2x - 3y = 0$.



Al tener la función objetivo coeficiente de la *x* positivo y coeficiente de la *y* negativo, el máximo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $2x - 3y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido negativo del eje *Y*, y el mínimo, en el último punto que toque al desplazarse en sentido positivo.

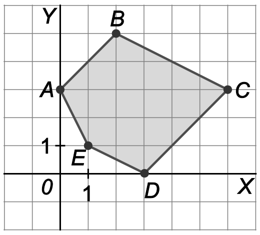
Por tanto:

El máximo se encuentra en el vértice $C(5,\ 1)$ y su valor es $f_C = 7$.

No existe el mínimo.

c) La función *f* alcanza en *R* cualquier valor menor o igual a 7, por tanto alcanza el valor 3,5 pero no el 7,5.

53. Considera la región factible de la figura y copia y completa la tabla en tu cuaderno.



Función objetivo	Máximo	Mínimo
$z = x + y$		
$z = x - y$		
$z = x + 2y$		
$z = 2x + y$		
$z = x - 2y$		

Los vértices del recinto son: $A(0,\ 3)$, $B(2,\ 5)$, $C(6,\ 3)$, $D(3,\ 0)$ y $E(1,1)$.

Evaluando las funciones objetivo en ellos tenemos:

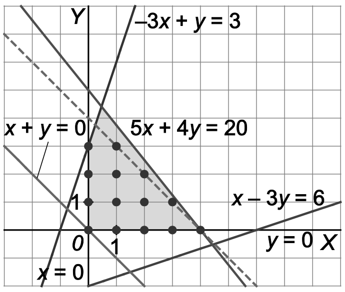
Función objetivo	Máximo	Mínimo
$z = x + y$	Se alcanza en *C* y vale $z_C = 9$.	Se alcanza en *E* y vale $z_E = 2$.
$z = x - y$	Se alcanza en cualquier punto de *CD* y vale $z_C = 3$.	Se alcanza en cualquier punto de *AB* y vale $z_A = -3$.
$z = x + 2y$	Se alcanza en cualquier punto de *BC* y vale $z_B = 12$.	Se alcanza en cualquier punto de *DE* y vale $z_D = 3$.
$z = 2x + y$	Se alcanza en *C* y vale $z_C = 15$.	Se alcanza en cualquier punto de *AE* y vale $z_A = 3$.
$z = x - 2y$	Se alcanza en *D* y vale $z_C = 3$.	Se alcanza en *B* y vale $z_B = -8$.

54. Resuelve el problema de programación lineal entera.

Máx $z = x + y$

Sujeto a: $\begin{cases} x - 3y \le 6 \\ -3x + y \le 3 \\ 5x + 4y \le 20 \\ x \ge 0 \;\; y \ge 0 \text{ donde } x,\, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Representamos la región factible, de hecho, la región factible la forman únicamente los puntos de coordenadas enteras del recinto representado. Por este motivo, aunque la región es acotada, vamos a usar el método gráfico, por lo que también representamos la recta $x + y = 0$.



Al tener la función objetivo coeficientes de la x, y de la y, positivos, el máximo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $x + y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido positivo del eje Y.

Por tanto, el máximo se alcanza en los puntos $P_1(1, 3)$, $P_2(2, 2)$, $P_3(3, 1)$ y $P_4(4, 0)$, y su valor es $z = 4$.

Nota: Si hubiéramos usado el método analítico obtendríamos que el máximo se alcanza en el punto:

$$P : \begin{cases} -3x + y = 3 \\ 5x + 4y = 20 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{8}{17}, \frac{75}{17}\right)$$

Cuyas coordenadas no son enteras y, por tanto, no puede ser la solución del problema de programación entera.

Por ello, al resolver un problema de programación entera usando el método analítico, si el vértice donde se alcanza el máximo o mínimo no tuviera coordenadas enteras, debemos recurrir al método gráfico.

55. Dado el siguiente problema de programación lineal.

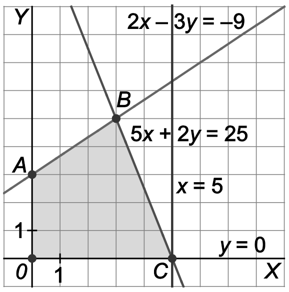
Máx $z = 2x + \lambda y$

Sujeto a: $\begin{cases} 2x - 3y \ge -9 \\ 5x + 2y \le 25 \\ 0 \le x \le 5 \;\; y \ge 0 \end{cases}$

Halla los valores de λ para los cuales la solución óptima del problema se encuentra en el vértice $B(3, 5)$.

Los vértices de la región factible son:

$$O(0, 0) \quad A(0, 3) \quad B(3, 5) \quad C(5, 0)$$



El valor de la función objetivo en ellos es:

$$z_O = 0 \qquad z_A = 3\lambda \qquad z_B = 6 + 5\lambda \qquad z_C = 10$$

Para que el máximo se alcance en B debe ser:

$$\begin{cases} 6 + 5\lambda \ge 0 \\ 6 + 5\lambda \ge 3\lambda \\ 6 + 5\lambda \ge 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \ge -\frac{6}{5} \\ \lambda \ge -3 \\ \lambda \ge \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \lambda \ge \frac{4}{5}$$

56. Dado el siguiente problema de programación lineal.

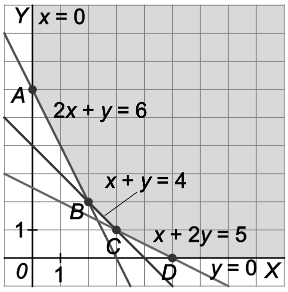
Mín $z = 3x + \lambda y$

Sujeto a: $\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x + 2y \geq 5 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$

Halla los valores de λ para los cuales la solución óptima del problema se encuentra en el vértice *C*(3, 1). ¿Cuánto vale *z* en este caso?

Los vértices de la región factible son:

$A(0, 6) \quad B(2, 2) \quad C(3, 1) \quad D(5, 0)$



El valor de la función objetivo en ellos es:

$$z_A = 6\lambda \qquad z_B = 6 + 2\lambda \qquad z_C = 9 + \lambda \qquad z_D = 15$$

Para que el mínimo se alcance en *C* debe ser:

$$\begin{cases} 9 + \lambda \leq 6\lambda \\ 9 + \lambda \leq 6 + 2\lambda \\ 9 + \lambda \leq 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \geq \dfrac{9}{5} \\ \lambda \geq 3 \\ \lambda \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq \lambda \leq 6$$

CUESTIONES

57. Se considera un problema de programación lineal con dos variables. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si el punto (*a*, *b*) es una solución óptima del problema, entonces obligatoriamente es un vértice de la región factible.

b) Si el punto (*a*, *b*) es la única solución óptima del problema, entonces (*a*, *b*) obligatoriamente pertenece a la región factible.

c) Si el punto (*a*, *b*) es la única solución óptima del problema, entonces es obligatoriamente un vértice de la región factible.

d) Si (*a*, *b*) no pertenece a la región factible, entonces no puede ser solución del problema.

a) Falsa. Una solución puede ser óptima y no ser vértice, ya que puede ser una de las infinitas soluciones de un problema de programación lineal.

b) Verdadera. Si el punto (*a*, *b*) es la única solución óptima del problema, entonces (*a*, *b*) obligatoriamente pertenece a la región factible, de hecho, cualquier solución óptima (sea única o no) debe pertenecer a la región factible.

c) Verdadera. Si el punto (*a*, *b*) es la única solución óptima del problema, entonces es obligatoriamente un vértice de la región factible.

d) Verdadera, cualquier posible solución del problema debe pertenecer a la región factible.

58. Escribe un problema de programación lineal con una región factible que sea no vacía y que esté determinada por restricciones de desigualdad no estrictas, y que no tenga solución ni para el mínimo ni para el máximo. ¿Podría ser acotada esta región factible?

Nos sirve de ejemplo el problema del ejercicio 46.

Cualquier región que nos sirva de ejemplo debe ser no acotada.

59. La recta $2x + 5y = k$ se desplaza de forma paralela desde el origen de coordenadas hacia la parte positiva del eje *OY*. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El valor de *k* es menor cuanto mayor es la distancia que separa a la recta del origen de coordenadas.

b) El valor de *k* es mayor cuanto mayor es la distancia que separa a la recta del origen de coordenadas.

c) El valor de *k* permanece constante.

La única respuesta correcta es la b. El valor de *k* es mayor cuanto mayor es la distancia que separa a la recta del origen de coordenadas, ya que al ser los coeficientes de *x* y de *y* positivos, el valor de *k* es mayor cuanto más se aleje la recta del origen de coordenadas en el sentido positivo del eje *Y*.

PROBLEMAS

60. En una granja hay un total de 9000 conejos. La dieta mensual mínima que debe consumir cada conejo es de 48 unidades de hidratos de carbono y 60 unidades de proteínas. En el mercado hay dos tipos de productos, *A* y *B*, que aportan estas necesidades de consumo. Cada envase *A* contiene 2 unidades de hidratos de carbono y 4 unidades de proteínas y cada envase de *B* contiene 3 unidades de hidratos de carbono y 3 unidades de proteínas. Sabiendo que cada envase de *A* cuesta 0,24 € y que cada envase de *B* cuesta 0,20 €, determina, justificando la respuesta:

a) El número de envases de cada tipo que deben adquirir los responsables de la granja con objeto de que el coste sea mínimo y se cubran las necesidades de consumo mensuales de todos los conejos.

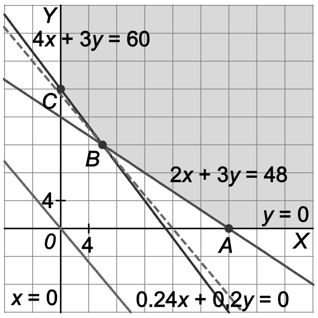
b) El valor de dicho coste mensual.

a) Las variables de decisión son:

x envases tipo *A* (para un conejo) y envases tipo *B* (para un conejo)

Queremos hallar el mínimo coste $z = 0{,}24x + 0{,}2y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 48 \\ 4x + 3y \geq 60 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$



Representamos la región factible y, al ser no acotada, la recta $0{,}24x + 0{,}2y = 0$.

Como la función objetivo tiene coeficientes de la *x*, y de la *y*, positivos, el mínimo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $0{,}24x + 0{,}2y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido negativo del eje *Y*.

Por tanto, el mínimo se localiza en el vértice *B*:

$$B: \begin{cases} 2x + 3y = 48 \\ 4x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow B(6, 12)$$

Es decir, para obtener el coste mínimo hay que adquirir $x = 6$ envases *A* e $y = 12$ envases *B* para cada conejo. Por tanto, para los 9000 conejos hay que adquirir 54 000 envases *A* y 108 000 envases *B*.

Nota: Observando la representación gráfica podrían surgir dudas sobre si el mínimo se alcanza en el vértice *B* o en el vértice *C*, en este caso podemos calcular dichos vértices y evaluar la función objetivo en ellos para determinar en cual se alcanza verdaderamente el mínimo.

b) El coste mensual es $z_B = 3{,}84$ € por conejo, es decir, el coste mensual total es 34 560 €.

61. En un hospital se irradia con dos bombas de cobalto, C_1 y C_2. Cada dosis de radiación con C_1 aporta 0,3 kilorads al centro del tumor, 0,25 kilorads a otras regiones del tumor, 0,15 kilorads a regiones críticas colindantes y 0,2 kilorads a zonas de anatomía sana colindante. Cada dosis de radiación con C_2 aporta a esas mismas zonas 0,2, 0,25, 0,05 y 0,25 kilorads respectivamente. Para tratar un tumor en el mediastino el equipo médico considera necesario aportar al menos 6 kilorads al centro del tumor y se debe aportar exactamente 6 kilorads a otras regiones del tumor. Sin embargo el aporte de más de 2,4 kilorads a las regiones críticas colindantes sería fatal. ¿Con cuántas dosis de cada fuente deberá realizarse el tratamiento para minimizar el aporte de kilorads a la anatomía sana?

Las variables de decisión son:

x dosis con la bomba C_1 $\qquad$ y dosis con la bomba C_1

Queremos hallar el mínimo de $z = 0,2x + 0,25y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 0,3x + 0,2y \geq 6 & \text{dosis mínima al centro del tumor} \\ 0,25x + 0,25y = 6 & \text{dosis exacta en otras regiones del tumor} \\ 0,15x + 0,05y \leq 2,4 & \text{dosis máxima en regiones críticas colindantes} \\ x \geq 0,\ y \geq 0 & \text{condiciones de no negatividad} \end{cases}$$

De la segunda restricción obtenemos $0,26x + 0,25y = 6 \Rightarrow y = 24 - x$, con lo que podemos simplificar el problema buscando el mínimo de $z = 0,2x + 0,25(24 - x) = 6 - 0,05x$ sujeto a:

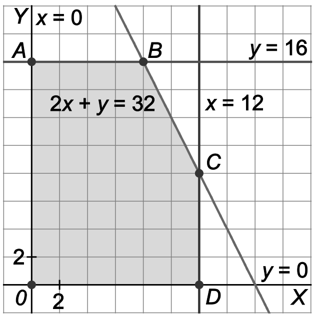
$$\begin{cases} 0,3x + 0,2(24 - x) \geq 6 \\ 0,15x + 0,05(24 - x) \leq 2,4 \\ 0 \leq x \leq 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 12 \\ x \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 24 \end{cases} \Rightarrow x = 12$$

Por tanto, el mínimo de radiación a la anatomía sana se producirá al realizar el tratamiento con 12 dosis de cada fuente.

62. Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas, y cada yate, 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Las variables de decisión son:

x pesqueros $\qquad$ y yates



Queremos hallar el máximo ingreso $z = 50000x + 10000y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 100x + 50y \leq 1600 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 32 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 16 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$O(0, 0)$ $\qquad$ $A(0, 16)$ $\qquad$ $B(8, 16)$ $\qquad$ $C(12, 8)$ $\qquad$ $D(12, 0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_O = 0$ $\qquad$ $z_A = 160000$ $\qquad$ $z_B = 560000$ $\qquad$ $z_C = 680000$ $\qquad$ $z_D = 600000$

Por tanto, el máximo ingreso se localiza en el vértice C y su valor es $z_C = 680000$, es decir, hay que reparar $x = 12$ pesqueros e $y = 8$ yates, obteniéndose unos ingresos de 680 000 €.

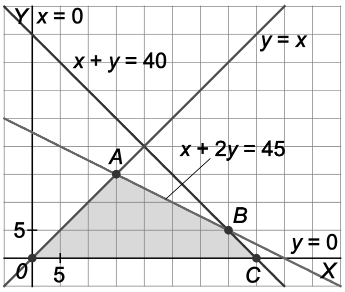
63. Un agricultor tiene 40 ha de terreno en las que puede plantar cebada o maíz (o no plantar nada). Cada ha de cebada necesitará 5 hm^3 de agua mientras que cada Ha de maíz necesitará 10 hm^3 de agua. El agricultor podrá disponer de 225 hm^3 de agua. El beneficio que obtendrá por cada ha de cebada es de 100 € mientras que por cada ha de maíz obtendrá un beneficio de 160 €; además, las ha en las que no plante nada las arrendará y obtendrá un beneficio de 50 € por ha. La normativa no le permite plantar más ha de maíz que de cebada ¿Cuántas ha de cebada y cuántas de maíz tiene que plantar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio?

Las variables de decisión son:

x hectáreas de cebada $\quad$ y hectáreas de maíz $\quad$ $40-x-y$ hectáreas sin plantar

Queremos hallar el máximo beneficio $z=100x+160y+50(40-x-y)=50x+110y+2000$ sujeto a:

$$\begin{cases} x+y\le 40 \\ 5x+10y\le 225 \\ y\le x \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y\le 40 \\ x+2y\le 45 \\ y\le x \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$$



Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$O(0,\,0)$ $\quad$ $A(15,\,15)$ $\quad$ $B(35,\,5)$ $\quad$ $C(40,\,0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

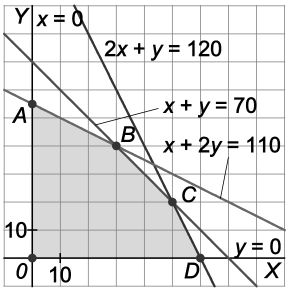
$z_O=0$ $\quad$ $z_A=4400$ $\quad$ $z_B=4300$ $\quad$ $z_C=4000$

Por tanto, el máximo beneficio se localiza en el vértice A y su valor es $z_A=4400$, es decir, hay que plantar $x=15$ hectáreas de cebada, $y=15$ hectáreas de maíz y dejar sin plantar 10 hectáreas, obteniéndose unos beneficios de 4400 €.

64. En un almacén de productos perecederos disponen de 70 cajas de naranjas, 120 cajas de peras y 110 cajas de manzanas que quiere vender antes de que no sean aptos para el consumo. Para vender las existencias, se hacen dos tipos de lotes: el lote *A* contiene una caja de naranjas, dos cajas de peras y una caja de manzanas y se venderá a 6 euros y cada lote *B* contiene una caja de naranjas, una de peras y dos de manzanas y se venderá a 7 euros. Calcula cuántos lotes se deberán hacer de cada tipo para que los ingresos por las ventas sean máximos.

Las variables de decisión son:

x nº de lotes A $\quad$ y nº de lotes B



Queremos hallar el máximo de $z=6x+7y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x+y\le 70 \\ 2x+y\le 120 \\ x+2y\le 110 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$O(0,\,0)$ $\quad$ $A(0,\,55)$ $\quad$ $B(30,\,40)$ $\quad$ $C(50,\,20)$ $\quad$ $D(60,\,0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_O=0$ $\quad$ $z_A=385$ $\quad$ $z_B=460$ $\quad$ $z_C=440$ $\quad$ $z_D=360$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice B y su valor es $z_B=460$, es decir, hay que hacer $x=30$ lotes A e $y=40$ lotes B, obteniéndose unos ingresos de 460 €.

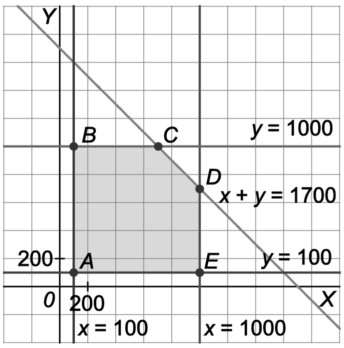
65. *Una refinería produce gasolina sin plomo y gasoil en las siguientes condiciones: no puede producir más de una tonelada ni menos de 100 kg de cada producto. Los precios de venta son de 0,8 unidades monetarias para cada kg de gasolina y 0,85 para cada kg de gasoil. Se produce como máximo un total de 1700 kg entre los dos productos. ¿Cuál es la producción que maximiza los ingresos?

Las variables de decisión son:

x gasolina sin plomo $\quad$ y gasoil

Queremos hallar el máximo de $z = 0{,}8x + 0{,}85y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \le 1700 \\ 100 \le x \le 1000 \\ 100 \le y \le 1000 \end{cases}$$



Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$A(100, 100)$ $\quad$ $B(100, 1000)$ $\quad$ $C(700, 1000)$

$D(1000, 700)$ $\quad$ $E(1000, 100)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_A = 165$ $\quad$ $z_B = 930$ $\quad$ $z_C = 1410$ $\quad$ $z_D = 1395$ $\quad$ $z_E = 885$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice C y su valor es $z_C = 1410$, es decir, hay que producir $x = 700$ kg de gasolina sin plomo e $y = 1000$ kg de gasoil, obteniéndose unos ingresos de 1410 unidades monetarias.

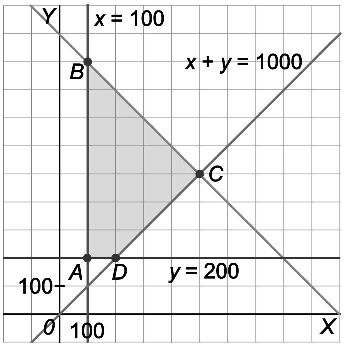
66. Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños, pequeños y grandes. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro por cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro por cada envase grande. ¿Qué número de envases de cada tipo proporciona el mínimo coste de almacenaje?

Las variables de decisión son:

x envases pequeños $\quad$ y envases grandes

Queremos hallar el mínimo de $z = 10x + 20y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \le 1000 \\ x \ge 100 \\ y \ge 200 \\ y \ge x \end{cases}$$



Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$A(100, 200)$ $\quad$ $B(100, 900)$ $\quad$ $C(500, 500)$ $\quad$ $D(200, 200)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

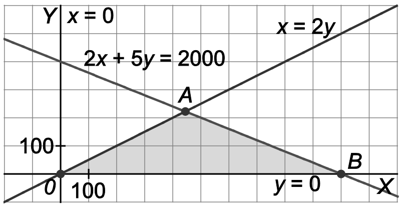
$z_A = 5000$ $\quad$ $z_B = 19000$ $\quad$ $z_C = 15000$ $\quad$ $z_D = 6000$

Por tanto, el mínimo se localiza en el vértice A y su valor es $z_A = 5000$, es decir, hay que almacenar $x = 100$ envases pequeños e $y = 200$ envases grandes, con un coste de 5000 cts $=$ 50 €.

67. Los empleados de un banco deben rellenar cada tarde el cajero automático de una sucursal con billetes de 20 y 50 €. Por motivos de seguridad, la máquina nunca debe contener más de 20 000 €. Por otro lado, dado que los clientes prefieren los billetes de 20 €, deben introducir al menos el doble de billetes de 20 que de 50 €. Si quieren que el cajero tenga el menor número posible de billetes, ¿cuántos debe haber de cada tipo?

Las variables de decisión son:

x billetes de 20 € $\quad$ y billetes de 50 €



Queremos hallar el mínimo de $z = x + y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 20x + 50y \le 20000 \\ x \ge 2y \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5y \le 2000 \\ x \ge 2y \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$$O(0,\ 0) \qquad A: \begin{cases} 2x + 5y = 2000 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{4000}{9},\ \frac{2000}{9}\right) \qquad B(1000,\ 0)$$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

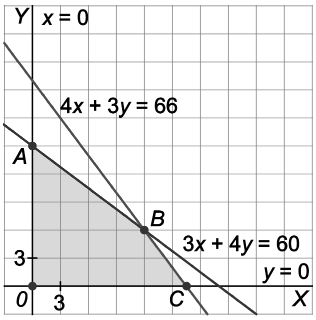
$$z_O = 0 \qquad z_A = \frac{2000}{3} \qquad z_B = 1000$$

Por tanto, el mínimo se localiza en el vértice O y su valor es $z_O = 0$, es decir, el mínimo de billetes se obtiene, obviamente, al no introducir ninguno en el cajero. Obsérvese que esta solución verifica todas y cada una de las condiciones.

68. En un taller de artesanía se fabrican jarrones de adorno de dos tipos *A* y *B*. Cada jarrón de tipo *A* precisa 30 minutos de modelado, 40 minutos de pintura y se vende a 40 €. Cada jarrón de tipo *B* precisa 40 minutos de modelado, 30 minutos de pintura y se vende a 35 €. Para fabricar estos jarrones se cuenta con dos empleados que hacen el modelado y que trabajan 5 horas por día, con dos empleados que hacen la pintura y que trabajan 5,5 horas por día. Halla el número óptimo de jarrones que se pueden fabricar al día para que los ingresos sean máximos.

Las variables de decisión son:

x jarrones tipo A $\quad$ y jarrones tipo B



Queremos hallar el máximo de $z = 40x + 35y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 30x + 40y \le 600 \\ 40x + 30y \le 660 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y \le 60 \\ 4x + 3y \le 66 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$$O(0,\ 0) \qquad A(0,\ 15) \qquad B(12,\ 6) \qquad C\left(\frac{33}{2},\ 0\right)$$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

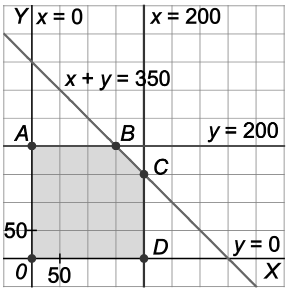
$$z_O = 0 \qquad z_A = 525 \qquad z_B = 690 \qquad z_C = 660$$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice B y su valor es $z_B = 690$, es decir, hay que fabricar diariamente $x = 12$ jarrones de tipo A e $y = 6$ jarrones de tipo B, obteniéndose unos ingresos de 690 €.

69. Un heladero artesano elabora dos tipos de helados *A* y *B*. Los helados tipo *A* llevan 1 gramo de nata y los helados tipo *B* llevan 2 gramos de chocolate. Se dispone de 200 gramos de nata, 400 gramos de chocolate y le da tiempo a elaborar como máximo 350 helados diariamente. Por cada helado tipo *A* obtiene un beneficio de 1,5 € y por cada helado tipo *B* el beneficio es de 1€. Determina las unidades de cada tipo de helado que debe elaborar diariamente para que su beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.

Las variables de decisión son:

x helados tipo *A* $\quad$ y helados tipo *B*



Queremos hallar el máximo de $z = 1{,}5x + y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 200 \\ 0 \le 2y \le 400 \\ x + y \le 350 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 200 \\ 0 \le y \le 200 \\ x + y \le 350 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$O(0,\ 0)$ $\quad$ $A(0,\ 200)$ $\quad$ $B(150,\ 200)$ $\quad$ $C(200,\ 150)$ $\quad$ $D(200,\ 0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

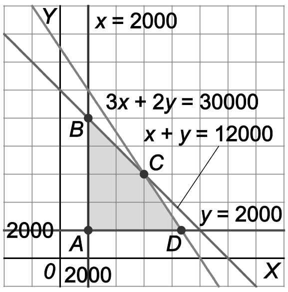
$z_O = 0$ $\quad$ $z_A = 200$ $\quad$ $z_B = 425$ $\quad$ $z_C = 450$ $\quad$ $z_D = 300$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice *C* y su valor es $z_C = 450$, es decir, hay que elaborar diariamente $x = 200$ helados de tipo *A* e $y = 150$ helados de tipo *B*, obteniéndose unos beneficios de 450 €.

70. Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, *A* y *B*. La cantidad máxima que puede comprar es de 12 000 litros en total. El aceite de tipo *A* cuesta 3 €/L y el de tipo *B* cuesta 2 €/L. Necesita adquirir al menos 2000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30 000 €. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo *A* y de un 30 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberán adquirir para maximizar el beneficio? Obtén el valor del beneficio máximo.

Las variables de decisión son:

x litros de aceite *A* $\quad$ y litros de aceite *B*



Queremos hallar el máximo de $z = 0{,}25 \cdot 3x + 0{,}3 \cdot 2y = 0{,}75x + 0{,}6y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \le 12000 \\ x \ge 2000 \\ y \ge 2000 \\ 3x + 2y \le 30000 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$A(2000,\ 2000)$ $\quad$ $B(2000,\ 10000)$ $\quad$ $C(6000,\ 6000)$ $\quad$ $D\left(\dfrac{26000}{3},\ 2000\right)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_A = 2700$ $\quad$ $z_B = 7500$ $\quad$ $z_C = 8100$ $\quad$ $z_D = 7700$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice *C* y su valor es $z_C = 8100$, es decir, hay que adquirir 6000 litros de cada tipo de aceite, obteniéndose unos beneficios de 8100 €.

71. Cierto taller se dedica a la revisión de dos marcas *A* y *B* de automóviles. Debe revisar tanto el sistema eléctrico como el funcionamiento del motor. Cada automóvil de tipo *A* precisa 30 minutos para la revisión eléctrica y otros 30 minutos para la revisión del motor. Cada automóvil de tipo *B* precisa 30 minutos para la revisión eléctrica y 60 minutos para la revisión del motor.

Las disponibilidades de los operarios hacen que se cuente con un máximo de 25 horas de trabajo semanales para la revisión eléctrica y de 35 horas de trabajo semanales para la revisión del motor.

La revisión de un automóvil de tipo *A* proporciona unos beneficios de 35 €, y la de uno de tipo *B,* 50 €.

a) ¿Cuántos automóviles de cada tipo se deben admitir a la semana de forma que se maximicen los beneficios?

b) Para esta solución óptima, ¿qué beneficios máximos se obtendrán?

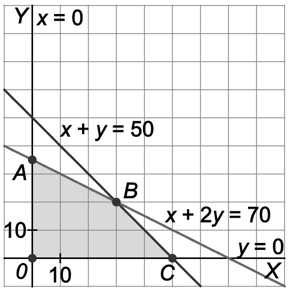
c) ¿Con esta producción puede prescindirse de alguna de las horas disponibles?

a) Las variables de decisión son:

x automóviles de tipo *A* y automóviles de tipo *B*

Queremos hallar el máximo de $z = 35x + 50y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 30x + 30y \le 1500 \\ 30x + 60y \le 2100 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \le 50 \\ x + 2y \le 70 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$



Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$O(0, 0)$ $A(0, 35)$ $B(30, 20)$ $C(50, 0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_0 = 0$ $z_A = 1750$ $z_B = 2050$ $z_C = 1750$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice *B*, es decir, semanalmente hay que admitir $x = 30$ coches tipo *A* e $y = 20$ coches tipo *B*.

b) Los beneficios obtenidos son $z_B = 2050$ €.

c) No se puede prescindir de ninguna de las horas disponibles, ya que en el vértice *B* son necesarias todas las horas disponibles, tanto para revisar el sistema eléctrico como el funcionamiento del motor.

72. En cierta quesería producen dos tipos de queso: mezcla y tradicional. Para producir un queso de mezcla son necesarios 25 cL de leche de vaca y otros 25 cL de leche de cabra; para producir uno tradicional, solo hacen falta 50 cL de leche de vaca. La quesería dispone de 3600 cL de leche de vaca y 500 cL de leche de cabra al día. Por otra parte, puesto que los quesos tradicionales gustan más, cada día produce al menos tantos quesos de tipo tradicional como de mezcla.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo podrá producir en un día cualquiera? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si la quesería vende todo lo que produce y obtiene un beneficio de 3 € por cada queso de tipo mezcla y 4 € por cada queso de tipo tradicional. ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir diariamente para maximizar beneficios? ¿Qué beneficio obtiene en ese caso?

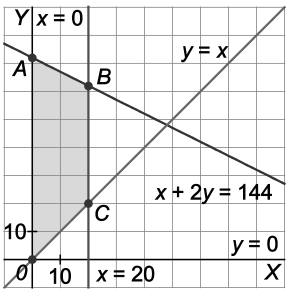
a) Las variables de decisión son:

x quesos mezcla y quesos tradicionales

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} 25x + 50y \le 3600 \\ 25x \le 500 \\ y \ge x \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y \le 144 \\ x \le 20 \\ y \ge x \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Cuyo conjunto de soluciones (región factible) representamos.



b) Queremos hallar el máximo de $z = 3x + 4y$ sujeto a las restricciones anteriores.

Calculamos los vértices de la región factible anterior:

$O(0, 0)$ $\qquad A: \begin{cases} x + 2y = 144 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 72)$

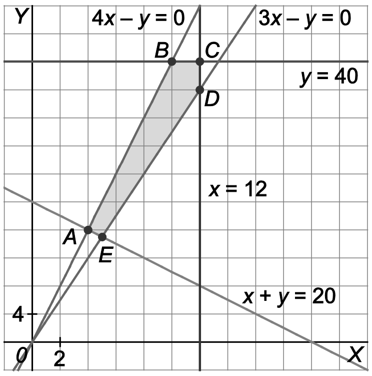
$B: \begin{cases} x + 2y = 144 \\ x = 20 \end{cases} \Rightarrow B(20, 62)$ $\qquad C: \begin{cases} x = 20 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow C(20, 20)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_0 = 0 \qquad z_A = 288 \qquad z_B = 308 \qquad z_C = 140$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice B y su valor es $z_B = 308$, es decir, diariamente hay que producir $x = 20$ quesos mezcla e $y = 62$ quesos tradicionales, obteniéndose unos beneficios de 308 €.

73. En un edificio público se quieren colocar, al menos, 20 máquinas expendedoras entre las de bebidas calientes y las de bebidas frías. Hay disponibles 12 máquinas de bebidas calientes y 40 de bebidas frías. Se pretende que el número de expendedoras de bebidas calientes no sea superior a una tercera parte del de bebidas frías y que, por lo menos, una quinta parte del total de máquinas que se coloquen sean de bebidas calientes. Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿qué combinación de máquinas de cada tipo hace que la diferencia del número de máquinas de bebidas frías menos el de bebidas calientes colocadas sea mayor?



Las variables de decisión son:

x máquinas de bebidas calientes $\qquad y$ máquinas de bebidas frías

Queremos hallar el máximo de $z = y - x$ sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \geq 20 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 40 \\ x \leq \dfrac{y}{3} \\ x \geq \dfrac{x+y}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \geq 20 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 40 \\ 3x - y \leq 0 \\ 4x - y \geq 0 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$A: \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4, 16)$ $\qquad B: \begin{cases} y = 40 \\ 4x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(10, 40)$ $\qquad C: \begin{cases} x = 12 \\ y = 40 \end{cases} \Rightarrow C(12, 40)$

$D: \begin{cases} x = 12 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(12, 36)$ $\qquad E: \begin{cases} x + y = 20 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(5, 15)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_A = 12 \qquad z_B = 30 \qquad z_C = 28 \qquad z_D = 24 \qquad z_E = 10$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice B y su valor es $z_B = 30$, es decir, el máximo de diferencia entre las bebidas de uno y otro tipo (30) se alcanza al colocar 10 máquinas de bebidas calientes y 40 de bebidas frías.

74. Las fábricas de automóviles de Fráncfort y de Milán proveen de un cierto modelo a las ciudades de París, Viena y Praga.

Las producciones de las fábricas son:

Fráncfort	Milán
150	**100**

Las demandas de las ciudades son:

París	Viena	Praga
125	**100**	**25**

Los costes de transporte, en unidades monetarias, de cada automóvil desde un punto de origen a uno de destino son:

	París	Viena	Praga
Fráncfort	**5**	**10**	**15**
Milán	**20**	**15**	**20**

Halla cuántos automóviles deben llevarse desde cada fábrica a cada ciudad para que el coste total de los gastos de transporte sea mínimo y calcula dicho coste mínimo.

La siguiente tabla de variables indica el número de automóviles que se trasporta de un lugar a otro.

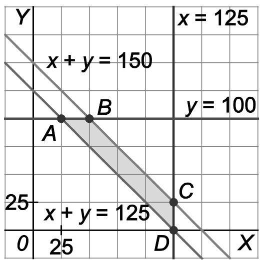
	París	Viena	Praga	Total
Fráncfort	x	y	$150–x–y$	150
Milán	$125–x$	$100–y$	$x+y–125$	100
Total	125	100	25	250

Queremos hallar el mínimo coste:

$$z = 5x + 10y + 15(150 - x - y) + 20(125 - x) + 15(100 - y) + 20(x + y - 125) = 3750 - 10x$$

Las restricciones del problema son las que resultan de obligar a que las variables de la tabla anterior no sean negativas, es decir, queremos resolver el problema de programación lineal:

Min $z = 3750 - 10x$ sujeto a $\begin{cases} 0 \le x \le 125 \\ 0 \le y \le 100 \\ 125 \le x + y \le 150 \end{cases}$



Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$A(25, 100)$ $B(50, 100)$ $C(125, 25)$ $D(125, 0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_A = 3500$ $z_B = 3250$ $z_C = 2500$ $z_D = 2500$

Por tanto, el mínimo se alcanza en cualquier punto del segmento de extremos C y D (de hecho, solo en los puntos de coordenadas enteras), es decir, $x = 125$ pero y puede variar entre 0 y 25. En todas estas las soluciones el coste será de 2500 unidades monetarias.

Las soluciones se muestran en la siguiente tabla, donde $0 \le y \le 25$, $y \in \mathbb{Z}$.

	París	Viena	Praga
Fráncfort	125	y	$25–y$
Milán	0	$100–y$	y

Por tanto los únicos envíos fijos son a París, 125 automóviles desde Fráncfort y ninguno desde Milán.

Dos posibles transportes con coste mínimo son los siguientes:

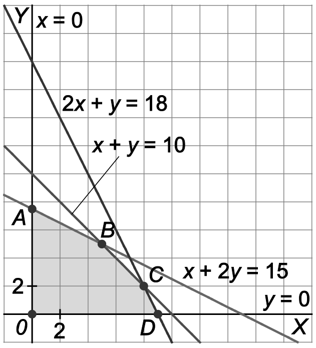
	París	Viena	Praga
Fráncfort	125	0	25
Milán	0	100	0

	París	Viena	Praga
Fráncfort	125	25	0
Milán	0	75	25

75. El dueño de una tienda de golosinas dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para venderlas mejor va a confeccionar dos tipos de paquetes. El tipo *A* estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1,50 €. El tipo *B* estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 €. ¿Cuántos paquetes de cada tipo conviene preparar para conseguir los ingresos máximos? Determina los ingresos.

Las variables de decisión son:

x paquetes *A* $\quad$ y paquetes *B*



Queremos hallar el máximo de $z = 1{,}5x + 2y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \le 10 \\ 2x + 4y \le 30 \\ 2x + y \le 18 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \le 10 \\ x + 2y \le 15 \\ 2x + y \le 18 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$O(0, 0) \qquad A\left(0, \dfrac{15}{2}\right) \qquad B(5, 5) \qquad C(8, 2) \qquad D(9, 0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_O = 0 \qquad z_A = 15 \qquad z_B = 17{,}5 \qquad z_C = 16 \qquad z_D = 13{,}5$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice *B* y su valor es $z_B = 17{,}5$, es decir, hay que preparar 5 paquetes de cada tipo, obteniéndose un ingreso de 17,5 €.

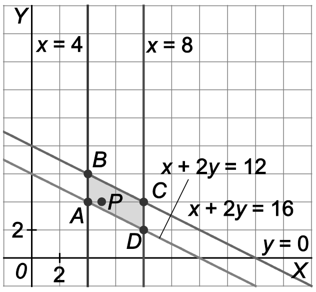
76. Una ONG va a realizar un envío compuesto de lotes de alimentos y de medicamentos. Como mínimo se han de mandar 4 lotes de medicamentos, pero por problemas de capacidad no pueden mandarse más de 8 lotes de estos medicamentos. Para realizar el transporte se emplean 4 contenedores para cada lote de alimentos y 2 para cada lote de medicamentos. El servicio de transporte exige que al menos se envíe un total de 24 contenedores, pero que no superen los 32.

a) ¿Qué combinaciones de lotes de cada tipo pueden enviarse? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones. ¿Pueden enviarse 4 lotes de alimentos y 5 de medicamentos?

b) Si la ONG quiere maximizar el número total de lotes enviados, ¿qué combinación debe elegir?

a) Las variables de decisión son:

x lotes de medicamentos $\quad$ y lotes de alimentos



Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} 4 \le x \le 8 \\ 24 \le 2x + 4y \le 32 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \le x \le 8 \\ 12 \le x + 2y \le 16 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Cuyo conjunto de soluciones (región factible) representamos.

Observemos que el punto *P*(5, 4) pertenece a la región factible, ya que verifica todas las restricciones, por tanto, es posible enviar 4 lotes de alimentos y 5 de medicamentos.

b) Queremos hallar el máximo de $z = x + y$ sujeto a las restricciones anteriores.

Calculamos los vértices de la región factible:

$A(4, 4) \qquad B(4, 6) \qquad C(8, 4) \qquad D(8, 2)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_A = 8 \qquad z_B = 10 \qquad z_C = 12 \qquad z_D = 10$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice *C* y su valor es $z_C = 12$, es decir, hay que enviar $x = 8$ lotes de medicamentos e $y = 4$ lotes de alimentos.

77. Un profesor proporciona a sus alumnos un listado con 20 problemas del tema 1 y 20 del tema 2. Cada problema del tema 1 vale 5 puntos y cada problema del tema 2 vale 8 puntos. Los alumnos pueden hacer problemas de los dos temas, pero con las siguientes condiciones.

1. El número de problemas realizados del tema 1 no puede ser mayor que el número de problemas del tema 2 más 2, ni ser menor que el número de problemas del tema 2 menos 8.

2. La suma de 4 veces el número de problemas realizados del tema 1 con el número de problemas realizados del tema 2 no puede ser mayor que 38.

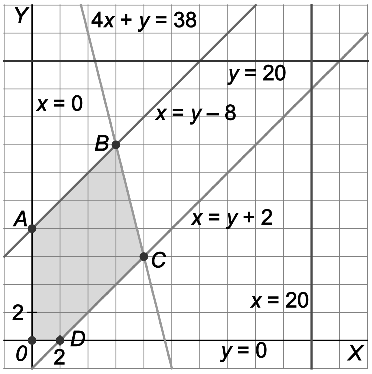
Halla cuantos problemas del tema 1 y del tema 2 hay que hacer para obtener la máxima puntuación.

Las variables de decisión son:

x ejercicios tema 1 $\qquad$ y ejercicios tema 2

Queremos hallar el máximo de $z = 5x + 8y$ sujeto a:

$$\begin{cases} y - 8 \le x \le y + 2 \\ 4x + y \le 38 \\ 0 \le x \le 20 \\ 0 \le y \le 20 \end{cases}$$



Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$O(0, 0)$ $\qquad$ $A(0, 8)$ $\qquad$ $B(6, 14)$ $\qquad$ $C(8, 6)$ $\qquad$ $D(2, 0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_O = 0$ $\qquad$ $z_A = 64$ $\qquad$ $z_B = 142$ $\qquad$ $z_C = 88$ $\qquad$ $z_D = 10$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice B y su valor es $z_B = 142$, es decir, hay que hacer $x = 6$ problemas del tema 1 e $y = 14$ problemas del tema 2, obteniéndose 142 puntos.

78. En cierta zona de una comunidad autónoma hay tres fábricas de televisores, O_1, O_2 y O_3, que proveen de aparatos a dos ciudades, D_1 y D_2.

Las producciones de las fábricas son:

O_1	O_2	O_3
100	150	225

Las demandas de las ciudades son:

D_1	D_2
175	300

Los costes de transporte, en euros, de cada unidad desde un punto de origen a uno de destino son:

	D_1	D_2
O_1	10	8
O_2	6	5
O_3	4	5

Halla cuántos televisores deben llevarse desde cada fábrica a cada ciudad para que el coste total de los gastos de transporte sea mínimo. Calcula dicho coste mínimo.

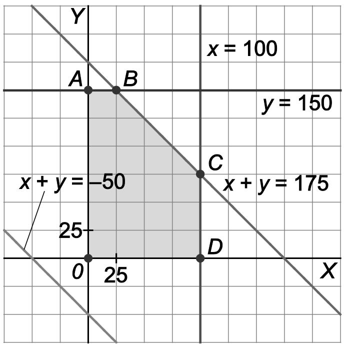
La siguiente tabla de variables indica el número de televisores que se trasporta de un lugar a otro.

	O_1	O_2	O_3	Total
D_1	x	y	$175-x-y$	175
D_2	$100-x$	$150-y$	$x+y+50$	300
Total	100	150	225	475

Queremos hallar el mínimo coste:

$$z = 10x + 6y + 4(175 - x - y) + 8(100 - x) + 5(150 - y) + 5(x + y + 50) = 3x + 2y + 2500$$

Las restricciones del problema son las que resultan de obligar a que las variables de la tabla anterior no sean negativas, es decir, queremos resolver el problema de programación lineal:



Min $z = 3x + 2y + 2500$ sujeto a $\begin{cases} 0 \le x \le 100 \\ 0 \le y \le 150 \\ -50 \le x + y \le 175 \end{cases}$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$O(0, 0)$ $A(0, 150)$ $B(25, 150)$ $C(100, 75)$ $D(100, 0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_O = 2500$ $z_A = 2800$ $z_B = 2875$ $z_C = 2950$ $z_D = 2800$

Por tanto, el mínimo se alcanza en el vértice O y vale $z_O = 2500$, es decir, el coste mínimo es 2500 € trasportando los televisores como se muestra en la siguiente tabla.

	O_1	O_2	O_3
D_1	0	0	175
D_2	100	150	50

79. Un estudiante reparte propaganda publicitaria para conseguir ingresos. Le pagan 8 céntimos de euro por cada impreso colocado en el parabrisas de un coche, y 12 céntimos., por cada uno depositado en un buzón. Ha calculado que cada día puede repartir como máximo 150 impresos y la empresa le exige diariamente que la diferencia entre los colocados en coche y el doble de los colocados en buzones no sea inferior a 30 unidades. Además, tiene que introducir en buzones al menos 15 impresos diariamente.

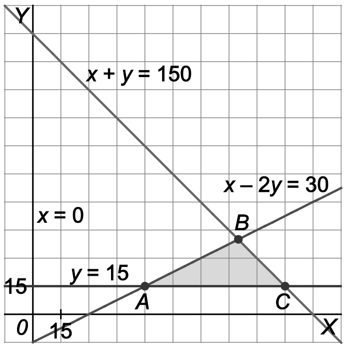
a) ¿Cuántos impresos debe colocar en coches y buzones para maximizar sus ingresos diarios?

b) ¿Cuál es ese ingreso máximo?

a) Las variables de decisión son:

x impresos colocados en parabrisas y impresos introducidos en buzones

Queremos hallar el máximo de $z = 0{,}08x + 0{,}12y$ sujeto a:



$$\begin{cases} x + y \le 150 \\ x - 2y \ge 30 \\ x \ge 0 \\ y \ge 15 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$A: \begin{cases} x - 2y = 30 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow A(60, 15)$ $B: \begin{cases} x + y = 150 \\ x - 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow B(110, 40)$

$C: \begin{cases} x + y = 150 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow C(135, 15)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_A = 6{,}60$ $z_B = 13{,}6$ $z_C = 12{,}6$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice B y su valor es $z_B = 13{,}6$, es decir, el estudiante debe colocar cada día $x = 110$ impresos en parabrisas e $y = 40$ impresos en buzones.

b) El ingreso que obtiene el estudiante es de 13,6 €.

80. Un ayuntamiento desea ajardinar dos tipos de parcelas, tipo *A* y tipo *B*, y dispone de 6000 € para ello. El coste de la parcela *A* es de 100 € y el de la *B* de 150 €. Se considera conveniente ajardinar al menos tantas parcelas de tipo *B* como las del tipo *A* y, en todo caso, no ajardinar más de 30 parcelas de tipo *B*.

a) ¿Cuántas parcelas de cada tipo tendrá que ajardinar para maximizar el número total de parcelas ajardinadas?

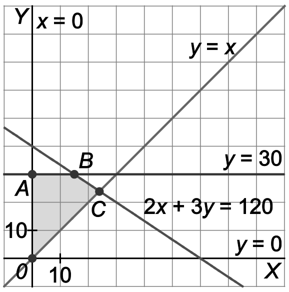
b) ¿Agotará el presupuesto disponible?

a) Las variables de decisión son:

x parcelas ajardinadas de tipo A $\quad$ y parcelas ajardinadas de tipo B

Queremos hallar el máximo de $z = x + y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 100x + 150y \le 6000 \\ y \ge x \\ y \le 30 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y \le 120 \\ y \ge x \\ y \le 30 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$



Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$O(0, 0)$ $\quad$ $A(0, 30)$ $\quad$ $B(15, 30)$ $\quad$ $C(24, 24)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_O = 0$ $\quad$ $z_A = 30$ $\quad$ $z_B = 45$ $\quad$ $z_C = 48$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice C y su valor es $z_C = 48$, es decir, hay que ajardinar 24 parcelas de cada tipo.

b) El coste de ajardinar 24 parcelas de cada tipo es $100 \cdot 24 + 150 \cdot 24 = 6000$ €, por lo que se agota el presupuesto disponible.

81. Una persona preocupada por su salud desea consumir al día un mínimo de 18 unidades de vitamina A, 16 unidades de vitamina C y 12 unidades de vitamina D. Una unidad del producto 1 cuesta 5 € y proporciona 9 unidades de vitamina A, 4 unidades de vitamina C y 2 unidades de vitamina D. Una unidad del producto 2 cuesta 4 € y proporciona 3 unidades de vitamina A, 4 unidades de vitamina C y 6 unidades de vitamina D. ¿Cuál es la combinación más económica de los productos 1 y 2 que garantiza las necesidades diarias?

a) Plantea el problema.

b) Resuélvelo gráficamente.

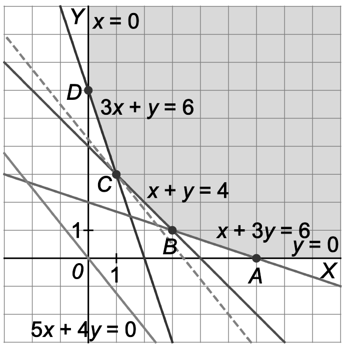
c) Analiza gráficamente qué ocurriría si cada unidad del producto 1 costara 4 €.

a) Las variables de decisión son:

x unidades de producto 1 $\quad$ y unidades de producto 2

Queremos hallar el mínimo de $z = 5x + 4y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 9x + 3y \ge 18 \\ 4x + 4y \ge 16 \\ 2x + 6y \ge 12 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y \ge 6 \\ x + y \ge 4 \\ x + 3y \ge 6 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$



b) Representamos la región factible y la recta $5x + 4y = 0$.

Como la función objetivo tiene coeficientes de la x y de la y positivos, el mínimo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $5x + 4y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido negativo del eje Y.

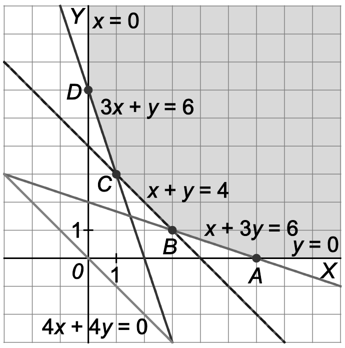
Por tanto, el mínimo se localiza en el vértice $C(1, 3)$ y vale $z_C = 17$, es decir, la persona debe comprar $x = 1$ unidad de producto 1 e $y = 3$ unidades de producto 2, con un coste de $z_C = 17$ €.

Nota: Observando la representación gráfica podrían surgir dudas sobre si el mínimo se alcanza en el vértice *B* o en el vértice *C*, en este caso podemos calcular dichos vértices y evaluar la función objetivo en ellos para determinar en cual se alcanza verdaderamente el mínimo.

c) En este caso el problema será:

Min $z = 4x + 4y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 3x + y \ge 6 \\ x + y \ge 4 \\ x + 3y \ge 6 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$



Tenemos que representar la región factible junto con la recta $4x + 4y = 0$ y trasladarla de forma paralela en sentido negativo del eje Y para localizar el último punto de la región que se toca.

Por tanto, el mínimo se localiza ahora en cualquier punto (de coordinas enteras) del segmento de extremos $C(1, 3)$ y $B(3, 1)$, es decir, la persona puede comprar $x = 1$ unidad de producto 1 e $y = 3$ unidades de producto 2, $x = 2$ unidad de producto 1 e $y = 2$ unidades de producto 2 o $x = 3$ unidad de producto 1 e $y = 1$ unidades de producto 2. En los tres casos el coste es de 16 €.

82. En una bodega se producen vinos de crianza y de reserva. Por problemas de diseño, la producción de ambos tipos de vino no debe superar los 60 millones de litros y la producción de vinos de crianza debe ser al menos 10 millones de litros. Además, la producción de vino de reserva no debe superar el doble de la de vino de crianza ni ser inferior a su mitad.

a) Determina mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Si la bodega vende el litro de vino de crianza a 4 € y el de reserva a 9 €, ¿cuál es el diseño de producción que maximiza los ingresos? ¿Cuál es el beneficio máximo?

a) Las variables de decisión son:

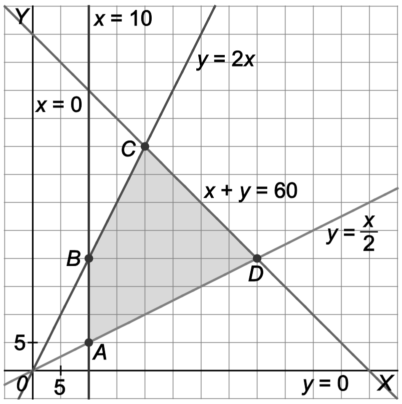
x millones de litros de vino crianza

y millones de litros de vino reserva

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x + y \le 60 \\ x \ge 10 \\ \dfrac{x}{2} \le y \le 2x \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Cuyo conjunto de soluciones (región factible) representamos.



b) Queremos hallar el máximo de $z = 4x + 9y$ sujeto a las restricciones anteriores.

Calculamos los vértices de la región factible:

$A(10, 5)$ $B(10, 20)$ $C(20, 40)$ $D(40, 20)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_A = 85$ $z_B = 220$ $z_C = 440$ $z_D = 340$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice C y su valor es $z_C = 440$, es decir, hay que producir $x = 20$ millones de litros de crianza e $y = 40$ millones de litros de reserva, obteniéndose unos beneficios de 440 millones de euros.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Halla el conjunto de soluciones del siguiente sistema de inecuaciones lineales con una incógnita.

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{7-x}{x+2} - 1 \\ 2x(x-3) + 7 > (x-1)(x+1) \end{cases}$$

Inecuación $x \geq \dfrac{7-x}{x+2} - 1$:

$$x \geq \frac{7-x}{x+2} - 1 \Rightarrow x + 1 - \frac{7-x}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+4x-5}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+5)}{x+2} \geq 0 \Rightarrow x \in [-5, -2) \cup [1, +\infty)$$

Inecuación $2x(x-3) + 7 > (x-1)(x+1)$:

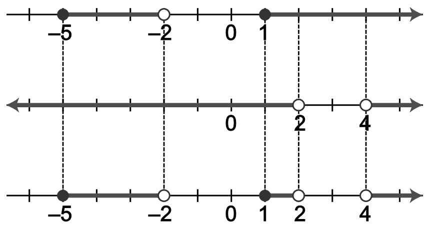
$$2x(x-3) + 7 > (x-1)(x+1) \Rightarrow x^2 - 6x + 8 > 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$$

	$-\infty$ – -5	-5 – -2	-2 – 1	1 – $+\infty$
$x+5$	–	+	+	+
$x+2$	–	–	+	+
$x-1$	–	–	–	+
$\dfrac{(x-1)(x+5)}{x+2}$	–	+	–	+

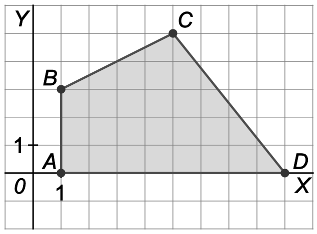
	$-\infty$ – 2	2 – 4	4 – $+\infty$
$x-2$	–	+	+
$x-4$	–	–	+
$(x-2)(x-4)$	+	–	+

La solución es la intersección de las soluciones obtenidas:

$x \in [-5, -2) \cup [1, 2) \cup (4, +\infty)$



2. Escribe un sistema de inecuaciones lineales que tenga como recinto solución la figura sombreada.



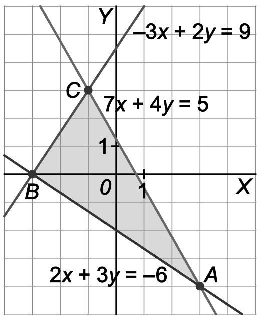
Los vértices de la región son $A(1, 0)$, $B(1, 3)$, $C(5, 5)$ y $D(9, 0)$. Considerando las rectas que los unen según muestra la figura y los correspondientes semiplanos obtenemos que la región viene definida por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 5x + 4y \leq 45 \\ -x + 2y \leq 5 \\ y \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

3. Halla analíticamente el máximo y mínimo de $z = 15x - 10y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq -6 \\ 7x + 4y \leq 5 \\ -3x + 2y \leq 9 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:



$A(3, -4)$ $B(-3, 0)$ $C(-1, 3)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_A = 85$ $z_B = -45$ $z_C = -45$

Por tanto:

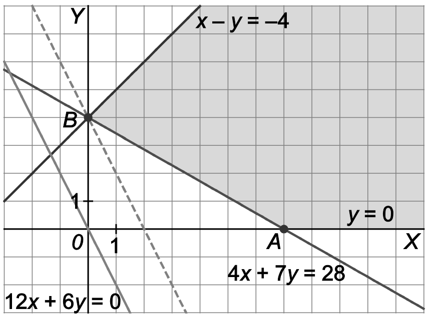
El máximo se localiza en el vértice *A* y su valor es $z_A = 85$.

El mínimo se localiza en cualquier punto del segmento de extremos *B* y *C* y su valor es $z_B = -45$.

4. Determina gráficamente el máximo y mínimo de $z = 12x + 6y$ en la región definida por:

$$4x + 7y \geq 28 \qquad x - y \geq -4 \qquad y \geq 0$$

Representamos la región factible junto con la recta $12x + 6y = 0$.



Como la función objetivo tiene coeficientes de la *x* y de la *y* positivos, el máximo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $12x + 6y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido positivo del eje *Y*, y el mínimo, en el último punto que toque al desplazarse en sentido negativo. Por tanto:

No existe el máximo.

El mínimo se localiza en el vértice *B*(0, 4) y su valor es $z_B = 24$.

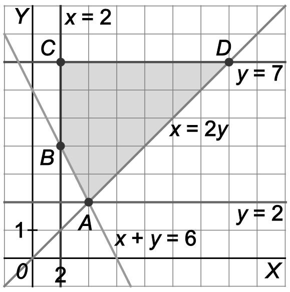
5. Un fabricante de perfume compra la misma materia prima a dos distribuidores, *A* y *B*. Los distribuidores *A* y *B* venden la materia a 20 y 30 € por kilogramo respectivamente. Cada distribuidor vende un mínimo de 2 kg y el distribuidor *B* un máximo de 7 kg. El fabricante debe comprar en total un mínimo de 6 kg y quiere comprar como máximo al distribuidor *A* el doble que al distribuidor *B*. ¿Qué cantidad de materia prima debe comprar a cada distribuidor para que el coste sea mínimo? Determina dicho coste mínimo.

Las variables de decisión son:

x kg de materia prima comprados a *A* y kg de materia prima comprados a *B*

Queremos hallar el mínimo de $z = 20x + 30y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2 \leq y \leq 7 \\ x + y \geq 6 \\ x \leq 2y \end{cases}$$



Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$A(4, 2)$ $B(2, 4)$ $C(2, 7)$ $D(14, 7)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

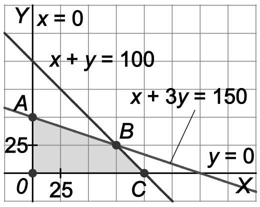
$z_A = 140$ $z_B = 160$ $z_C = 250$ $z_D = 490$

Por tanto, el mínimo se localiza en el vértice *A* y su valor es $z_A = 140$, es decir, hay que comprar $x = 4$ kg al distribuidor *A* e $y = 2$ kg al distribuidor *B*, con un coste de 140 €.

6. Una fábrica de tablones de madera tiene almacenados 200 kg de pasta de madera de baja calidad y 150 kg de pasta de madera de alta calidad. La fábrica elabora dos tipos de tablones: los tablones de tipo *A* precisan 2 kg de pasta de de baja calidad y 1 kg de pasta de alta calidad y los de tipo *B* precisan 2 kg de baja calidad y 3 kg de alta calidad. La fábrica obtiene unos beneficios de 5 euros por cada tablón de tipo *A* y de 6 euros por cada tablón de tipo *B*. ¿Cuántos tablones de cada tipo elaborará para obtener el máximo beneficio?

Las variables de decisión son:

x tablones tipo *A* y tablones tipo *B*



Queremos hallar el máximo de $z = 5x + 6y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 2x + 2y \le 200 \\ x + 3y \le 150 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \le 100 \\ x + 3y \le 150 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

Representamos la región factible y calculamos sus vértices:

$O(0, 0)$ $A(0, 50)$ $B(75, 25)$ $C(100, 0)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$z_O = 0$ $z_A = 300$ $z_B = 525$ $z_C = 500$

Por tanto, el máximo se localiza en el vértice *B* y su valor es $z_B = 525$, es decir, hay que elaborar $x = 75$ tablones tipo *A* e $y = 25$ tablones tipo *B*, obteniéndose un beneficio de $z_B = 525$ €.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **Se consideran los puntos *M*(6, 2) y *N*(1, –2), y el semiplano determinado por la expresión $2x - 3y \geq 6$:**

   A. Los dos puntos *M* y *N* pertenecen al semiplano.

   B. El punto *M* pertenece, pero el *N* no.

   C. El punto *N* pertenece, pero el *M* no.

   D. Ninguno de los dos puntos pertenece al semiplano.

   La respuesta correcta es A, ambos puntos pertenecen al semiplano, ya que ambos verifican la inecuación $2x - 3y \geq 6$.

2. **El interior del triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(-1, 0)$ y $C(1, -1)$ queda determinado por las siguientes condiciones.**

   A. $3y - x \geq 1$ $\quad 2x - y \geq 3$ $\quad x + 2y \geq 1$

   B. $3y - x \leq 1$ $\quad 2x - y \geq 3$ $\quad x + 2y \leq -1$

   C. $3y - x \leq 1$ $\quad 2x - y \leq 3$ $\quad x + 2y \geq -1$

   D. Ninguna de las anteriores opciones es cierta.

   Los lados del triángulo están determinados por las rectas:

   AB: $3y - x = 1$ $\qquad$ *AC*: $2x - y = 3$ $\qquad$ *BC*: $x + 2y = -1$

   Como cada vértice debe estar incluido en el semiplano determinado por el lado opuesto, la respuesta correcta es C.

3. La solución del problema de programación lineal:

$$\textbf{Mínimo } z = 2x - 3y$$

Sujeta a:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 3 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{se alcanza en:}$$

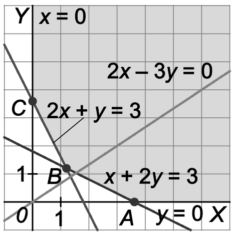
A. $x = 3, y = 0$

B. $x = 0, y = 3$

C. $x = 1, y = 1$

D. El problema no tiene solución.

Representamos la región factible y, al ser no acotada, la recta $2x - 3y = 0$.



Al tener la función objetivo coeficiente de la x positivo y coeficiente de la y negativo, el mínimo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $2x - 3y = 0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido positivo del eje Y.

Como la recta no deja de tocar a la región factible al desplazarse, no existe el mínimo, es decir, la respuesta correcta es D.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Se considera la región factible determinada por las restricciones:

$$\{x + 3y \leq 21,\ x + y \leq 12,\ 4x + y \leq 40,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

A. El punto (9, 4) pertenece a la región factible.

B. El punto $\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right)$ es un vértice de la región factible.

C. El punto (5, 5) pertenece a la región factible.

D. El punto (5, 5) es uno de los vértices de la región factible.

A es incorrecta, ya que el punto (9, 4) no verifica la segunda restricción.

B es correcta, el punto $\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right)$ verifica todas las restricciones, con lo que pertenece a la región factible, y es el punto de corte de las rectas $x + 3y \leq 21$ y $x + y \leq 12$, por lo que es un vértice de la región factible.

C es correcta, ya que el punto (5, 5) verifica todas las restricciones.

D es incorrecta, aunque el punto (5, 5) verifica todas las restricciones, no es el punto de corte de ninguna pareja de rectas, con lo que no es un vértice de la región factible.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

5. Se considera un problema de programación lineal con dos variables y tal que la región factible no es vacía.

1. El problema no tiene solución.

2. La región factible es no acotada.

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

$1 \Rightarrow 2$ ya que si la región factible es acotada el problema siempre tiene solución. En cambio $2 \not\Rightarrow 1$, puede ocurrir que la región factible sea no acotada y el problema tenga solución.

Por tanto, la relación correcta es A.

Señala el dato innecesario para contestar

6. La región factible correspondiente a un problema de programación lineal está determinada por las siguientes restricciones.

1. $x + y \geq 5$

2. $2x + 3y \leq 24$

3. $4x - y \leq 20$

4. $x + 6y \leq 30$

¿Qué restricción es redundante y, por tanto, innecesaria?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Representando la región factible comprobamos que la restricción redundante es $2x + 3y \leq 24$, la respuesta B.