5 Funciones, límites y continuidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una empresa fabrica botes de latón de forma cilíndrica y sin tapa para almacenar un líquido colorante con un volumen de 500 cm^3. Si *x* es el radio de la base, encuentra una función que dé los metros cuadrados de latón necesarios en función de *x*.

Si h es la altura de la caja, su superficie es $S(x) = 2\pi xh + \pi x^2$; como el volumen $V = \pi x^2 h$, entonces la altura de la caja es $h = \frac{500}{\pi x^2}$, y la superficie, $S(x) = \frac{1000}{x} + \pi x^2$.

2. Encuentra la expresión matemática que nos da el producto de dos números en función de uno de ellos, sabiendo que la suma de ambos es 100.

$x + y = 100$, $y = 100 - x \Rightarrow xy = x(100 - x)$. Luego $P(x) = x(100 - x)$.

3. La función $f(x) = -x^2 + 120x - 3200$ representa el beneficio, en euros, que obtiene una empresa en la fabricación de *x* unidades de un producto.

a) ¿Cuántas unidades hay que fabricar para obtener el máximo beneficio posible? ¿Cuál es este beneficio máximo?

b) Halla la función que expresa el beneficio unitario.

c) ¿Cuál es el beneficio unitario al fabricar 60 unidades?

a) Como es una parábola cóncava hacia abajo, el máximo lo alcanza en el vértice: $x_v = \frac{120}{2} = 60$. Luego el máximo beneficio se obtiene fabricando 60 unidades de producto.

Como $f(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 3200 = 400$, el beneficio es de 400 euros.

b) $B(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{-x^2 + 120x - 3200}{x}$

c) $B(60) = \frac{f(60)}{60} = \frac{-60^2 + 120 \cdot 60 - 3200}{60} \simeq 6{,}67$ €/unidad. Producir 60 unidades produce unas ganancias de 6,67 euros por unidad producida.

4. **Dada las funciones $f(x)=\sqrt{x^2-3}$ y $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$, calcula el dominio y la expresión de las funciones:**

a) $f+g$ **b)** $f-g$ **c)** $f\cdot g$ **d)** $\dfrac{1}{f}$ **e)** $\dfrac{f}{g}$

$D(f)=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$ $D(g)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

a) $D(f+g)=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)-\{-2,2\}$ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x^2-3}+\dfrac{x+1}{x^2-4}$

b) $D(f-g)=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)-\{-2,2\}$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x^2-3}-\dfrac{x+1}{x^2-4}$

c) $D(f\cdot g)=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)-\{-2,2\}$ $(f\cdot g)(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-3}\right)(x+1)}{x^2-4}$

d) Como $f\left(-\sqrt{3}\right)=f\left(\sqrt{3}\right)=0$

$D\left(\dfrac{1}{f}\right)=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$

e) $g(-1)=0$, pero –1 no pertenece al dominio de *f*.

$D\left(\dfrac{f}{g}\right)=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)-\{-2,2\}$ $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-3}}{x+1}$

Observación: A pesar de que la expresión de $\dfrac{f}{g}$ sí está definida si $x=2$ y $x=-2$, al provenir dicha función de un cociente de funciones en las que una de ellas no está definida en $x=2$ y $x=-2$, estos números no están en el dominio del cociente.

5. **Sean:**

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}} \qquad g(x)=\frac{1}{x-2}$$

Calcula $f\circ g$ y $g\circ f$ y sus respectivos dominios.

$D(f)=(0,+\infty)$, $D(g)=\mathbb{R}-\{2\}$

$D(f\circ g)=(2,+\infty)$ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=\sqrt{x-2}$

$D(g\circ f)=(0,+\infty)-\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x}}-2}=\dfrac{\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}$

6 a 9. **Ejercicios resueltos.**

10. Ayudándote de la calculadora, obtén los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left(e^x+5\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to -3} e^x+5=e^{-3}+5\simeq 5{,}05$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$. No existe. Si nos acercamos al cero por la izquierda, obtenemos que el límite es –1, pero si nos acercamos por la derecha, el límite nos da 1, es decir, los límites laterales no coinciden.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}=1$

11. Calcula *a* para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, siendo:

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{si } x<2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax+1)=2a+1$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ debe ser $2a+1=0$, es decir, $a=-\dfrac{1}{2}$.

12. Escribe una posible expresión para una función *f*, definida a trozos, que cumpla que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$ y $f(1)=-2$.

Respuesta abierta, una posible expresión para la función *f* sería: $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x<1 \\ -2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

13. Calcula, si existen, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, siendo *f* la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x<-1 \\ x^2+1 & \text{si } -1\leq x\leq 4 \\ 3-5x & \text{si } x>4\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}(x+3)=2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2+1\right)=2\end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 4^-}\left(x^2+1\right)=17 \\ \lim\limits_{x\to 4^+}(3-5x)=-17\end{cases}$ $\Rightarrow$ Como los límites a izquierda y a derecha no coinciden, no existe el límite.

14. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ y $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-3-2x}{(1-x)^4}$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-3-2x}{(1-x)^4}$ y $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-3-2x}{(1-x)^4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{x}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{x}$

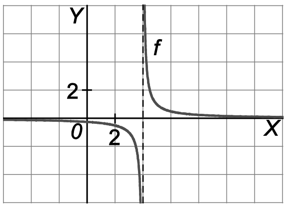
a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-3x}{x-1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x}{x-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ $\Rightarrow$ No existe.

b) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-3-2x}{(1-x)^4}=-\dfrac{1}{16}$; $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-3-2x}{(1-x)^4}=-\dfrac{1}{16}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-3-2x}{(1-x)^4}=-\dfrac{1}{16}$

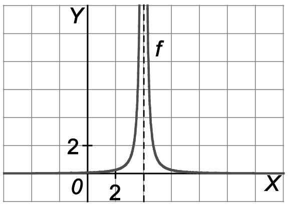
c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{x}$ $\Rightarrow$ No existe.

15. Calcula $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ en cada caso.

a)



b)



a) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=+\infty$; No existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=+\infty$

16. Ejercicio resuelto.

17. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)(2+3x)}{2x^2-5}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-5}{x+2}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2-4}$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)(2+3x)}{2x^2-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+x-2}{2x^2-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{5}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2-\frac{5}{x^2}} = \frac{6+0+0}{2+0} = 3$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-5}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-\frac{5}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{0-0}{1-0} = 0$

18. Calcula los valores de *a* para que se cumpla: $\lim_{x\to-\infty} \frac{(ax-x)(2+ax)}{3x^2+1} = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(ax-x)(2+ax)}{3x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(a^2-a\right)+x(2a-2)}{3x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(a^2-a\right)+\frac{(2a-2)}{x}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{\left(a^2-a\right)}{3} = 2$$

$a^2 - a = 6 \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3$ o $a = -2$

19. La población de bacterias de cierto cultivo sigue la ley $P(t)=\dfrac{(3t^2+2)(5t+1)}{(2t+1)^3}$ miles de bacterias, donde t indica los días transcurridos desde su inicio.

a) ¿Qué población había al principio del estudio? ¿Y al cabo de una semana?

b) Al aumentar el tiempo, ¿tiende a estabilizarse la población?

a) $P(0)=\dfrac{(3\cdot 0+2)(5\cdot 0+1)}{(2\cdot 0+1)^3}=\dfrac{2}{1}=2$ miles de bacterias. Había 2000 bacterias.

$P(7)=\dfrac{(3\cdot 7^2+2)(5\cdot 7+1)}{(2\cdot 7+1)^3}=\dfrac{149\cdot 36}{15^3}\simeq 1{,}589\ 33$ miles de bacterias. Habrá 1589 bacterias, aproximadamente.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} P(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3t^2+2)(5t+1)}{(2t+1)^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{15t^3+3t^2+10t+2}{8t^3+12t^2+6t+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{15t^3}{t^3}+\frac{3t^2}{t^3}+\frac{10t}{t^3}+\frac{2}{t^3}}{\frac{8t^3}{t^3}+\frac{12t^2}{t^3}+\frac{6t}{t^3}+\frac{1}{t^3}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{15+\frac{3}{t}+\frac{10}{t^2}+\frac{2}{t^3}}{8+\frac{12}{t}+\frac{6}{t^2}+\frac{1}{t^3}}=\dfrac{15}{8}=1{,}875$ miles de bacterias

El número de bacterias se aproxima cada vez más a 1875.

20. Ejercicio resuelto.

21. Calcula $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ en los siguientes casos.

a) $f(x)=\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$

c) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}=\dfrac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-5)}{(x+2)}=-\dfrac{3}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{0}{4}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$

22. Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x+5}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - x\right)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2-x)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5-x)(3+x)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{3x+1} + x\right)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x+5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{5}{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{5}{x}} = \frac{0}{1+0} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - x\right) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2-x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5-x)(3+x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{3x+1} + x\right) = \frac{2}{-\infty} - \infty = 0 - \infty = -\infty$

23. Calcula estos límites. Si dan lugar a indeterminaciones indica de qué tipo son y resuélvelas.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(7-\frac{3}{x}\right)$ **d)** $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ **g)** $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)^3}$ **j)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$

b) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-x+1}{x-2}$ **e)** $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ **h)** $\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2+x-5\right)$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2+x-5\right)$ **f)** $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}$ **i)** $\lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-3x+2}\right)$

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(7-\frac{3}{x}\right)=7-0=7$

b) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-x+1}{x-2}=\frac{9+3+1}{-5}=-\frac{13}{5}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2+x-5\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(3x+1-\frac{5}{x}\right)=(-\infty)(-\infty)=+\infty$

d) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$. Indeterminación tipo $\frac{0}{0}$. $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(x^2+2x+4\right)}{(x+2)}=3$

e) $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$. Indeterminación tipo $\frac{0}{0}$. $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\left(1-x^2\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{1}{2}$

f) $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}$. Indeterminación tipo $\frac{0}{0}$. $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to1}\frac{\left(1-x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{\left(2-\sqrt{x^2+3}\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}=$

$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x^2)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2}=\lim_{x\to1}(2+\sqrt{x^2+3})=4$

g) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)^3}$. Indeterminación tipo $\frac{0}{0}$. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-4)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-4\right)}{(x-1)^2}=-\infty$

h) $\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2+x-5\right)=+\infty$

i) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-3x+2}\right)$. Indeterminación $\infty-\infty$.

$\lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=\begin{cases}\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=-\infty\\ \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=+\infty\end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego no existe el límite.

j) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$. Indeterminación tipo $\infty-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=0$

24 a 27. Ejercicios resueltos.

28. Calcula los siguientes límites realizando en cada caso las transformaciones adecuadas.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-5}\right)^{2x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{x-5}\right)^{x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+3}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+3}}$

d) $\lim\limits_{x\to5^+}\left(\dfrac{2x}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}}$

a) Indeterminación del tipo $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x-5}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-5}{7}}\right)^{\frac{x-5}{7}}\right]^{\frac{7}{x-5}(2x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{14x-7}{x-5}}=e^{14}$$

b) Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x-5}=3$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+5)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{x-5}\right)^{x+5}=+\infty$.

c) Indeterminación del tipo $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+3}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-4x+4}{x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+3x-1}{-4x+4}}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{-4x+4}}\right]^{\frac{-4x+4}{x^2+3x-1}\cdot\frac{x^2+1}{x+3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4x^3+4x^2-4x+4}{x^3+6x^2+8x-3}}=e^{-4}$$

d) Indeterminación del tipo $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x\to5^+}\left(\frac{2x}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}}=\lim_{x\to5^+}\left(1+\frac{x-5}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}}=\lim_{x\to5^+}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+5}{x-5}}\right)^{\frac{x+5}{x-5}}\right]^{\frac{1}{x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to5^+}\frac{1}{x+5}}=e^{\frac{1}{10}}$$

29. A partir del resultado $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$, justifica $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$. Ayuda: escribe $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$ y opera con esta última expresión.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right]^{\frac{x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}}=e$$

30. Ejercicio interactivo.

31. Ejercicio resuelto.

32. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, especificando en su caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^3-7x^2-5x+4}$

b) $f(x)=\ln\sqrt[3]{x-2}$

c) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0<x\le 1 \\ 2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

d) $f(x)=\left|\dfrac{x}{x-3}\right|$

a) Por ser un cociente de polinomios, la función es continua en todo su dominio, que son todos los números reales excepto los que anulan al denominador, es decir, la función es continua en $\mathbb{R}-\left\{-1,4,\dfrac{1}{2}\right\}$. En $x=4$ y $x=\dfrac{1}{2}$ la discontinuidad es de salto infinito y en $x=-1$ es evitable.

b) Las funciones logaritmo y raíz cúbica son continuas en todo su dominio.

Como la función está definida si $x-2>0$, f es continua en $D(f)=(2,+\infty)$.

c) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0<x\le 1 \\ 2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

Como las funciones que definen cada trozo son continuas, pues son trozos de rectas y parábolas, basta ver qué ocurre en $x=0$ y en $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ y la función es continua en $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, pues, aunque existen los límites laterales, estos no coinciden. Así pues, en $x=1$ hay una discontinuidad de salto finito.

d) $f(x)=\left|\dfrac{x}{x-3}\right|$. Comencemos definiendo la función como una función a trozos:

$\left|\dfrac{x}{x-3}\right|=\dfrac{x}{x-3}$, si $\dfrac{x}{x-3}\ge 0$. Resolviendo la inecuación tenemos que $x\in(-\infty,0]\cup(3,+\infty)$.

$\left|\dfrac{x}{x-3}\right|=-\dfrac{x}{x-3}$ si $\dfrac{x}{x-3}<0$. Resolviendo la inecuación se tiene que $x\in(0,3)$. La función no está definida en $x=3$, luego allí no será continua.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x-3}=0=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{x}{x-3}=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ y la función es continua en $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-}-\dfrac{x}{x-3}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x}{x-3}=+\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ La función tiene una discontinuidad esencial en $x=3$. La recta $x=3$ es una asíntota vertical.

33. Determina para qué valores de *a* y *b* es continua la siguiente función.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-b & \text{si } x\le 0 \\ ax+b & \text{si } 0<x\le 2 \\ x^2+b & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

Si $x \neq 0$ y $x \neq 2$, la función es continua por ser trozos de parábolas y rectas.

Calculemos los límites laterales en $x = 0$ y en $x = 2$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2-b\right)=-b=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(ax+b\right)=b \end{cases}$$

Si queremos que en $x = 0$ sea continua, entonces $-b = b \Rightarrow b = 0$.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\left(ax+b\right)=2a+b=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+b\right)=4+b \end{cases}$$

Si queremos que sea continua en $x = 2$ debe ser $2a + b = 4 + b$, y como $b = 0$, debe ser $a = 2$.

La función es: $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 0 \\ 2x & \text{si } 0<x\le 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

34. Ejercicio interactivo.

35 a 37. Ejercicios resueltos.

38. Demuestra que la siguiente ecuación tiene alguna solución real.

$$x^5+x^3+x+1=0$$

Aplicando el teorema de Bolzano a la función continua $f(x)=x^5+x^3+x+1$ en el intervalo $[-1,0]$, por ejemplo, como $f(-1)=-2$ y $f(0)=1$, se deduce que existe c en $(-1,0)$ con $f(c)=0$.

Luego $x = c$ es una solución de la ecuación.

39. Demuestra que la ecuación $x^3+5x+1=0$ tiene alguna solución real y da una aproximación correcta hasta las décimas.

De nuevo se aplica el teorema de Bolzano a la función $f(x)=x^3+5x+1$ en intervalos cada vez más pequeños hasta obtener la aproximación deseada:

$[-1, 0]$	$f(-1)=-5$ y $f(0)=1$
$[-0{,}2; -0{,}1]$	$f(-0{,}2)=-0{,}008$ y $f(-0{,}1)=0{,}499$

La solución es $x = -0{,}1, \ldots$

40. La función $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ cumple que $f(1)=-3$ y $f(3)=1$ y no corta al eje X en ningún punto. ¿Contradice este ejemplo el teorema de Bolzano?

No lo contradice, pues la función no cumple todas las hipótesis del teorema de Bolzano. La función no es continua en el intervalo $[1,3]$, tiene una discontinuidad esencial en $x=2$.

41. Encuentra el máximo de la función $P(x)=x(5-x)$.

Como se vio en el texto, la función tiene un máximo. Al ser una parábola, sabemos que dicho máximo lo alcanzará en el vértice $V\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{25}{4}\right)$. Comprobamos que el máximo se alcanza en el intervalo $[0,5]$.

42 a 45. Ejercicios resueltos.

46. Se define poder adquisitivo, *PA*, como la cantidad de bienes o servicios (de precio unitario, *PU*) que podemos adquirir con una determinada cantidad de dinero, *T*, es decir: $PA=\dfrac{T}{PU}$. Por ejemplo, si disponemos de 180 € para la compra de libros que cuestan 15 € cada uno, tenemos un poder adquisitivo de 12 libros.

Calcula el límite del poder adquisitivo cuando *T* y *PU* dependen del tiempo *t* y este tiende a más infinito, en los casos siguientes.

a) $T(t)=5t+1$ y $PU(t)=t^2+1$

b) $T(t)=8t^2+t$ y $PU(t)=2t^2-3$

c) $T(t)=3t+12$ y $PU(t)=250$

a) $\lim\limits_{t\to+\infty} PA=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{T(t)}{PU(t)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{5t+1}{t^2+1}=0$

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} PA=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{T(t)}{PU(t)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{8t^2+t}{2t^2-3}=4$

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} PA=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{T(t)}{PU(t)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{3t+12}{250}=+\infty$

47 a 56. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Funciones reales

57. Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = -x^2 + c$. Determina a, b y c sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos $(-2,-3)$ y $(1,0)$.

Ambas funciones deben pasar por esos puntos, planteamos el sistema y se resuelve:

$$\begin{cases} -3 = (-2)^2 + a(-2) + b \\ -3 = -(-2)^2 + c \\ 0 = 1^2 + a \cdot 1 + b \\ 0 = -1^2 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 4 - 2a + b \Rightarrow b = 2a - 7 \\ -3 = -4 + c \Rightarrow c = 1 \\ 0 = 1 + a + b \Rightarrow 0 = 1 + a + 2a - 7 \Rightarrow a = 2 \quad b = -3 \\ 0 = -1 + c \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

Las funciones son: $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y $g(x) = -x^2 + 1$

58. Encuentra la parábola que pasa por los puntos $A(0,-1)$, $B(1,2)$ y $C(2,3)$.

La ecuación de la parábola es $y = ax^2 + bx + c$. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} -1 = c \\ 2 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases}$$ cuyas soluciones son $a = -1$, $b = 4$ y $c = -1$.

La parábola es $y = -x^2 + 4x - 1$.

59. Expresa la función $f(x) = |2x + 4| - |x - 1|$ como una función definida a trozos y dibuja su gráfica.

$|2x+4| = 2x + 4$ si $x \geq -2$ y $|2x+4| = -(2x+4) = -2x - 4$ si $x < -2$

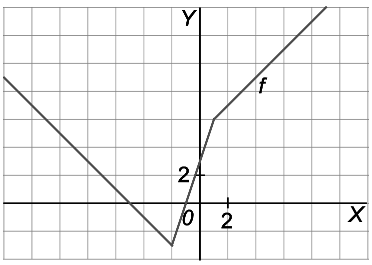
$|x-1| = x - 1$ si $x \geq 1$ y $|x-1| = -(x-1) = -x + 1$ si $x < 1$

Observa cómo queda la expresión dependiendo de los valores de x:

$-2x - 4 - (-x+1) = -x - 5$	-2	$2x + 4 - (-x+1) = 3x + 3$	1	$2x + 4 - (x-1) = x + 5$

La expresión de f como función definida a trozos es:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 5 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 3 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



60. Calcula el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = e^{3x-6}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+16}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-5}}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x-2} - \sqrt{x-2}$

e) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x-2}}$

f) $f(x) = \ln(3x-7)$

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) Como $x^2 + 16 > 0$ siempre, $D(f) = \mathbb{R}$.

c) Debe ser $x - 5 > 0$, $D(f) = (5, +\infty)$.

d) Por un lado debe ser $x - 2 \neq 0$ y por otro $x - 2 \geq 0$.

Así pues, debe ser $x - 2 > 0$ y, por tanto, $D(f) = (2, +\infty)$.

e) Para que la potencia esté siempre definida debe ser $\dfrac{1}{x} > 0$, es decir, $x > 0$.

Además, para que no se anule el denominador del exponente debe ser $x - 2 \neq 0$ por lo que $D(f) = (0, +\infty) - \{2\}$.

f) Debe ser $3x - 7 > 0$.

Así pues $D(f) = \left(\dfrac{7}{3}, +\infty\right)$

61. Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2-4}$. Calcula:

a) Su dominio.

b) ¿Para qué valores de x es $f(x) > 0$?

a) Como el denominador se anula si $x = -2$ o $x = 2$, $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

b) Estudiamos el signo del numerador y del denominador:

	$\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$	$\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de $2x+5$	–	+	+	+
Signo de x^2-4	+	+	–	+
Signo de $f(x)$	–	+	–	+

$f(x) > 0$ en $\left(-\dfrac{5}{2}, -2\right) \cup (2, +\infty)$

Operaciones con funciones

62. Escribe las siguientes funciones como composición de funciones elementales.

a) $A(x)=(5x-2)^{12}$

b) $B(x)=\cos\sqrt{e^{x-1}}$

c) $C(x)=\dfrac{1}{\ln x^2}$

d) $D(x)=e^{\sqrt{\operatorname{sen} x^5}}$

a) $f(x)=5x-2;\quad g(x)=x^{12}\Rightarrow A(x)=(g\circ f)(x)$

b) $f(x)=x-1;\quad g(x)=e^x;\quad h(x)=\sqrt{x};\quad p(x)=\cos x\Rightarrow B(x)=(p\circ h\circ g\circ f)(x)$

c) $f(x)=x^2;\quad g(x)=\ln x;\quad h(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow C(x)=(h\circ g\circ f)(x)$

d) $f(x)=x^5;\quad g(x)=\operatorname{sen} x;\quad h(x)=\sqrt{x};\quad p(x)=e^x\Rightarrow D(x)=(p\circ h\circ g\circ f)(x)$

63. Sea $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

a) Calcula la función $(f\circ f)(x)$.

b) Catalina asegura que $(f\circ f)(-1)=0$ y Gloria afirma que $(f\circ f)(-1)$ no existe. ¿Quién de las dos tiene razón?

a) $(f\circ f)(x)=f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{x+1}{x+2}$

b) Gloria tiene razón, pues como $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$, $x=-1$ no está en el dominio de $(f\circ f)$.

64. Calcula la función inversa de:

a) $f(x)=x^3-8$

b) $f(x)=\dfrac{2x-5}{3}$

a) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+8}$

b) $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+5}{2}$

65. Sean las funciones *f* y *g* definidas así:

$$f(x)=\begin{cases}5x-7 & \text{si } x<-1\\ 1-3x & \text{si } x\geq -1\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}3-2x & \text{si } x<2\\ x+7 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

Encuentra la expresión de la función suma:

$x<-1$	$-1\leq x<2$	$x\geq 2$
$f(x)=5x-7$	$f(x)=1-3x$	$f(x)=1-3x$
$g(x)=3-2x$	$g(x)=3-2x$	$g(x)=x+7$
$s(x)=3x-4$	$s(x)=4-5x$	$s(x)=8-2x$

La expresión de la función suma es: $s(x)=\begin{cases}3x-4 & \text{si } x<-1\\ 4-5x & \text{si } -1\leq x<2\\ 8-2x & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

Límite de una función en un punto

66. La función $f(x)$ no está definida para x = 1. Observando la tabla de valores siguiente, contesta razonadamente:

x	**0,99**	**0,999**	**1,001**	**1,01**
***f*(*x*)**	**3,02**	**3,001**	**–2,99**	**–2,95**

a) ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?

b) ¿Crees que existe $\lim_{x\to 1}\left[f(x)\right]^2$?

a) Parece que no, pues a la vista de los datos parece que $\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)=-3$.

b) Parece que sí; por lo visto en el apartado a, sería $\lim_{x\to 1}[f(x)]^2=9$.

67. La función $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ no está definida para x = 2. Con ayuda de la calculadora obtén el límite $\lim_{x\to 2} f(x)$.

x	1,9	2,1	1,99	2,01
***f*(*x*)**	2,925 64	3,075 61	2,992 51	3,007 51

A la vista de los datos, parece que $\lim_{x\to 2} f(x)=3$.

68. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=5$, calcula, en cada caso, el siguiente límite.

a) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]$

c) $\lim\limits_{x\to a}\left[3f(x)-g(x)\right]$

d) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^2$

e) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+2g(x)\right]^2$

f) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{\left[f(x)\right]^2+g(x)+2}$

g) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^2$

h) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{2f(x)+g(x)}$

a) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=3+5=8$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=3-5=-2$

c) $\lim\limits_{x\to a}\left[3f(x)-g(x)\right]=3\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=9-5=4$

d) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^2=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^2=3^2=9$

e) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+2g(x)\right]^2=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)+2\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]^2=(3+2\cdot 5)^2=169$

f) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{\left[f(x)\right]^2+g(x)+2}=\sqrt{\lim\limits_{x\to a}\left(\left[f(x)\right]^2+g(x)+2\right)}=\sqrt{9+5+2}=4$

g) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^2=\left[\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)\right]^2=\left[\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\right]^2=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

h) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{2f(x)+g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{2\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)}=3^{2\cdot 3+5}=3^{11}$

69. Dibuja, aproximadamente, en cada caso una gráfica para una posible función que se comporte de la siguiente manera cerca de $x = 2$.

a) $f(2) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

b) $f(2) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -1$

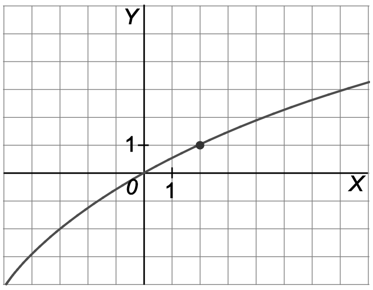
c) $f(2) = 2$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

d) $f(2)$ no está definida, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$.

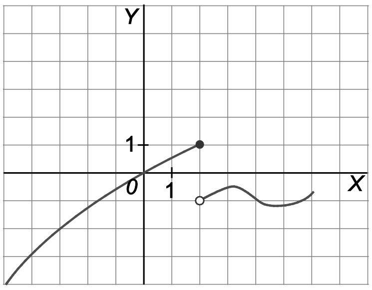
e) $f(2)$ no está definida, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$.

f) $f(2)$ no está definida, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ no existe.

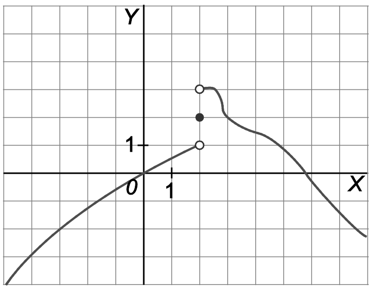
a)



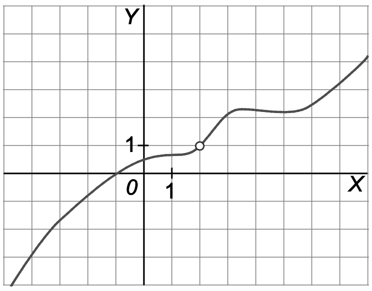
b)



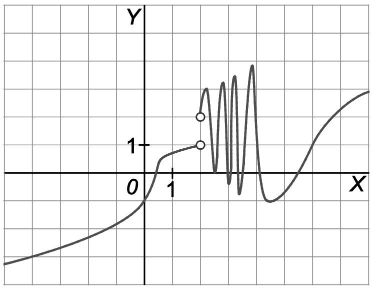
c)



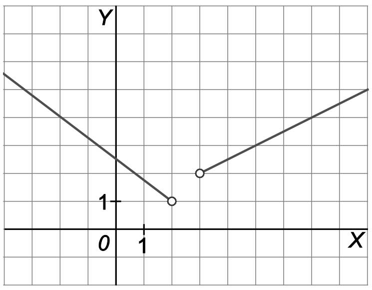
d)



e)



f)



70. La función *f* está definida a trozos.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x\le -1\\ e^{1+x} & \text{si } x>-1\end{cases}$$

a) Ayudándote de la calculadora, obtén los límites laterales $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

b) Decide si existe o no el límite $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

a)

x	–1,1	–1,01	–0,9	–0,99
***f*(*x*)**	–2,1	–2,01	1,105 171	1,010 05

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-2$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$, luego no existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

71. ¿Existe el límite $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|}{|x|-3}$?

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{|x|-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x+3}{x-3}=-1$, $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{|x|-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{x-3}=1$, luego el límite no existe.

72. Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

x	0,1	0,01
***f*(*x*)**	$0{,}1^{10}=0{,}000\,000\,000\,1$	$0{,}01^{100}=$ 0,000 0…

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}=0$$

Límites infinitos y en el infinito

73. Dibuja posibles gráficas para las siguientes cuatro funciones.

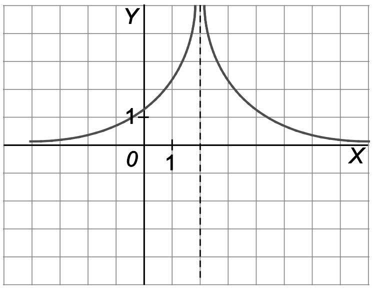
a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = -\infty$

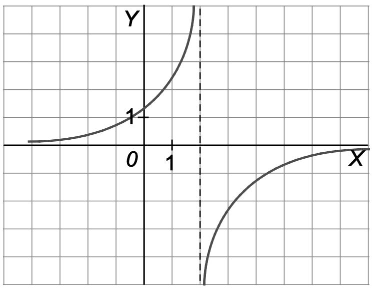
c) $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} i(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} i(x) = -\infty$

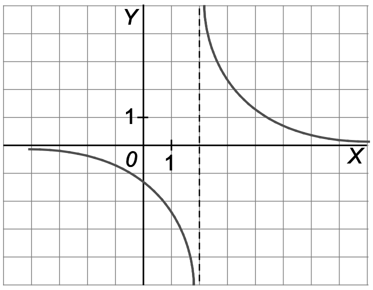
a)



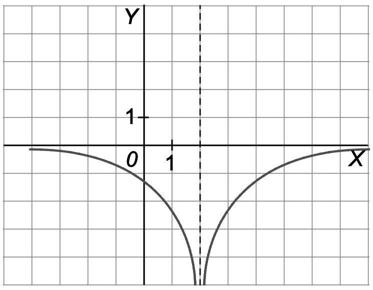
c)



b)



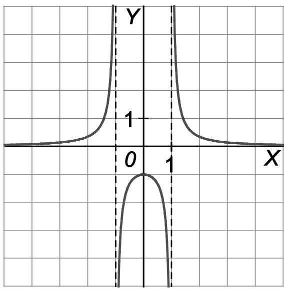
d)



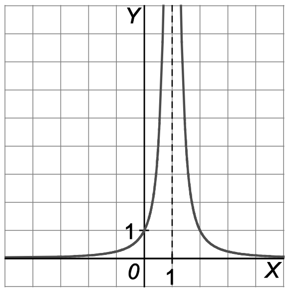
74. Las gráficas siguientes corresponden a cuatro funciones que no están definidas en $x = 1$. Asocia cada gráfica con alguna de estas funciones.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \qquad g(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \qquad h(x) = \frac{1}{1-x} \qquad i(x) = \frac{1}{\left(x^2-1\right)^2}$$

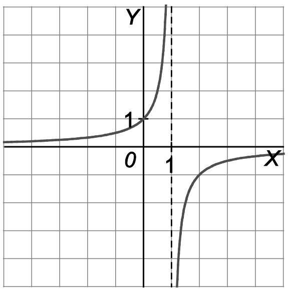
I.



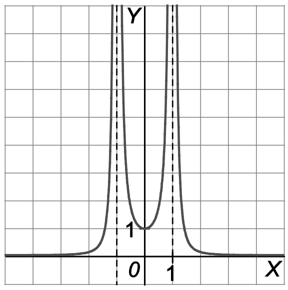
III.



II.



IV.



I. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ II. $h(x) = \dfrac{1}{1-x}$ III. $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ IV. $i(x) = \dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^2}$

Cálculo de límites

75. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x^2 + x + 1\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^2 + 4x + 5\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - x^4\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^2 + x + 1\right)$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2 + 4x + 5\right)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - x^4\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x^2 + x + 1\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^2 + 4x + 5\right) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - x^4\right) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^2 + x + 1\right) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2 + 4x + 5\right) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - x^4\right) = -\infty$

76. Calcula estos límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{2x+5}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+4x+1}-3x\right)$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{2x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\left(9+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\left(9+\frac{3}{x^2}\right)}}{\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{9+0}}{2+0} = \frac{3}{2}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+4x+1}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2+4x+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+4x+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+4x+1}+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+4x+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+4x+1}+3x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{9+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+3\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+3} = \frac{4+0}{\sqrt{9+0+0}+3} = \frac{2}{3}$

77. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2} = +\infty$

78. Calcula estos límites. No olvides estudiar, si es necesario, los límites laterales.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)^2}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x-4}$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)^2}{x-3}$. No existe, pues $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{(x+1)^2}{x-3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x+1)^2}{x-3}=+\infty\end{cases}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}$. No existe, pues $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty\end{cases}$.

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x+1}$. No existe, pues $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x+1}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x+1}{x+1}=-\infty\end{cases}$.

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)}{(x-2)}$. No existe, pues $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-3)}{(x-2)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-3)}{(x-2)}=-\infty\end{cases}$.

79. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{8-x}-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8+x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2}}$

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{8-x}-3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{8-x}-3}\cdot\dfrac{\sqrt{2+x}+1}{\sqrt{2+x}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{8-x}+3}{\sqrt{8-x}+3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}{(-1-x)\left(\sqrt{2+x}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{8-x}+3}{-\left(\sqrt{2+x}+1\right)}=\dfrac{6}{-2}=-3$

b) Este límite no existe, pues:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8+x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2}\right)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{-(x-1)}=$

$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{-(x-1)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{-(x-1)}=-\infty\end{cases}$

80. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(20\sqrt{x}-x\right)$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)(2x+1)}{4x^2-3x+1}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(25x^2+3000x\right)$

d) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+2}{(x+2)^2}$

e) $\lim_{x\to0}\frac{5}{x}$

f) $\lim_{x\to1}(x+3)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(20\sqrt{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{20}{\sqrt{x}}-1\right)=-\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)(2x+1)}{4x^2-3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1\cdot2}{4}=\frac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(25x^2+3000x\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(25+\frac{3000}{x}\right)=+\infty$

d) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+2}{(x+2)^2}$ el numerador tiende a 6 y el denominador, que es siempre positivo, tiene a cero por lo que $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+2}{(x+2)^2}=+\infty$

e) $\lim_{x\to0}\frac{5}{x}$ no existe pues $\lim_{x\to0^-}\frac{5}{x}=-\infty$ y $\lim_{x\to0^+}\frac{5}{x}=+\infty$

f) $\lim_{x\to1}(x+3)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$. La base tiende a 4 y el exponente tiende a +∞, por tanto: $\lim_{x\to1}(x+3)^{\frac{1}{(x-1)^2}}=+\infty$.

81. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+x)^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

h) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)=2$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+x)^2-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x+2)}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{4+6}{4-2}=\dfrac{10}{2}=5$

d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{9-9}{9+3}=0$

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{1-3}{1+1}=-1$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{3}{-1}=-3$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$

h) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(x+10)}{\sqrt{x}-3}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(x+10)\left(\sqrt{x}+3\right)}{x-9}=$

$=\lim\limits_{x\to 9}(x+10)\left(\sqrt{x}+3\right)=19\cdot 6=114$

82. Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{x^2-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x^2-x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+6x+9}{x-3}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}\right) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+6x+9}{x-3} = +\infty$

83. Calcula estos límites en el infinito.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{2x+5}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5-x}{x+5}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(3x-5\sqrt{x}\right)$

d) $\lim_{x\to+\infty} \left(x^3-3x^2+2x\right)$

e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3x}-\frac{2}{2x+1}\right)$

f) $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$

g) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x}{x}-\frac{2+x}{1+x}\right)$

h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2-x)(8x-3)}{(2x-1)^2}$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{2x+5}=\frac{3}{2}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5-x}{x+5}=-1$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(3x-5\sqrt{x}\right)=+\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty} \left(x^3-3x^2+2x\right)=+\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3x}-\frac{3}{2x+1}\right)=0-0=0$

f) $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{x+1-x}{x(x+1)}\right)=\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}=1$

g) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x}{x}-\frac{2+x}{1+x}\right)=1-1=0$

h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2-x)(8x-3)}{(2x-1)^2}=-2$

84. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2x-7}\right)^{3x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{(x-1)^2}}$ **g)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-5}{x^2-3x}\right)^{3x^2+2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2+x}{x-7}\right)^{\frac{x}{5}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)}\right)^{x+2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ **h)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-5}{7+x}\right)^{x^2+1}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{6x}{3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}=e^{6}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2+x}{x-7}\right)^{\frac{x}{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{9}{x-7}\right)^{\frac{x}{5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-7}{9}}\right)^{\frac{x-7}{9}}\right]^{\frac{x}{5}\cdot\frac{9}{x-7}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9x}{5x-35}}=e^{\frac{9}{5}}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2x-7}\right)^{3x}$ La base tiende a $\dfrac{1}{2}$ y el exponente a $+\infty$ por lo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2x-7}\right)^{3x}=0$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\right]^{\frac{x+2}{x^2-1}}==e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^2-1}}=e^{0}=1$.

e) $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}(1+x-1)^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}=e$.

f) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}}$. Como $e^{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}}=0$ y $e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}}=+\infty$, no existe el límite pedido.

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-5}{x^2-3x}\right)^{3x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3x-5}{x^2-3x}\right)^{3x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x^2-3x}{3x-5}}\right)^{\frac{x^2-3x}{3x-5}}\right]^{3x^2+2\cdot\frac{3x-5}{x^2-3x}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x^2+2)(3x-5)}{x^2-3x}}=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-5}{7+x}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{-12}{7+x}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{7+x}{-12}}\right)^{\frac{-12}{7+x}}\right]^{x^2+1\cdot\frac{7+x}{-12}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{(x^2+1)(7+x)}{12}}=0$

85. Calcula este límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0{,}000\,01}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0{,}000\,01}{x^2}=-\infty$, pues el numerador tiende a $-0{,}000\,01$ y el denominador es positivo y tiende a cero. Si este límite se aproxima con la calculadora, se deben tomar valores de x menores que 0,000 01.

86. Calcula el valor de *a* para que se verifique que: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=2$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{ax+1}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\frac{a}{2}=2.$$

Luego $a=4$

Continuidad de una función en un punto y en un intervalo

87. Estudia la continuidad de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\operatorname{sen}x$

b) $f(x)=xe^x+x^2$

c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3}$

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+25}$

e) $f(x)=x^2-\ln x$

f) $f(x)=x+2$

g) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-25}$

a) $f(x)=\operatorname{sen}x$ Es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) $f(x)=xe^x+x^2$ Es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser producto y suma de continuas.

c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3}$ Es continua en $\mathbb{R}-\left\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\right\}$.

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+25}$ Es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser cociente de continuas y no anularse nunca el denominador.

e) $f(x)=x^2-\ln x$ Es continua en $(0,+\infty)$.

f) $f(x)=x+2$ Es continua en todo $\mathbb{R}$.

g) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ Es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

h) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-25}$ Es continua en $\mathbb{R}-\{5,-5\}$.

88. Sea $f(x)=\begin{cases}2x^2-ax+1 & \text{si } x\le 1\\ -x^2+3x-b & \text{si } x>1\end{cases}$. Determina los valores *a* y *b* que hacen que *f* sea continua en $x=1$ y que $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(2x^2-ax+1\right)=2-a+1=3-a=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-x^2+3x-b\right)=-1+3-b=2-b$$

Para que sea continua en $x = 1$ debe ser $3 - a = 2 -$ b, es decir, $a = b + 1$.

Como $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{3}{2}-b=\frac{1}{4}$, entonces $b=-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-\frac{1}{4}=2$.

Luego para que se cumplan ambas condiciones debe ser $a = 3$ y $b = 2$.

89. Estudia la continuidad de: $f(x)=\begin{cases}16-x^2 & \text{si } -2\le x<2\\ x^2 & \text{si } \ 2\le x\le 3\end{cases}$

La función es continua en $[-2,2)$ y en $[2,3]$ por ser continuas las funciones $16 - x^2$ y x^2.

Debemos estudiar qué ocurre en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(16-x^2\right)=12\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^2=4=f(2)\end{cases}$$

La función no es continua en $x = 2$, pues no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ al no coincidir los límites laterales. Es una discontinuidad de salto finito.

90. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{si } x<2\\ 3x+m & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

a) Calcula el valor del parámetro real *m* para que la función *f* sea continua en $x = 2$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

a) $$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=-4\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x+m)=6+m=f(2)\end{cases}$$

Para que sea continua debe ser $-4 = 6 + m$, luego $m = -10$.

b) $$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(3x+m)=+\infty$$

91. Se considera la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-9 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{9x-27}{x+3} & \text{si } x>0 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad en el punto $x=0$.

b) Calcula el límite cuando x tiende a $-\infty$ y cuando x tiene a $+\infty$.

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2-9\right)=-9=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{9x-27}{x+3}=-9 \end{cases}$. Luego la función es continua en $x=0$.

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-9\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{9x-27}{x+3}=9 \end{cases}$

92. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si } x<1 \\ x^2-2 & \text{si } 1\le x\le 3 \\ x+b & \text{si } x>3 \end{cases}$

Determina *a* y *b* para que *f* sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Como las funciones $g(x)=x+a$, $h(x)=x^2-2$ y $i(x)=x+b$ son continuas cualesquiera sean a y b, solo debemos estudiar los límites laterales en $x=1$ y $x=3$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+a)=1+a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-2\right)=-1=f(1) \end{cases} \Rightarrow 1+a=-1\Rightarrow a=-2$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^2-2\right)=7=f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+b)=3+b \end{cases} \Rightarrow 3+b=7\Rightarrow b=4$$

Los valores buscados son $a=-2$ y $b=4$.

93. Calcula los valores de $a,b\in\mathbb{R}$ para que la función: $f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} & \text{si } 0<x<1 \\ bx & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ **sea continua en todo punto.**

Debemos ver qué ocurre en $x=0$ y en $x=1$, ya que en el resto es continua.

$$\lim_{x\to 0} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+a)=a=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Para que sea continua en $x=0$, debe ser $a=\dfrac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to 1} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} bx=b=f(1) \end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua en } x=1\text{, debe ser } b=\dfrac{\sqrt{2}}{3}.$$

94. Estudia la continuidad de: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

En $(-\infty,2)-\{1\}$, la función es continua, y en $(2,+\infty)$ también, por ser cocientes de polinomios y no anularse los denominadores. Veamos qué ocurre si $x = 1$ y si $x = 2$:

$$\lim_{x\to 1} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+2}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+2}{x-1} = +\infty \end{cases}$$ $\Rightarrow$ La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 2} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x-1} = 4 = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x^2-2x}{x+2} = 2 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ La función tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

Así pues, la función es continua en $\mathbb{R}-\{1,2\}$.

95. Dada la siguiente función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3}{(x-2)^2}+1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Estudia su continuidad.

La función $g(x)=e^x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, la función $h(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}+1$ no está definida si $x = 2$ y es continua en su dominio, por lo que el dominio de la función f es $D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$.

Estudiemos la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x^3}{(x-2)^2}+1\right) = 1 = f(0) \end{cases}$$

Así pues, la función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

96. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x < 1 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

¿Para qué valores del parámetro *a* es continua la función?

La función es continua si $x \ne 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+a)^2 = (1+a)^2 = f(1) \end{cases}$$

Debe ser $(1+a)^2 = 1$, $a = 0$ o $a = -2$.

97. Determina el valor de *a* para que sea continua en $x = -1$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & \text{si } x \le -1 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{ax}{x-1} = \dfrac{a}{2} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 2\right) = -12 = f(-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = -12; \quad a = -24$$

Para que la función sea continua en $x = -1$ debe ser $a = -24$.

98. Determina *a* y *b* para que la siguiente función sea continua en todos sus puntos:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{a}{x} + b & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

Como $\dfrac{a}{x} + b$ es continua en $(1, +\infty)$, solo debemos estudiar qué ocurre en $x = 0$ y en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 0} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(ax^2 + b\right) = b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - a) = -a = f(0) \end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua, debe ser } b = -a.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x): \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x - a) = 1 - a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{a}{x} + b = a + b = f(1) \end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua en } x = 1 \text{, debe ser } 1 - a = a + b.$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} b = -a \\ 1 - a = a + b \end{cases}$ obtenemos $a = 1$, $b = -1$.

99. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} |-x - 1| - t & \text{si } x \le 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Halla el valor de *t* para que *f* sea continua en $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(|-x - 1| - t\right) = 3 - t = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x - 5) = -3 \end{cases} \Rightarrow 3 - t = -3 \Rightarrow t = 6$$

Teoremas relacionados con la continuidad

100. Demuestra que la ecuación $x^5 - x^2 + x - 5 = 0$ tiene alguna solución real.

$f(x) = x^5 - x^2 + x - 5$ es continua en $[0,2]$, $f(0) = -5 < 0$ y $f(2) = 25 > 0$. Usando el teorema de Bolzano sabemos que hay un número c entre 0 y 2 con $c^5 - c^2 + c - 5 = 0$.

101. Demuestra que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución real menor que 2 y mayor que 1.

$f(x) = x^3 + x - 5$ es continua en $[1,2]$, $f(1) = -3 < 0$ y $f(2) = 5 > 0$. Usando el teorema de Bolzano sabemos que hay un número c entre 1 y 2 con $c^3 + c - 5 = 0$.

Síntesis

102. Pon un ejemplo de dos funciones *f* y *g* tales que se cumplan las condiciones:

1. **No existan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.**
2. **Exista $\lim\limits_{x\to 1} \big(f(x) + g(x)\big)$.**

Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = e^x - \dfrac{x+1}{x-1}$, se cumplen las condiciones. En general, si $H(x)$ es una función tal que existe $\lim\limits_{x\to 1} H(x)$ y F(x) otra función con $F(1) \neq 0$, las condiciones se cumplen para $f(x) = \dfrac{F(x)}{x-1}$ y $g(x) = H(x) - \dfrac{F(x)}{x-1}$.

103. Calcula los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3-x}{5+x}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{2x+5} - \sqrt{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^3 - 3x^2 + 25x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-12x^2 + 7x + 1}{(2x+1)(1-4x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x-1}$

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3-x}{5+x} = -1$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{2x+5} - \sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{2x+5} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+5}{\left(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x}\right)} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^3 - 3x^2 + 25x\right) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-12x^2 + 7x + 1}{(2x+1)(1-4x)} = \dfrac{-12}{-8} = \dfrac{3}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x+2)}{\left(x^2+x+1\right)} = -1$

f) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x-1} = 4^2 = 16$

104. Calcula los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+3x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x+3x-1}{(x+1)^2}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+7x-5}}{2x-9}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+4)(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4)(x+2)=8\cdot 4=32$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+3x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{4x^2+3x}\right)\left(x+\sqrt{4x^2+3x}\right)}{\left(x+\sqrt{4x^2+3x}\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-3x^2-3x}{\left(x+\sqrt{4x^2+3x}\right)}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}=\sqrt{5^2-9}=4$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x+3x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{1+0-1}{1}=0$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+7x-5}}{2x-9}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}=-\infty$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}=\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-5)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-5)=-3$

105. La función $f(x)$ está definida en $\mathbb{R}$ por: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 2\\ a-x & \text{si } x>2\end{cases}$

a) Calcula el valor de a para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Calcula el valor de a para que la función tenga en $x=2$ un salto de 3 unidades hacia arriba.

c) Calcula el valor de a para que la función tenga en $x=2$ un salto de 5 unidades hacia abajo.

a) Miremos qué ocurre en $x=2$:

$$\lim_{x\to 2}f(x):\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-1\right)=3=f(2)\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(a-x)=a-2\end{cases}$$ $\Rightarrow$ Para que sea continua debe ser $a-2=3\Rightarrow a=5$.

b) Para que tenga un salto de tres unidades hacia arriba debe ser $a-2=6\Rightarrow a=8$.

c) Para que tenga un salto de cinco unidades hacia abajo debe ser $a-2=-2\Rightarrow a=0$.

106. Estudia si la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ es continua en $x=1$.

La función no está definida en $x = 1$ por lo que no es continua.

Calculando los límites laterales obtenemos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -(x+1) = -2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2$$

Luego la función tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

CUESTIONES

107. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$, se verifica que:

$$(f\circ g)(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{x-2}-1} = \frac{x-2}{3-x}$$

¿Es correcto afirmar que $D(f\circ g)=\mathbb{R}-\{3\}$.

No es correcto decir $D(f\circ g)=\mathbb{R}-\{3\}$ pues 2 no está en $D(f\circ g)$ ya que no existe $g(2)$. $D(f\circ g)=\mathbb{R}-\{3,2\}$.

108. Determina el dominio de la función: $f(x)=\sqrt{x-1}+\ln(1-x)$.

Un número x estará en $D(f)$ si $x - 1 \geq 0$ y $1 - x > 0$, es decir: $x \geq 1$ y $x < 1$. Como esas dos condiciones son incompatibles, no hay ningún número x que esté en $D(f)$.

109. ¿Existen valores de a y b para los que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x\leq 1 \\ bx & \text{si } 1<x\leq 3 \\ ax+4 & \text{si } x>3 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$?

Para que f sea continua en $\mathbb{R}$ debe serlo, en particular, en $x = 1$ y en $x = 3$.

La exigencia de continuidad en $x = 1$ nos obliga a escribir $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, es decir: $1 + a = b$ y la continuidad en $x = 3$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ o sea: $3b = 3a + 4$

Como no es posible que se verifiquen simultáneamente las ecuaciones $1 + a = b$ y $3a + 4 = 3b$, no hay valores de a y b que hagan que f sea continua en $\mathbb{R}$.

110. Escribe dos funciones *f* y *g*, ambas con dominio $\mathbb{R}$, tales que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} g(x)$ y $f(2)\neq g(2)$.

Basta con que una de ellas sea discontinua en $x = 2$. Por ejemplo $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si } x\neq 2 \\ 7 & \text{si } x=2 \end{cases}$ y $g(x)=x+1$.

111. **En la siguiente función:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-6x+8} & \text{si } x\le 3\\ 1-3x & \text{si } x>3\end{cases}$$

¿Para cuántos números reales *a* se verifica que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a *a* por algún lado es más infinito o menos infinito?

Si $x^2 - 6x + 8 = 0$, $x = 4$ o $x = 2$.

Pero al ser $f(x) = 1 - 3x$ si $x > 3$, el único número a para el que se cumpla lo pedido es $a = 2$.

112. **Si *f* es continua en $x = 2$ y su gráfica pasa por el punto $A(2,0)$, ¿cuál es el valor de $\lim\limits_{x\to 2}\left(3+[f(x)]^2\right)$?**

Al ser f continua en $x = 2$, lo es la función $g(x)=3+(f(x))^2$, por lo que $\lim\limits_{x\to 2}\left(3+[f(x)]^2\right)=3+f(2)^2=3+0^2=3$.

113. **Sean las funciones:**

$$f(x)=1+x\sqrt{\frac{2}{x^2}+7} \qquad\qquad g(x)=1+\sqrt{2+7x^2}$$

¿Podemos afirmar que $f(x)=g(x)$?

No es cierto que $f(x)=g(x)$ si $x < 0$. Por ejemplo: $f(-1)=1-\sqrt{9}=-2$ y $g(-1)=1+\sqrt{9}=4$.

La razón, está en que $\sqrt{2+7x^2}=\sqrt{x^2\left(\frac{2}{x^2}+7\right)}$, si $x \neq 0$, no es $x\sqrt{\frac{2}{x^2}+7}$ sino $|x|\sqrt{\frac{2}{x^2}+7}$, pero aún siendo así $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ y $D(g)=\mathbb{R}$.

114. **Escribe una función racional $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ tal que $p(1)=0$ cuyo límite cuando *x* tiende a 1 por algún lado sea más infinito o menos infinito.**

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$$

115. **Razona si se puede asegurar que la ecuación $f(x)-2=0$ tiene alguna solución en $[1,4]$ sabiendo que:**

1. ***f* es continua en el intervalo $[1,4]$.**
2. **$f(1)=0$ y $f(4)=3$.**

Sí, se puede asegurar que la ecuación $f(x)-2=0$ tiene alguna solución en $[1,4]$.

La función $F(x)=f(x)-2$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo $[1,4]$ ya que es continua allí y $F(1)=-2<0$ y $F(4)=1>0$ por lo que existe al menos un c en $[1,4]$ con $F(c)=0$, y, por tanto, c es una solución de la ecuación planteada.

116. ¿Hay algún valor de *k* para el que la función $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{x^2}{1+x} & \text{si } x\neq -1 \\ k & \text{si } x=-1 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$?

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\left(x-\dfrac{x^2}{1+x}\right)=+\infty$ por lo que, al no existir el límite lateral, la función no es continua en $x=-1$ sea cual sea el valor de *k*.

PROBLEMAS

117. Una bombonería elabora diariamente *x* kg de bombones. El coste diario, en euros, de producción depende de dicha cantidad según la siguiente relación:

$$C(x)=5+22{,}5x$$

Se estima que si se elaboran *x* kg diarios, un kg debe venderse a 60 – $0{,}5x^2$ €. Si cada día se vende toda la producción, encuentra una función que exprese los beneficios diarios de dicha bombonería si se cumplen las indicaciones dadas.

Si cada kilo se vende a 60 – $0{,}5x^2$ €, por los *x* kg producidos en un día se obtendrán unos ingresos de $x\left(60-0{,}5x^2\right)$ €. Los beneficios son los ingresos menos los costes de producción. Así pues, la función que nos da los beneficios es $B(x)=x\left(60-0{,}5x^2\right)-(5+22{,}5x)=-0{,}5x^3+37{,}5x-5$ €.

118. El balance económico mensual, en miles de euros, de una compañía vinícola viene dado por $f(x)=3-\dfrac{5}{x+2}$, $x\geq 0$, donde *x* es el tiempo en años desde que se fundó la compañía. ¿A qué valor tienden sus ganancias o pérdidas a largo plazo?

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=3-\dfrac{5}{x+2}=3$. Las ganancias tienden a 3000 euros mensuales.

119. Una pieza es sometida a un proceso de modificación mediante calor durante 4 horas. La temperatura *T* en grados centígrados, que adquiere la pieza en función del tiempo *x*, en horas, viene dada por la expresión:

$$T(x)=Ax-Bx^2 \qquad 0\leq x\leq 4$$

Se sabe que a las dos horas de comenzado el proceso la temperatura es de 40 ºC y que al acabar el proceso (*T* = 4) la pieza está a 0 ºC. Determinar las constantes *A* y *B*.

Sabemos que $T(2)=2A-4B=40$ y $T(4)=4A-16B=0$.

Resolviendo el sistema obtenemos $A=40$ y $B=10$ y la función que nos da la temperatura en función del tiempo es $T(x)=40x-10x^2$, $0\leq x\leq 4$.

120. El precio unitario que los consumidores aceptan pagar por cierto artículo depende de la cantidad x de dichos artículos que salen a la venta, siguiendo este modelo de demanda:

$$d(x)=\frac{56}{x+5}\text{, con } d(x) \text{ en euros y } x \text{ en miles de unidades.}$$

¿Cuál es el precio unitario de este artículo en el punto de equilibrio si el modelo de oferta es $o(x)=3x+2$?

Se calculan las unidades que deben ponerse a la venta para conseguir el punto de equilibrio:

$d(x)=o(x)\Rightarrow\frac{56}{x+5}=3x+2\Rightarrow 56=(3x+2)(x+5)\Rightarrow 3x^2+17x-46=0\Rightarrow x=2,\ x=-\frac{23}{3}$ (que no tiene sentido en este contexto.

Luego el punto de equilibrio se consigue poniendo a la venta 2000 unidades

El precio unitario es $o(2)=3\cdot 2+2=8$ euros.

121. La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad, viene dada por la función $C(t)=90+15t-0{,}6t^2$; donde t es el tiempo transcurrido desde el 1 de enero de 1990, contado en años.

a) ¿Hasta qué año está creciendo la concentración de ozono?

b) ¿Cuál es la concentración máxima de ozono que alcanza esa ciudad?

a) Como la función de la concentración es una parábola, crecerá hasta el vértice $V(12{,}5;183{,}75)$

Luego ocurrirá a mediados del año 2002 y será de 183,75 microgramos por metro cúbico.

b) La concentración máxima que alcanza esa ciudad es de 183,75 microgramos por metro cúbico.

122. Un grupo de suricatos huye de una fuerte sequía que asola su hábitat y comienza su peregrinaje en busca de agua en el instante t = 0. El número de individuos de la población sigue esta ley $P(t)=140-4t-t^2$, donde t se mide en meses.

a) ¿Cuántos suricatos había al principio de la huida?

b) Demuestra que la población va siempre disminuyendo.

c) Finalmente no encontraron zona con agua. ¿Cuándo desapareció la población completamente?

a) $P(0)=140$. Al comienzo había 140 individuos.

b) Al ser la función una parábola cóncava hacia abajo, a la derecha del vértice que está en $V(-2{,}144)$ es siempre decreciente, luego la población va disminuyendo siempre.

c) $P(t)=0\Rightarrow 140-4t-t^2=0\ \Rightarrow t=-14$ y t = 10. La población desapareció a los 10 meses de comenzar el peregrinaje.

123. El coste mensual de las llamadas telefónicas de cierta compañía se obtiene sumando una cantidad fija (en concepto de alquiler de línea) con otra proporcional a la duración de las llamadas. En dos meses distintos se han pagado 21,14 € por 13 horas y 27 minutos de llamadas y 23,60 € por 15 horas y media de llamadas.

a) Encuentra la función que nos da el coste en función de los minutos hablados.

b) ¿Cuántos céntimos cobran por cada minuto hablado?

a) $C(t) = a + bt$, donde a es la cantidad fija, y b, el precio por minuto. Para hallar a y b resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 21{,}14 = a + 807b \\ 23{,}60 = a + 930b \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = 5$ y $b = 0{,}02$.

$C(t) = 5 + 0{,}02t$, con t medido en minutos.

b) Cobran 0,02 céntimos por minuto.

124. El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se prevé que a partir de ahora, la siguiente función indicará en cada momento (*t*, medido en meses) el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \le t \le 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0{,}4t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

a) Confirma que dicha función es continua y que, por tanto, no presenta un salto en $t = 10$.

b) Por mucho tiempo que pase, ¿a qué porcentaje no se llegará nunca?

a) Si $t \neq 10$, la función es continua por estar definida por un polinomio o un cociente de polinomios con denominador no nulo en su dominio de definición.

$$\lim_{t \to 10} P(t) : \begin{cases} \lim\limits_{t \to 10^-} P(t) = \lim\limits_{t \to 10^-} t^2 - 8t + 50 = 70 = f(10) \\ \lim\limits_{t \to 10^+} P(t) = \lim\limits_{t \to 10^+} \dfrac{38t - 100}{0{,}4t} = 70 \end{cases} \Rightarrow \text{Luego } P(t) \text{ es continua en } t = 10.$$

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{38t - 100}{0{,}4t} = \dfrac{38}{0{,}4} = 95$

Nunca se llegará al 95 % de pacientes operados sin necesidad de entrar en lista de espera.

125. En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en km^2, viene dada por la función $f(t) = \dfrac{11t + 20}{t + 2}$, siendo *t* el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.

a) ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente, cuando empezamos a medirla?

b) ¿Tiene algún límite la extensión de la superficie de la mancha?

a) $f(0) = \dfrac{20}{2} = 10$. La superficie inicialmente afectada es de 10 km^2.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{11t + 20}{t + 2} = 11$. Con el tiempo la extensión se aproximará a los 11 km^2.

126. Tenemos que invertir en un fondo de inversión una cantidad de dinero mayor o igual que 1000 € y menor o igual que 9000 €. El beneficio *B* que se obtiene depende de la cantidad invertida *x*, en miles de euros, de la manera siguiente:

$$B(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } 1\le x<4 \\ -x^2+10x-21 & \text{si } 4\le x\le 9 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de la función *B* en el intervalo $(1,9)$.

b) ¿Para qué valores de $x\in[1,9]$ el beneficio es positivo?

a) $\lim\limits_{x\to 4^-} B(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(x-1)=3$ y $\lim\limits_{x\to 4^+} B(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\left(-x^2+10x-21\right)=3=f(4)$ por lo que la función es continua en $(1,9)$.

b) $x-1>0$ si $x>1$ por lo que en $(1,4)$ la función es positiva.

$-x^2+10x-21=-(x-7)(x-3)$ es positiva en $(3,7)$ y, por tanto lo es en $[4,7)$

Los beneficios son positivos en el intervalo $(1,7)$.

127. Los beneficios mensuales de un artesano, expresados en euros, que vende *x* objetos, se ajustan a la función $B(x)=-0{,}5x^2+50x-800$, donde $20\le x\le 60$. Demuestra que las funciones beneficio y beneficio medio tienen un máximo.

La función beneficio es una parábola cóncava hacia abajo y, por tanto, alcanza su máximo en el vértice $V(50,450)$.

Como $20\le 50\le 60$, el máximo beneficio se obtiene vendiendo 50 objetos y es de 450 euros.

El beneficio medio es $\dfrac{-0{,}5x^2+50x-800}{x}$. Como la función es continua en el intervalo [20, 60], usando el teorema del máximo y del mínimo, concluimos que en dicho intervalo alcanza el máximo aunque aún no sabemos hallarlo.

128. Un comercio abre sus puertas a las nueve de la mañana y las cierra cuando se han marchado todos los clientes. El número de clientes viene dado por la función: $C(t)=-t^2+8t$, siendo *t* el número de horas transcurridos desde la apertura. El gasto por cliente (en euros) también depende de *t* y decrece a medida que pasan las horas siguiendo la función: $G(t)=300-25t$.

a) ¿A qué hora se produce la mayor afluencia de clientes?

b) ¿A qué hora se cierra el comercio?

c) ¿Cuánto gasta el último cliente que abandonó el local?

d) Encuentra la función que nos da la recaudación dependiendo del tiempo.

e) ¿Cuándo hay mayor recaudación, a cuarta o a quinta hora?

a) Al ser $C(t)=-t^2+8t$ una parábola, su máximo lo alcanza en el vértice, que es $V(4,16)$, luego la máxima afluencia se produce a 4 horas de abrir, esto es, a las 13:00, y es de 16 clientes.

b) El negocio cierra cuando $C(t)=-t^2+8t=0$, a las 8 horas de abrir, o sea, a las 17:00.

c) El último cliente abandona el local cuando $t=8$ y gasta $G(8)=300-25\cdot 8=100$ euros.

d) La recaudación en una hora es el producto del número de clientes en esa hora por el gasto de cada cliente en esa hora. Así pues, $R(t)=C(t)G(t)=\left(-t^2+8t\right)(300-25t)$.

e) $R(4)=\left(-4^2+8\cdot 4\right)(300-25\cdot 4)=3200$ euros. $R(5)=\left(-5^2+8\cdot 5\right)(300-25\cdot 5)=2625$ euros.

La recaudación es mayor en la cuarta hora que en la quinta.

129. Se ha estimado que la población de un barrio periférico de una gran ciudad evolucionará siguiendo el modelo: $P(t)=\dfrac{240+20t}{16+t}$ en miles de habitantes, donde *t* indica los años transcurridos desde su creación en el año 2005.

a) ¿Qué población tenía dicho barrio en el año 2005?

b) ¿Qué población tendrá dicho barrio en el año 2015?

c) ¿Será posible que la población del barrio duplique a la población inicial?

d) A largo plazo, ¿la población se estabilizará o no?

a) $P(0)=\dfrac{240}{16}=15$. El barrio tenía 15 000 habitantes en 2005.

b) $P(10)=\dfrac{240+200}{26}\simeq 16{,}923$. En 2015 el barrio tendrá 16 923 habitantes aproximadamente.

c) Para ello debería existir t con $\dfrac{240+20t}{16+t}=30 \Rightarrow 240+20t=480+30t \Rightarrow t=-24$. No, no es posible ya que la ecuación planteada solo tiene una solución negativa y $t\geq 0$.

d) $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{240+20t}{16+t}=20$. Si, la población se estabilizará en 20 000 habitantes.

130. Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos y gastos en euros vienen dados respectivamente por las funciones:

$$I(x)=28x^2+36\,000x \qquad\qquad G(x)=44x^2+12\,000x+700\,000$$

Donde *x* representa la cantidad de unidades vendidas.

Determina:

a) La función que define el beneficio anual en euros.

b) La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo.

c) El beneficio máximo.

a) $B(x)=I(x)-G(x)=\left(28x^2+36\,000x\right)-\left(44x^2+12\,000x+700\,000\right)=-16x^2+24\,000x-700\,000$.

b) Al ser la función de beneficios una parábola, el máximo se alcanzará en el vértice, que es $V(750{,}8\,300\,000)$.

Los máximos beneficios se obtienen produciendo 750 unidades y son de 8 300 000 euros.

c) El beneficio máximo es de 8 300 000 euros.

131. La función de beneficios de una empresa es $B(t)=\dfrac{3t-6}{t+1}$ donde *t* representa los años de vida de la empresa ($t\geq 0$) y $B(t)$ está expresado en millones de euros. Se pide:

a) Determinar cuándo la empresa tiene ganancias, y cuándo, pérdidas.

b) ¿Están los beneficios limitados? Razona la respuesta. Si lo están, ¿cuál es su límite?

a) Como si $t\geq 0$ el denominador de $\dfrac{3t-6}{t+1}$ es positivo, la función es negativa si $3t-6<0$, es decir si $t<2$. La empresa tuvo pérdidas los dos primeros años de vida y el resto del tiempo tendrá ganancias.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} B(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{3t-6}{t+1}=3$ y como $t>0$ $\dfrac{3t-6}{t+1}=\dfrac{3t+3-9}{t+1}=3-\dfrac{9}{t+1}<3$ por lo que los beneficios no superarán nunca los tres millones de euros.

Autoevaluación

Comprueba qué has aprendido

1. La gráfica de $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+2}$ corta al eje horizontal en el punto $A(3,0)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Calcula $f(1)$.

Al ser $f(3)=0$, tenemos que $3a+b=0$ y al ser $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+b}{x+2}=2$, resulta $a=2$, así que $b=-6$ y $f(x)=\dfrac{2x-6}{x+2}$ con lo que $f(1)=-\dfrac{4}{3}$.

2. Considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2-\sqrt{x^2+3}}$. Escribe otra función $g(x)$ que coincida con $f(x)$ en todos los puntos salvo en $x=1$ (donde f no está definida) y calcula posteriormente $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2-\sqrt{x^2+3}}=\frac{\left(x^2-1\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{4-\left(x^2+3\right)}=\frac{\left(x^2-1\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{1-x^2}$$

$f(x)=g(x)=-\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)$ si $x\neq 1$.

La función $y=g(x)$ coincide con f en todos los números de $D(f)$.

Entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-\left(2+\sqrt{1^2+3}\right)=-4$.

3. Si x es un número positivo, calcula $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ si $h\neq 0$.

Así pues $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. Calcula $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(12+6h+h^2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(12+6h+h^2\right)=12$$

5. **Calcula** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)$**.**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-3x}+x\right)}{\sqrt{x^2-3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1}=-\frac{3}{2}.$$

6. **Calcula** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+7}{2x-6}\right)^{\sqrt{4x^2+x-3}}$**.**

$$\left(\frac{2x+7}{2x-6}\right)^{\sqrt{4x^2+x-3}}=\left(1+\frac{13}{2x-6}\right)^{\sqrt{4x^2+x-3}}=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-6}{13}}\right)^{\frac{2x-6}{13}}\right]^{\frac{\sqrt{4x^2+x-3}}{\frac{2x-6}{13}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-6}{13}}\right)^{\frac{2x-6}{13}}=e \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-3}}{\frac{2x-6}{13}}=\lim_{x\to+\infty}13\sqrt{\frac{4x^2+x-3}{(2x-6)^2}}=13.$$

Así que el resultado del límite pedido es e^{13}.

7. **¿Es continua la función** $f(x)=\frac{x+1}{|x|+1}$**? Calcula los límites en más infinito y en menos infinito.**

La función $f(x)=\frac{x+1}{|x|+1}$ es continua en $\mathbb{R}$ pues es cociente de dos funciones continuas y el denominador nunca se anula.

Definiéndola a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{-x+1} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Así que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

8. **Dada la función** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{si } x<2\\ 3x+m & \text{si } x\geq 2\end{cases}$**, calcula el valor de *m* para que *f* sea continua en** $x=2$**.**

$$f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=6+m$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{x-3}=-4$$

Para que f sea continua en $x=2$, debe ocurrir que $6+m=-4 \Rightarrow m=-10$.

9. **En la función** $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{si } x<0\\ \dfrac{a+3x}{x^2-4x+3} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$**, estudia la continuidad de *f* en** $x=0$ **para los distintos valores del parámetro *a*.**

$$f(0)=\frac{a}{3},\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=1 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{a}{3}$$

Así pues si $a=3$, f es continua en $x=0$ y si $a\neq 3$, f no es continua en $x=0$.

10. **¿Es continua en** $x=0$ **la función** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$**?**

Estudiemos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2} \text{ pues } \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2+e^{\frac{1}{x}}}=0 \text{ pues } \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

Así pues dicha función no es continua en $x=0$ por no existir límite en dicho punto.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Se consideran las funciones *f*, *g* y *h*, definidas en $\mathbb{R}$, tales que para todo número real *x* se tiene que $f(x) \le g(x) \le h(x)$.

Si además $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, se puede deducir:

A. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

B. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

C. $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

D. $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

La respuesta correcta es la C porque como $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo x entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) \le \lim_{x\to+\infty} g(x) \le \lim_{x\to+\infty} h(x)$.

Para descartar las opciones A, B y D basta considerar las funciones $f(x) = 1$ para todo x, $g(x) = x^2 + 2$ y $h(x) = x^2 + 4$

2. Considera la función $f(x) = e^{-x^2+3}$. Entonces, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ es igual a:

A. $+\infty$

B. 0

C. e^3

D. No existe.

Sin más que observar que $\lim_{x\to-\infty} \left(-x^2 + 3\right) = -\infty$ obtenemos que la respuesta es B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

3. Sea *f* la función definida en $(-2,+\infty)$ por la fórmula $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x+2}$. Entonces:

A. La gráfica de *f* corta al eje *Y* en $\dfrac{7}{2}$.

B. $f(x) > 3$ en todo $x \in D(f)$.

C. $\lim_{x\to-2^+} f(x) = 3$

D. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$

A. Es verdadera, pues $f(0) = 3 + \dfrac{1}{0+2} = \dfrac{7}{2}$.

B. Es verdadera, pues $\dfrac{1}{x+2} > 0$ si $x > -2$.

C. Es falsa, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$.

D. Es falsa, pues la función no está definida si $x \le -2$ y por tanto no podemos calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

4. Sea g la función definida en $(0,+\infty)$ mediante la fórmula $g(x)=\ln\frac{2}{x}$. Entonces:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

B. La gráfica de $g(x)$ no corta al eje X.

C. La gráfica de $g(x)$ corta dos veces al eje Y.

D. El conjunto de números reales soluciones de la inecuación $g(x)\le 0$ es $[2,+\infty)$.

A. Es verdadera, pues $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2-\ln x)=\ln 2-\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=-\infty$.

B. Es falsa, $g(2)=0$.

C. Es falsa, pues $g(x)=0$ si $\ln 2=\ln(x)$, cuya única solución es $x=2$.

D. Es verdadera, $g(x)\le 0$ $\ln 2\le \ln x$ y esto ocurre si $2\le x$.

5. Sea f la función $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$.

A. $D(f)=\mathbb{R}$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

C. f es continua en todos los puntos de su dominio.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$

A. Es falsa. $x^2-x\ge 0$ si $x\le 0$ ó $1\le x$ luego $D(f)=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

B. Es verdadera.

C. Es verdadera pues es suma de dos funciones continuas.

D. Es falsa. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Considera la función $f(x) = xg(x)$:

1. **La gráfica de *f* pasa por el origen de coordenadas.**
2. ***g* es continua en 0.**

A. $1 \Rightarrow 2$, pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$, pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

La relación correcta es B. Como $g(x)$ es continua en $x = 0$, existe $g(0)$ y $f(0) = 0 \cdot g(0) = 0$. Luego la función pasa por $(0,0)$. Para ver que 1 no implica 2 basta considerar la función $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Para demostrar si $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = +\infty$, donde $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-4)^{2d}}$, con *a*, *b*, *c* y *d* enteros positivos nos dan estos datos:

1. **El valor de *a***
2. **El valor de *b***
3. **El valor de *c***
4. **El valor *d***

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

La respuesta correcta es D. Puede eliminarse el valor de *d* pues solo nos interesa el signo de la expresión.

Para hallarlo necesitamos saber el signo de $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)(x-4)^{2d}$ cuando x se aproxima a 4. Para saber los tres primeros necesitamos conocer *a*, *b* y *c* pero $(x-4)^{2d}$ es siempre positivo por ser $2d$ par.