6 Derivadas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 3. Ejercicios resueltos.

4. Calcula la derivada de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ en $x=1$.

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{1+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{(1+h)h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{1+h}=\frac{-1}{1}=-1.$$

5. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ en el punto de abscisa $x=2$. **b)** $f(x)=2x^2+x-1$ en el punto de abscisa $x=-1$.

a) La pendiente de la recta tangente es:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(2+h)^2-3}-\frac{1}{2^2-3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h(h+4)}{1+h^2+4h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(h+4)}{1+h^2+4h}=-4$$

Como la recta pasa por el punto de tangencia $A(2,f(2))=A(2,1)$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y-1=-4(x-2)\Rightarrow y=-4x+9$$

b) La pendiente de la recta tangente es:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(-1+h)^2+(-1+h)-1-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2h-3)}{h}=-3$$

Como la recta pasa por el punto de tangencia $A(-1,f(-1))=A(-1,0)$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y-0=-3(x+1)\Rightarrow y=-3x-3$$

6. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=(1-2x)^2$, que es paralela a la recta $y=4x+5$. ¿Hay más de una recta que cumpla la condición anterior?

La pendiente de la recta tangente es 4 porque es paralela a $y=4x+5$.

Debemos ahora encontrar el punto de tangencia, $A(a,f(a))$, que debe cumplir que $f'(a)=4$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1-2(a+h))^2-(1-2a)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h(h+2a-1)}{h}=4(2a-1)=8a-4$$

Como $8a-4=4$, $a=1$. El punto de tangencia es $A(1,f(1))=A(1,1)$.

La recta tangente es $y-1=4(x-1)\Rightarrow y=4x-3$.

Además la recta es única porque existe un único punto de tangencia.

7. La emisión de gases en toneladas en una fábrica, viene dada por la función $n(t) = t(3 - 0{,}25t)$ con $0 \le t \le 10$ (t en horas). Calcula la tasa de variación media de $n(t)$ entre $t = 5$ y $t = 7$ horas, y la tasa de variación instantánea en $t = 5$ horas.

$$TVMn[5,7] = \frac{n(7) - n(5)}{7 - 5} = \frac{8{,}75 - 8{,}75}{2} = 0$$

$$TVIn(5) = \lim_{h\to 0} \frac{n(5+h) - n(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(5+h)\left[3 - 0{,}25(5+h)\right] - 5(3 - 0{,}25 \cdot 5)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0{,}5h - 0{,}25h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(0{,}5 - 0{,}25h) = 0{,}5$$

8 y 9. Ejercicios resueltos.

10. Halla la función derivada de la función identidad, $f(x) = x$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

11. En cada caso, determina la función derivada.

a) $f(x) = ax + b$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$ **c)** $f(x) = x^{-2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a$$

b) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{hx^2(x+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x - h)}{hx^2(x+h)^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2x - h)}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

d) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a(x+h) + b} - \frac{1}{ax+b}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ax + b - \left[a(x+h) + b\right]}{h\left[a(x+h) + b\right](ax+b)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-ah}{h\left[a(x+h) + b\right](ax+b)} = \lim_{h\to 0} \frac{-a}{\left[a(x+h) + b\right](ax+b)} = \frac{-a}{(ax+b)^2}$$

12. En cada caso, encuentra los valores de los parámetros que hacen que las funciones dadas sean derivables en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \le 2 \\ ax & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $g(x)=\begin{cases} ax^2+bx & \text{si } x \le -1 \\ ax-3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a) Para que se derivable en $x = 2$, debe ser obligatoriamente continua en $x = 2$, aunque esto no sea suficiente. Imponemos, pues, la condición de continuidad en $x = 2$: los límites laterales en dicho punto han de coincidir con el valor de la función:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(x^2+1\right) = 5$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} ax = 2a$ $f(2)=5$

Así pues, para que f sea continua en $x = 2$ debe ser $2a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{2}$.

La función es, por tanto, $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \le 2 \\ \frac{5}{2}x & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Estudiamos ahora si esta función es derivable en $x = 2$.

La derivada de la función para x distinto de 2 es: $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ \frac{5}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Para $x = 2$ vemos que: $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2x = 4$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$

Como los límites laterales de la función derivada no coinciden en $x = 2$, f no es derivable en ese punto.

Por tanto, no existe ningún valor de a para el que la función sea derivable en $x = 2$.

b) Imponemos primero la condición de continuidad. Dentro de cada tramo no hay problemas porque se trata de funciones polinómicas. Hay que asegurar pues la continuidad en $x = -1$: los límites laterales en dicho punto han de coincidir con el valor de la función:

$\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(ax^2+bx\right) = a-b$ $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (ax-3) = -a-3$ $g(-1)=a-b$

Así pues, para que g sea continua en $x = -1$ debe ser $a-b=-a-3 \Rightarrow 2a-b=-3$.

Estudiamos ahora si esta función es derivable en $x = -1$.

La derivada de la función para x distinto de -1es: $g'(x)=\begin{cases} 2ax+b & \text{si } x < -1 \\ a & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Para $x = -1$ vemos que: $\lim\limits_{x\to -1^-} g'(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (2ax+b) = -2a+b$ $\lim\limits_{x\to -1^+} g'(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} a = a$

Para que g sea derivable en $x = -1$, debe cumplirse que $-2a+b=a \Rightarrow b=3a$.

Ya tenemos el sistema formado: $\begin{cases} 2a-b=-3 \\ b=3a \end{cases}$ cuya solución es $a = 3$, $b = 9$.

Para que g sea derivable en todo $\mathbb{R}$, debe cumplirse que $a = 3$ y $b = 9$.

13 y 14. Ejercicios resueltos.

15. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{3x-1}{x^4+1}$ **b)** $f(x)=\left(x^7+7x\right)^7$ **c)** $f(x)=\left(\frac{2\sqrt{x}}{3x^2+1}\right)^3$ **d)** $f(x)=(2x+3)\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$

a) $f'(x)=\frac{3\left(x^4+1\right)-(3x-1)4x^3}{\left(x^4+1\right)^2}=\frac{-9x^4+4x^3+3}{\left(x^4+1\right)^2}$

b) $f'(x)=7\left(x^7+7x\right)^6\left(7x^6+7\right)$

c) $f'(x)=3\left(\frac{2\sqrt{x}}{3x^2+1}\right)^2\frac{2\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(3x^2+1\right)-2\sqrt{x}\,6x}{\left(3x^2+1\right)^2}=\frac{12x\frac{3x^2+1-12x^2}{\sqrt{x}}}{\left(3x^2+1\right)^2}=\frac{12x-108x^3}{\sqrt{x}\left(3x^2+1\right)^4}$

d) $f'(x)=2\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}+\frac{(2x+3)}{2\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}}\cdot\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot\frac{1}{x^2+1}\left(x^2+1\right)^2-2x(2x+3)}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}}=$

$=\frac{2\left(x^2+1\right)-4x^2-6x}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}}=\frac{-2x^2-6x+2}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}}$

16. Dada la función $f(x)=\sqrt{2x-1}\cdot(2x+3)^2\cdot\frac{3}{x-2}$, halla $f'(5)$.

Podemos considerar la función como producto de dos funciones: $f(x)=3\sqrt{2x-1}\cdot\frac{(2x+3)^2}{x-2}$

$$f'(x)=3\left[\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}\cdot\frac{(2x+3)^2}{x-2}+\sqrt{2x-1}\cdot\frac{4(2x+3)(x-2)-(2x+3)^2}{(x-2)^2}\right]$$

(no hace falta simplificar la expresión porque basta con sustituir la x por 5).

$$f'(5)=3\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{13^2}{3}+3\cdot\frac{4\cdot13\cdot3-13^2}{9}\right]=\frac{130}{3}$$

17. Determina las derivadas de estas funciones: $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ y $g(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$. ¿Qué observas?

$f'(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$ $g'(x)=\frac{2(x+1)\left(x^2+1\right)-(x+1)^2\,2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$

La derivada es la misma ya que:

$$g(x)-f(x)=\frac{(x+1)^2-2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1+2x-2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$$

Es decir, $g(x)=f(x)+1$, por tanto, ambas funciones tienen la misma derivada.

18. Calcula la derivada de las siguientes funciones y encuentra después para qué valores de *x* se anulan.

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x-5}{x+8}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

a) $f'(x)=\dfrac{1(x^2+3)-(x-1)2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$

Esta derivada se anula si $f'(x)=0 \Rightarrow -x^2+2x+3=0$, es decir, si $x=-1$ y si $x=3$.

b) $f'(x)=\dfrac{1(x+8)-(x-5)1}{(x+8)^2}=\dfrac{13}{(x+8)^2}$

Esta derivada se anula si $f'(x)=0 \Rightarrow 13=0$, es decir, nunca.

c) $f'(x)=\dfrac{2x(x^2-4)-(x^2+1)2x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{-10x}{(x^2-4)^2}$

Esta derivada se anula si $f'(x)=0 \Rightarrow -10x=0$, es decir, si $x=0$.

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ **c)** $f(x)=\sqrt{x}e^{-x}$ **e)** $f(t)=(t^3+2)^{90}$

b) $f(x)=2^{\sqrt{x}-7}$ **d)** $f(t)=(\sqrt{t}+1)^{100}$ **f)** $f(x)=2^{2x-1}$

a) $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f'(x)=2^{\sqrt{x}-7}\ln 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}+\sqrt{x}e^{-x}(-1)=e^{-x}\left(\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}\right)$

d) $f'(t)=100(\sqrt{t}+1)^{99}\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=\dfrac{50(\sqrt{t}+1)^{99}}{\sqrt{t}}$

e) $f'(t)=90(t^3+2)^{89}3t^2=270t^2(t^3+2)^{89}$

f) $f'(x)=2^{2x-1}\ln 2\cdot 2=2^{2x}\ln 2$

20. Utiliza las reglas de derivación para determinar las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(\theta)=\dfrac{1}{1+e^{-\theta}}$ **b)** $f(z)=\dfrac{\sqrt{z}}{e^z}$ **c)** $f(y)=e^{\left(e^{y^2}\right)}$

a) $f'(\theta)=\dfrac{e^{-\theta}}{(1+e^{-\theta})^2}$

b) $f'(z)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{z}}e^z-\sqrt{z}e^z}{e^{2z}}=\dfrac{\dfrac{1-2z}{2\sqrt{z}}}{e^z}=\dfrac{1-2z}{2\sqrt{z}e^z}$

c) $f'(y)=e^{\left(e^{y^2}\right)}e^{y^2}2y$

21. Ejercicio resuelto.

22. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(t) = t\cos t + \text{tg}\, t$

b) $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$

c) $f(x) = e^{\cos x}$

d) $f(x) = \text{tg}\left(\sqrt{x}\right)$

e) $f(x) = \sqrt{\text{arctg}\, x}$

f) $f(x) = \text{sen}^4 x$

g) $f(x) = \cos^3\left(e^x - 1\right)$

h) $f(x) = \text{sen}^7\left[\left(x^7+1\right)^7\right]$

i) $f(\beta) = e^{\beta}\text{arcsen}(2\beta)$

h) $f(z) = \text{tg}\left(e^z\right)$

a) $f'(t) = \cos t + t(-\text{sen}\, t) + \dfrac{1}{\cos^2 t} = \cos t - t\,\text{sen}\, t + \dfrac{1}{\cos^2 t}$

b) $f'(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{2\sqrt{1-\cos x}}$

c) $f'(x) = e^{\cos x}(-\text{sen}\, x) = -e^{\cos x}\text{sen}\, x$

d) $f'(x) = \dfrac{1+\text{tg}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\text{arctg}\, x}} \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{\text{arctg} x}}$

f) $f'(x) = 4\text{sen}^3 x \cos x$

g) $f'(x) = -3\cos^2\left(e^x-1\right)\text{sen}\left(e^x-1\right)e^x$

h) $f'(x) = 7\text{sen}^6\left[\left(x^7+1\right)^7\right]\cos\left[\left(x^7+1\right)^7\right]7\left(x^7+1\right)^6 7x^6$

i) $f'(\beta) = e^{\beta}\text{arcsen}(2\beta) + e^{\beta}\dfrac{2}{\sqrt{1-(2\beta)^2}} = e^{\beta}\left(\text{arcsen}(2\beta) + \dfrac{2}{\sqrt{1-4\beta^2}}\right)$

j) $f'(z) = \dfrac{e^z}{\cos^2 e^z}$

23. Determina las derivadas de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x\left(\cos x+e^x\right)}{e^x}$

b) $f(x)=\dfrac{\arccos\sqrt{x-1}}{5x^2+1}$

c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)$

d) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

a) $f'(x)=\dfrac{\cos x+e^x-x(\operatorname{sen}x+\cos x)}{e^x}$

b) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{2-x}}\left(5x^2+1\right)-10x\arccos\sqrt{x-1}}{\left(5x^2+1\right)^2}$

c) $f(x)=\ln(1+\cos x)-\ln(1-\cos x)$

$f'(x)=\dfrac{-\operatorname{sen}x}{1+\cos x}-\dfrac{\operatorname{sen}x}{1-\cos x}=\dfrac{-\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}x\cos x-\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x\cos x}{1-\cos^2 x}=\dfrac{-2\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^2x}=\dfrac{-2}{\operatorname{sen}x}$

d) $f'(x)=\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right]\dfrac{2x\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right]\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$

24. Ejercicio interactivo.

25 y 26. Ejercicios resueltos.

27. Investiga si las siguientes funciones tienen extremos relativos y, en su caso, determinarlos.

a) $f(x)=x^3+3x^2+6x+1$

b) $g(x)=\operatorname{sen}x-\cos x-3x+1$

a) La derivada de *f* es $f'(x)=3x^2+6x+6$.

La ecuación $f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+6x+6=0$ no tiene solución, por lo que la función *f* no presenta extremos relativos.

b) La derivada de *g* es $g'(x)=\cos x+\operatorname{sen}x-3$.

La ecuación $g'(x)=0\Rightarrow\cos x+\operatorname{sen}x-3=0\Rightarrow\cos x+\operatorname{sen}x=3$ no tiene solución ya que $\cos x+\operatorname{sen}x\le 2$.

28. Estudia el crecimiento y los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x^4+x^3+2x^2-4x+1$ **b)** $f(x)=(x+1)^2-2\ln(x+1)$

a) $D(f)=\mathbb{R}$, $f'(x)=x^4-4x^3+3x^2+4x-4=(x-2)^2(x+1)(x-1)$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=2, x=1, x=-1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
Signo de f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
Comportamiento de *f*	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente		Creciente

La función es creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. La función es decreciente en $(-1,1)$.

El punto $A(-1,f(-1))=A\left(-1,\frac{24}{5}\right)$ es un máximo relativo. El punto $B(1,f(1))=B\left(1,-\frac{4}{5}\right)$ es un mínimo relativo.

b) $D(f)=(-1,+\infty)$,

$$f'(x)=2(x+1)-\frac{2}{x+1}=\frac{2(x+1)^2-2}{x+1}=\frac{2x^2+4x}{x+1}=\frac{2x(x+2)}{x+1},\ f'(x)=0 \Rightarrow x=0, x=-2\notin D(f)$$

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
Signo de f'	$-$	0	$+$
Comportamiento de *f*	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función es creciente en $(0,+\infty)$. La función es decreciente en $(-1,0)$.

El punto $A(0,f(0))=A(0,1)$ es un mínimo relativo (también es absoluto).

29. Ejercicio resuelto.

30. La suma de dos números no negativos es 14. Calcúlalos para que su producto sea el mayor posible.

1. Se definen las variables, x, y, que son los dos números.
2. Se escribe la relación entre ellas: $x+y=14$, y se despeja una en función de la otra: $y=14-x$.
3. La función que hay que minimizar es el producto de los números, $P=xy$.

   Luego, $P(x)=x(14-x)=-x^2+14x$.
4. Se halla el dominio de la función. Como deben ser no negativos, $x\in[0,14]$.
5. Se calculan los valores de x que anulan la derivada de $P(x)=-x^2+14x$ en $[0,14]$:

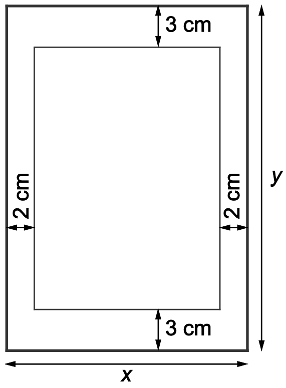
$$P'(x)=-2x+14=0 \Rightarrow x=7$$

6. Se halla el valor de $P(x)$ en el valor que anula la derivada y se compara con los de los extremos del intervalo de definición:

$P(7)=49$ $\quad P(0)=0$ $\quad P(14)=0$

Por tanto, el máximo se alcanza para $x=7$, con lo que los números serán 7 y 7. Su producto es 49.

31. Queremos escribir un texto que ocupe 96 cm^2, tal que deje 2 cm en cada margen lateral de la hoja en la que está escrito y 3 cm de margen arriba y abajo. Calcula las dimensiones de la hoja más pequeña posible que se puede utilizar.



Se determinan las variables, que son las dimensiones de la hoja:

x son los cm que mide la base e, y, los cm que mide la altura.

Se relacionan las variables: el texto escrito debe ser 96 cm^2.

Así pues $(x-4)(y-6)=96$, y operando se obtiene:

$$(x-4)(y-6)=96 \Rightarrow xy-6x-4y+24=96 \Rightarrow y(x-4)=72+6x \Rightarrow y=\frac{72+6x}{x-4}$$

La función que se quiere minimizar es la superficie de la hoja:

$$S=xy \Rightarrow S(x)=x\frac{72+6x}{x-4}=\frac{72x+6x^2}{x-4}$$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. En este caso, x debe estar en el intervalo abierto $(4,+\infty)$.

Se busca el mínimo de $S(x)=\frac{72x+6x^2}{x-4}$ en $(4,+\infty)$.

La derivada $S'(x)=\frac{(72+12x)(x-4)-(72x+6x^2)}{(x-4)^2}=\frac{6x^2-48x-288}{(x-4)^2}=\frac{6(x-12)(x+4)}{(x-4)^2}$ se anula si $x=12$.

La solución negativa no aporta nada.

Si $0<x<12$, la derivada es negativa y la función decrece; si $x>12$, la derivada es positiva y la función crece.

Así pues, en $x=12$ está el mínimo.

La altura, y, mide $y=\frac{72+6\cdot 12}{12-4}$ cm.

Las dimensiones de la hoja más pequeña posible son: 12 cm de base y 18 cm de altura.

32. Una empresa alquila 65 estudios. Alquilando cada uno por 600 €, conseguiría alquilarlos todos y por cada 20 € que aumente el alquiler, alquilaría 1 menos. Si cada estudio tiene 60 € mensuales de gastos, ¿a cuánto debe alquilarlos para obtener el máximo beneficio?

Llamando x al número de estudios que deja de alquilar por aumento de precio, la función que da los beneficios es:

$B(x)=(65-x)(600+20x)-60(65-x)$, donde $65-x$ son los estudios que alquila, y $600+20x$, el precio de alquiler de cada estudio. La función beneficio, después de operar, es:

$B(x)=-20x^2+760x+35100$, siendo x un valor del intervalo cerrado [0, 65].

$B'(x)=-40x+760$, y los valores de x que la anulan: $-40x+760=0 \Rightarrow x=19$.

Se compara el valor de la función en ese punto y en los extremos del intervalo de definición:

$B(0)=35100$ $\qquad$ $B(65)=0$ $\qquad$ $B(19)=42320$

Así pues, la función alcanza el máximo en $x=19$.

Por tanto, deberá alquilar $65-x=65-19=46$ estudios a un precio de $600+20x=600+20\cdot 19=980$ euros.

El beneficio máximo es de $B(19)=42320$ euros.

33. Ejercicio interactivo.

34. Ejercicio resuelto.

35. ¿Cuáles son las abscisas de los puntos de inflexión de una función *f* en la que $f''(x)=(x-1)(x-3)^2$?

La derivada segunda se anula en $x = 1$ y en $x = 3$.

En $x = 1$, como $f''(x)<0$ en $(-\infty,1)$ y $f''(x)>0$ en $(1,3)$ la función tiene un punto de inflexión de abscisa 1.

En $x = 3$ no hay un punto de inflexión, pues no hay cambio de curvatura (a derecha y a izquierda la segunda derivada es positiva).

36. Determina la curvatura y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x^3+6x^2-5$

b) $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$

c) $f(x)=xe^x$

d) $f(x)=\cos x$, en $[0, 2\pi]$

a) $D(f)=\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2+12x$, $f''(x)=6x+12=6(x+12)$, $f''(x)=0\Rightarrow 6(x+2)=0\Rightarrow x=-2$

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
Signo de *f''*	$-$	0	$+$
Curvatura de *f*	$\cap$	Punto de inflexión	$\cup$

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$, $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$, $f''(x)=\dfrac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$, $f''(x)=0\Rightarrow(x^2+1)e^x=0\Rightarrow$ la derivada segunda no se anula nunca.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
Signo de *f''*	$-$	$-1\notin D(f)$	$+$
Curvatura de *f*	$\cap$		$\cup$

c) $D(f)=\mathbb{R}$, $f'(x)=(x+1)e^x$, $f''(x)=(x+2)e^x$, $f''(x)=0\Rightarrow x+2=0\Rightarrow x=-2$

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
Signo de *f''*	$-$	0	$+$
Curvatura de *f*	$\cap$	Punto de inflexión	$\cup$

d) $D(f)=[0,2\pi]$, $f'(x)=-\operatorname{sen}x$, $f''(x)=-\cos x$, $f''(x)=0\Rightarrow-\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}, x=\dfrac{3\pi}{2}$

x	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$
Signo de *f''*	$-$	0	$+$	0	$-$
Curvatura de *f*	$\cap$	Punto de inflexión	$\cup$	Punto de inflexión	$\cap$

37. De una cierta función *f* se conoce su derivada:

$$f'(x) = (e^x - 1)(x - 2)$$

Obtén las abscisas de los posibles extremos relativos de *f* y determina su carácter de máximo o mínimo aplicando el test de la segunda derivada.

Los posibles extremos serán los valores de *x* que anulan la derivada de *f* son:

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ $\qquad$ $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

La derivada segunda es $f''(x) = e^x(x-1) - 1$.

Evaluamos en los puntos anteriores:

$x = 0$: $f''(0) = e^0(0-1) - 1 = -2 < 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ hay un máximo relativo.

$x = 2$: $f''(2) = e^2(2-1) - 1 = e^2 - 1 > 0 \Rightarrow$ en $x = 2$ hay un mínimo relativo.

38. Encuentra los valores de *a* y *b* en $f(x) = ax^3 + 2x^2 - 5x + b$ para que tenga un punto de inflexión en el punto $A(1,3)$

Calculamos su segunda derivada: $f'(x) = 3ax^2 + 4x - 5 \Rightarrow f''(x) = 6ax + 4$

Al ser $A(1,3)$ un punto de inflexión: $f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 4 = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{2}{3}$

Como $A(1,3)$ pertenece a la gráfica de *f*: $f(1) = 3 \Rightarrow a + 2 - 5 + b = 3 \Rightarrow b = 6 - a = 6 - \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{20}{3}$.

39. Utiliza el teorema de Rolle para demostrar que la gráfica de la función $f(x) = 3x^5 + 7x + 1$ no puede cortar 2 veces al eje horizontal.

Si la función cortara dos veces al eje horizontal, en *a* y *b*, tendría que ocurrir que $f(a) = f(b) = 0$ y, por el teorema de Rolle, la derivada de *f* se anularía entre *a* y *b*.

Pero la derivada es $f'(x) = 15x^4 + 7$ y, como se aprecia, no se anula nunca.

Luego la función no puede cortar al eje horizontal dos veces.

40. De una cierta función *f* derivable se sabe que $f(0) = 1$ y $f(3) = 7$. ¿Se puede asegurar que hay alguna tangente a su gráfica paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$?

El teorema del valor medio nos asegura la existencia de dicho punto $C(c, f(c))$, con $0 < c < 3$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{7 - 1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

La pendiente de la recta $y = 2x + 5$ es $m = 2$, que es precisamente el valor de $f'(c) = 2$. Luego, la tangente a *f* en el punto $C(c, f(c))$ tiene también pendiente 2 y es, por tanto, paralela a la recta dada.

41. Ejercicio resuelto.

42. Utiliza las diferenciales para aproximar $e^{0,01}$.

Se considera la función $f(x) = e^x$. Hay que aproximar $f(x+h)$ para $h = \Delta x = dx = 0{,}01$ y $x = 0$.

Así pues, $f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)dx$.

$f'(x) = e^x$ con lo que $f'(0) = 1$. Por otra parte, $f(0) = 1$

Entonces, $f(0+h) \simeq f(0) + f'(0) \cdot 0{,}01$, es decir, $f(0+h) \simeq 1 + 1 \cdot 0{,}01 = 1{,}01$.

Con la calculadora se obtiene el valor $e^{0,01}$ = 1,0100502. Así pues, utilizando diferenciales, la aproximación es realmente buena.

43. Calcula aproximadamente: $5\,\text{sen}(0{,}01) - 2\cos^2(0{,}01)$.

Se considera la función $f(x) = 5\,\text{sen}\,x - 2\cos^2 x$ y se aproxima $f(x+h)$ para $h = \Delta x = dx = 0{,}01$ y $x = 0$.

La derivada de la función es $f'(x) = 5\cos x + 4\cos x\,\text{sen}\,x$, de modo que $f'(0) = 5$.
El valor de la función en $x = 0$, $f(0) = -2$.

Como la aproximación lineal es $f(0{,}01) = f(0) + f'(0) \cdot (0{,}01 - 0)$, se obtiene:

$$f(0{,}01) = -2 + 5 \cdot 0{,}01 = -1{,}95$$

Con la calculadora se obtiene 5 · sen (0,01) − 2 cos² (0,01) = −1,9498008... Por tanto, la aproximación es muy buena.

44 a 52. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica

53. Calcula la derivada, por definición, de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x$ en $x = 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ en $x = -1$

c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ en $x = 4$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(1+h)^2 - 4(1+h) - (-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(3h+2)}{h} = 2$

b) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{h+2} - \frac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{2h(h+2)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(h+2)} = -\dfrac{1}{4}$

c) $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+2h} - 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{9+2h} - 3\right)\left(\sqrt{9+2h} + 3\right)}{h\left(\sqrt{9+2h} + 3\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h\left(\sqrt{9+2h} + 3\right)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{9+2h} + 3} = \dfrac{1}{3}$

54. Si la recta tangente $y = f(x)$ en el punto $A(5,3)$ pasa por el punto $(0,1)$, calcula $f'(5)$.

La derivada $f'(5)$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(5,3)$ y $(0,1)$, es decir: $f'(5) = \dfrac{3-1}{5-0} = \dfrac{2}{5}$.

55. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en el punto indicado.

a) $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $x = 0$

a) La pendiente de la recta tangente es $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2 + 1 - 10}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(h+6)}{h} = 6$.

El punto de tangencia es $A(3, f(3)) = A(3,10)$.

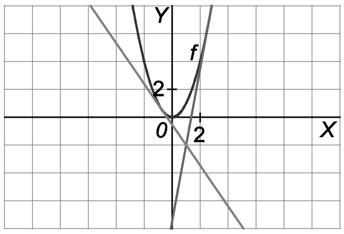
La recta tangente es $y - f(3) = f'(3)(x-3)$, o sea: $y - 10 = 6(x-3)$, es decir, $y = 6x - 8$

b) La pendiente de la recta tangente es: $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{h+1} - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{h(h+1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{h+1} = -1$

El punto de tangencia es $C(0, f(0)) = C(0,1)$.

La recta tangente es $y - f(0) = f'(0)(x-0)$, o sea: $y - 1 = -x$, es decir, $y = -x + 1$

56. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = x^2$ trazadas desde el punto $P(1,-2)$. Representa gráficamente la parábola y las dos tangentes obtenidas.



La pendiente de la recta tangente en el punto $A(a,a^2)$ es $f'(a) = 2a$.

La ecuación de la recta tangente a la parábola en ese punto es $y - a^2 = 2a(x-a)$,

es decir, $y = 2ax - a^2$.

Si queremos que pase por el punto $P(1,-2)$, debe ser $-2 = 2a - a^2$, cuyas soluciones son $a = 1+\sqrt{3}$ y $a = 1-\sqrt{3}$, y las tangentes buscadas son:

$$y = 2\left(1+\sqrt{3}\right)x - 2\left(2+\sqrt{3}\right) \qquad y = 2\left(1-\sqrt{3}\right)x - 2\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Continuidad y derivabilidad

57. Si existen, halla las derivadas laterales en $x = 1$ y decide si las siguientes funciones son derivables en dicho punto.

a) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \le 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) $f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h-1)^3 - 0^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 = 0$

$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h-1)^2 - 0^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$

Como las derivadas laterales en $x = 1$ coinciden, la función es derivable en ese punto y $f'(1) = 0$.

b) $f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1+h^2+2h-1}{h} =$

$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} (h+2) = 2$

$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(1+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1+2h}{h} =$

$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{h}+\frac{2h}{h}}{\frac{h}{h}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{h}+2}{1} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{h}+2}{1} = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h}+2\right) = +\infty$

La función no es derivable en $x = 1$. Se observa que ni siquiera es continua en $x = 1$.

58. A Rocío le han pedido que calcule, si existe, $f'(3)$, siendo *f* la función $f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{si } x<3 \\ x^2-5x & \text{si } x>3 \end{cases}$.

Ella trabaja así: calcula la derivada de la función para valores distintos de 3, esto es, $f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<3 \\ 2x-5 & \text{si } x>3 \end{cases}$. Concluye, que como $\lim\limits_{x\to 3^-} f'(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f'(x)=2\cdot 3-5=1$, entonces, $f'(3)=1$.

¿Dónde está el error de Rocío?

El error de Rocío consiste en que se ha saltado el primer paso: estudiar la continuidad de la función en $x = 3$. Su método solo sería válido si la función fuera continua en $x = 3$.

Como se observa, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-6$, lo cual indica que la función no es continua en $x = 3$ y, por tanto, no es derivable en $x = 3$. Además, no existe $f(3)$.

¡El primer paso para estudiar la derivabilidad es asegurarse de la continuidad!

59. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+a & \text{si } x\le 0 \\ x^2+bx+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Halla los valores de *a* y *b* para que sea continua y derivable en todo su dominio.

Como los polinomios son funciones continuas, solo falta estudiar qué ocurre en el valor $x = 0$.

Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales en ese punto deben ser iguales y coincidir con el valor de la función:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2x^2-3x+a\right)=a,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+bx+1\right)=1,\quad f(0)=a$$

Igualando los límites laterales se obtiene que para que *f* sea continua en $x = 0$ debe ser $a = 1$.

La función es, por tanto: $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+1 & \text{si } x\le 0 \\ x^2+bx+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

Como también ha de ser derivable en $x = 0$, las derivadas laterales en dicho punto deben ser iguales:

La derivada de la función para *x* distinto de 0 es: $f'(x)=\begin{cases} 4x-3 & \text{si } x<0 \\ 2x+b & \text{si } x>0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(4x-3)=-3 \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+b)=b$$

Por tanto, para que *f* sea derivable en $x = 0$ debe ser $b = -3$.

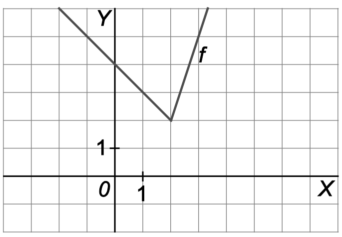
Respondemos: $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, si $a = 1$ y $b = -3$.

60. Calcula las derivadas laterales de la función $f(x)=|2x-4|+x$ en el punto $x = 2$. ¿Es la función derivable en dicho punto? Esboza su gráfica.

$$f(x)=\begin{cases} -(2x-4)+x & \text{si } x<2 \\ 2x-4+x & \text{si } x\ge 2 \end{cases}=\begin{cases} 4-x & \text{si } x<2 \\ 3x-4 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4-(2+h)-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3(2+h)-4-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3h}{h}=3$$



Al no coincidir las derivadas laterales, la función no es derivable en $x = 2$.

61. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 1 \\ x-1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

Como la función es polinómica en el interior de los tramos de definición, basta estudiar qué sucede en $x = 1$.

Continuidad en $x = 1$: Se estudian los límites laterales en dicho punto y el valor de la función.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2-1) = 0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0$, $f(1) = 0$

La función es continua en $x = 1$, ya que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Derivabilidad en $x = 1$: La derivada de la función para x distinto de 1 es $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$.

Las derivadas laterales en $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$

Como $\lim_{x\to 1^-} f'(x) \ne \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, la función f no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, la función es continua, pero no derivable en $x = 1$.

62. Determina los valores que han de tomar *a* y *b* para que $f(x)=\begin{cases} -x^2+ax-7 & \text{si } x<1 \\ 4x-b & \text{si } x\ge 1\end{cases}$, sea derivable en $x = 1$.

Primero hay que asegurarse de la continuidad de f en $x = 1$. Los límites laterales en dicho punto y el valor de la función han de coincidir:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x^2+ax-7) = a-8$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (4x-b) = 4-b$, $f(1) = 4-b$

Así pues, debe cumplirse que $a - 8 = 4 - b$.

La derivada de la función para x distinto de 1 es: $f'(x)=\begin{cases} -2x+a & \text{si } x<1 \\ 4 & \text{si } x>1\end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-2x+a) = -2+a$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 4 = 4$

Así pues, para que f sea derivable en $x = 1$ debe ser $-2 + a = 4 \Rightarrow a = 6$.

Y ya podemos calcular b, $a - 8 = 4 - b \Rightarrow 6 - 8 = 4 - b \Rightarrow b = 6$

Para que f sea derivable en $x = 1$ debe cumplirse que $a = b = 6$.

63. Se sabe que la función $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5\end{cases}$, es derivable en el intervalo $(0,5)$ y además verifica que $f(0)=f(5)$. ¿Cuánto valen *a*, *b* y *c*?

En primer lugar, como $f(0)=f(5)$, $0 = c + 2$, es decir, $c = -2$. La función es $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ -2+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5\end{cases}$

Como debe ser continua en $x = 2$, los límites laterales en dicho punto deben ser iguales y además coincidir con el valor de la función:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(ax+bx^2\right)=2a+4b,\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(-2+\sqrt{x-1}\right)=-1,\ f(2)=-1$$

Así pues, para que *f* sea continua en $x = 2$, debe ser $2a + 4b = -1$.

Para que sea derivable en $x = 2$, las derivadas laterales en ese punto deben ser iguales.

La derivada de la función para *x* distinto de 2, 0 y 5 es: $f'(x)=\begin{cases} a+2bx & \text{si } 0\le x<2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } 2\le x\le 5\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(a+2bx)=a+4b$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2}$. Así pues, para que *f* sea derivable en $x = 2$ debe ser $a+4b=\dfrac{1}{2}$. Con las ecuaciones obtenidas se plantea un sistema y se resuelve:

$$\begin{cases} 2a+4b=-1 \\ a+4b=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+4b=-1 \\ -2a-8b=-1\end{cases} \Rightarrow -4b=-2 \Rightarrow b=\frac{1}{2}, a=\frac{1}{2}-4b=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

Para que la función *f* cumpla las condiciones del enunciado, $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$ y $c = -2$.

64. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<1 \\ cx & \text{si } x\ge 1\end{cases}$. Calcula *a*, *b* y *c* para que *f* sea derivable en $x = 1$, sabiendo que $f(0)=f(4)$.

La función debe ser continua, y para ello, los límites laterales en $x = 1$ han de ser iguales y coincidir con el valor de la función en el punto:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+ax+b\right)=1+a+b$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} cx=c$, $f(1)=c$. Entonces, $1 + a + b = c$.

Para que sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales tienen que ser iguales.

Las derivadas de la función para *x* distinto de 1 son: $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x<1 \\ c & \text{si } x>1\end{cases}$

Las derivadas laterales en $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+a)=2+a$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} c=c$

Como han de ser iguales, $a + 2 = c$ y, como $f(0)=f(4)$, debe ser $b = 4c$.

Con las tres ecuaciones se plantea un sistema:

$$\begin{cases} 1+a+b=c \\ a+2=c \\ b=4c\end{cases} \Rightarrow 1+c-2+4c=c \Rightarrow 4c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{4} \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=-\frac{7}{4}$$

Se cumplen las condiciones del enunciado para la función *f* si $a=-\dfrac{7}{4}$, $b = 1$, $c=\dfrac{1}{4}$.

Derivada de las operaciones con funciones

65. **Dadas $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 3x - 1$, calcula:**

a) $\left(f^2\right)'(x)$

b) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(x)$

c) $(2f - 3g)'(x)$

d) $\left(\dfrac{5}{g^2}\right)'(x)$

En primer lugar, $f'(x) = 2x + 2$ y $g'(x) = 3$

a) $\left(f^2\right)'(x) = 2f(x)f'(x) = 2\left(x^2 + 2x + 1\right)(2x + 2)$

b) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(x) = \dfrac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \dfrac{3\left(x^2 + 2x + 1\right) - (3x - 1)(2x + 2)}{\left(x^2 + 2x + 1\right)^2} = \dfrac{-3x^2 + 2x + 5}{\left(x^2 + 2x + 1\right)^2}$

c) $(2f - 3g)'(x) = 2f'(x) - 3g'(x) = 2(2x + 2) - 9 = 4x - 5$

d) $\left(\dfrac{5}{g^2}\right)'(x) = \dfrac{-10g'(x)}{(g(x))^3} = \dfrac{-30}{(3x - 1)^3}$

66. **Sabiendo que $f(2) = 1$; $f'(2) = 3$; $g(2) = 2$; $g'(2) = 5$ y $g'(1) = 0$, calcula:**

a) $(f \circ g)'(2)$

b) $\left(f^2 \circ g\right)'(2)$

c) $\left(\sqrt{g}\right)'(2)$

d) $(g \circ f)'(2)$

e) $\left(\dfrac{1}{f} \circ g\right)'(2)$

f) $\left(f^n\right)'(2)$

a) $(f \circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(2) \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$

b) $\left(f^2 \circ g\right)'(2) = 2f(g(2))f'(g(2))g'(2) = 2f(2) \cdot f'(2) \cdot 5 = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

c) $\left(\sqrt{g}\right)'(2) = \dfrac{g'(2)}{2\sqrt{g(2)}} = \dfrac{5}{2\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

d) $(g \circ f)'(2) = g'(f(2))f'(2) = g'(1) \cdot 3 = 0 \cdot 3 = 0$

e) $\left(\dfrac{1}{f} \circ g\right)'(2) = \left(\dfrac{1}{f}\right)'(g(2))g'(2) = -\dfrac{f'(g(2))}{(f(g(2)))^2}g'(2) = -\dfrac{f'(2)}{(f(2))^2} \cdot 5 = -\dfrac{3}{1^2} \cdot 5 = -15$

f) $\left(f^n\right)'(2) = nf^{n-1}(2)f'(2) = n \cdot 1^{n-1} \cdot 3 = 3n$

67. **Calcula aplicando la regla de la cadena las derivadas de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \left(\sqrt{x} + x\right)^5$

b) $f(x) = \left(\dfrac{x + 3}{x - 5}\right)^3$

a) $f'(x) = 5\left(\sqrt{x} + x\right)^4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)$

b) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x + 3}{x - 5}\right)^2\left(\dfrac{-8}{(x - 5)^2}\right) = -\dfrac{24(x + 3)^2}{(x - 5)^4}$

Derivada de las funciones elementales

68. ¿Para qué valores de x se anula la derivada de $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2-5x$?

La derivada es $f'(x)=x^2-4x-5$. Para hallar los valores de x que la anulan, se iguala a 0 y se resuelve la ecuación:

$x^2-4x-5=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm 6}{2} \Rightarrow x=-1, x=5$. Por tanto, la derivada de f se anula si $x=-1$ o $x=5$.

69. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$ **b)** $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ **c)** $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ **d)** $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

a) $f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$

b) $f'(x)=\frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}=\frac{1}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}$

c) $f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

d) $f'(x)=\frac{\frac{x-(x+1)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x}}}=\frac{-1}{2x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}}$

70. Calcula la derivada de estas funciones (te será útil manejar las propiedades de los logaritmos).

a) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ **c)** $f(x)=\sqrt{\ln x}$

b) $f(x)=\ln x^2$ **d)** $f(x)=\ln\left[(x+5)(2x-1)^2\right]$

a) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\ln 1-\ln x=-\ln x \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x}$

c) $f(x)=\sqrt{\ln x}=\frac{1}{2}\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2x}$

b) $f(x)=\ln(x^2)=2\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x}$

d) $f(x)=\ln(x+5)+2\ln(2x-1) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+5}+\frac{4}{2x-1}$

71. Se considera la función $f(x)=ax^3+b\ln x$, siendo *a* y *b* parámetros reales. Determina los valores de *a* y *b* sabiendo que $f(1)=2$ y que $f'(1)$ se anula.

Como $f(1)=2$, $2=a\cdot 1^3+b\ln 1=a$. Por tanto, $a=2$, y la función es $f(x)=2x^3+b\ln x$.

La derivada es $f'(x)=6x^2+\frac{b}{x}$, y como se anula en $x=1$, $0=f'(1)=6\cdot 1^2+b$. Por tanto, $b=-6$.

Para que se cumplan las condiciones, los valores de a y b han de ser $a=2$ y $b=-6$.

72. Calcula $f'(-0{,}5)$ siendo f la función dada por:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 53x + 150, \ (x \neq 0)$$

La función derivada es $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} - 53$, y entonces, $f'(-0{,}5) = 2\cdot(-0{,}5) - \frac{2}{(-0{,}5)^3} - 53 = -1 + 16 - 53 = -38$.

73. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{x}{6} - 8x^2 + \frac{1}{x}$

b) $f(x) = xe^{3x}$

c) $f(x) = x(5 - x^2)^4$

d) $f(x) = \frac{x^3}{4} - 8$

e) $f(x) = e^{x^3}$

f) $f(x) = x^2 - e^x$

g) $f(x) = \frac{3}{(2x-5)^2} + \ln(1-x)$

h) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

i) $f(x) = 5\sqrt{\ln x}$

j) $f(x) = \frac{x^2}{3x^2+1}$

k) $f(x) = \frac{6 - x^5}{x^6}$

l) $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$

m) $f(x) = \sqrt{x^3}$

n) $f(x) = \frac{e^x}{x^3+1}$

a) $f'(x) = \frac{1}{6} - 16x - \frac{1}{x^2}$

b) $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = e^{3x}(1+3x)$

c) $f'(x) = (5-x^2)^3(5-9x^2)$

d) $f'(x) = \frac{3x^2}{4}$

e) $f'(x) = 3x^2e^{x^3}$

f) $f'(x) = 2x - e^x$

g) $f'(x) = \frac{-12}{(2x-5)^3} - \frac{1}{1-x}$

h) $f'(x) = \frac{\ln x - x\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

i) $f'(x) = \frac{5}{2x\sqrt{\ln x}}$

j) $f'(x) = \frac{2x(3x^2+1) - x^2 6x}{(3x^2+1)^2} = \frac{2x}{(3x^2+1)^2}$

k) $f(x) = \frac{6}{x^6} - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{36}{x^7} + \frac{1}{x^2}$

l) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

m) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

n) $f'(x) = \frac{e^x(x^3+1) - 3x^2e^x}{(x^3+1)^2} = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 + 1)}{(x^3+1)^2}$

74. Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = e^{7x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{e^x}$

c) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+x^2}$

d) $f(x) = \ln\left[x\left(1+3x^2\right)\right]$

e) $f(x) = e^{x^2} \cdot e^{-3x} \cdot e^2$

f) $f(x) = \dfrac{e^{2x}+e^{3x}}{e^x+1}$

g) $f(x) = 2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}$

h) $f(x) = e^{-x} \cdot \ln x$

a) $f'(x) = 7e^{7x-1}$

b) $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}} = \dfrac{\sqrt{e^x}}{2}$

c) $f'(x) = \dfrac{e^{3x}3\left(1+x^2\right) - e^{3x}2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{e^{3x}\left(3x^2-2x+3\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$

d) $f(x) = \ln\left[x\left(1+3x^2\right)\right] = \ln\left(x+3x^3\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1+9x^2}{x+3x^3}$

e) $f(x) = e^{x^2}e^{-3x}e^2 = e^{x^2-3x+2} \Rightarrow f'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x+2}$

f) $f(x) = \dfrac{e^{2x}+e^{3x}}{e^x+1} = \dfrac{e^{2x}\left(1+e^x\right)}{e^x+1} = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}$

g) $f'(x) = 5 \cdot 2^{5x} \cdot \ln 2 - \dfrac{2}{x^3}$

h) $f'(x) = -e^{-x}\ln x + e^{-x}\dfrac{1}{x} = e^{-x}\left(-\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

75. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \text{sen}\left(3x^2 - 5x + 1\right)$

b) $f(x) = \text{sen}\,x \cdot \cos x$

c) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,x + \cos x}{\text{sen}\,x - \cos x}$

d) $f(x) = \dfrac{\cos x^3}{1 + x^2}$

e) $f(x) = x\,\text{tg}(3x + 2)$

f) $f(x) = \cos^3\left(e^x - 5x^2\right)$

g) $f(x) = e^{\text{sen}\,x}$

h) $f(x) = \ln\left(\cos x^2\right)$

i) $f(x) = \dfrac{\text{arctg}\,x}{\text{arctg}\,x + 1}$

j) $f(x) = \text{arcsen}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

k) $f(x) = \arccos\sqrt{2x + 5}$

l) $f(x) = \text{arctg}\left(x^2 - 2x + 1\right)$

a) $f'(x) = (6x - 5)\cos\left(3x^2 - 5x + 1\right)$

b) $f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \text{sen}\,x \cdot (-\text{sen}\,x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos 2x$

c) $f'(x) = \dfrac{(\cos x - \text{sen}\,x)(\text{sen}\,x - \cos x) - (\text{sen}\,x + \cos x)(\cos x + \text{sen}\,x)}{(\text{sen}\,x - \cos x)^2} = \dfrac{-2}{(\text{sen}\,x - \cos x)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cos x^3 \cdot \left(1 + x^2\right) - 2x\cos x^3}{\left(1 + x^2\right)^2}$

e) $f'(x) = \text{tg}(3x + 2) + 3x\left(1 + \text{tg}^2(3x + 2)\right)$

f) $f'(x) = 3\cos^2\left(e^x - 5x^2\right)\left[-\text{sen}\left(e^x - 5x^2\right)\right]\left(e^x - 10x\right)$

g) $f'(x) = \cos x \cdot e^{\text{sen}\,x}$

h) $f'(x) = \dfrac{-2x\text{sen}\,x^2}{\cos x^2}$

i) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{1 + x^2}(\text{arctg}\,x + 1) - \text{arctg}\,x \cdot \dfrac{1}{1 + x^2}}{(\text{arctg}\,x + 1)^2} = \dfrac{1}{\left(1 + x^2\right)(\text{arctg}\,x + 1)^2}$

j) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2}} \cdot \dfrac{-1}{x^2}$

k) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - (2x + 5)}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2x + 5}}$

l) $f'(x) = \dfrac{2x - 2}{1 + \left(x^2 - 2x + 1\right)^2}$

76. Determina $g'(3)$ siendo $g(x) = 2xe^{3x-1}$.

La función derivada es $g'(x) = 2e^{3x-1} + 6xe^{3x-1}$ y entonces, $g'(3) = 2e^8 + 18e^8 = 20e^8$.

77. Calcula la ecuación de la recta tangente en $x = -1$ a la función $f(x) = x^3 - 3x^2$.

La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 6x$, y la pendiente de la recta tangente es $f'(-1) = 9$.

El punto de tangencia es $A(-1, f(-1)) = A(-1, -4)$.

Así pues, la recta tangente es $y - f(1) = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow y - (-4) = 9(x+1) \Rightarrow y = 9x + 5$.

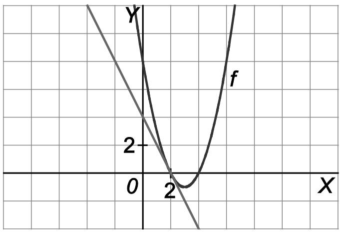
78. Dibuja la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

a) ¿En qué punto de la gráfica la tangente es horizontal?

b) Halla la ecuación de la tangente a *f* en el punto $P(2,0)$.

a) Para que la tangente sea paralela al eje de abscisas, su pendiente tiene que ser 0. Como la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en el punto de tangencia, hay que encontrar el valor de *x* que anula la primera derivada, $f'(x) = 2x - 6$, que se anula si $x = 3$.

Entonces, el punto $A(3, f(3)) = A(3, -1)$ es el punto de la parábola cuya tangente es paralela al eje de abscisas (coincide con su vértice).



b) La recta pedida tiene por ecuación $y - 0 = f'(2)(x - 2)$, es decir, $y = -2(x - 2)$.

Por tanto, $y = -2x + 4$.

79. Dada la función $f(x) = ax + b + \frac{3}{x}$, calcula *a* y *b* de manera que la gráfica de f pase por el punto $A(3,4)$ y tenga tangente horizontal en dicho punto.

$f(3) = 4 \Rightarrow 3a + b + 1 = 4$

Además, $f'(3)$ debe ser 0 y, como la derivada es $f'(x) = a - \frac{3}{x^2}$, entonces, $a - \frac{1}{3} = 0$. Despejando, $a = \frac{1}{3}$.

Al sustituir el valor de *a* en la primera ecuación se obtiene que $3 \cdot \frac{1}{3} + b + 1 = 4 \Rightarrow b = 2$.

Por tanto, $a = \frac{1}{3}$ y $b = 2$.

80. ¿Para qué valores de *x* se anula la derivada de las siguientes funciones?

a) $f(x) = 5x - 3$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$

c) $f(x) = e^{2x}$

d) $f(x) = \ln(3x+7)$

e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

g) $f(x) = e^{x^2-6x}$

h) $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x\right)$

a) $f'(x) = 5$. No se anula para ningún valor de *x*.

b) $f'(x) = \dfrac{2(x+3) - 2x}{(x+3)^2} = \dfrac{6}{(x+3)^2}$. No se anula para ningún valor de *x*.

c) $f'(x) = 2e^{2x}$. No se anula para ningún valor de *x*.

d) $f'(x) = \dfrac{3}{3x+7}$. No se anula para ningún valor de *x*.

e) $f'(x) = 6x - 5$. $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{6}$.

f) $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = -2$

g) $f'(x) = (2x - 6)e^{x^2-6x}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$.

h) $f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x}$. $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$, pero $x = 1$ no pertenece al $D(f) = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$, luego $f'(x)$ no se anula para ningún valor de $x \in D(f)$.

81. Halla los valores de *a* y *b* para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto $(1{,}5)$ sea la recta $y = 3x + 2$.

Se sabe que $f'(1) = 3$ porque es la pendiente de su recta tangente.

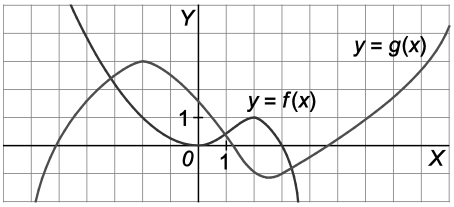
Como $f'(x) = 2ax$, entonces, $3 = f'(1) = 2a$, de donde $a = \dfrac{3}{2}$.

La función es $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - b$.

También se sabe que el punto (1, 5) pertenece a la gráfica de dicha función, por tanto, $f(1) = 5$, $5 = f(1) = \dfrac{3}{2} - b$ y entonces, $b = \dfrac{3}{2} - 5 = -\dfrac{7}{2}$.

Por tanto, $a = \dfrac{3}{2}$ y $b = -\dfrac{7}{2}$.

82. Considera la función $h(x) = f(x)g(x)$ donde las gráficas de *f* y *g* son las que se dan a continuación.



I. **a)** Calcula $h(-2)$ y $h(3)$.

b) Calcula aproximadamente $f'(-2)$, $f'(3)$, $g'(-2)$ y $g'(3)$.

c) Calcula aproximadamente $h'(-2)$ y $h'(3)$.

II. Con las mismas gráficas del apartado anterior, sea $c(x) = f[g(x)]$.

a) Calcula $c(-2)$ y $c(3)$.

b) ¿Es $c'(-3)$ positivo, negativo o cero? ¿Y $c'(-1)$? Explica en cada caso, cómo puedes saberlo.

I. **a)** $h(-2) = f(-2)g(-2) = 1 \cdot 3 = 3$

$h(3) = f(3)g(3) = 0 \cdot g(3) = 0$

b) Imaginándose las rectas tangentes y estimando su pendiente:

$f'(-2) = -1$, $f'(3) = -2$, $g'(-2) = 0$ y $g'(3) = \frac{1}{2}$

c) $h'(-2) = f'(-2)g(-2) + f(-2)g'(-2) = -1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = -3$

$h'(3) = f'(3)g(3) + f(3)g'(3) = -2 \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2$

II. **a)** $c(-2) = f(g(-2)) = f(3) = 0$

$c(3) = f(g(3)) = f(-1) = \frac{1}{4}$

b) $c'(-3) = f'(g(-3))g'(-3) = f'(2{,}5)g'(-3)$

$f'(2{,}5)$ es negativo (la tangente tiene pendiente negativa en ese punto), y $g'(-3)$ es positivo.

Luego $c'(-3)$ es negativo $(- \cdot + = -)$.

$c'(-1) = f'(g(-1))g'(-1) = f'(2{,}5)g'(-1)$

Como $f'(2{,}5) < 0$ y $g'(-1) < 0$, entonces $c'(-1) > 0$.

83. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2}{a-bx}$, siendo a y b parámetros reales. Determina los valores de los parámetros a y b para los que $f(2)=-4$, y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=6$ sea horizontal.

$f(2)=-4 \Rightarrow \dfrac{4}{a-2b}=-4 \Rightarrow a-2b=-1$

La derivada de la función es $f'(x)=\dfrac{2x(a-bx)+bx^2}{(a-bx)^2}$.

Como se sabe que $f'(6)=0$, entonces: $0=f'(6)=\dfrac{12(a-6b)+36b}{(a-6b)^2} \Rightarrow 12a-36b=0 \Rightarrow a-3b=0$.

Se resuelve el sistema obtenido: $\begin{cases} a-2b=-1 \\ a-3b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2b=-1 \\ -a+3b=0 \end{cases} \Rightarrow b=-1, a=3b=3\cdot(-1)=-3$

Por tanto, $a=-3$ y $b=-1$.

Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

84. Determina los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=3x^4-6x^2$.

La derivada es $f'(x)=12x^3-12x=12x(x^2-1)=12x(x-1)(x+1)$ y se anula en $x=0$, $x=1$ y $x=-1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
Signo de f'	$-$	$=0$	$+$	$=0$	$-$	$=0$	$+$
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función tiene mínimos relativos, que también son absolutos en los puntos $A(-1,-3)$ y $B(1,-3)$ tiene un máximo relativo en el punto $C(0,0)$

85. Estudia el crecimiento y los extremos relativos de:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ **g)** $f(x)=2x+\dfrac{1}{2x}$

b) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ **e)** $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ **h)** $f(x)=\dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1}$

c) $f(x)=e^{1-x^2}$ **f)** $f(x)=x^3(x+2)$ **i)** $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$

En todos los casos hay que estudiar para qué valores se anula la derivada y el signo de la misma en los intervalos definidos por dichos puntos y los que no pertenezcan al dominio.

a) El dominio de $f(x)$ es $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$. La derivada es $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$. Es siempre positiva, por lo que la función es creciente en todo su dominio y no tiene extremos relativos.

b) El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}$.

Su derivada es $f'(x)=\dfrac{2(x+1)e^x-(x+1)^2e^x}{e^{2x}}=\dfrac{(x+1)e^x(2-(x+1))}{e^{2x}}=\dfrac{(x+1)(1-x)e^x}{e^{2x}}$, que se anula si $(x+1)(1-x)e^x=0 \Rightarrow x=-1, x=1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
Signo de f'	$-$	$=0$	$+$	$=0$	$-$
Comportamiento de *f*	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y creciente en $(-1,1)$.

Tiene un mínimo relativo, que es también absoluto, en $A(-1,0)$, y tiene un máximo relativo en $B\left(1,\dfrac{4}{e}\right)$.

c) El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}$. Su derivada es $f'(x)=-2xe^{1-x^2}$, que se anula si $x=0$. Para valores negativos, la derivada es positiva, la función crece, y para valores positivos, la derivada es negativa, la función decrece. Por tanto, la función es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$.

Tiene un máximo relativo, que también es absoluto, en el punto $A(0,e)$.

d) El dominio de $f(x)$ es $(0,+\infty)$. Su derivada, $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, se anula si $1-\ln x=0$, es decir, si $x=e$.

A la izquierda de e, la derivada es positiva y a la derecha es negativa. Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(0,e)$ y decreciente en $(e,+\infty)$. Tiene un máximo relativo, que también es absoluto, en el punto $A\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$.

e) El dominio de $f(x)$ es $D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$. Su derivada es $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-2)^3}$, que no se anula nunca. Por tanto, la función no tiene extremos relativos.

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
Signo de f'	$+$	$\notin D(f')$	$-$
Comportamiento de *f*	Creciente	Asíntota vertical	Decreciente

La función crece en $(-\infty,2)$ y decrece en $(2,+\infty)$. La recta $x=2$ es una asíntota vertical.

f) El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}$. Su derivada es $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3)$ y se anula si $x = 0$ o si $x = -\frac{3}{2}$.

x	$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
Signo de *f '*	$-$	$= 0$	$+$	$= 0$	$+$
Comportamiento de *f*	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente		Creciente

La función es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Tiene un mínimo en $A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$.

g) El dominio de $f(x)$ es $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Su derivada es $f'(x) = 2 - \frac{1}{2x^2}$ y se anula si $x = -\frac{1}{2}$ o si $x = \frac{1}{2}$.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
Signo de *f '*	$+$	$= 0$	$-$	$\notin D(f')$	$-$	$= 0$	$+$
Comportamiento de *f*	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Asíntota vertical	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función es creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Tiene un máximo relativo en el punto $A\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ y un mínimo relativo en $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

h) El dominio de $f(x)$ es $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. $f'(x) = \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2}$ y se anula si $x = 0$ o $x = -2$.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
Signo de *f '*	$-$	$= 0$	$+$	$\notin D(f')$	$+$	$= 0$	$-$	$\notin D(f)$	$-$
Comportamiento de *f*	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Asíntota vertical	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Disc. evitable	Decreciente

La función es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ y creciente en $(-2, -1) \cup (-1, 0)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $A(-2, 4)$ y un máximo relativo en el punto $B(0, 0)$. En el punto $x = 1$ hay una discontinuidad evitable porque $\lim_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$. La recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

i) El dominio de $f(x)$ es $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Se expresa como función definida a trozos a trozos y su derivada es,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

, que no está definida para $x = 0$, ya que $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\frac{1}{2}$ y $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2}$.

Además, si $x \neq 0$, $f'(x)$ no se anula; por tanto, no tiene extremos con tangente horizontal.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
Signo de *f '*	$-$	$\notin D(f')$	$+$	$\notin D(f)$	$+$
Comportamiento de *f*	Decreciente	Punto anguloso	Creciente	Asíntota vertical	Creciente

La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. En $x = 0$ hay un punto anguloso que es un mínimo relativo. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

86. Determina dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + a$. Calcula el valor de *a* para que el valor mínimo de la función sea 5.

La derivada de la función es $f'(x) = 6x - 6$, que se anula si $x = 1$. Como la función es una parábola cóncava hacia arriba (el coeficiente de x^2 es positivo), en $x = 1$ se encuentra su vértice, que es, por tanto, un mínimo absoluto, $V(1, f(1))$, que ha de cumplir que $f(1) = 5$; entonces, $3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + a = 5$ y, por tanto, $a = 8$.

87. *Halla los extremos relativos de $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^{-x}}$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$. Su derivada es $f'(x) = \dfrac{(x+1)(3+x)}{e^{-x}}$, y se anula si $x = -1$ o si $x = -3$.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
Signo de f'	$+$	$= 0$	$-$	$= 0$	$+$
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función tiene un máximo relativo, en el punto $A(-3, f(-3)) = A\left(-3, \dfrac{4}{e^3}\right)$. Obsérvese que la función *f* no es negativa nunca. Tiene un mínimo relativo, que también es absoluto, en el punto $B(-1, f(-1)) = B(-1, 0)$.

88. Para cada *h* se considera la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + h$.

a) Halla los puntos en los que *f* alcanza sus valores máximos y mínimos.

b) Encuentra *h* para que el valor de *f* en el mínimo local hallado antes sea 0.

a) La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ y se anula si $x = 0$ o $x = 1$.

La segunda derivada es $f''(x) = 12x - 6$.

Como $f''(0) = -6 < 0$, el punto $A(0, h)$ es un máximo relativo.

Como $f''(1) = 6 > 0$, el punto $B(1, -1 + h)$ es un mínimo relativo.

b) Para que $-1 + h = 0$, debe cumplirse que $h = 1$.

89. De dos funciones, f y g, se sabe que la representación gráfica de sus funciones derivadas es una recta que pasa por los puntos de $A(0,2)$ y $B(2,0)$, en el caso de f', y una parábola que corta al eje X en $O(0,0)$ y $C(4,0)$ y tiene por vértice $V(2,1)$, en el caso de g'. Utilizando las gráficas de tales derivadas:

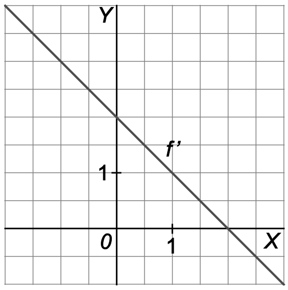
a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y g.

b) Determina, si existen, los máximos y mínimos de f y g.

a) La derivada de f es la recta de la gráfica.

Se observa que $f'(x) > 0$ si $x < 2$ y $f'(x) < 0$ si $x > 2$.

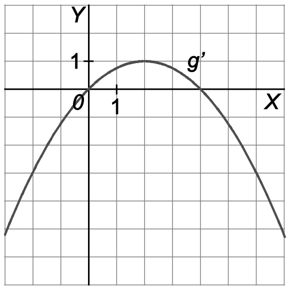
Así pues, la función f es creciente en $(-\infty,2)$ y decreciente en $(2,+\infty)$.



La derivada de g es la parábola cóncava hacia abajo de la gráfica.

Se observa que $g'(x) < 0$ si $x < 0$ o si $x > 4$ y $g'(x) > 0$ si $0 < x < 4$.

Así pues, la función g es decreciente en $(-\infty,0) \cup (4,+\infty)$ y creciente en $(0,4)$.



b) La función f tiene un máximo relativo (que también es absoluto) en el punto $A(2,f(2))$ y no tiene mínimos.

La función g tiene un mínimo relativo en el punto $B(0,g(0))$ y un máximo relativo en el punto $C(4,g(4))$.

Problemas de optimización

90. En cada caso, averigua razonadamente dónde alcanza el máximo absoluto la función dada.

a) $f(x) = 2x + 4$ si $0 \le x \le 4$

b) $f(x) = x^2 - 4$ si $4 < x \le 8$

a) La derivada de f es $f'(x) = 2$, que no se anula nunca.

Como $f(0) = 4$ y $f(4) = 12$, el máximo absoluto se alcanza en el punto $A(4,12)$.

b) La derivada de f es $f'(x) = 2x$, que se anula si $x = 0$, pero no pertenece a (4, 8].

$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 12$ y $f(8) = 60$, el máximo absoluto se alcanza en el punto $B(8,60)$.

91. Una cadena de montaje está especializada en la producción de un modelo de motocicleta. Los costes de producción en euros, $C(x)$, se relacionan con el número de motocicletas fabricadas, x mediante la expresión:

$$C(x) = 10x^2 + 2000x + 250\,000$$

Si el precio de venta de cada motocicleta es de 8000 euros y se venden todas las fabricadas, se pide:

a) Define la función de ingresos que obtiene la cadena de montaje en función de las unidades vendidas.

b) ¿Qué función expresa los beneficios de la cadena?

c) ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán los mismos?

a) Ingresos: $I(x) = 8000x$

b) Beneficios = Ingresos − Costes:

$B(x) = I(x) - C(x) = 8000x - \left(10x^2 + 2000x + 250\,000\right) = -10x^2 + 6000x - 250\,000$

c) La función beneficios es una parábola cóncava hacia abajo cuyo máximo absoluto se encuentra en el vértice. Su derivada es $B'(x) = -20x + 6000$ y sea anula si $x = 300$. Fabricando 300 motocicletas se maximizan los beneficios que ascenderán a $B(300) = 650\,000$ euros.

92. En una planta depuradora de aguas residuales la expresión que determina el coste de funcionamiento anual en función de la cantidad de agua depurada es:

$$C(x) = 35x^2 - 140x + 2600$$

donde $C(x)$ son los costes expresados en euros y x es el volumen de agua depurada en un año en miles de metros cúbicos. Determina:

a) La cantidad de agua depurada que hace mínimo el coste.

b) El valor de dicho coste mínimo.

c) El coste de la depuración de agua de una localidad de 2000 habitantes, si cada uno genera al año 8 metros cúbicos de agua para depurar.

a) La función $C(x)$ es una parábola cóncava hacia arriba que tiene su mínimo absoluto en el vértice. Si derivamos, $C'(x) = 70x - 140$, e igualamos a cero, $C'(x) = 0 \Rightarrow 70x - 140 = 0 \Rightarrow$ $x = 2$. Con 2000 m^3 se minimiza el coste.

b) El coste mínimo son $C(2) = 2460$ euros.

c) En la ciudad se generan $8 \cdot 2000 = 16\,000$ m^3 de agua para depurar. El coste será $C(16) = 35 \cdot 16^2 - 140 \cdot 16 + 2600 = 9320$ euros.

93. En una empresa la relación entre la producción x (en miles de toneladas) y el coste medio de fabricación $C(x)$ (en miles de euros) es de la forma:

$$C(x) = 2 + x + \frac{9}{x} \quad 1 \le x \le 10$$

a) Calcula la cantidad de producción que minimiza el coste medio y cuál es dicho coste mínimo.

b) Calcula la cantidad de producción que maximiza el coste medio y cuál es dicho coste máximo.

c) Si no se desea superar los 12 mil euros de coste medio, ¿entre qué valores deberá estar comprendida la producción?

La función derivada es $C'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$, que se anula si $C'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$. (la solución negativa se descarta por la naturaleza del problema).

Comparamos:

$C(1) = 12 \qquad C(3) = 8 \qquad C(10) = 12{,}9$

a) El coste mínimo medio es de 8000 euros y se consigue con una producción de 3000 toneladas.

b) El coste máximo medio es de 12 900 euros y se consigue con una producción de 10 000 toneladas.

c) Debemos resolver esta inecuación $C(x) < 12 \Rightarrow 2 + x + \frac{9}{x} < 12 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 < 0 \Rightarrow x \in (1{,}9)$.

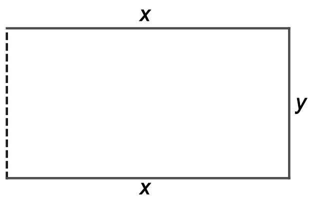
La producción debe moverse entre 1000 y 9000 toneladas.

94. Se quiere abrir un tragaluz de forma rectangular en el techo de un recinto cuya superficie sea de 162 m^2 y rematar la obra con un marco, de perfil de aluminio, de solo tres lados ya que uno de los lados del tragaluz da al exterior y no necesita marco.

a) ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo para emplear la mínima longitud posible de perfil de aluminio?

b) ¿Cuántos metros de perfil de aluminio son necesarios?

a) 1. Sea x la longitud en metros del tramo doble e y la longitud en metros del tramo que está enfrente del que no necesita marco como indica la figura.



2. La función coste que hay que minimizar es $L = 2x + y$.

3. Como la superficie de la ventana es de 162 m^2, x e y deben cumplir que $x \cdot y = 162 \Rightarrow y = \frac{162}{x}$.

Así se obtiene la función coste en función de una sola variable. $L(x) = 2x + \frac{162}{x}$.

4. La única restricción para x es que sea positiva.

5. Se calcula el mínimo de $L(x) = 2x + \frac{162}{x}$ en el intervalo $(0, +\infty)$. La derivada es $L'(x) = 2 - \frac{162}{x^2}$, que se anula si $2 - \frac{162}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 162 = 0 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$ (la solución negativa se descarta por la naturaleza del problema). Como a la izquierda de 9 la derivada es negativa, y a la derecha es positiva, el punto $A(9, L(9)) = A(9{,}36)$ es el mínimo.

Las dimensiones de la ventana de coste mínimo son 9 metros para los lados dobles y 18 metros el tramo único.

b) Se necesitan un total de $C(9) = 36$ metros de aluminio.

95. Nos dicen que la función $f(t) = t - 2$ es la derivada de la inflación en función del tiempo en un país, con $0 \le t \le 5$.

a) Determina el valor de *t* para el que la inflación alcanza el valor mínimo y halla el valor de ese mínimo.

b) Determina cuándo la inflación es máxima y su valor.

a) La derivada, $f(t) = t - 2$, se anula si $t = 2$. A la izquierda de 2 es negativa (la inflación decrece), y a la derecha de 2 es positiva (la inflación crece). En $t = 2$ se tiene la inflación mínima.

Dado que la función inflación tiene una expresión del tipo $F(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + C$, que es una parábola cóncava hacia arriba, se sabe que alcanza su mínimo absoluto en su vértice, que se encuentra en $t = 2$.

El valor que tiene en ese punto es $F(2) = \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 + C = -2 + C$.

b) Para hallar la inflación máxima hay que comparar el valor de *F* en los extremos del intervalo [0, 5]:

$F(0) = C$ $\qquad$ $F(5) = \frac{5^2}{2} - 2 \cdot 5 + C = \frac{5}{2} + C$

Está claro que $F(5) > F(0)$, así pues, la inflación máxima se alcanza para $t = 5$ y vale $\frac{5}{2} + C$.

96. Tenemos que invertir en un fondo de inversión una cantidad de dinero mayor o igual que 1000 € y menor o igual que 9000 €. El beneficio *B* que se obtiene depende de la cantidad invertida *x* de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{B(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 \le x < 4 \\ -x^2 + 10x - 21 & \text{si } 4 \le x \le 9 \end{cases}}$$

donde tanto *x* como *B* se expresan en miles de euros.

a) Estudia la continuidad de la función *B* en $(1,9)$.

b) ¿Para qué valores de $x \in [1,9]$ el beneficio positivo.?

c) Encuentra el máximo valor que alcanza el beneficio con $x \in [4,9]$

a) Como la función es polinómica en el interior de los tramos de definición, basta estudiar qué sucede en el punto de cambio $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4^-} B(x) = \lim_{x\to 4^-} (x-1) = 3 , \quad \lim_{x\to 4^+} B(x) = \lim_{x\to 4^+} (-x^2 + 10x - 21) = 3 , \quad B(4) = 3$$

Como los tres valores coinciden, concluimos que la función *B* es continua en el intervalo abierto $(1,9)$.

b) Debemos resolver la inecuación $B(x) > 0$:

1er tramo, [1, 4]: $B(x) > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$, luego el beneficio es positivo en el intervalo $(1,4]$.

2º tramo, [4, 9]: $B(x) > 0 \Rightarrow -x^2 + 10x - 21 > 0 \Rightarrow 3 < x < 7$, luego el beneficio es positivo en el intervalo $(4,7)$.

Así pues el beneficio es positivo en el intervalo $(1,7)$, o sea, si la inversión está entre 1000 y 7000 euros.

c) En el segundo la derivada es $B'(x) = -2x + 10$ si $x \in (4,9)$, que únicamente se anula en $x = 5$.

Comparamos:

$B(4) = 3$ $\qquad$ $B(5) = 4$ $\qquad$ $B(9) = -12$

El beneficio máximo en [4, 9] es de 4000 euros y se consigue invirtiendo 5000 euros.

97. Una fábrica de televisores vende cada aparato a 300 €. Los gastos de fabricar x televisores son $D(x) = 200x + x^2$, donde $0 \le x \le 80$.

a) Suponiendo que se venden todos los televisores que se fabrican, halla la función de los beneficios que se obtienen después de fabricar y vender x televisores.

b) Determina el número de aparatos que conviene fabricar para obtener el beneficio máximo, así como dicho beneficio máximo.

a) Beneficio = Ingresos − Gastos. Luego $B(x) = 300x - (200x + x^2)$ con $0 \le x \le 80$.

b) $B'(x) = 100 - 2x = 0$ si $x = 50$. Comparamos:

$B(0) = 0$ $\quad$ $B(50) = 2500$ $\quad$ $B(80) = 1600$

Los beneficios máximos son de 2500 € y se obtienen fabricando 50 televisores.

98. Una persona amante de las matemáticas desea donar sus 3600 libros a dos bibliotecas *A* y *B*. En las instrucciones de donación, deja fijado que los lotes de libros se hagan de modo que el producto del número de libros destinados a la biblioteca *A* por el cubo del número de libros destinados a la biblioteca *B* sea máximo. Determina la cantidad de libros recibida por cada biblioteca.

Si llamamos x al número de libros que hay en el lote destinado a B, entonces habrá 3600 − x libros en A y la función que debemos maximizar es $F(x) = (3600 - x)x^3 = -x^4 + 3600x^3$, en la que su variable x se mueve en el intervalo cerrado $[0,3600]$.

Su derivada es $F'(x) = -4x^3 + 10\,800x^2 = 4x^2(-x + 2700)$.

Dicha derivada se anula si $F'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2(-x + 2700) = 0 \Rightarrow x = 0$ o si $x = 2700$.

Comparamos:

$F(0) = 0$ $\quad$ $F(2700) > 0$ $\quad$ $F(3600) = 0$

Es claro que el máximo se consigue si $x = 2700$, por lo que la biblioteca A recibió 900 libros, y la B, 2700 libros.

Curvatura y puntos de inflexión

99. Estudia la curvatura y halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ **d)** $f(x)=x^3(x+2)$ **g)** $f(x)=\dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1}$

b) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ **e)** $f(x)=2x+\dfrac{1}{2x}$ **h)** $f(x)=e^{1-x^2}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ **f)** $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$ **i)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

a) $f''(x)=-\dfrac{4}{(x+1)^3}$ es positiva si $x<-1$, y negativa si $x>-1$. Por tanto, f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty,-1)$ y cóncava hacia abajo en $(-1,+\infty)$. En $x=-1$ tiene una asíntota vertical.

b) $f''(x)=\dfrac{(x+1)^2-4(x+1)+2}{e^x}=0\Rightarrow x=1-\sqrt{2}$ o $x=1+\sqrt{2}$. La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right)$. Son puntos de inflexión $A\left(1-\sqrt{2},f\left(1-\sqrt{2}\right)\right)=\left(1-\sqrt{2},\dfrac{6-4\sqrt{2}}{e^{1-\sqrt{2}}}\right)$ y $B\left(1+\sqrt{2},f\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=\left(1+\sqrt{2},\dfrac{6+4\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}}\right)$.

c) $f''(x)=\dfrac{6}{(x-2)^4}$ es siempre positiva. Es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}-\{2\}$. En $x=2$ hay una asíntota vertical.

d) $f''(x)=12x(x+1)=0\Rightarrow$ $x=0$ o $x=-1$. La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1,0)$. Tiene puntos de inflexión en $A(-1,-1)$ y en $B(0,0)$.

e) $f'(x)=\dfrac{1}{x^3}$. La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$ y cóncava hacia arriba en $(0,+\infty)$. En $x=0$ hay una asíntota vertical.

f) $f''(x)=\dfrac{2-x}{x^3}=0\Rightarrow$ $x=2$. La función es cóncava hacia arriba en $(0,2)$ y cóncava hacia abajo en $(2,+\infty)$.

Tiene un punto de inflexión en $A(2,f(2))=A\left(2,\dfrac{1}{2}+\ln 2\right)$.

g) $f''(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^3}$. Como $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$, se estudia el signo de la derivada segunda en $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ y $(1,+\infty)$. La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)$ y cóncava hacia abajo en $(-1,+\infty)-\{1\}$. En $x=-1$ tiene una asíntota vertical, y en $x=1$, una discontinuidad evitable.

h) $f'(x)=e^{1-x^2}\left(4x^2-2\right)=0\Rightarrow x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Son puntos de inflexión $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$ y $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$.

i) $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}=0\Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$. La función es cóncava hacia abajo en $\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $A\left(e^{\frac{3}{2}},f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)=A\left(e^{\frac{3}{2}},\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$.

100. Si $f''(x) = (x+1)(x-3)^2(x-7)$, determina la curvatura y la abscisa de los puntos de inflexión de $f(x)$.

La derivada segunda se anula en $x = -1$, $x = 3$ y $x = 7$.

Como $f''(x) < 0$ en $(-1,3) \cup (3,7)$ y $f''(x) > 0$ en $(-\infty,-1) \cup (7,+\infty)$, la función tiene dos puntos de inflexión: uno en el punto de abscisa $x = -1$ y otro en el punto de abscisa $x = 7$.

En $x = 3$ no hay un punto de inflexión, pues no hay cambio de curvatura.

101. a) Halla los puntos de inflexión de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

b) Halla la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión de abscisa positiva.

a) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\sqrt{3}$ o $x = \sqrt{3}$.

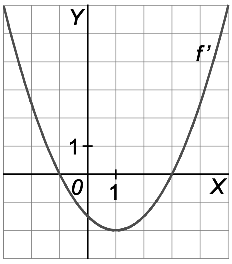
Como la derivada segunda es positiva en $\left(-\sqrt{3},0\right) \cup \left(\sqrt{3},+\infty\right)$ y negativa en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\sqrt{3}\right)$, la función tiene tres puntos de inflexión: $A\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0,0)$ y $C\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

b) Para hallar la recta tangente en $C\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ hay que calcular $f'\left(\sqrt{3}\right) = -\dfrac{1}{8}$.

La ecuación de la recta tangente es $y - f\left(\sqrt{3}\right) = f'\left(\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right) \Rightarrow y - \dfrac{\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{1}{8}\left(x-\sqrt{3}\right)$.

Por tanto, $y = -\dfrac{1}{8}x + \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

102. La gráfica que se muestra en la figura representa la derivada de cierta función $f(x)$.



A partir de ella, deduce los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, así como sus extremos relativos, su curvatura y sus puntos de inflexión.

La función derivada es positiva en $(-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$. Por tanto, es creciente en esos intervalos y es negativa en $(-1,3)$, donde la función es decreciente.

Como la derivada se anula en $x = -1$ y en $x = 3$, y en esos puntos cambia de signo, la función tiene un máximo para $x = -1$ y un mínimo para $x = 3$.

Además, la función derivada tiene un mínimo en $x = 1$, luego en ese valor se anula la derivada segunda. Como la función derivada decrece en $(-\infty,-1)$, la derivada segunda es negativa en ese intervalo y, por tanto, la función es cóncava hacia abajo en él. En $(1,+\infty)$, la función derivada es creciente, luego la derivada segunda es positiva en ese intervalo y, por tanto, la función es cóncava hacia arriba en él.

Dado que en $x = 1$ se anula la segunda derivada de la función y cambia su curvatura, tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$.

103. Demuestra que la función $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no tiene ningún punto de inflexión.

$y' = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \qquad y'' = 12x^2 - 6x + 2$

La derivada segunda no se anula, luego la curva no tiene ningún punto de inflexión.

104. Utiliza el criterio de la segunda derivada para hallar los máximos y mínimos relativos de estas funciones.

a) $f(x) = x^3(x-2)$ **b)** $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$

a) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0$ si $x = 0$ o $x = \frac{3}{2}$

Se halla $f''(x) = 12x^2 - 12x$ y se estudia su signo en $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$.

$f''(0) = 0$. Por tanto, no se puede afirmar si es o no un extremo relativo, tenemos que recurrir a estudiar el crecimiento de la función. Estudiamos el signo de la primera derivada a izquierda y derecha de $x = 0$, $f'(0^-)$ y $f'(0^+)$ son negativos. Entonces, en $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo.

$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 9 > 0 \Rightarrow A\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = A\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$ es un mínimo.

b) $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 0$ si $x = 2$ o $x = 3$. Se halla $f''(x) = 12x - 30$ y se estudia su signo en $x = 2$ y $x = 3$.

$f''(2) = -6 < 0 \Rightarrow$ la función tiene un máximo en $A(2, f(2)) = A(2,28)$.

$f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo en $B(3, f(3)) = B(3,27)$.

105. Halla los valores de *m* que hacen que la función $f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$ sea siempre cóncava hacia arriba.

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2mx + 3 \qquad f''(x) = 12x^2 + 24x + 2m$

La función es siempre cóncava hacia arriba si $f''(x) \geq 0$, es decir, si $12x^2 + 24x + 2m \geq 0 \Rightarrow 6x^2 + 12x + m \geq 0$, para lo cual, la ecuación $6x^2 + 12x + m = 0$ tiene como máximo una solución real, es decir, $144 - 24m \leq 0$.

Por tanto, $m \geq \frac{144}{24} = 6$.

Teoremas sobre funciones derivables

106. Determina cuántas veces corta al eje horizontal la gráfica de:

$$f(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 2$$

La función corta al eje horizontal al menos dos veces, pues $f(-10) > 0$, $f(0) < 0$, $f(10) > 0$ y f es continua.

Por otra parte, $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 10x = x(4x^2 - 3x + 10) = 0$ solo en $x = 0$, por lo que f se anula dos veces, ya que, según el teorema de Rolle, entre cada dos ceros de la función existe un punto donde se anula la derivada.

107. Sea $f(x)=(x+1)^3(x-2)^2+3$. Demuestra que la ecuación $f'(x)=0$ tiene alguna solución en $[-1,2]$.

La función es continua en $[-1,2]$ y derivable en $(-1,2)$.

Además, $f(-1)=f(2)=3$.

Por el teorema de Rolle, existe c en $(-1,2)$ $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=0$.

108. Aplicando el teorema de Rolle, justifica que la gráfica de la función $f(x)=3x^5+7x+1$ no puede cortar 2 veces al eje horizontal.

Si la función cortara dos veces al eje horizontal, en *a* y *b*, tendría que ocurrir que $f(a)=f(b)=0$ y, por el teorema de Rolle, la derivada de *f* se anularía entre *a* y *b*.

Se halla la derivada $f'(x)=15x^4+7$ y se comprueba que no se anula nunca.

Luego la función no puede cortar al eje horizontal dos veces.

109. Sin calcular la derivada, ¿puedes asegurar que existe algún punto de la gráfica de $f(x)=x^2-2x$ cuya tangente sea paralela a la recta que une los puntos $A(0,0)$ y $B(3,3)$?

Se trata de la interpretación geométrica del teorema del valor medio.

Como $f(0)=0$ y $f(3)=3$, se puede afirmar que existe un número *c* entre 0 y 3 con $f'(c)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{3-0}{3}=1$

El punto es aquel en el que la derivada vale 1: $f'(x)=2x-2=1$ si $x=\dfrac{3}{2}$.

Por tanto, el punto es $C\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{4}\right)$.

Aproximación lineal de una función. Diferencial

110. Sabiendo que $\ln 2 \simeq 0{,}69315$, obtén la aproximación lineal de la función $f(x) = \log_2 x$ en $x = 2$ y úsala para obtener los valores aproximados de $f(x)$ en $x = 2{,}01$; $x = 1{,}9$ y $x = 2{,}9$.

$f(x) = \log_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$. La aproximación lineal de una función $f(x)$ es: $f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)dx$.

En este caso, para cada valor pedido, $x = 2$ y dx es 0,01, –0,1 y 0,9, respectivamente.

$f(2) = 1$ $\qquad\qquad$ $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 2} \Rightarrow f'(2) = \dfrac{1}{2\cdot \ln 2}$

Entonces:

$$f(2{,}01) = 1 + \frac{1}{2\cdot \ln 2}\cdot 0{,}01 = 1 + \frac{0{,}01}{2\cdot 0{,}69315} = 1{,}00721$$

Con la calculadora se obtiene $\log_2 2{,}01 = 1{,}007195501$.

$$f(1{,}9) = 1 + \frac{1}{2\cdot \ln 2}\cdot(-0{,}1) = 1 - \frac{0{,}1}{2\cdot 0{,}69315} = 0{,}92786$$

Con la calculadora se obtiene $\log_2 1{,}9 = 0{,}925999418$.

$$f(2{,}9) = 1 + \frac{1}{2\cdot \ln 2}\cdot 0{,}9 = 1 + \frac{0{,}9}{2\cdot 0{,}69315} = 1{,}64921$$

Con la calculadora se obtiene $\log_2 2{,}9 = 1{,}5360529$.

Se aprecia que a medida que nos alejamos del 2, la aproximación lineal va siendo peor.

111. Obtén con la calculadora el valor de $\sqrt[5]{32{,}3}$ y, posteriormente, obtenlo también utilizando la aproximación lineal de la función mediante la diferencial.

Con la calculadora: $\sqrt[5]{32{,}3} = 2{,}003736$

Se considera la función $f(x) = \sqrt[5]{x}$. Su aproximación lineal es: $f\left(\sqrt[5]{32{,}3}\right) \simeq f(32) + f'(32)\cdot 0{,}3$.

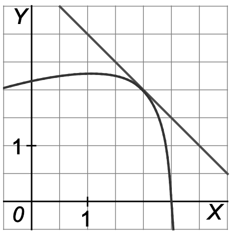
$f(32) = 2$ $\qquad\qquad$ $f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \Rightarrow f'(32) = \dfrac{1}{80}$

Entonces: $f\left(\sqrt[5]{32{,}3}\right) \simeq 2 + \dfrac{1}{80}\cdot 0{,}3 = 2{,}00375$, una aproximación bastante aceptable.

112. En el dibujo se muestra parte de la gráfica de cierta función f y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $A(2,2)$.

Se quieren calcular los valores de $f(2{,}05)$ y de $f(1{,}87)$ pero se desconoce la expresión analítica de la función f.

Ayudándote de la aproximación lineal y calculando previamente la ecuación de la recta tangente, estima los valores de $f(2{,}05)$ y de $f(1{,}87)$.



La recta tangente en el punto $A(2,2)$ es $x + y = 4$, es decir, $y = -x + 4$, cuya pendiente es –1, y, por tanto, sabemos que $f'(2) = -1$. Aplicamos la fórmula ya conocida y aproximamos $f(x)$ mediante: $f(x) \simeq L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

$$L(2{,}05) = f(2) + f'(2)\cdot(2{,}05-2) = 2 + (-1)\cdot(2{,}05-2) = 1{,}95 \simeq f(2{,}05)$$

$$L(1{,}87) = f(2) + f'(2)\cdot(1{,}87-2) = 2 + (-1)\cdot(1{,}87-2) = 2{,}13 \simeq f(1{,}87)$$

CUESTIONES

113. Si $f(x)g(x) = x^3 + 5x$, ¿puede existir algún punto en el que se anulen simultáneamente f' y g'?

$(f(x)g(x))' = 3x^2 + 5$, es decir, siempre es positiva.

Por otra parte $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Si hubiera algún valor *a* de *x* en el que se anularan simultáneamente $f'(x)$ y $g'(x)$, para ese valor *a*, sería $(f(a)g(a))' = 0$, contradicción con lo expresado arriba.

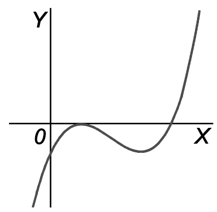
Así pues, no hay ningún punto en el que se anulen simultáneamente las derivadas de *f* y de *g*.

114. Justifica que si $c > 1$, la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3cx$ es creciente en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3c = 3\left(x^2 - 2x + c\right) = 3\left(x^2 - 2x + 1 + c - 1\right) = 3\left[(x-1)^2 + c - 1\right]$.

Si $c > 1$, $c - 1 > 0$, por lo que $f'(x) > 0$ con lo que *f* es creciente en $\mathbb{R}$.

115. Si la gráfica de $f'(x)$ es la de la figura, ¿cuántos máximos y mínimos presenta la gráfica de *f*?



La derivada se anula dos veces. En *a*, el menor de los dos, $f'(x)$ es negativa tanto a la izquierda como a la derecha de *a* por lo que *f* es decreciente en *a*. En el otro valor, *b*, $f'(x)$ es negativa a la izquierda, con lo que *f* es decreciente, y $f'(x)$ es positiva a la derecha, así que *f* presenta un mínimo relativo en *b*.

Es decir, *f* solo presenta un extremo: un mínimo relativo.

116. Justifica que para cualesquiera números reales *A* y *B* la función $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ cumple la ecuación $y'' + 2y' + y = 0$.

Si $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x} = e^{-x}(A + Bx)$

$y' = e^{-x}B + \left(-e^{-x}\right)(A + Bx) = e^{-x}(B - A - Bx)$

$y'' = e^{-x}(-B) - e^{-x}(B - A - Bx) = e^{-x}(-B - B + A + Bx) = e^{-x}(Bx + A - 2B)$

Así pues, $y'' + 2y' + y = e^{-x}(Bx + A - 2B) + 2e^{-x}(B - A - Bx) + e^{-x}(A + Bx) =$

$= e^{-x}(Bx + A - 2B + 2B - 2A - 2Bx + A + Bx) = e^{-x} \cdot 0 = 0$

117. ¿Para qué valores de *r* la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación $y'' + 2y' + y = 0$?

Si $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$, así que $y'' + 2y' + y = r^2r^{rx} + 2re^{rx} + e^{rx} = e^{rx}\left(r^2 + 2r + 1\right)$

Como $e^{rx} \neq 0$ sea cual fuere *r*, deberá ocurrir que $r^2 + 2r + 1 = 0$, es decir $r = -1$.

118. Usa la definición de derivada para calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=f'(1) \text{ si } f(x)=\ln x .$$

Así pues, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=f'(1)=1$.

119. Escribe una función polinómica de tercer grado que tenga un máximo y un mínimo, y otra que no tenga extremos relativos.

Para que tenga un máximo y un mínimo su derivada debe anularse dos veces.

Por ejemplo, $f'(x)=3x^2-3$ y $f(x)=x^3-3x$.

La derivada se anula para $x=-1$ y para $x=1$ y el signo de la derivada es:

Si $x<-1$, $f'(x)>0$. Si $-1<x<1$, $f'(x)<0$. Si $x>1$, $f'(x)>0$

Por lo tanto, $f(-1)$ es un máximo relativo y $f(1)$ es un mínimo relativo.

Para que no tenga extremos relativos su derivada no puede anularse nunca.

Por ejemplo, $f'(x)=3x^2+1$ y $f(x)=x^3+x$.

120. Justifica que si $f(x)=|x^2+x|$, entonces $f'(x)$ no es $|2x+1|$

La función $f(x)=|x^2+x|$, no es derivable ni en $x=0$, ni $x=-1$ pues $f(x)=|x^2+x|=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x<-1 \\ -x^2-x & \text{si } -1\le x\le 0 \\ x^2+x & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Así que es continua en $\mathbb{R}$ pero $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<-1 \\ -2x-1 & \text{si } -1<x<0 \\ 2x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$, por lo que no existe $f'(-1)$ pues:

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x)=\lim_{x\to -1^-}(2x+1)=-1\neq \lim_{x\to -1^+} f'(x)=\lim_{x\to -1^+}(-2x-1)=1$$

Análogamente, no existe $f'(0)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(-2x-1)=-1\neq \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+1)=1$$

En cambio, $g(x)=|2x+1|$ está definida en $\mathbb{R}$, en particular en $x=-1$ y en $x=0$.

121. Comprueba que la derivada de la función $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ no se anula nunca. ¿Se puede asegurar que *f* no presenta máximos ni mínimos en $\mathbb{R}$?

En primer lugar, asegurémonos de que la función es continua en $\mathbb{R}$.

Para eso basta estudiar la continuidad en $x = 0$, ya que en el interior de cada tramo, *f* sí es continua:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 = f(0) = e^0 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Por tanto, *f* es continua en $\mathbb{R}$. Su derivada, para valores diferentes de $x = 0$ es: $f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En $x = 0$ la función no es derivable ya que $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 \ne \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{-1}{(x+1)^2}\right) = -1.$

Así pues, $f'(x)$ no se anula nunca pues $f'(0)$ no existe y $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y negativa si $x > 0$.

Pero la afirmación anterior nos dice que *f* es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$, por lo que en el punto $A(0,1)$ presenta un máximo absoluto (aunque su tangente no sea horizontal).

122. ¿Es posible encontrar una función polinómica de tercer grado que no tenga ningún punto de inflexión?

Como al derivar dos veces una función polinómica de grado tres se obtiene un polinomio de grado uno, que se anula para algún valor de *x*, se puede afirmar que cualquier función de este tipo tiene siempre un punto de inflexión.

123. Halla el valor que debe tener el parámetro *a* para que sea derivable en todo $\mathbb{R}$ la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-ax+a}{x-1} & \text{si } x \ne 1 \\ 6 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Si *f* es derivable en $x = 1$, entonces debe ser continua en $x = 1$, es decir, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 6$.

Pero $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, por lo que no existe el límite. Así pues no hay ningún valor de *a* para el que *f* sea derivable en $\mathbb{R}$.

PROBLEMAS

124. El coste de producción de x unidades viene dado por la función $C(x) = 0{,}06x^2 - 4{,}2x + 75$.

En economía, se llama coste marginal, al coste ocasionado por la producción de un unidad suplementaria y se calcula hallando la derivada en dicho punto. Halla el coste marginal al producir la unidad número 81 de las dos formas indicadas y después compara el resultado.

a) $C(80+1)$

b) $C'(80)$

a) $C(80+1) - C(80) = C(81) - C(80) = 128{,}46 - 123 = 5{,}46$ unidades monetarias

b) La función derivada es $C'(x) = 0{,}12x - 4{,}2$, por tanto, $C'(80) = 0{,}12 \cdot 80 - 4{,}2 = 5{,}4$ unidades monetarias.

Los resultados son bastante similares, difieren en seis centésimas.

125. Consideremos las funciones $f(x) = (x-a)^3$ y $g(x) = -x^2 + bx + c$. Determina los valores de los parámetros que hacen que las dos curvas tengan la misma tangente en el punto $A(2,1)$.

Como ambas funciones pasan por el punto $A(2,1)$, sabemos que $f(2) = 1$ y $g(2) = 1$:

$f(2) = 1 \Rightarrow (2-a)^3 = 1 \Rightarrow 2 - a = 1 \Rightarrow a = 1$. Así pues, la primera función es $f(x) = (x-1)^3$.

$g(2) = 1 \Rightarrow -2^2 + 2b + c = 1 \Rightarrow 2b + c = 5$

Como además comparten tangente en el punto $A(2,1)$, sabemos que $f'(2) = g'(2)$:

$f'(x) = 3(x-1)^2 = 1 \Rightarrow f'(2) = 3$

$g'(x) = -2x + b \Rightarrow g'(2) = -4 + b = 3 \Rightarrow b = 7$

Sustituyendo en $2b + c = 5 \Rightarrow 2 \cdot 7 + c = 5 \Rightarrow c = -9$

Por tanto, los valores de los parámetros son $a = 1$, $b = 7$, $c = -9$.

126. En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en km², viene dada por la función $f(t) = \dfrac{11t + 20}{t + 2}$, siendo t el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.

a) ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente?

b) Estudia si la mancha crece o decrece con el tiempo.

c) ¿Tiene algún límite la extensión de la mancha?

a) La superficie afectada inicialmente, es decir, cuando $t = 0$, son $f(0) = 10$ km².

b) Hay que estudiar el crecimiento de la función para $t > 0$.

$f'(t) = \dfrac{11(t+2) - (11t + 20)}{(t+2)^2} = \dfrac{2}{(t+2)^2} > 0$, por tanto, f es creciente, es decir, la mancha crece indefinidamente.

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{11t + 20}{t + 2} = 11$.

A pesar de que la mancha crece indefinidamente, su extensión nunca llegará a los 11 km².

127. Sea la función $f(x)=\begin{cases} ax+3+\dfrac{x}{x-2} & \text{si } x\neq 2 \\ 0 & \text{si } x=2 \end{cases}$.

a) Halla el valor de *a* para el que la pendiente *m* de la tangente a la gráfica de *f* en el punto $A(0,3)$ vale 1.

b) Para $a = 1$, estudia la continuidad de *f* y determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) Para *x* diferente de 2, la derivada es $f'(x)=a-\dfrac{2}{(x-2)^2}$.

Por el enunciado, sabemos que $m=1=f'(0)=a-\dfrac{1}{2}$, es decir, $a=\dfrac{3}{2}$.

b) La función es $f(x)=\begin{cases} x+3+\dfrac{x}{x-2} & \text{si } x\neq 2 \\ 0 & \text{si } x=2 \end{cases}$.

La función presenta una discontinuidad en $x = 2$ ya que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x+3+\dfrac{x}{x-2}\right)=-\infty$.

Observa además que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$.

(El denominador que aparece en el primer tramo, $\dfrac{x}{x-2}$, no ofrece problemas porque se anula en un valor que no pertenece a su dominio).

La derivada, para *x* distinto de 2, es $f'(x)=1-\dfrac{2}{(x-2)^2}$, que se anula si:

$$1-\frac{2}{(x-2)^2}=0\Rightarrow (x-2)^2=2\Rightarrow x=2-\sqrt{2} \text{ o } x=2+\sqrt{2}$$

Si $x\in\left(-\infty, 2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$ *f* es creciente.

Si $x\in\left(2-\sqrt{2}, 2\right)\cup\left(2, 2+\sqrt{2}\right)\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow$ *f* es decreciente.

128. La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley:

$$C(x)=x^3-45x^2+243x+30000, \text{ con } x \text{ el número de días.}$$

a) ¿Cuál ha sido la cotización en Bolsa el día 2?

b) Determina los días en que alcanza las cotizaciones máxima y mínima.

c) Calcula esas cotizaciones máxima y mínima.

a) En el día 2 la cotización es $C(2)=30314$ unidades monetarias.

b) Hay que hallar los extremos de $C(x)$ en el intervalo cerrado $[0,30]$. Es decir, un problema de optimización.

La derivada, $C'(x)=3x^2-90x+243$, se anula si $x = 3$ o si $x = 27$.

Evaluamos:

$C(0)=30000$ $\quad C(3)=30351$ $\quad C(27)=23439$ $\quad C(30)=23790$

La cotización máxima se alcanza en el tercer día y la mínima en el día 27.

c) La cotización máxima es de 30 351 u.m. y la mínima de 23 439 u.m.

129. Miguel ha invertido en acciones de cierta compañía durante los últimos 10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (miles de euros en dinero invertido más beneficios) viene dado por la expresión:

$$f(x) = (x-2)^2(1-2x) + 252x + 116,\ 0 \le x \le 10 \ (x \text{ en años})$$

a) Determina los intervalos de tiempo en los que el valor de la cartera creció y aquellos en que decreció.

b) Miguel retira sus ingresos transcurridos los 10 años. ¿Cuál hubiera sido realmente el mejor momento para retirarlos? ¿Cuánto pierde por no haberlo hecho en el momento óptimo?

a) La función es $f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 240x + 120$, y su derivada, $f'(x) = -6x^2 + 18x + 240$, que se anula si $x = 8$ o si $x = -5$. Como x representa años, debe ser positivo y, por tanto, la solución negativa no tiene sentido.

La derivada es positiva en el intervalo $(0,8)$, luego la cartera crece desde el inicio hasta los 8 años, y negativa en $(8,10)$, por lo que decrece desde los 8 hasta los 10 años.

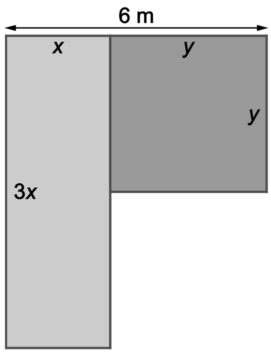
b) Hay que comparar el valor de la cartera a los 8 años, al inicio y al final:

$f(8) = 1592$ $\quad f(0) = 120$ $\quad f(10) = 1420$

El mejor momento para retirar sus ingresos habría sido a los 8 años.

Ha perdido 1 592 000 − 1 420 000 = 172 000 euros.

130. Un artista ha adquirido un listón de 6 m de largo del que quiere colgar dos grandes telas rectangulares, una a continuación de la otra y que ocupen todo el listón: la primera ha de ser naranja y el lado que está sobre el listón debe ser un tercio del lado que cuelga; y la otra será verde y debe tener forma de cuadrado. ¿Qué dimensiones deben tener las telas para que su superficie sea la mínima posible?



La función a minimizar es $S = 3x^2 + y^2$, cuyas variables deben ser ambas positivas y estar sujetas a la relación $x + y = 6$.

Al sustituir y en S se obtiene: $S = 3x^2 + (6-x)^2$ con $x \in [0,6]$.

$$S'(x) = 6x + 2(6-x)\cdot(-1) = 8x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [0,6].$$

Comparando los valores de $S(0) = 36$, $S(6) = 108$ y $S\left(\frac{3}{2}\right) = 27$,se obtiene que para que la superficie sea mínima, la tela naranja debe medir 1,5 · 4,5 m y la verde debe ser un cuadrado de 4,5 m de lado.

131. Un equipo de trabajadores debe hacer la cosecha de un campo de manzanos y únicamente puede trabajar durante un día. Si se hace la cosecha el 1 de octubre, se recogerán 60 toneladas y el precio será de 2000 €/tonelada. A partir de ese día, la cantidad que se podría recoger aumentará en una tonelada cada día, pero el precio de la tonelada disminuirá en 20 €/día.

a) Determina la fórmula que expresa los ingresos que se obtienen en función del número de días que se dejan pasar a partir del 1 de octubre para hacer la cosecha.

b) Halla cuántos días deben pasar para que los ingresos por la cosecha sean máximos.

c) Indica cuál es el valor máximo de los ingresos.

d) Halla cuántos días deben pasar para que los ingresos sean los mismos que si se cosechara el día 1 de octubre.

a) Llamando x al número de días que se dejan pasar a partir del 1 de octubre, los ingresos, $f(x)$ en euros, vienen dados por la función $f(x) = (60 + x)(2000 - 20x) = -20x^2 + 800x + 120\,000$.

b) Como $f(x)$ es una parábola cóncava hacia abajo, el máximo es su vértice. La derivada es $f'(x) = -40x + 800$, que se anula si $x = 20$. Así pues, si se dejan pasar 20 días, se obtendrán los máximos beneficios.

c) El valor máximo de los ingresos es $f(20) = 128\,000$ euros.

d) Los ingresos obtenidos el 1 de octubre son $f(0) = 60 \cdot 2000 = 120\,000$ euros.

Si x es el número de días transcurridos para que los ingresos sean de 120 000 euros, entonces:

$-20x^2 + 800x + 120\,000 = 120\,000$, es decir, $-20x^2 + 800x = 0 \Rightarrow -20x(x - 40) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ (corresponde al 1 de octubre) y $x = 40$. Así pues, deben pasar 40 días.

132. El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función $P(t) = \dfrac{15 + t^2}{(t + 1)^2}$ donde t mide los años transcurridos desde $t = 0$. Halla:

a) La población inicial.

b) El año en que se alcanzará la mínima población. ¿Cuál será su tamaño?

c) ¿Cuál será el tamaño de la población a largo plazo?

a) La población inicial es el valor de la función para $t = 0$: $P(0) = 15$, es decir, 15 millones de individuos.

b) Para calcular el mínimo se halla la derivada:

$$P'(t) = \frac{2t(t+1)^2 - (15 + t^2)2(t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2(t+1)(t-15)}{(t+1)^4} = \frac{2(t-15)}{(t+1)^3}$$

$P'(t) = 0$ cuando $t = 15$.

A la izquierda de 15, $f'(x) < 0$, y a la derecha, $f'(x) > 0$. Por tanto, la mínima población se alcanza a los 15 años y su tamaño es $P(15) = 0{,}9375$, es decir, 937 500 individuos.

c) Hay que calcular el límite cuando el tiempo tiende a infinito:

$\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2} = 1$, es decir, tiende a estabilizarse en un millón de habitantes.

133. Una empresa de compra y venta de automóviles ha hecho un estudio sobre sus beneficios/pérdidas en miles de euros, a lo largo de los últimos 10 años y ha comprobado que se ajustan a $F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$, $0 \le t \le 10$. Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿En qué años se dan los valores máximos y mínimos de F?

b) Sus periodos de crecimiento y decrecimiento.

c) ¿Cuáles son sus beneficios máximos?

d) ¿Qué resultados obtuvo la empresa en el último año?

a) Hay que calcular el máximo y el mínimo de la función $F(t)$ en $[0,10]$.

La derivada de la función es $F'(t) = 3t^2 - 36t + 81$, que se anula si $t = 3$ o si $t = 9$.

Se comparan: $F(3) = 105$, $F(9) = -3$, $F(0) = -3$ y $F(10) = 7$

El máximo se alcanza en el año 3, y el mínimo, en los años 0 y 9.

b) Estudiando el signo de la derivada se observa que F es creciente en $(0,3) \cup (9,10)$ y decreciente en $(3,9)$.

c) Sus beneficios máximos son de $F(3) = 105$, es decir, 105 000 euros.

d) En el último año, $t = 10$, obtuvo unos beneficios de $F(10) = 7$, esto es, 7000 euros.

134. Se sabe que los costes totales de fabricar x unidades de un determinado producto vienen dados por la expresión:

$$C(x) = 3x^2 - 27x + 108$$

a) ¿Cuántas unidades hay que producir para minimizar el coste medio $M(x) = \frac{C(x)}{x}$?

b) ¿Cuál es el valor del coste medio mínimo?

c) Justifica que la función que define el coste medio, $M(x)$, no tiene puntos de inflexión.

a) Coste medio: $M(x) = \frac{C(x)}{x} = 3x - 27 + \frac{108}{x}$.

Su derivada es : $M'(x) = 3 - \frac{108}{x^2}$. Esta derivada se anula si $3 - \frac{108}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 = 108 \Rightarrow x = 6$ (solo es válida la solución positiva porque x representa el número de unidades de un producto).

Si $x < 6$, entonces $M'(x) < 0$, es decir, $M(x)$ decrece. Si $x > 6$, entonces $M'(x) > 0$, $M(x)$ crece.

Por tanto, para $x = 6$ se obtiene el mínimo.

Así pues, se obtiene el mínimo coste medio produciendo 6 unidades.

b) Valor del coste medio mínimo: $M(6) = \frac{C(6)}{6} = \frac{3 \cdot 6^2 - 27 \cdot 6 + 108}{6} = 9$ u. m.

c) Se calcula la derivada segunda de $M(x)$: $M''(x) = \frac{216}{x^3}$

Como no se anula nunca, la función $M(x)$ no puede tener puntos de inflexión.

135. En una empresa, se han modelizado los beneficios obtenidos, en miles de euros, por la venta de x cientos de objetos mediante la función f, definida en $(0,+\infty)$ por la función:

$$f(x) = -2x + 1(e^2 - 1)\ln x + 2$$

a) Comprueba que $f(1) = 0$ y que $f(e^2) = 0$.

b) Obtén el valor de x redondeado a la unidad, para el que se obtiene el beneficio máximo.

a) $f(1) = -2 + (e^2 - 1)\cdot \ln 1 + 2 = 0$

$f(e^2) = -2e^2 + (e^2 - 1)\ln e^2 + 2 = -2e^2 + 2(e^2 - 1) + 2 = 0$

b) Se calculan los valores que anulan $f'(x)$: $f'(x) = -2 + \dfrac{e^2 - 1}{x} = \dfrac{-2x + e^2 - 1}{x}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x + e^2 - 1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{e^2 - 1}{2}$$

Se calcula $f''(x) = \dfrac{-e^2 + 1}{x^2}$.

Como $f''\left(\dfrac{e^2 - 1}{2}\right) < 0$, entonces el beneficio es máximo para $x = \dfrac{e^2 - 1}{2} \simeq 3$

136. Una partícula está recorriendo la curva $y = x^2$. En cierto momento la abandona y comienza a desplazarse por la tangente trazada por el punto en el que abandonó la curva.

¿En qué momento debe dejar la curva para que su trayectoria pase por el punto $A\left(4, \dfrac{39}{4}\right)$?

Como $A\left(4, \dfrac{39}{4}\right)$ no es un punto de la curva y es un punto de la trayectoria, entonces es un punto de la tangente a la curva por el punto en el que la partícula abandona dicha curva.

Se calcula el punto donde la partícula abandona la curva y la recta tangente a la curva en ese punto es:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0).$$

Luego:

$$\frac{39}{4} - x_0^2 = 2x_0(4 - x_0) \Rightarrow 4x_0^2 - 32x_0 + 39 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2},\ x_0 = \frac{13}{2}$$

Por tanto, abandona la curva en el momento que pase por los puntos $B_1\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ o $B_2\left(\dfrac{13}{2}, \dfrac{169}{4}\right)$, dependerá del sentido en el que la partícula recorre la curva.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Determina los valores de *k* para que las tangentes a la curva $y = kx^3 - (kx)^2 + 7x - 18$ en los puntos de abscisas 1 y 2 sean paralelas.

$y' = 3kx^2 - 2k^2x + 7$

Así pues:

$y'(1) = 3k - 2k^2 + 7$ $\qquad$ $y'(2) = 12k - 4k^2 + 7$

Nos piden que $y'(1) = y'(2)$, es decir:

$$3k - 2k^2 + 7 = 12k - 4k^2 + 7 \Rightarrow 2k^2 - 9k = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ y } k = \frac{9}{2}.$$

Luego los valores de *k* buscados son 0 y $\frac{9}{2}$

2. Sabiendo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua cuya expresión es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ Ax^2 + 6x + B & \text{si } 1 \le x < 4 : \\ -x + 8 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

a) Determina *A* y *B*.

b) ¿Es derivable *f* en $\mathbb{R}$?

a) Al ser *f* continua en $\mathbb{R}$ (lo asegura el enunciado) debe serlo en $x = 1$, luego:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow A + 6 + B = 1 \Rightarrow A + B = -5$$

Análogamente, debe serlo en $x = 4$, por tanto:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) \Rightarrow 16A + 24 + B = 4 \Rightarrow 16A + B = -20$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} A + B = -5 \\ 16A + B = -20 \end{cases}$ se tiene $A = -1$, $B = -4$.

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 6x - 4 & \text{si } 1 \le x < 4 \\ -x + 8 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$, por lo que $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 6 & \text{si } 1 < x < 4 \\ -1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Como f es continua en $x = 1$ y $x = 4$, estudiemos $\lim_{x\to 1} f'(x)$ y $\lim_{x\to 4} f'(x)$.

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1$ y $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 4$, por lo que *f* no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, *f* no es derivable en $\mathbb{R}$.

3. El coste de producción de x unidades de un determinado artículo, en euros, es $\frac{1}{50}x^2 - 40x + 4000$ y el precio de venta de cada uno de ellos es $50 - \frac{1}{100}x$. ¿Calcula el número de unidades que hay que fabricar para obtener el máximo beneficio y cuál es el valor de este?

El precio de venta de x artículos es $x\left(50 - \frac{1}{100}x\right) = 50x - \frac{1}{100}x^2$.

Luego el beneficio obtenido al producir y vender x artículos es:

$$B(x) = 50x - \frac{x^2}{100} - \left(\frac{1}{50}x^2 - 40x + 4000\right) = -\frac{3}{100}x^2 + 90x - 4000$$

$B(x)$ es una parábola y su punto más alto es su vértice que tiene por abscisa 1500 y ordenada 63 500.

Así pues, el máximo beneficio es 63500 euros y se obtiene produciendo y vendiendo 1500 artículos.

4. Justifica que la función $\frac{\ln(1-x)}{\ln x}$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

Si $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$ entonces:

$$f'(x) = \frac{-\ln x \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\frac{\ln x}{x-1} - \frac{\ln(1-x)}{x}}{(\ln x)^2}$$

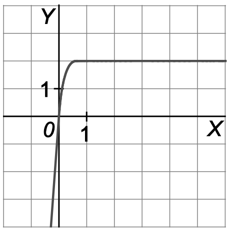
Estudiemos el signo del numerador pues el del denominador es positivo.

$$\frac{\ln x}{x-1} - \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{x\ln x + (1-x)\ln(1-x)}{x(x-1)}$$

Como el dominio de f está formado por los números tales que $1 - x > 0$ y $x > 0$, es decir $0 < x < 1$, el denominador de la expresión anterior es negativo y al ser $x > 0$, $\ln x < 0$, $1 - x > 0$, $\ln(1 - x) < 0$.

El numerador también es negativo, por lo que $f'(x) > 0$ en $(0,1)$ y f es estrictamente creciente en todo su dominio.

5. Esboza la gráfica de *f* sabiendo que $f(0) = 0$ y que la gráfica de f' es la de la figura.

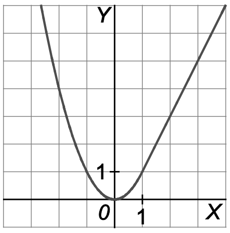


$f'(x) < 0$ en $(-\infty,0)$ y $f'(x) > 0$ en $(0,+\infty)$. Luego *f* es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,+\infty)$.

Por tanto, en $x = 0$ presenta un mínimo relativo, es decir, $A(0,f(0)) = A(0,0)$.

Además, $f'(x) = 2$ si $x \geq 1$.

Luego un esbozo de su gráfica podría ser el de la figura:



6. Determina cuántos extremos relativos y cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$.

La derivada es $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x-4)$ y se anula si $x = 0$ o si $x = 4$.

Si $x < 0$, $f'(x) > 0$. Si $0 < x < 4$, $f'(x) < 0$ Si $x > 4$, $f'(x) > 0$

Por lo tanto, $f(0)$ es un máximo relativo y $f(4)$ es un mínimo relativo.

La segunda derivada es $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$ y se anula $x = 0$ o si $x = 3$.

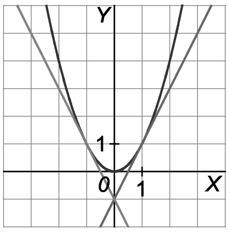
Si $x < 0$, $f''(x) < 0$. Si $0 < x < 3$, $f'(x) < 0$ Si $x > 3$, $f''(x) > 0$

El único punto de inflexión es $A(3,f(3))$.

7. Halla las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = x^2$ trazadas desde el punto $P(0,-1)$.

Una tangente trazada desde $P(0,-1)$ toca a la curva en el punto $A(a,a^2)$, así que su pendiente es $\frac{a^2+1}{a}$. Dicha pendiente debe ser 2*a*, por lo que $\frac{a^2+1}{a} = 2a$, nos lleva a $a^2 = 1$, es decir, $a = \pm 1$ y los puntos de tangencia serían $B(1,1)$ (el de la figura) y $C(-1,1)$.

Luego las ecuaciones de las tangentes pedidas son $y-1 = 2(x-1)$ e $y-1 = -2(x+1)$.

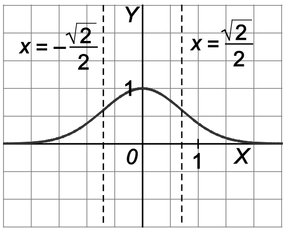


8. Determina el intervalo donde es cóncava hacia abajo la función $f(x) = e^{-x^2}$ y después esboza su gráfica.

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ $\qquad$ $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(4x^2 - 2\right)$

La función será cóncava hacia abajo donde la segunda derivada se negativa, o sea, si $4x^2 - 2 < 0$, es decir:

$$x^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Sea *f* y *g* funciones derivables definidas en $\mathbb{R}$.

A. Si $f(2) > f(3)$, entonces $f'(2) \geq f'(3)$.

B. Si es siempre $f'(x) \geq g'(x)$, entonces es siempre $f(x) - g(x) \geq 0$.

C. Si $g(x) = f(x^3 + 1)$, entonces $g'(x) = f'(x^3 + 1)$.

D. Si $f'(x) \geq 2$ para todo *x*, en ningún punto de la gráfica de $(f \circ f)(x)$ la tangente es paralela a $y = 3x + 1$.

La respuesta correcta es la D, puesto que $(f \circ f)'(x) = f'(f(x))f'(x) \geq 4$: para que la recta tangente a la curva sea paralela a la recta $y = 3x + 1$, su derivada debe ser igual a 3, pero la derivada es mayor o igual que 4 y, por tanto, es imposible que eso ocurra.

2. Sean las funciones $f(x) = (x-1)(3-x)$ y $g(x) = \ln f(x)$.

A. *g* es positiva en su dominio de definición.

B. La tangente a $g(x)$ en $x = 2$ es paralela a $y = x$.

C. $\lim_{x \to 2} g(x) = 1$

D. $D(g) = (1,3)$

La respuesta correcta es la D, ya que $f(x)$ es positiva en el intervalo $(1,3)$ y por tanto, en dicho intervalo está definido el logaritmo.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

3. Sea *f* la función definida en $(-\infty,1]$ mediante la fórmula $f(x) = 2x\sqrt{1-x}$, y *T*, la tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa 0.

A. Para todo *x* de $(-\infty,1)$ se verifica $f'(x) > 0$.

B. La ecuación de *T* es $y = 2x$.

C. *f* tiene un único punto con tangente horizontal.

D. Si $\frac{2}{3} < a < b < 1$, entonces $f(b) < f(a)$.

Son correctas las afirmaciones B, C y D.

4. Sea la función $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1$.

A. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$.

B. La ecuación $f(x) = 1$ tiene solo dos soluciones en $[-1,+\infty)$.

C. Si $x \in [-1,1]$, entonces $f(x) \leq 4$.

D. Si $x < 0$, la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo.

Las respuestas correctas son A, B y C.

5. **Sea f la función definida en $\mathbb{R}$ por:**

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{si } x\le 0\\ x^2+1 & \text{si } x>0\end{cases}$$

A. f es derivable en 0 y $f'(0)=0$.

B. f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

C. Para cualquier número real a, la ecuación $f(x)=a$ admite una única solución.

D. f no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Las respuestas correctas son B y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Sea f una función definida en $\mathbb{R}$, derivable.**

1. $f'(x)>0$

2. **f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.**

A. $1\Leftrightarrow 2$

B. $1\Rightarrow 2$, pero $2\not\Rightarrow 1$

C. $2\Rightarrow 1$, pero $1\not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

La respuesta correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Para encontrar el número que mide la diferencia entre los valores máximo y mínimo en el intervalo $[1,d]$ de la función $f(x)=ax^2+bx+\ln(cx)$ se tienen los datos siguientes:**

1. **El valor de a**

2. **El valor de b**

3. **El valor de c**

4. **El valor d**

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es C.