8 Integrales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 4. Ejercicios resueltos.

5. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{x^2+3x-1}{3}dx$

b) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3+2x}{x^2}dx$

c) $\int (2x-4)(3x+1)dx$

d) $\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

e) $\int \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\,dx$

f) $\int \left(\operatorname{sen}x-e^x+\sqrt{x}\right)dx$

a) $\int \frac{x^2+3x-1}{3}dx = \frac{1}{3}\int \left(x^2+3x-1\right)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x\right)+C$

b) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3+2x}{x^2}dx = \int \left(x^{-\frac{3}{2}}-x+\frac{2}{x}\right)dx = -2\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}x^2+2\ln|x|+C$

c) $\int (2x-4)(3x+1)dx = \int \left(6x^2-10x-4\right)dx = 2x^3-5x^2-4x+C$

d) $\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)dx = x+\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$

e) $\int \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\,dx = \int \sqrt[6]{x^5}\,dx = \frac{6}{11}x\sqrt[6]{x^5}+C$

f) $\int \left(\operatorname{sen}x-e^x+\sqrt{x}\right)dx = -\cos x-e^x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

6. Halla en cada caso la función *f* que cumple la condición dada.

a) $f'(x) = \cos x + x\sqrt{x}$, y $f(\pi) = 0$

b) $f'(x) = \frac{3}{x^2} - e^x + e$, y $f(1) = 1$

c) $f'(0) = x^3 - 4 \cdot 6^x$ y $f(0) = -\frac{4}{\ln 6}$

d) $f'(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{\sqrt[3]{x}}$ y corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $A(1,1)$.

a) $f(x) = \int \left(\cos x + x\sqrt{x}\right) dx = \operatorname{sen} x + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$

Como $f(\pi) = 0$, $f(\pi) = \operatorname{sen}\pi + \frac{2}{5}\pi^2\sqrt{\pi} + C = \frac{2}{5}\pi^2\sqrt{\pi} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{5}\pi^2\sqrt{\pi}$

Por tanto, $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\left(x^2\sqrt{x} - \pi^2\sqrt{\pi}\right)$.

b) $f(x) = \int \left(\frac{3}{x^2} - e^x + e\right) dx = -\frac{3}{x} - e^x + e \cdot x + C$

Como $f(1) = 1$, $f(1) = -\frac{3}{1} - e^1 + e \cdot 1 + C = -3 + C = 1 \Rightarrow C = 4$

La función es $f(x) = -\frac{3}{x} - e^x + e \cdot x + 4$.

c) $f(x) = \int \left(x^3 - 4 \cdot 6^x\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{\ln 6}6^x + C$

Como $f(0) = -\frac{4}{\ln 6}$, $f(0) = -\frac{4}{\ln 6} + C = -\frac{4}{\ln 6} \Rightarrow C = 0$

La función es $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{\ln 6}6^x$.

d) $f(x) = \int \frac{\sqrt{x} + 2x}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(x^{\frac{1}{6}} + 2x^{\frac{2}{3}}\right) dx = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + \frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$

Como $f(1) = 1$, $f(1) = \frac{6}{7}\sqrt[6]{1^7} + \frac{6}{5}\sqrt[3]{1^5} + C = \frac{6}{7} + \frac{6}{5} + C = \frac{72}{35} + C = 1 \Rightarrow C = -\frac{37}{35}$

La función es $f(x) = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + \frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{37}{35}$.

7. Ejercicio resuelto.

8. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}dt$ **c)** $\int \frac{e^s}{1+e^{2s}}ds$ **e)** $\int \left(x^2+1\right)^{20} \cdot 5x\,dx$

b) $\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}}ds$ **d)** $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ **f)** $\int \frac{\cos(\ln t)}{t}dt$

a) $\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}\,dt = \int \frac{2t+2}{2\sqrt{t^2+2t+3}}\,dt = \sqrt{t^2+2t+3}+C$

b) $\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}}\,ds = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2s}}{1+e^{2s}}\,ds = \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2s}\right)+C$

c) $\int \frac{e^s}{1+e^{2s}}\,ds = \int \frac{e^s}{1+\left(e^s\right)^2}\,ds = \operatorname{arctg}\left(e^s\right)+C$

d) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}\left(x^2\right)+C$

e) $\int \left(x^2+1\right)^{20} 5x\,dx = \frac{5}{2}\int \left(x^2+1\right)^{20} 2x\,dx = \frac{5}{42}\left(x^2+1\right)^{21}+C$

f) $\int \frac{\cos(\ln t)}{t}\,dt = \operatorname{sen}(\ln t)+C$

9. Halla las integrales indefinidas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right)\left(\cos^4\left(x^2\right)\right)$ **c)** $j(x) = \operatorname{tg}(3x+2)$

b) $g(x) = \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\operatorname{tg} x}{3}$ **d)** $k(x) = x^2 e^{x^3}$

a) $\int 2x\left(\operatorname{sen} x^2\right)\left(\cos^4 x^2\right)dx = -\int \left(2x\left(-\operatorname{sen} x^2\right)\right)\left(\cos x^2\right)^4 dx = -\frac{1}{5}\left(\cos x^2\right)^5+C$

b) $\int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\operatorname{tg} x}{3}dx = \frac{1}{3}\int \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\operatorname{tg} x\,dx = \frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 x+C$

c) $\int \operatorname{tg}(3x+2)dx = -\frac{1}{3}\int \frac{3(-\operatorname{sen}(3x+2))}{\cos(3x+2)}dx = -\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+2)\right|+C$

d) $\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3}+C$

10. Ejercicio resuelto.

11. Obtén las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int (x^2-5)\cos x\,dx$ **c)** $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$ **e)** $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x\,dx$

b) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ **d)** $\int x\operatorname{sen}(2x)\,dx$ **f)** $\int e^x\cos x\,dx$

Todas las integrales las calcularemos utilizando la integración por partes:

a) $\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-5 \Rightarrow f'(x)=2x \\ g'(x)=\cos x \Rightarrow g(x)=\operatorname{sen} x \end{array}\right\} \Rightarrow \int (x^2-5)\cos x\,dx = (x^2-5)\operatorname{sen} x - \int 2x\operatorname{sen} x\,dx =$

$(x^2-5)\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,dx$. Esta última integral la calculamos también por partes:

$\left.\begin{array}{l} f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1 \\ g'(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow g(x)=-\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int x\operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$

$\int (x^2-5)\cos x\,dx = (x^2-5)\operatorname{sen} x - \int 2x\operatorname{sen} x\,dx = (x^2-5)\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,dx =$

$= (x^2-5)\operatorname{sen} x - 2(-x\cos x + \operatorname{sen} x) + C = (x^2-7)\operatorname{sen} x + 2x\cos x + C$

b) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\operatorname{arctg} x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2} \\ g'(x)=1 \Rightarrow g(x)=x \end{array}\right\} \Rightarrow \int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \dfrac{x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

c) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\operatorname{arcsen} x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x)=1 \Rightarrow g(x)=x \end{array}\right\} \Rightarrow \int \operatorname{arcsen} x\,dx = x\operatorname{arcsen} x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\operatorname{arcsen} x + \int \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$= x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$

d) $\left.\begin{array}{l} f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1 \\ g'(x)=\operatorname{sen}(2x) \Rightarrow g(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x) \end{array}\right\} \Rightarrow \int x\operatorname{sen}(2x)dx = -\dfrac{x\cos(2x)}{2} + \dfrac{1}{2}\int \cos(2x)dx =$

$= -\dfrac{x\cos(2x)}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$

e) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x)=\cos x \\ g'(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow g(x)=-\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow \int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x\cos x + \int (1-\operatorname{sen}^2 x)dx =$

$-\operatorname{sen} x\cos x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x\cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx \Rightarrow 2\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x\cos x + x \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \dfrac{x - \operatorname{sen} x\cos x}{2} + C$

f) $\left.\begin{array}{l} f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \\ g'(x)=\cos x \Rightarrow g(x)=\operatorname{sen} x \end{array}\right\} \Rightarrow I = \int e^x\cos x\,dx = e^x\operatorname{sen} x - \int e^x\operatorname{sen} x\,dx$. Esta última integral la calculamos también por partes:

$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \\ g'(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow g(x)=-\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow \int e^x\operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx = -e^x\cos x + I$

Tenemos pues que $I = e^x\operatorname{sen} x - (-e^x\cos x + I) \Rightarrow 2I = e^x\operatorname{sen} x + e^x\cos x \Rightarrow I = \dfrac{e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} + C$

12. Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$ **b)** $\int x^2\ln x\,dx$ **c)** $\int te^{-\frac{t}{2}}dt$ **d)** $\int (1-x)e^{-x}\,dx$

Todas las integrales las calcularemos utilizando la integración por partes:

a) $$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x} \\ g'(x)=\sqrt{x} \Rightarrow g(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \int \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \int \frac{2x\sqrt{x}}{3x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \int \frac{2\sqrt{x}}{3}dx =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$$

b) $$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x} \\ g'(x)=x^2 \Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{3}x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \int \frac{x^3}{3x}dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

c) $$\left.\begin{array}{l} f(t)=t \Rightarrow f'(t)=1 \\ g'(t)=e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow g(t)=-2e^{-\frac{t}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \int te^{-\frac{t}{2}}dt = -2te^{-\frac{t}{2}} + 2\int e^{-\frac{t}{2}}dt = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + C = -2e^{-\frac{t}{2}}(t+2) + C$$

d) $$\left.\begin{array}{l} f(x)=1-x \Rightarrow f'(x)=-1 \\ g(x)=e^{-x} \Rightarrow g(x)=-e^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow \int (1-x)e^{-x}\,dx = (1-x)\left(-e^{-x}\right) - \int (-1)\left(-e^{-x}\right)dx = (x-1)e^{-x} + e^{-x} + C = xe^{-x} + C$$

13. Halla una primitiva $F(x)$ de $f(x) = x\ln x^2$ que cumpla $F(1) = 0$.

$F(x) = \int x\ln x^2\,dx = \int x\cdot 2\cdot \ln x\,dx = 2\int x\ln x\,dx$ (calculamos por partes esta última integral):

$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $g'(x)=x \Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{x^2}{2x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{4}x^2\left[2\ln x - 1\right] + C$$

Por tanto, $F(x) = \int x\ln x^2\,dx = 2\int x\ln x\,dx = 2\dfrac{1}{4}x^2\left[2\ln x - 1\right] + C = \dfrac{1}{2}x^2\left[2\ln x - 1\right] + C$

Como $F(1) = 0$, entonces, $F(1) = \dfrac{1}{2}1^2\left[2\ln 1 - 1\right] + C = 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}$

La primitiva buscada es $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2\left[2\ln x - 1\right] + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}2x^2\ln x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2} = x^2\ln x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$.

14. Ejercicio resuelto.

15. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$

b) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+5}}$

c) $\int \frac{x\,dx}{\left(5+x^2\right)^2}$

d) $\int \left(x^3+5\right)^4 x^2\,dx$

a) Llamando $t = 1 + \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$:

$$\int \frac{1+\ln x}{x} dx = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{(1+\ln x)^2}{2} + C$$

b) Llamando $t = x^3 + 5$, $dt = 3x^2\,dx$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+5}} dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+5} + C$$

c) Llamando $t = 5 + x^2$, $dt = 2x\,dx$:

$$\int \frac{x}{\left(5+x^2\right)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(5+x^2\right)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5+x^2} + C$$

d) Llamando $t = x^3 + 5$, $dt = 3x^2\,dx$:

$$\int \left(x^3+5\right)^4 x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \left(x^3+5\right)^4 3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{t^5}{15} + C = \frac{\left(x^3+5\right)^5}{15} + C$$

16. Calcula la integral indefinida $\int \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} dx$. Para ello haz el cambio $t = \sqrt{x-1}$, despeja x elevando al cuadrado dicha expresión y sustituye lo obtenido en el integrando.

$$t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x - 1 \Rightarrow x = t^2 + 1$$

$$t = \sqrt{x-1} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} dx$$

$$\int \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1}{x}\frac{1}{2\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + C$$

17 y 18. Ejercicios resueltos.

19. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

CASO 1. a) $\int \frac{5}{x-2}dx$ **b)** $\int \frac{3}{2x-1}dx$ **CASO 3. e)** $\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}dx$ **f)** $\int \frac{1}{x^2+x}dx$

CASO 2. c) $\int \frac{4x-1}{x^2+6x+25}dx$ **d)** $\int \frac{3}{x^2+4}dx$ **CASO 4. g)** $\int \frac{3}{x^2-6x+9}dx$ **h)** $\int \frac{2x+1}{x^2+8x+16}dx$

1a) $\int \frac{5}{x-2}dx = 5\ln|x-2|+C$

1b) $\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\ln|2x-1|+C$

2c) $\int \frac{4x-1}{x^2+6x+25}dx = \int \frac{4x+12}{x^2+6x+25}dx - \int \frac{13}{x^2+6x+25}dx$. Calculamos estas integrales por separado:

$$\int \frac{4x+12}{x^2+6x+25}dx = 2\int \frac{2x+6}{x^2+6x+25}dx = 2\ln\left(x^2+6x+25\right)+C_1$$

$$\int \frac{13}{x^2+6x+25}dx = 13\int \frac{1}{16+(x+3)^2}dx = \frac{13}{16}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+3}{4}\right)^2}dx = \frac{4\cdot 13}{16}\int \frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{x+3}{4}\right)^2}dx = \frac{13}{4}\text{arctg}\left(\frac{x+3}{4}\right)+C_2$$

$$\int \frac{4x-1}{x^2+6x+25}dx = 2\ln\left(x^2+6x+25\right)-\frac{13}{4}\text{arctg}\left(\frac{x+3}{4}\right)+C$$

2d) $\int \frac{3}{x^2+4}dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{3\cdot 2}{4}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{3}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

3e) $\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{x-1}{(x+2)(x+1)}dx$; $\frac{x-1}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x-1 = A(x+1)+B(x+2)$. Por tanto: $\left.\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow -2 = B \Rightarrow B=-2 \\ x=-2 \Rightarrow -3=-A \Rightarrow A=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-1}{(x+2)(x+1)} = \frac{3}{x+2}-\frac{2}{x+1}$.

$$\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{3}{x+2}dx - \int \frac{2}{x+1}dx = 3\ln|x+2|-2\ln|x+1|+C$$

3f) $\int \frac{1}{x^2+x}dx = \int \frac{1}{x(x+1)}dx$ $\qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} \Rightarrow 1 = A(x+1)+Bx$

$\left.\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow 1=-B \Rightarrow B=-1 \\ x=0 \Rightarrow 1=A \Rightarrow A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

$$\int \frac{1}{x^2+x}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx = \ln|x|-\ln|x+1|+C$$

4g) $\int \frac{3}{x^2-6x+9}dx = \int \frac{3}{(x-3)^2}dx = -3\int \frac{-1}{(x-3)^2}dx = -\frac{3}{x-3}+C$

4h) $\int \frac{2x+1}{x^2+8x+16}dx = \int \frac{2x+1}{(x+4)^2}dx$ $\quad \frac{2x+1}{(x+4)^2} = \frac{A}{x+4}+\frac{B}{(x+4)^2} = \frac{A(x+4)+B}{(x+4)^2} \Rightarrow 2x+1 = A(x+4)+B$

$\left.\begin{array}{l} x=-4 \Rightarrow -7=B \Rightarrow B=-7 \\ x=-3 \Rightarrow -5=A+B \Rightarrow -5=A-7 \Rightarrow A=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x+1}{(x+4)^2} = \frac{2}{x+4}-\frac{7}{(x+4)^2}$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+8x+16}dx = \int \frac{2}{x+4}dx - \int \frac{7}{(x+4)^2}dx = 2\ln|x+4|+\frac{7}{x+4}+C$$

20. Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{x^3+1}{x^2+2x+4}dx$

b) $\int \frac{1}{4x^2-8x+4}dx$

c) $\int \frac{6x-8}{3x^2-8x+5}dx$

d) $\int \frac{x^2+2x+3}{x-2}dx$

e) $\int \frac{x^2}{x^2+2x+5}dx$

f) $\int \frac{5}{(x+1)(x-2)}dx$

a) $\int \frac{x^3+1}{x^2+2x+4}dx = \int\left(x-2+\frac{9}{x^2+2x+4}\right)dx = \frac{x^2}{2}-2x+\int\frac{9}{x^2+2x+4}dx$ (esta última integral es del caso 2).

$$\int \frac{9}{x^2+2x+4}dx = 9\int\frac{1}{3+(x+1)^2}dx = 3\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = 3\sqrt{3}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = 3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+2x+4}dx = \frac{x^2}{2}-2x+3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

b) Es del caso 4: $\int\frac{1}{4x^2-8x+4}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx = \frac{-1}{4(x-1)}+C$

c) Es inmediata: $\int\frac{6x-8}{3x^2-8x+5}dx = \ln\left|3x^2-8x+5\right|+C$

d) $\int\frac{x^2+2x+3}{x-2}dx = \int\left(x+4+\frac{11}{x-2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+4x+11\cdot\ln|x-2|+C$

e) $\int\frac{x^2}{x^2+2x+5}dx = \int\left(1-\frac{2x+5}{x^2+2x+5}\right)dx = x-\int\frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx$

$\int\frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx = \int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx+\int\frac{3}{x^2+2x+5}dx = \ln\left|x^2+2x+5\right|+3\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx$ (esta última integral es del caso 2).

$$\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int\frac{1}{4+(x+1)^2}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}dx = \frac{2}{4}\int\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C_1$$

$$\int\frac{x^2}{x^2+2x+5}dx = x-\ln\left|x^2+2x+5\right|-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

f) Es del caso 3:

$$\frac{5}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} \Rightarrow 5 = A(x-2)+B(x+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2\Rightarrow 5=3B\Rightarrow B=\frac{5}{3} \\ x=-1\Rightarrow 5=-3A\Rightarrow A=-\frac{5}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{5}{(x+1)(x-2)} = \frac{-\frac{5}{3}}{x+1}+\frac{\frac{5}{3}}{x-2}$$

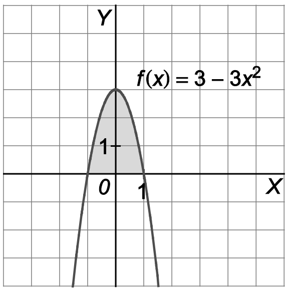
$$\int\frac{5}{(x+1)(x-2)}dx = \int\left(\frac{-\frac{5}{3}}{x+1}+\frac{\frac{5}{3}}{x-2}\right)dx = \frac{5}{3}\left(-\ln|x+1|+\ln|x-2|\right)+C$$

21. Ejercicio interactivo.

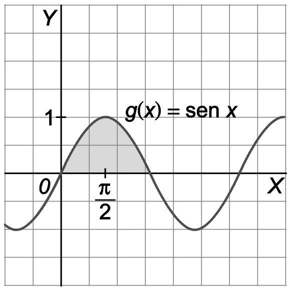
22. Ejercicio resuelto.

23. Calcula el área de las regiones sombreadas.

a)



b)



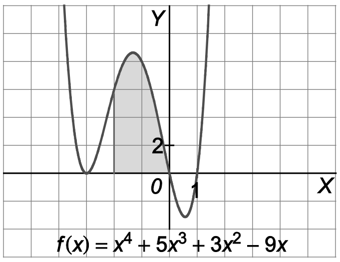
a) Si $f(x) = 3 - 3x^2$, entonces $F(x) = 3x - x^3$ cumple que $F'(x) = f(x)$ y el área de la zona sombreada es:

$$F(1) - F(-1) = (3 - 1) - (-3 + 1) = 4 \text{ u}^2.$$

b) Si $g(x) = \text{sen } x$, entonces $G(x) = -\cos x$ cumple que $G'(x) = g(x)$ y el área sombreada es:

$$G(\pi) - G(0) = -(-1) + 1 = 2 \text{ u}^2.$$

24. Calcula el área de la región sombreada.

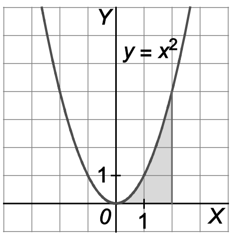


Se calcula una primitiva de $f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x$: $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{5x^4}{4} + x^3 - \frac{9x^2}{2}$

El área sombreada es:

$$F(0) - F(-2) = 0 - \left(\frac{(-2)^5}{5} + \frac{5 \cdot (-2)^4}{4} + (-2)^3 - \frac{9 \cdot (-2)^2}{2} \right) = \frac{62}{5} \text{ u}^2.$$

25. Calcula el área de la zona limitada por la gráfica de $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.



Área = $G(2) - G(0)$ con $G'(x) = x^2$

Una primitiva de $G'(x)$ es $G(x) = \frac{1}{3}x^3$.

El área pedida es: $G(2) - G(0) = \frac{8}{3} \text{ u}^2$.

26. Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-1}^{1} x\left(x^2-1\right)dx$

b) $\int_{0}^{1} \cos x\,dx$

c) $\int_{0}^{2} \left(x^2-1\right)dx$

d) $\int_{0}^{3} \left(2x^4-3x+\sqrt{x}\right)dx$

e) $\int_{-1}^{1} \left(4e^x-x\right)dx$

f) $\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

a) $\int_{-1}^{1} x\left(x^2-1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=0$

b) $\int_{0}^{1} \cos x\,dx=\left[\operatorname{sen} x\right]_0^1=\operatorname{sen}1-\operatorname{sen}0=\operatorname{sen}1$

c) $\int_{0}^{2}\left(x^2-1\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^2=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$

d) $\int_{0}^{3}\left(2x^4-3x+\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{2x^5}{5}-\frac{3x^2}{2}+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^3=\frac{2\cdot 3^5}{5}-\frac{3\cdot 3^2}{2}+\frac{2\sqrt{3^3}}{3}=\frac{837}{10}+2\sqrt{3}$

e) $\int_{-1}^{1}\left(4e^x-x\right)dx==\left[4e^x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=4e-\frac{1}{2}-\left(4e^{-1}-\frac{1}{2}\right)=4\left(e-\frac{1}{e}\right)$

f) $\int_{0}^{2\pi}\operatorname{sen} x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{2\pi}=-\cos 2\pi-(-\cos 0)=-1-(-1)=0$

27. Escribe una función continua *f* para la que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$.

Como el intervalo es simétrico respecto del origen, cualquier función impar lo verifica, por ejemplo, $f(x)=x$.

28. Calcula $\int_{-1}^{4}|3x|\,dx$.

Como $f(x)=|3x|=\begin{cases}-3x & -1\le x<0\\ 3x & 0\le x\le 4\end{cases}$:

$$\int_{-1}^{4}|3x|\,dx=\int_{-1}^{0}|3x|\,dx+\int_{0}^{4}|3x|\,dx=\int_{-1}^{0}-3x\,dx+\int_{0}^{4}3x\,dx=\left[-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^4=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot 4^2=\frac{51}{2}$$

29. Escribe una función *f* no constante en $[0,2]$ tal que $\int_0^2 f(x)dx = 2$.

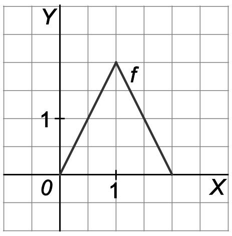
Hay que obtener una función $F(x)$ con $F(2) - F(0) = 2$.

$F(x) = x$ no sirve, pues $f(x) = F'(x) = 1$ es constante.

Probando con $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ y, por tanto, $f(x) = x$.

Otra forma de resolverlo es dibujando un triángulo isósceles de base 2 y altura 2.

La función que lo define es $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 4 - 2x & 1 < x \le 2 \end{cases}$



30. Calcula el área encerrada por el eje *X*, la gráfica de $f(x) = x(x^2 - 1)$ y las rectas verticales $x = –1$ y $x = 1$.

La función es $f(x) = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$.

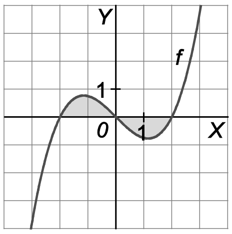
Corta al eje horizontal en los puntos $A(–1, 0)$, $O(0, 0)$ y $C(1, 0)$.

Y al eje vertical en el punto $O(0, 0)$.

Piden la suma de las áreas de las zonas sombreadas.

Como la función es simétrica respecto del origen, ambas zonas son iguales.

Por tanto el área pedida es:



$$A = 2 \cdot \int_{-1}^{0} x(x^2 - 1)dx = 2\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 2\left[0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\ \text{u}^2.$$

31. Si $\int_a^b f(x)dx = 1$, $\int_a^b g(x)dx = 2$ y $\int_a^b h(x)dx = –3$, calcula, si tienes datos suficientes, el valor de algunas de estas integrales.

a) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx$

b) $\int_a^b (2f(x) - 3g(x))dx$

c) $\int_a^b (f(x) \cdot g(x))dx$

d) $\int_a^b (f(x) - 2h(x))dx$

a) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = 1 + 2 = 3$

b) $\int_a^b (2f(x) - 3g(x))dx = 2\int_a^b f(x)dx - 3\int_a^b g(x)dx = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = –4$

c) $\int_a^b (f(x) \cdot g(x))dx$. No se tienen datos suficientes. (De ninguna manera debemos caer en el error de pensar que la integral del producto es el producto de las integrales).

d) $\int_a^b (f(x) - 2h(x))dx = \int_a^b f(x)dx - 2\int_a^b h(x)dx = 1 - 2 \cdot (–3) = 7$

32. Si *f* es continua y $\int_0^1 f(x)dx = 2$, ¿cuánto vale $\int_0^1 g(t)dt$ siendo $g(t) = f(t) + 1$?

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 (f(t)+1)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 dt = 2 + [t]_0^1 = 2 + 1 = 3$$

33. Si $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $\int_1^2 f(x)dx = 2$ y $\int_0^3 f(x)dx = 3$, calcula:

a) $\int_0^2 f(x)dx$ **b)** $\int_1^3 f(x)dx$ **c)** $\int_2^3 f(x)dx$

a) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 1 + 2 = 3$

b) $\int_1^3 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 3 - 1 = 2$

c) $\int_2^3 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx = 3 - 3 = 0$

34. Ejercicio resuelto.

35. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ el eje horizontal y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$.

No es necesario dibujar un esbozo de la gráfica. La función es claramente positiva en el intervalo [1, 2] y continua, por lo que la región en cuestión está por encima del eje X y su área nos la da la integral:

$$A = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_1^2 = \frac{1}{2}[\ln 5 - \ln 2] \text{ u}^2.$$

36. Determina el área de la región finita limitada por el eje horizontal y la gráfica $y = x^2 - 2x - 3$.

La gráfica de dicha función es una parábola cóncava hacia arriba que corta al eje X en los puntos $A(-1, 0)$ y $B(3, 0)$.

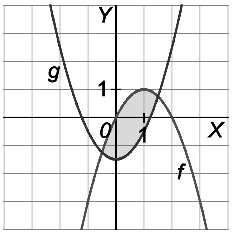
La región en cuestión está por debajo del eje X y su área, por tanto, es:

$$A = -\int_{-1}^3 \left(x^2 - 2x - 3\right)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^3 = -\left(-9 - \frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ u}^2$$

37. Halla el área de la región encerrada entre las gráficas de $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - \frac{3}{2}$.

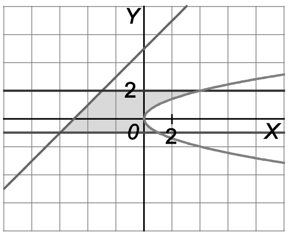
Los puntos de corte de las dos funciones son: $2x - x^2 = x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{2}$

Como en [–1, 3], $f(x) \geq g(x)$, el área buscada es:



$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-2x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}\right) - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{8}{3}\ \text{u}^2$$

38. Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x + 5$, $y = 2$, $y = -1$ e $y^2 = x$.



Se calcula el área de cada una de las regiones señaladas en la figura:

Las rectas $y = 2$ e $y = -1$ cortan a $y^2 = x$ en los puntos $A(4, 2)$ y $B(1, -1)$, respectivamente.

Dividimos la región limitada por las curvas en las regiones A_1, A_2, A_3:

A_1 es un trapecio de bases 6 y 3, y altura 3. Por tanto, $A_1 = \frac{(6+3)\cdot 3}{2} = \frac{27}{2}$ u^2.

A_2 se calcula con $\int_0^4 \left(2 - \sqrt{x}\right)dx = \left[2x - \frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^4 = \frac{8}{3}$ u^2.

A_3 se calcula con $\int_0^1 \left(\sqrt{x} + 1\right)dx = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} + x\right]_0^1 = \frac{5}{3}$ u^2.

Luego el área es: $A = \frac{27}{2} + \frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \frac{107}{6}$ u^2.

39. Ejercicio interactivo.

40. Ejercicio resuelto.

41. Halla el valor medio de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en $[0,1]$

b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \le 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$ en $[-2,4]$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ en $[0,3]$

En todos los casos se puede aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral por ser funciones continuas en los intervalos correspondientes.

a) $\int_0^1 \left(x^2 - 4x + 3\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3} = f(c)(1-0) \Rightarrow f(c) = \frac{4}{3}$. El valor medio de $f(x)$ en el intervalo [0, 1] es $\frac{4}{3}$.

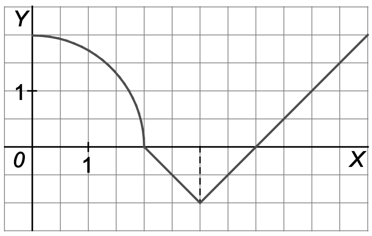
b) $\int_{-2}^4 f(x)dx = \int_{-2}^2 (x+2)dx + \int_2^4 4dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^2 + \left[4x\right]_2^4 = 8 + 8 = 16 = f(c)\left(4-(-2)\right) = 6f(c) \Rightarrow f(c) = \frac{8}{3}$

El valor medio de $f(x)$ en el intervalo [–2, 4] es $\frac{8}{3}$.

c) $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x + 1\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^2 + x\right]_0^3 = \frac{9}{2} = 3f(c) \Rightarrow f(c) = \frac{3}{2}$

El valor medio de $f(x)$ en el intervalo [0, 3] es $\frac{3}{2}$.

42. Halla el valor medio de la función:



$$\int_0^6 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx =$$

= [Área de un cuarto de círculo de radio 2] – [área de un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1] – [área de un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1] + [área de un triángulo rectángulo isósceles de cateto 2] =

$$= \frac{\pi \cdot 2^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \pi + 1 = 6f(c) \Rightarrow f(c) = \frac{\pi + 1}{6}$$

El valor medio de la función en el intervalo [0, 6] es $\frac{\pi + 1}{6}$.

43 a 48. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Integral indefinida. Primitivas inmediatas

49. Identifica cada una de las primitivas siguientes con una de la tabla dada en el texto y, a continuación, resuélvelas.

a) $\int \left(\frac{1}{x}+2\right)dx$

b) $\int \frac{\text{tg}^3 x}{\cos^2 x}dx$

c) $\int (3x-5)^2\,dx$

d) $\int x^3\cdot\sqrt[4]{x^5}\,dx$

e) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$

f) $\int \text{sen}(2x)dx$

g) $\int \frac{x^3-5x^2+3}{x}dx$

h) $\int e^{2x}\cdot\sqrt[7]{e^{2x}+1}\,dx$

i) $\int x\cdot e^{x^2}\,dx$

j) $\int x\left(x^2-1+\sqrt[3]{x^2-1}\right)dx$

k) $\int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{1+\text{sen}^2 x}dx$

l) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

a) $\int \left(\frac{1}{x}+2\right)dx=\int \frac{1}{x}dx+\int 2\,dx=\ln|x|+2x+C$. Tipos 2 y 1.

b) $\int \frac{\text{tg}^3 x}{\cos^2 x}dx=\frac{1}{4}\text{tg}^4 x+C$. Tipo 1.

c) $\int (3x-5)^2\,dx=\frac{1}{3}\int 3(3x-5)^2\,dx=\frac{1}{9}(3x-5)^3+C$. Tipo 1.

d) $\int x^3\cdot\sqrt[4]{x^5}\,dx=\int x^{\frac{17}{4}}\,dx=\frac{4}{21}x^{\frac{21}{4}}+C=\frac{4}{21}x^5\sqrt[4]{x}+C$. Tipo 1

e) $\int \frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\text{arctg}\left(x^2\right)+C$. Tipo 9.

f) $\int \text{sen}\,2x\,dx=\frac{1}{2}\int 2\,\text{sen}\,2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)+C$. Tipo 6.

g) $\int \frac{x^3-5x^2+3}{x}dx=\int x^2\,dx-5\int x\,dx+3\int \frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3\ln|x|+C$. Tipos 1 y 2.

h) $\int e^{2x}\cdot\sqrt[7]{e^{2x}+1}\,dx=\frac{7}{16}\left(e^{2x}+1\right)\sqrt[7]{e^{2x}+1}+C$. Tipo 1.

i) $\int xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$. Tipo 3.

j) $\int x\left(x^2-1+\sqrt[3]{x^2-1}\right)dx=\int x^3\,dx-\int x\,dx+\int x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{x^2-1}+C$. Tipo 1.

k) $\int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{1+\text{sen}^2 x}dx=\ln\left(1+\text{sen}^2 x\right)+C$. Tipo 2.

l) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}+C$. Tipo 1.

50. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx$

b) $\int \left(\text{sen}(2x) - \cos(3x) + 2\cos x \text{sen} x \right) dx$

c) $\int \sqrt{\left(1+e^x\right)^3} e^x \, dx$

d) $\int \frac{\text{sen}(3x)}{\sqrt{1-\cos^2(3x)}} dx$

a) $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + C$

b) $\int \left(\text{sen}\, 2x - \cos 3x + 2\cos x \,\text{sen}\, x \right) dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\text{sen}\, 3x + \text{sen}^2 x + C$

c) $\int \sqrt{\left(1+e^x\right)^3} e^x \, dx = \frac{2}{5}\left(1+e^x\right)^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\left(1+e^x\right)^2 \sqrt{1+e^x} + C$

d) $\int \frac{\text{sen}(3x)}{\sqrt{1-\cos^2(3x)}} dx = \int \frac{\text{sen}(3x)}{\sqrt{\text{sen}^2(3x)}} dx = \int \frac{\text{sen}(3x)}{\text{sen}(3x)} dx = \int dx = x + C$

51. Halla la primitiva de $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ que vale 5 en $x = 2$.

$F(x) = \int \left(x + \frac{4}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + C$. Como $F(2) = 5$, $F(2) = \frac{2^2}{2} - \frac{4}{2} + C = 5 \Rightarrow C = 5$

Entonces, $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + 5$.

52. Determina la ecuación de la función polinómica f que pasa por los puntos $A(0,1)$ y $B(1,1)$, y tal que $f'''(x) = 6x + 4$.

$f'(x) = \int (6x+4)\, dx = 3x^2 + 4x + C$ y $f(x) = \int \left(3x^2 + 4x + C\right) dx = x^3 + 2x^2 + Cx + D$

Como $y = f(x)$ pasa por $A(0, 1)$, debe ser $f(0) = D = 1$, y como pasa por $B(1, 1)$, $f(1) = 1 + 2 + C + 1 = 1 \Rightarrow C = -3$.

La función buscada es $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

53. Encuentra dos funciones cuya derivada sea $f(x) = \frac{1}{x+1} + e^{2x}$ tales que en el punto $x = 0$ una tenga doble valor que la otra.

$F(x) = \int \left(\frac{1}{x+1} + e^{2x} \right) dx = \ln|x+1| + \frac{1}{2}e^{2x} + C$ $F(0) = \frac{1}{2} + C$

Si $C = 0$ para una de ellas, y para la otra, $C = \frac{1}{2}$:

Las funciones son $F(x) = \ln|x+1| + \frac{1}{2}e^{2x}$ y $G(x) = \ln|x+1| + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$, cumpliéndose así que $F(0) = \frac{1}{2}$ y que $G(0) = 1$.

Integración por partes

54. *Calcula las siguientes integrales.

a) $\int xe^{-2x}\,dx$ **c)** $\int (x^2+x)e^{-2x+1}dx$ **e)** $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$ **g)** $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ **i)** $\int x\ln x\,dx$

b) $\int \frac{x}{2^x}dx$ **d)** $\int \text{sen}^2 x\,dx$ **f)** $\int \ln(x+1)dx$ **h)** $\int x^3e^{-x^2}dx$ **j)** $\int e^x\cos(3x)dx$

a) $\left.\begin{array}{l} f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1 \\ g'(x)=e^{-2x}\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{array}\right\}\Rightarrow \int xe^{-2x}\,dx=-\frac{x}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx=-\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C=$

$=-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1)+C$

b) $\left.\begin{array}{l} f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1 \\ g'(x)=2^{-x}\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2^x}\end{array}\right\}\Rightarrow \int \frac{x}{2^x}dx=\frac{-x}{2^x\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}\int\frac{1}{2^x}\,dx=\frac{-x}{2^x\ln 2}-\frac{1}{2^x(\ln 2)^2}+C$

c) $\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+x\Rightarrow f'(x)=2x+1 \\ g'(x)=e^{-2x+1}\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x+1}\end{array}\right\}\Rightarrow \int (x^2+x)e^{-2x+1}\,dx=-\frac{1}{2}(x^2+x)e^{-2x+1}+\frac{1}{2}\int(2x+1)e^{-2x+1}\,dx$

Esta última integral se ataca también por partes:

$\left.\begin{array}{l} f(x)=2x+1\Rightarrow f'(x)=2 \\ g'(x)=e^{-2x+1}\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x+1}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \int (x^2+x)e^{-2x+1}\,dx=-\frac{1}{2}(x^2+x)e^{-2x+1}-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x+1}+\frac{1}{2}\int e^{-2x+1}dx=$

$=-\frac{1}{2}(x^2+x)e^{-2x+1}-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x+1}-\frac{1}{4}e^{-2x+1}+C=-\frac{1}{2}e^{-2x+1}(x^2+2x+1)+C=-\frac{1}{2}e^{-2x+1}(x+1)^2+C$

d) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\text{sen}\,x\Rightarrow f'(x)=\cos x \\ g'(x)=\text{sen}\,x\Rightarrow g(x)=-\cos x\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\int \text{sen}^2x\,dx=-\text{sen}\,x\cos x+\int\cos^2x\,dx=-\text{sen}\,x\cos x+\int(1-\text{sen}^2x)dx=-\text{sen}\,x\cos x+\int dx-\int\text{sen}^2x\,dx=$

$=-\text{sen}\,x\cos x+x-\int\text{sen}^2x\,dx\Rightarrow 2\int\text{sen}^2x\,dx=-\text{sen}\,x\cos x+x\Rightarrow\int\text{sen}^2x\,dx=\frac{x-\text{sen}\,x\cos x}{2}+C$

e) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \\ g'(x)=\sqrt{x}\Rightarrow g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\end{array}\right\}\Rightarrow \int\sqrt{x}\ln x\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\int\frac{2\sqrt{x}}{3}dx=$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{4}{9}x\sqrt{x}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x+\frac{2}{3}\right)+C$

f) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x+1)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+1} \\ g'(x)=1\Rightarrow g(x)=x\end{array}\right\}\Rightarrow \int\ln(x+1)dx=x\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx=x\ln(x+1)-\int\frac{x+1-1}{x+1}dx=$

$=x\ln(x+1)-x+\int\frac{1}{x+1}dx=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C=(x+1)\ln(x+1)-x+C$

g) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x} \\ g'(x)=\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow g(x)=-\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C=-\frac{\ln x+1}{x}+C$

h) $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\,dx=\int x^2\cdot xe^{-x^2}\,dx$

$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x \\ g'(x)=xe^{-x^2} \Rightarrow g(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\int x^3e^{-x^2}\,dx=\int x^2\cdot xe^{-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+\int xe^{-x^2}\,dx=$

$=-\dfrac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}+C=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C$

i) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x} \\ g'(x)=x \Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{2}x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$

j) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\cos(3x) \Rightarrow f'(x)=-3\text{sen}(3x) \\ g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\int e^x\cos(3x)\,dx=e^x\cos(3x)+3\int e^x\text{sen}(3x)dx$

De nuevo, por partes:

$\left.\begin{array}{l} f(x)=\text{sen}(3x) \Rightarrow f'(x)=3\cos(3x) \\ g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\int e^x\cos(3x)dx=e^x\cos(3x)+3e^x\text{sen}(3x)-9\int e^x\cos(3x)dx$

Despejando: $\displaystyle\int e^x\cos(3x)dx=\frac{e^x\cos(3x)+3e^x\text{sen}(3x)}{10}+C$

Integración por cambio de variable

55. Calcula la integral $\displaystyle\int e^{2x}\text{sen}\left(e^x\right)dx$ mediante el cambio $t=e^x$.

$t=e^x$; $dt=e^xdx$; $\displaystyle\int e^{2x}\text{sen}e^x\,dx=\int e^xe^x\text{sen}e^x\,dx=\int t\text{sen}t\,dt$

Ahora integramos por partes: $\begin{array}{l} f(t)=t \Rightarrow f'(t)=1 \\ g'(t)=\text{sen}t \Rightarrow g(t)=-\cos t \end{array}$

$\displaystyle\int e^{2x}\text{sen}e^x\,dx=\int t\text{sen}t\,dt=-t\cos t+\int\cos t\,dt=-t\cos t+\text{sen}t+C=-e^x\cos e^x+\text{sen}e^x+C$

56. Calcula:

a) $\int \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx$ **b)** $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^3}dx$ **c)** $\int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-4x}}dx$ **d)** $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

a) $t = \operatorname{sen} x;\ dt = \cos x dx \Rightarrow \int \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx = \int \operatorname{sen} t\,dt = -\cos t + C = -\cos(\operatorname{sen} x) + C$

b) $t = e^x;\ dt = e^x dx \Rightarrow \int \frac{e^x}{(e^x+1)^3}dx = \int \frac{1}{(t+1)^3}dt = \frac{-1}{2(t+1)^2} + C = -\frac{1}{2(e^x+1)^2} + C$

c) $t = e^{-2x};\ dt = -2e^{-2x}dx$

$$dx = \frac{dt}{-2e^{-2x}} = \frac{dt}{-2t} \Rightarrow \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-4x}}\,dx = \int \frac{t}{1+t^2}\frac{dt}{-2t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(e^{-2x}\right) + C$$

d) $t = \ln x;\ dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int \cos t\,dt = \operatorname{sen} t + C = \operatorname{sen}(\ln x) + C \ \Rightarrow$

Integración de funciones racionales

57. Calcula las siguientes integrales indefinidas previa descomposición en fracciones simples.

a) $\int \frac{dx}{2x+5}$ **b)** $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$ **c)** $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$ **d)** $\int \frac{dx}{x^2-x}$

a) $\int \frac{1}{2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$

b) $\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow 2x-1 = A(x-2)+B(x-1)$

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow 3=B \Rightarrow B=3 \\ x=1 \Rightarrow 1=-A \Rightarrow A=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$$

c) $\int \frac{1}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+3)}dx$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} \Rightarrow 1 = A(x+3)+B(x-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-3 \Rightarrow 1=-4B \Rightarrow B=-\frac{1}{4} \\ x=1 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - \frac{\frac{1}{4}}{x+3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x-1| - \ln|x+3|\right) + C$$

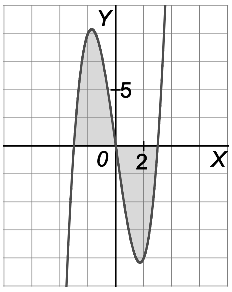
d) $\int \frac{1}{x^2-x}dx = \int \frac{1}{x(x-1)}dx \qquad \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Rightarrow 1 = A(x-1)+Bx$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow 1=B \Rightarrow B=1 \\ x=0 \Rightarrow 1=-A \Rightarrow A=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \qquad \int \frac{1}{x^2-x}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{1}{x-1}dx = -\ln|x| + \ln|x-1| + C$$

Área bajo una curva. Teorema fundamental del cálculo

58. Calcula el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 9x$ y el eje X.

$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x + 3)(x - 3) = 0$, si $x = -3$, $x = 0$ o $x = 3$

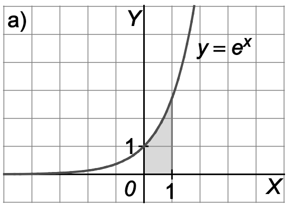


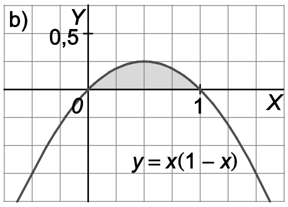
Se forman dos recintos, uno sobre el eje X para x en el intervalo $[-3,0]$ y otro bajo el eje X para x en el intervalo $[0,3]$.

El área buscada es:

$$\int_{-3}^{0}\left(x^3-9x\right)\,dx-\int_{0}^{3}\left(x^3-9x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{3}=-\frac{81}{4}+\frac{81}{2}-\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{2}\right)=\frac{81}{2}\ \text{u}^2.$$

59. Calcula el área de las siguientes regiones.

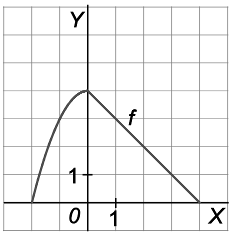




a) $\int_{0}^{1} e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1\ \text{u}^2$

b) $\int_{0}^{1} x(1-x)\,dx = \int_{0}^{1} x - x^2\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\ \text{u}^2$

60. Representa gráficamente la función dada por $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 4 - x & \text{si } 0 \le x \le 4 \end{cases}$ y halla el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas.



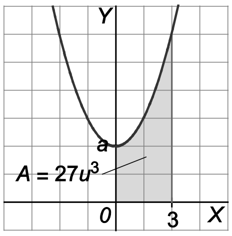
El área es:

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx = \int_{-2}^{0}\left(4-x^2\right)dx + \int_{0}^{4}(4-x)dx =$$

$$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{0}+\left[4x-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{4}=8-\frac{8}{3}+16-\frac{16}{2}=\frac{40}{3}\ \text{u}^2.$$

61. Dada la función $f(x) = x^2 + a$ con $a > 0$, calcula el valor de a para que el área determinada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ valga 27.

Como la función es siempre positiva, el área de 27 se puede calcular con la integral:



$$\int_0^3 (x^2 + a)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + ax\right]_0^3 = 9 + 3a = 27 \text{ u}^2.$$

Por tanto, $9 + 3a = 27$ si $a = 6$.

Integral definida. Regla de Barrow

62. Si f' es continua y $f(1) = 2$, ¿cuál es el valor de $f(7)$, sabiendo que $\int_1^7 f'(x)dx = 3$?

Al ser f' continua, por la regla de Barrow: $\int_1^7 f'(x)dx = f(7) - f(1) = f(7) - 2 = 3 \Rightarrow f(7) = 5$

63. Considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

a) Calcula una primitiva de $f(x)$.

b) Demuestra que si $x > 1$, la función $f(x)$ es siempre positiva.

c) Calcula el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ entre las rectas verticales $x = 2$ y $x = 3$.

a) $F(x) = \int \dfrac{x}{x^2 - 1}dx = \dfrac{\ln\left|x^2 - 1\right|}{2}$

b) Si $x > 1$, entonces el numerador es positivo y el denominador también, pues $x^2 - 1$ es positivo en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Por tanto, la función es siempre positiva si $x > 1$.

c) Como $f(x)$ es positiva en [2, 3] y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, el área buscada es $F(3) - F(2) = \dfrac{\ln 8 - \ln 3}{2}$ u^2.

64. Sea la función $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$.

a) Calcula una primitiva de $f(x)$.

b) Justifica que $F(x) = x^4 + 2x - 4$ no es primitiva de $f(x)$.

c) Halla el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

a) $G(x) = \int (x - 1)(x + 1)(x - 3)dx = \int (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 3x$

b) Si lo fuera, debería cumplir que $F'(x) = f(x)$, pero $F'(x) = 4x^3 + 2 \neq (x - 1)(x + 1)(x - 3)$ (para justificar esta desigualdad, no es necesario calcular el producto, basta ver que no valen lo mismo en $x = 1$).

c) Como la función cambia de signo en [0, 2], es positiva en [0, 1) y negativa en (1, 2], el área es:

$$\int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = (G(1) - G(0)) - (G(2) - G(1)) = 2G(1) - G(2) - G(0) = 2 \cdot \frac{7}{4} - 0 - 0 = \frac{7}{2} \text{ u}^2$$

65. Calcula los valores de las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-3}^{1}\left(x^3-2x^2+5\right)dx$ **f)** $\int_{-2}^{0}2^x\,dx$ **k)** $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2+2x}dx$ **p)** $\int_{0}^{2}\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$

b) $\int_{1}^{2}\left(\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$ **g)** $\int_{-1}^{1}e^{-2x+1}dx$ **l)** $\int_{0}^{3}\frac{x}{3x^2+1}dx$ **q)** $\int_{0}^{3}\frac{1}{1+2e^x}dx$

c) $\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-3\sqrt{x}\right)dx$ **h)** $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$ **m)** $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(2x-1)dx$ **r)** $\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^4}dx$

d) $\int_{-\pi}^{2\pi}\cos(3x-2)dx$ **i)** $\int_{-1}^{1}xe^x\,dx$ **n)** $\int_{-1}^{1}\frac{5}{1+x^2}dx$

e) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **j)** $\int_{-\pi}^{\pi}x^2\operatorname{sen}\left(x^3\right)dx$ **o)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}dx$

a) $\int_{-3}^{1}\left(x^3-2x^2+5\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+5x\right]_{-3}^{1}=-\frac{56}{3}$

b) $\int_{1}^{2}\left(\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=\int_{1}^{2}\left(3x^{-3}-2x^{-2}+\frac{1}{x}\right)dx=\left[-\frac{3}{2x^2}+\frac{2}{x}+\ln|x|\right]_{1}^{2}=\frac{1}{8}+\ln 2$

c) $\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-3\sqrt{x}\right)dx=\int_{1}^{3}\left(x^{-\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x^3}\right]_{1}^{3}=\frac{1}{2}-6\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$

d) $\int_{-\pi}^{2\pi}\cos(3x-2)dx=\left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x-2)\right]_{-\pi}^{2\pi}=\frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}(6\pi-2)-\operatorname{sen}(-3\pi-2)\right]=\frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}(-2)+\operatorname{sen}(-2)\right]=\frac{2\operatorname{sen}(-2)}{3}$

e) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\operatorname{arcsen}x\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}$

f) $\int_{-2}^{0}2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-2}^{0}=\frac{3}{4\ln 2}$

g) $\int_{-1}^{1}e^{-2x+1}dx=\left[-\frac{e^{-2x+1}}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{e^3-e^{-1}}{2}$

h) $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1}^{e}=\frac{1}{2}$

i) $\int_{-1}^{1}xe^x\,dx=\left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{e}$

j) $\int_{-\pi}^{\pi}x^2\operatorname{sen}\left(x^3\right)dx=\left[-\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right)\right]_{-\pi}^{\pi}=0$

k) $\int \frac{1}{x^2+2x}dx = \int \frac{1}{x(x+2)}dx$

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} \Rightarrow 1 = A(x+2)+Bx$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow 1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2} \\ x=0 \Rightarrow 1=2A \Rightarrow A=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{x+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}(\ln|x| - \ln|x+2|) + C$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}dx = \left[\frac{1}{2}\cdot(\ln|x| - \ln|x+2|)\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 4 - \ln 1 + \ln 3) = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

l) $\int_0^3 \frac{x}{3x^2+1}dx = \left[\frac{1}{6}\ln|3x^2+1|\right]_0^3 = \frac{1}{6}\cdot\ln(28)$

m) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2x-1))dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x-1)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cos(\pi-1) + \frac{1}{2}\cos(-2\pi-1) = \frac{1}{2}\cos(-1) + \frac{1}{2}\cos(-1) = \cos 1$

n) $\int_{-1}^{1} \frac{5}{1+x^2}dx = [5\operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = 5\cdot(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}(-1)) = 5\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{2}$

o) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$

p) $\int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \left[\frac{-1}{x^2+x+1}\right]_0^2 = \frac{6}{7}$

q) $\int \frac{1}{1+2e^x}dx = \left[t = e^x,\quad dt = e^x dx,\quad dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}\right] = \int \frac{dt}{(1+2t)t}$

$$\frac{1}{t(1+2t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} = \frac{A(1+2t)+Bt}{t(1+2t)} \Rightarrow 1 = A(1+2t)+Bt$$

$$\left.\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2} \Rightarrow 1=-\frac{1}{2}B \Rightarrow B=-2 \\ t=0 \Rightarrow 1=A \Rightarrow A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{t(1+2t)} = \frac{1}{t} - \frac{2}{1+2t}$$

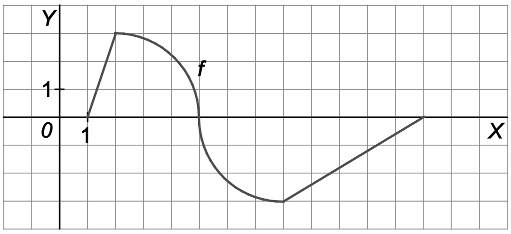
$$\int \frac{1}{t(1+2t)}dx = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{1+2t}\right)dx = (\ln|t| - \ln|1+2t|) + C$$

$$\int_0^3 \frac{1}{1+2e^x}dx = \left[\ln|e^x| - \ln|1+2e^x|\right]_0^3 = 3 - \ln(1+2e^3) + \ln 3$$

r) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+(x^2)2}dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$

Propiedades de la integral

66. Sea la función cuya gráfica es la de la figura, que consiste en segmentos y cuartos de circunferencia.



Calcula $\int_8^{13} f(x)dx$ **,** $\int_1^{13} f(x)dx$ **y** $\int_5^{13} |f(x)|dx$**.**

Identifiquemos cada trozo de la figura y su área:

1.º Triángulo rectángulo de catetos 1 y 3: $A_1 = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$ u^2.

2.º Cuarto de círculo de radio 3: $A_2 = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} = \frac{9\pi}{4}$ u^2.

3.º Cuarto de círculo de radio 3: $A_3 = \frac{9\pi}{4}$ u^2.

4.º Triángulo rectángulo de catetos 5 y 3: $A_4 = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$ u^2.

$$\int_8^{13} f(x)dx = -A_4 = -\frac{15}{2}$$

$$\int_1^{13} f(x)dx = \int_1^{2} f(x)dx + \int_2^{5} f(x)dx + \int_5^{8} f(x)dx + \int_8^{13} f(x)dx = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 = \frac{3}{2} - \frac{15}{2} = -6$$

$$\int_5^{13} |f(x)|dx = \int_5^{8} |f(x)|dx + \int_8^{13} |f(x)|dx = A_3 + A_4 = \frac{9\pi}{4} + \frac{15}{2} = \frac{9\pi + 30}{4}$$

67. Razona la veracidad de las siguientes afirmaciones.

a) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

b) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$

c) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $a = b$.

d) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ y $f(x) > 0$ para todo x, entonces $a = b$.

e) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

a) Verdadera, es la propiedad 3 de integrales.

b) Falsa. Por ejemplo: $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, pero $\int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, luego $\int_0^1 x^2\,dx \neq \int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^1 x\,dx$

c) Falsa. Por ejemplo: $\int_{-1}^1 x\,dx = 0$

d) Verdadera por la propiedad 6.

e) Verdadera, es la propiedad 1.

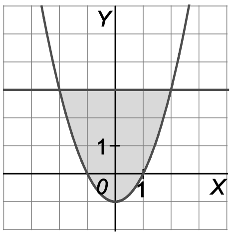
68. Sea *f* continua en $[-1,4]$ y $g(x) = f(x) + 2$. Si $\int_{-1}^{4} f(x)dx = 5$, calcula $\int_{-1}^{4} g(t)dt$.

$$\int_{-1}^{4} g(t)dt = \int_{-1}^{4} (f(t)+2)dt = \int_{-1}^{4} f(t)dt + \int_{-1}^{4} 2dt = 5 - [2t]_{-1}^{4} = 5 + (8-(-2)) = 15$$

Área de recintos planos

69. Halla el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 1$ y la recta horizontal $y = 3$.

$x^2 - 1 = 3$, si $x = -2$ y $x = 2$

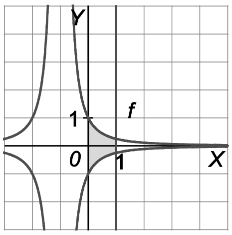


Como la recta está por encima de la parábola, el área buscada es:

$$\int_{-2}^{2} \left(3 - \left(x^2 - 1\right)\right)dx = \int_{-2}^{2} \left(3 - x^2 + 1\right)dx = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ u}^2.$$

70. Halla el área de la región del plano limitada por las curvas $y = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, $y = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

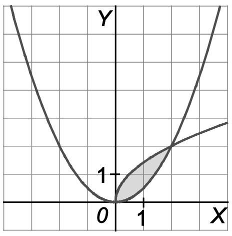


El área buscada es:

$$\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{-1}{(1+x)^2}\right)dx = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)dx = 2\left[\frac{-1}{1+x}\right]_{0}^{1} = 2\left(\frac{-1}{2} + 1\right) = 1 \text{ u}^2$$

71. Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = \sqrt{2x}$ e $y = \dfrac{x^2}{2}$.

$$\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 8x = x^4 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$



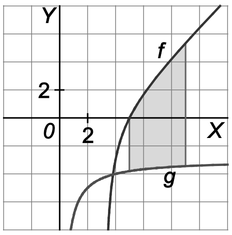
El área buscada es: $\displaystyle\int_{0}^{2} \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \left[\frac{2x\sqrt{2x}}{3} - \frac{x^3}{6}\right]_{0}^{2} = \frac{4\cdot 2}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ u^2.

72. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x-3}$, calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $x = 5$, la recta $x = 9$ y la gráfica $g(x)=\dfrac{-4}{x-3}$

En el intervalo [5, 9] ambas funciones son continuas ya que el punto $x = 3$ no pertenece a dicho intervalo.

¿Qué función va por arriba?

Calculamos: $f(x)-g(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x-3}-\dfrac{-4}{x-3}=\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}=\dfrac{(x-3)^2}{x-3}=x-3>0$ si $x\in[5,9]$.



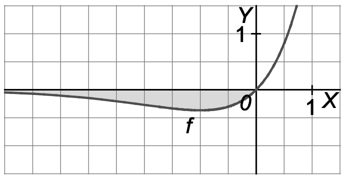
Es decir, *f*(x) va por encima de *g*(x) en el recinto pedido.

Su área es, por tanto:

$$\int_5^9 (f(x)-g(x))dx=\int_5^9 (x-3)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_5^9=\frac{81}{2}-27-\left(\frac{25}{2}-15\right)=16\ \text{u}^2.$$

73. Halla el área que encierra el recinto limitado por las gráficas de $f(x)=xe^x$, $y = 0$ y $x = 0$.

El recinto (situado por debajo del eje *X*), en realidad, es ilimitado como se aprecia en el dibujo, pero, aún así, podemos calcular su área ayudándonos de los límites.



Tomamos $n < 0$ y procedemos así:

$$A=\lim_{n\to-\infty}\left(-\int_n^0 xe^x dx\right)=\lim_{n\to-\infty}\left(-\left[e^x(x-1)\right]_n^0\right)=\lim_{n\to-\infty}\left(-\left[e^0(0-1)-e^n(n-1)\right]\right)=\lim_{n\to-\infty}\left(-\left[-1-e^n(n-1)\right]\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(-\left[-1-e^{-n}(-n-1)\right]\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(-\left[-1-\frac{-n-1}{e^n}\right]\right)=-[-1-0]=1\ \text{u}^2.$$

74. Enuncia la regla de Barrow y aplícala a la función $f(x)=e^x(x+1)$ en el intervalo [0, 1].

Regla de Barrow: Si *f* es continua en el intervalo [*a*, *b*] y *F* es cualquier primitiva de *f*, $F'(x)=f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a).$$

Como *f*(*x*) es continua, se calcula una de sus primitivas, $F(x)=\int e^x(x+1)dx$.

Trabajamos por partes: $f(x)=x+1\Rightarrow f'(x)=1$; $g'(x)=e^x\Rightarrow g(x)=e^x$

$$F(x)=\int e^x(x+1)dx=(x+1)e^x-\int e^x dx=(x+1)e^x-e^x=xe^x$$

Por tanto: $\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=e$

75. Halla el área del recinto acotado por estas tres fronteras:

La parábola de ecuación $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

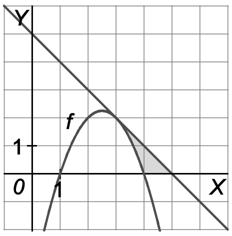
La recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = 3$

El eje horizontal

Hay que calcular la recta tangente a la parábola en el punto $A(3, f(3)) = A(3, 2)$.

Como $f'(x) = -2x + 5$, $f'(3) = -1$, y la recta tangente es: $y = -1(x - 3) + 2 \Rightarrow y = -x + 5$

En el primer trozo (desde $x = 3$ hasta $x = 4$), la recta va por encima de la parábola y el segundo trozo (desde $x = 4$ hasta $x = 5$) está por encima del eje X. Por tanto, el área buscada es:



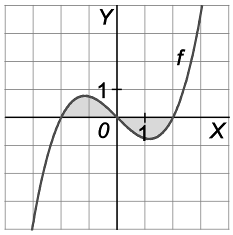
$$\int_3^4 \left((-x+5) - (-x^2+5x-4)\right)dx + \int_4^5 (-x+5)\,dx = \int_3^4 (x^2 - 6x + 9)\,dx + \int_4^5 (-x+5)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_3^4 + \left[\frac{-x^2}{2} + 5x\right]_4^5 =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - 3\cdot 4^2 + 9\cdot 4\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 3\cdot 3^2 + 9\cdot 3\right) + \left(\frac{-5^2}{2} + 5\cdot 5\right) - \left(\frac{-4^2}{2} + 5\cdot 4\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\ \text{u}^2$$

76. Calcula $\int_{-1}^{1} x(x^2 - 1)\,dx$ y explica mediante un gráfico el significado geométrico del valor obtenido.

$$\int_{-1}^{1} x(x^2-1)\,dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$



La función es simétrica respecto al origen $O(0, 0)$ y, por tanto, el área de la derecha es igual al área de la izquierda.

$$\int_{-1}^{0} x(x^2-1)\,dx = -\int_0^1 (x^3 - x)\,dx$$

77. Considerando la curva de ecuación $y = x^2 + 8x$:

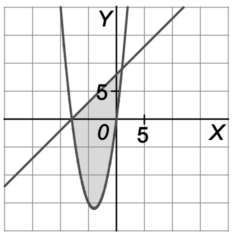
a) Calcula las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y = 2x$.

b) Calcula el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación $y = x + 8$.

a) Como la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $f'(a)$ y la pendiente de la recta $y = 2x$ es 2, hay que calcular un punto $A(a, f(a))$ con $f'(a) = 2$.

$f'(a) = 2a + 8 = 2$, si $a = -3$

El punto buscado es $A(-3, f(-3)) = A(-3, -15)$.



b) $x^2 + 8x = x + 8$, si $x = -8$ o $x = 1$

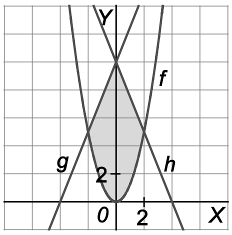
El área buscada es:

$$\int_{-8}^{1} \left((x+8) - (x^2+8x)\right)dx = \int_{-8}^{1} (-x^2 - 7x + 8)\,dx = \left[\frac{-x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 8x\right]_{-8}^{1} =$$

$$= \left(\frac{-1^3}{3} - \frac{7}{2}1^2 + 8\cdot 1\right) - \left(\frac{-(-8)^3}{3} - \frac{7}{2}(-8)^2 + 8\cdot(-8)\right) = \frac{243}{2}\ \text{u}^2.$$

78. Representa gráficamente y obtén el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x)=\frac{5}{4}x^2,\ g(x)=\frac{1}{2}(5x+20)\ \text{ y }\ h(x)=\frac{1}{2}(-5x+20)$$



Punto de corte de la función con cada una de las rectas:

$$\frac{5}{4}x^2=\frac{1}{2}(5x+20)\Rightarrow 5x^2-10x-40=0\Rightarrow x^2-2x-8=0\Rightarrow x=-2 \text{ o } x=4$$

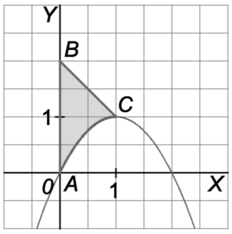
$$\frac{5}{4}x^2=\frac{1}{2}(-5x+20)\Rightarrow 5x^2+10x-40=0\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow x=-4 \text{ o } x=2$$

Los puntos de corte que limitan nuestro recinto son $x=-2$ y $x=2$.

Observando la simetría del recinto respecto del eje Y, el área pedida es:

$$A=2\int_0^2\left(-\frac{5}{2}x+10-\frac{5}{4}x^2\right)dx=2\left[-\frac{5x^2}{4}+10x-\frac{5}{12}x^3\right]_0^2=2\cdot\left(-\frac{5\cdot 2^2}{4}+10\cdot 2-\frac{5}{12}\cdot 2^3\right)=2\cdot\frac{35}{3}=\frac{70}{3}\ \text{u}^2.$$

79. Representa gráficamente y halla el área del recinto *ABC*, donde *A*(0, 0), *B*(0, 2), *C*(1, 1), las líneas *AB* y *BC* son rectas, y la línea *AC* tiene por ecuación $y=2x-x^2$.



La ecuación de la recta que une los puntos $B(0, 2)$ y $C(1, 1)$ es $y=-x+2$.

El recinto está limitado superiormente por la recta e inferiormente por la parábola.

Su área es:

$$A=\int_0^1\left(-x+2-\left(2x-x^2\right)\right)dx=\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1=\frac{5}{6}\ \text{u}^2.$$

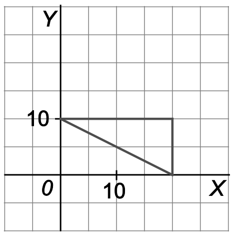
80. Calcula el valor de *m*, $m>0$, para que el área encerrada entre las líneas $y=x^2$ e $y=mx$ sea 36.

Puntos de corte de las funciones: $x^2=mx\Rightarrow x=0$ y $x=m$.

En el intervalo $[0, m]$, $mx\geq x^2$, y como $m>0$, el área entre la recta y la parábola es:

$$\int_0^m\left(mx-x^2\right)dx=\left[\frac{m}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^m=\frac{m}{2}\cdot m^2-\frac{m^3}{3}=\frac{m^3}{6}=36\Rightarrow m=6$$

81. Calcula, por geometría y utilizando el cálculo integral, el área del triángulo de vértices $(0,10)$, $(20,10)$ y $(20,0)$.



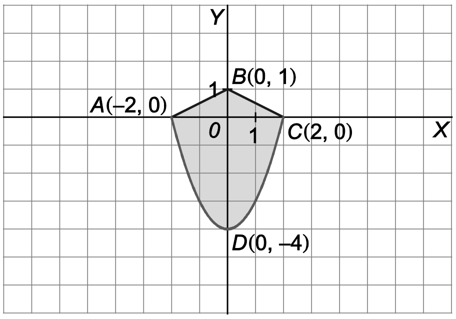
La base del triángulo mide 20, y la altura, 10, luego su área es 100 u^2.

Con cálculo integral, el área del triángulo entre las rectas

$y=10$, $y=-\frac{1}{2}x+10$, $x=0$, $x=20$, nos la da la siguiente integral:

$$\int_0^{20}\left(10-\left(-\frac{1}{2}x+10\right)\right)dx=\int_0^{20}\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{20}=100\ \text{u}^2.$$

82. Determina el área de la figura *ABCDA* sabiendo que la curva *ADC* es parte de la gráfica de una función polinómica de segundo grado.



Como es simétrica respecto del eje ***Y***, es suficiente con calcular el área que está a la derecha del eje vertical y multiplicarla por 2.

Esa área está limitada por la parábola que pasa por los puntos $A(-2, 0)$, $C(2, 0)$ y $D(0, -4)$.

Como corta al eje en $x = -2$ y en $x = 2$, su ecuación es $f(x) = a(x + 2)(x - 2)$ y como pasa por D, vale -4 si $x = 0$, $a = 1$.

Con estos datos, la ecuación de la parábola es $f(x) = x^2 - 4$. La ecuación de la recta que pasa por B y C es $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

El área de la derecha es:

$$\int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x + 1 - (x^2 - 4)\right)dx = \int_0^2 \left(-x^2 - \frac{1}{2}x + 5)\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{4} + 5x\right]_0^2 = \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{2^2}{4} + 5\cdot 2\right) = \frac{19}{3}\ \text{u}^2.$$

Área buscada: $2\cdot\frac{19}{3} = \frac{38}{3}$ u^2.

83. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ |x^2 - 2x| & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

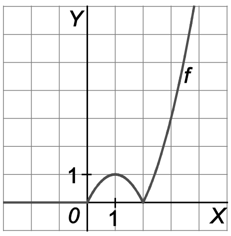
a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad en el punto $x = 0$.

c) Estudia su derivabilidad en $x = 0$.

d) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y la parte positiva del eje X.

a)



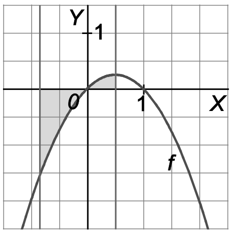
b) La función es continua en $x = 0$, pues $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ |x^2 - 2x| & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Luego $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -2x + 2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \neq 2 = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$. Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$.

d) $\int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$ u^2.

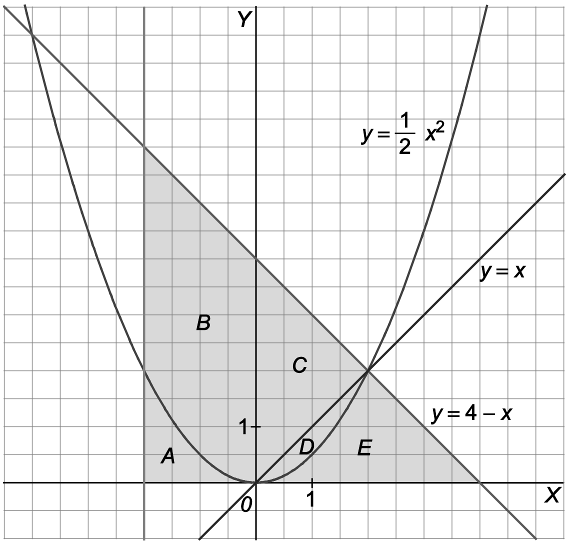
84. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x - x^2$. Encuentra el intervalo $[a, b]$ para el que $\int_a^b (x - x^2)dx$ alcanza el máximo valor.



Como $\int_a^b (x - x^2)dx$ mide la diferencia entre las áreas limitadas por la curva por encima y por debajo del eje horizontal, se obtendrá el máximo valor cuando se abarque toda la región de la curva que esté sobre el eje horizontal, esto es, en [0, 1].

Así pues, el máximo valor de la integral es $\int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$.

85. Calcula el área de las regiones nombradas como *A*, *B*, *C*, *D* y *E* en el siguiente dibujo.



Empezamos por las más sencillas:

C es un triángulo de base 4 y altura 2: $A_3 = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ u}^2$.

$D + E$ es un triángulo de base 4 y altura 2: $A_4 + A_5 = 4 \text{ u}^2$.

D es el área entre una parábola y una recta:

$$A_4 = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{6}2^3 = \frac{2}{3} \text{ u}^2.$$

Luego $A_5 = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ u}^2$.

$A + B$ es un trapecio de bases 6 y 4 y altura 2:

$A_1 + A_2 = \frac{(6+4) \cdot 2}{2} = 10 \text{ u}^2$.

A es el área entre el eje de abscisas, la parábola y la recta $x = -2$: $A_1 = \int_{-2}^{0} \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{0} = -\frac{1}{6}(-2)^3 = \frac{4}{3} \text{ u}^2$.

Luego: $B = 10 - \frac{4}{3} = \frac{26}{3} \text{ u}^2$.

Teorema del valor medio del cálculo integral

86. Encuentra el valor medio de:

a) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^{\frac{1}{2}}$ y $f_3(x)=x^{\frac{1}{3}}$ sobre el intervalo $[0,1]$.

b) Conjetura, a partir del apartado anterior, el valor medio de $f_n(x)=x^{\frac{1}{n}}$ en dicho intervalo.

c) ¿A qué número se aproxima el valor medio de $f_n(x)=x^{\frac{1}{n}}$ cuando n es grande? ¿Se puede explicar este resultado a partir de la gráfica de dicha función?

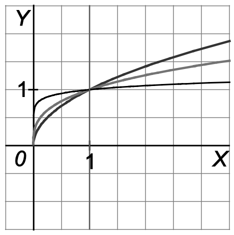
a) Valor medio de $f_1(x)$: $\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}=f_1(c)(1-0)=f_1(c)$

Valor medio de $f_2(x)$: $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}=f_2(c)$

Valor medio de $f_3(x)$: $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\,dx=\left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^1=\frac{3}{4}=f_3(c)$

b) $f(c)=\frac{n}{n+1}$

c) Se aproxima a 1, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$.



En las gráficas de $f(x)$ se observa que a medida que n crece, el área parece cada vez más un cuadrado de lado 1.

87. Dos autores de este libro hicieron en el verano de 2008 la travesía a pie de los Carros de Foc por el Pirineo catalán empleando 95 horas, a lo largo de las cuales fueron anotando la altitud a la que se encontraban en diversos momentos y, después de aproximar y redondear los datos, obtuvieron la siguiente tabla.

Tiempo (h)	3	15	30	25	20	2
Altitud (m)	2000	2200	2300	2400	2500	2600

¿Cuál fue la altitud media a la que se movieron?

La altitud media es el valor medio de la función altitud en el intervalo [0, 95].

Como no se conoce la expresión de la altitud, sino solo una tabla de valores, se aproxima dicha integral con la suma de las áreas de los rectángulos, es decir, el numerador de la siguiente fracción:

Altitud media $\simeq\frac{3\cdot2000+15\cdot2200+30\cdot2300+25\cdot2400+20\cdot2500+2\cdot2600}{95}\simeq2349{,}47$ m.

Aplicaciones de la integral definida en las ciencias sociales

88. Una empresa quiere producir $c(t) = 200 + 10t$ unidades de un producto que pretende vender a $p(t) = 200 - 2t$ € unidad, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la producción.

a) Halla, dependiendo de t, la función beneficio $B(t)$.

b) Halla el beneficio acumulado durante los primeros 90 días.

a) El beneficio de un día es $B(t) = c(t)p(t) = (200 + 10t)(200 - 2t) = 40\,000 + 1600t - 20t^2 = 20\left(2000 + 80t - t^2\right)$ euros.

b) Para saber el beneficio acumulado se calcula:

$$\int_0^{90} B(t)dt = 20\int_0^{90}\left(2000 + 80t - t^2\right)dt = 20\left[2000t + 40t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^{90} =$$

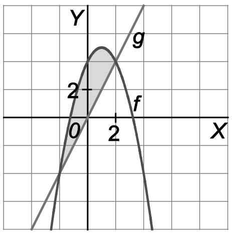
$$= 20(180\,000 + 324\,000 - 243\,000) = 5\,220\,000 \text{ €}.$$

89. Una inmobiliaria está interesada en adquirir unos terrenos que pueden ser representados en un determinado plano como la superficie encerrada entre la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y la recta $g(x) = 2x$.

a) Halla la representación simultánea de estas dos funciones.

b) Si una unidad del área de este plano equivale a 1 km^2 y el precio del kilómetro cuadrado es de 30 millones de euros, ¿qué importe debe pagar la inmobiliaria por esos terrenos?

a)



b) Las funciones se cortan en los puntos: $-x^2 + 2x + 4 = 2x \Rightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ y $x = 2$

Su área: $\int_{-2}^{2}\left(-x^2 + 2x + 4 - 2x\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$ km^2

El precio del terreno: $30 \cdot \frac{32}{3} = 320$ millones de euros.

90. Una empresa estima que la tasa de variación de gastos de mantenimiento de sus equipos informáticos viene dada por la función:

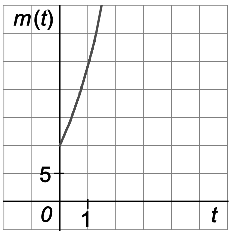
$$m(t) = 10 + 10t + 4t^2$$

donde *t* se mide en años, y *m*, en cientos de euros por año. Se pide:

a) Dibujar la gráfica y hacer una interpretación de la misma.

b) Hallar el área entre la curva anterior y el eje de abscisas, entre los valores $t = 0$ y $t = 5$. ¿Qué representa el resultado?

a)



La tasa de variación de los gastos de mantenimiento aumenta con el paso del tiempo.

b) $\int_0^5 \left(10 + 10t + 4t^2\right) dt = \left[10t + 5t^2 + \dfrac{4t^3}{3}\right]_0^5 = \dfrac{1025}{3} \simeq 341{,}67$

El área representa el dinero total gastado en mantenimiento de equipos los 5 primeros años y es de 34167 €.

CUESTIONES

91. Un estudiante de 2.º de Ciencias Sociales, que no maneja muy bien el método de integración por partes, tiene que calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int xe^x \, dx$$

Un compañero le dice que la primitiva que busca es de la forma $F(x) = Axe^x + Be^x$ siendo *A* y *B* números reales.

¿Cómo podrá obtener la integral que busca?

$F'(x) = xe^x$

Así pues, derivando la expresión $F(x) = Axe^x + Be^x$, obtenemos que $A\left[e^x + xe^x\right] + Be^x = xe^x$, es decir:

$$(A + B)e^x + Axe^x = xe^x$$

siendo esta igualdad válida para todo *x*, que ocurrirá sólo si $A = 1$ y $B = -1$, por lo que las primitivas de $f(x) = xe^x$ son las funciones de la forma $F(x) = xe^x - e^x + C$.

92. $F(x) = x^2 - \dfrac{1}{x} - 1$ es una primitiva de:

A. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$ **B.** $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$ **C.** $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{x^2}$

Si $F(x) = x^2 - \dfrac{1}{x} - 1$, $F'(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$ por lo que *F* es una primitiva de $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$,

Por tanto, la respuesta correcta es A.

93. Una primitiva de $f(x)=e^{x+e^x}$ pueden ser:

A. $\dfrac{e^{x+e^x}}{1+e^x}$ **B.** $(1+e^x)e^x+e^x$ **C.** e^{1+e^x} **D.** e^{x+e^x} **E.** e^{e^x}

Analizando las respuestas, vemos que si $F(x)=e^{e^x}$, entonces $F'(x)=e^{e^x}\cdot e^x=e^{x+e^x}=f(x)$, es decir, la respuesta correcta es E.

94. ¿Son verdadera o falsas estas afirmaciones?

a) Si f es continua y par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

b) Si f' es continua, entonces $\int_{0}^{7} f'(x)dx=f(7)-f(0)$.

c) $\int_{0}^{\pi} x\operatorname{sen} x\,dx=2x$

d) $\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)dx=2\int_{0}^{1}(ax^2+c)dx$

e) $\int_{0}^{3} x(x-1)(x-3)dx$ mide el área de la región encerrada por la curva $f(x)=x(x-1)(x-3)$ y el eje horizontal.

a) Verdadera ya que, al ser f es simétrica respecto del eje de ordenadas por ser par, se cumple que $\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx$ y entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

b) Verdadera pues f es una primitiva de f'.

c) Falsa, porque la integral definida $\int_{0}^{\pi} x\operatorname{sen} x\,dx$ es un número.

d) Verdadera, pues $\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+c)dx+\int_{-1}^{1} bx\,dx$

Por un lado, $\int_{-1}^{1} bx\,dx=0$ ya que $y=bx$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Por otro lado, $\int_{-1}^{1}(ax^2+c)dx=2\int_{0}^{1}(ax^2+c)dx$ ya que $y=ax^2+c$ es una función par, simétrica respecto del eje vertical.

e) Falsa, ya que $y=x(x-1)(x-3)$ no tiene signo constante en el intervalo $[0, 3]$.

95. Halla dos números A y B tales que $\dfrac{6x-1}{x^2-1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}$ y calcula posteriormente $\int_{2}^{4}\dfrac{6x-1}{x^2-1}dx$.

$$\frac{6x-1}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1}=\frac{(A+B)x+B-A}{x^2-1}$$

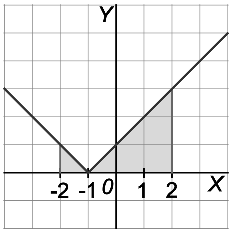
Así que: $\begin{array}{l} A+B=6 \\ -A+B=-1 \end{array}$

Por tanto, $B=\dfrac{5}{2}$, $A=\dfrac{7}{2}$ y $\int_{2}^{4}\dfrac{6x-1}{x^2-1}dx=\left[\dfrac{7}{2}\ln(x+1)\right]_2^4+\left[\dfrac{5}{2}\ln(x-1)\right]_2^4=\dfrac{7}{2}\cdot\ln 5-\dfrac{7}{2}\cdot\ln 3+\dfrac{5}{2}\cdot\ln 3=\dfrac{7}{2}\cdot\ln 5-\ln 3$.

96. Calcula, de dos formas diferentes, $\int_{-2}^{2}|x+1|\,dx$.

Esbozando la gráfica de $f(x)=|x+1|$, vemos que la integral pedida es el área sombreada, es decir:

$$\int_{-2}^{2}|x+1|\,dx=\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{2}\cdot 3^2=5\ \text{u}^2$$



Definiendo $f(x)$ a trozos, como $f(x)$ = $f(x)=\begin{cases}-(x+1) & \text{si } x<-1\\ x+1 & \text{si } x\ge -1\end{cases}$, tenemos que:

$$\int_{-2}^{2}|x+1|\,dx=\int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx+\int_{-1}^{2}(x+1)\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)-(-2+2)+(2+2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}+4+\frac{1}{2}=5\ \text{u}^2.$$

97. Si $f(x)=\left(x^5-x^3\right)^{15}$, calcula $\int_{-2}^{2}f(x)\,dx$.

Como $f(-x)=\left(-x^5+x^3\right)^{15}=-\left(x^5-x^3\right)^{15}=-f(x)$, resulta que $\int_{-2}^{0}f(x)\,dx=-\int_{0}^{2}f(x)\,dx$, así que $\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=0$.

98. Si $|f(x)|\le x^2+1$, ¿qué número de los siguientes no pueden ser $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$?

A. $-2{,}5$ **B.** -1 **C.** 0 **D.** $\sqrt{7}$ **E.** $-2\sqrt{2}$

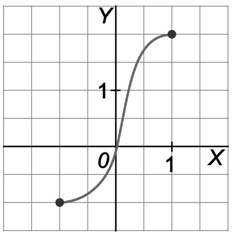
Si $|f(x)|\le x^2+1$, tenemos que $-\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)dx\le\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\le\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)dx$.

Así pues, como $\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$, resulta que $-\frac{8}{3}\le\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\le\frac{8}{3}$, por lo que no puede ser la respuesta E: $-2\sqrt{2}$ ya que $-2\sqrt{2}<\frac{-8}{3}$ pues $2\sqrt{2}>\frac{8}{3}$ ya que $8>\frac{64}{9}$.

Las demás respuestas sí están comprendidas entre $-\frac{8}{3}$ y $\frac{8}{3}$.

99. Si *f* es continua y creciente en $[-1,2]$ con $f(-1)=-1$; $f(0)=0$ y $f(1)=2$, justifica que $-2\le\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\le 4$.

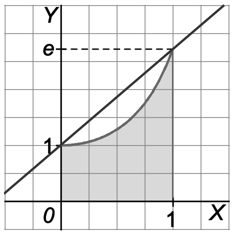
La gráfica de *f* es algo así, como se muestra al margen.



Así pues, $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\le\int_{0}^{1}f(x)\,dx\le 2$ y $\int_{-1}^{0}f(x)\,dx\le\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$, es decir:

$-1\le\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$, por lo que, claramente, $-2\le\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\le 4$.

100. Justifica que $\int_0^1 f(x)dx < \frac{e+1}{2}$ siendo $f(x) = e^{x^2}$.



En [0, 1] la función f es creciente siendo $f(0) = 1$ y $f(1) = e$.

Así pues su gráfica es algo así, como se muestra al margen.

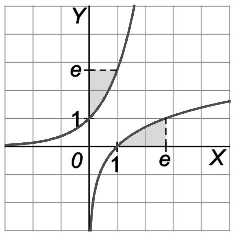
Por otra parte, si $0 \le x \le 1$, $x^2 \le x$, por lo que $e^{x^2} \le e^x$, con lo que $\int_0^1 e^{x^2}\,dx \le \int_0^1 e^x\,dx$.

Pero al ser $y = e^x$ cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$, $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ representa el área sombreada, que es menor que el área del trapecio de bases 1 y e y altura 1, cuyo valor es $\frac{e+1}{2}$.

Así pues $\int_0^1 e^{x^2}\,dx < \int_0^1 e^x\,dx < \frac{e+1}{2}$.

101. Observando que la función inversa de $f(x) = \ln x$ es $g(x) = e^x$, calcula $\int_1^e \ln x\,dx$.

Las gráficas de $f(x) = \ln x$, y $g(x) = e^x$ son, como se muestra en la figura, simétricas respecto de la bisectriz del 1er cuadrante, así que las zonas sombreadas tienen igual área, por lo que $\int_1^e \ln x\,dx = 1 \cdot e - \int_0^1 e^x\,dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1$.



102. *Justifica las siguientes afirmaciones sobre la función polinómica $f(x) = x^2$.

a) El área limitada por f, el eje X y las rectas verticales $x = -3$ y $x = 3$ es la mitad del área limitada por f y la recta $y = 9$.

b) El valor medio de f en el intervalo [1, 4] es igual a 7.

a) La recta $y = 9$ corta a la parábola en los puntos de abscisa $x = -3$ y $x = 3$. Por tanto:

$$A_1 = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)dx = [9x]_{-3}^{3} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = 54 - \left(\frac{27}{3} + \frac{27}{3}\right) = 54 - 18 = 36$$

El área es: $A_2 = \int_{-3}^{3} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \frac{27}{3} + \frac{27}{3} = \frac{54}{3} = 18$, es decir, $A_2 = \frac{1}{2}A_1$

b) $\int_1^4 x^2\,dx = f(c)(4-1) \Rightarrow \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = f(c) \cdot 3 \Rightarrow f(c) = \frac{21}{3} = 7$

PROBLEMAS

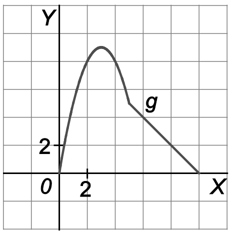
103. Un publicista diseña un cartel publicitario que tiene la siguiente forma: base horizontal de 10 m de longitud y resto del contorno limitado por la función

$$g(x)=\begin{cases}-x^2+6x & \text{si } 0\le x\le 5\\ -x+10 & \text{si } 5< x\le 10\end{cases}$$

Dibuja el contorno correspondiente al cartel publicitario y calcula su área.

$$A=\int_0^5\left(-x^2+6x\right)dx+\int_5^{10}(-x+10)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^5+\left[-\frac{x^2}{2}+10x\right]_5^{10}=$$

$$=\left(-\frac{125}{3}+75\right)+(-50+100)-\left(-\frac{25}{2}+50\right)=\frac{100}{3}+\frac{25}{2}=\frac{275}{6}\text{ m}^2$$



104. Una fábrica arroja diariamente material a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función:

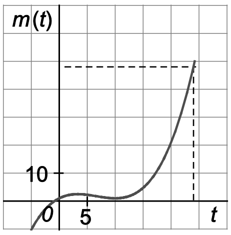
$m(t)=0{,}01t^3-0{,}02t^2+t+1$, siendo m la cantidad de material en kg, y t, la hora del día.

a) Esboza la gráfica de esta función en el intervalo [0, 24].

b) ¿Qué representa el área bajo esa curva y sobre el eje X?

c) Calcula el material que se arroja al día.

a)



b) El área bajo la curva representa la cantidad de material arrojado en un día.

c) $\int_0^{24}\left(0{,}01t^3-0{,}2t^2+t+1\right)dt=\left[\frac{0{,}01t^4}{4}-\frac{0{,}2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right]_0^{24}=\frac{0{,}01\cdot24^4}{4}-\frac{0{,}2\cdot24^3}{3}+\frac{24^2}{2}+24=219{,}84$ kg al día.

105. *Un estudio estadístico permite establecer que en cierta ciudad, el número miles de hogares en los que hay ordenador viene dado por la función $f(t)=\dfrac{e^{0{,}1t}}{2+e^{0{,}1t}}$, donde t mide los años transcurridos desde el 1 de enero de 2004.

Calcula la media de hogares en los que hay ordenadores entre el 1 de enero de 2006 y el 1 de enero de 2010.

$\int_2^6\frac{e^{0{,}1t}}{2+e^{0{,}1t}}dt=10\left[\ln\left(2+e^{0{,}1t}\right)\right]_2^6\simeq 1{,}71=f(c)(6-2)\Rightarrow f(c)\simeq\frac{1{,}71}{4}\simeq 0{,}43S$. Es decir, 430 hogares.

106. El número de personas afectadas por una enfermedad contagiosa viene dado por $N(t)=1000\left(1-e^{-0{,}2t}\right)$, donde t representa el número de días transcurridos desde la aparición de la epidemia. Se acepta que el valor medio de la función $N(t)$ en el intervalo [0, 30] es una buena aproximación del número medio de enfermos por día en un período de 30 días. Calcula esa media de enfermos por días.

$\int_0^{30}1000\left(1-e^{-0{,}2t}\right)dt=1000\left[t+5e^{-0{,}2t}\right]_0^{30}\simeq 25\,012{,}39=30f(c)\Rightarrow f(c)\simeq\frac{25012{,}39}{30}\simeq 834$ enfermos al día de media.

107. **a)** Sea la curva de ecuación $f(x) = px^2 + 2x + q$. Calcula los valores de p y q, para los que la curva pasa por el punto (2, 15) y tiene un máximo para $x = 1$.

b) Esboza la gráfica de la función $f(x)$ y halla el área limitada por dicha función y el eje X.

a) $f(x) = px^2 + 2x + q \Rightarrow f'(x) = 2px + 2$

La función pasa por el punto $A(2, 15) \Rightarrow f(2) = 15 \Rightarrow 4p + 4 + q = 15 \Rightarrow 4p + q = 11$.

La función tiene un máximo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2p + 2 = 0 \Rightarrow p = -1$.

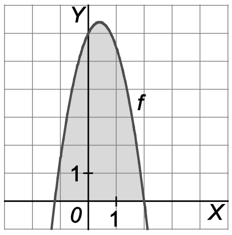
Concluimos pues que, $p = -1$ y $q = 15$.

b) La función es $f(x) = -x^2 + 2x + 15$.

Es una parábola cóncava hacia abajo que corta al eje X en los puntos $B(-3, 0)$ y $C(5, 0)$.

El área pedida nos la da la integral:

$$A = \int_{-3}^{5} \left(-x^2 + 2x + 15\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 15x\right]_{-3}^{5} = \frac{256}{3} \text{ u}^2.$$

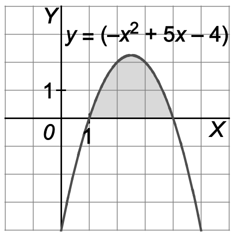


108. **La curva $y = a(-x^2 + 5x - 4)$, $a > 0$ limita con el eje de abscisas un recinto de 9 cm². Halla el valor de a.**

Dicha familia de curvas son parábolas cóncavas hacia abajo que cortan al eje X. en los puntos $A(1, 0)$ y $B(4, 0)$. La condición del enunciado dice que:

$$9 = \int_{1}^{4} a\left(-x^2 + 5x - 4\right) dx = a\int_{1}^{4} (-x^2 + 5x - 4) dx = a\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right]_{1}^{4} = \frac{9a}{2} \text{ cm}^2.$$

Por tanto, $9 = \frac{9a}{2} \Rightarrow a = 2$.



109. **Dada la función $f(x) = \frac{2}{x}$, se pide:**

a) Encontrar la primitiva F de f que verifica que $F(1) = 2$.

b) Representar la función f y calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = e$ y $x = e^2$.

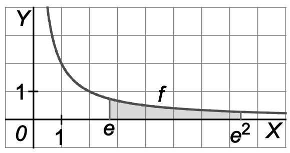
a) $F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{2}{x} dx = 2\ln|x| + C$

Como F ha de cumplir que $F(1) = 2$, entonces, $F(1) = 2\ln 1 + C = 2 \Rightarrow 0 + C = 2 \Rightarrow C = 2$.

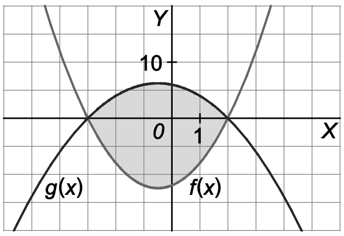
La función buscada es $F(x) = 2\ln|x| + 2$.

b) En el intervalo $[e, e^2]$ la función es continua (el punto $x = 0$ no pertenece a dicho intervalo) y siempre positiva. Por ello, el área pedida es:

$$A = \int_{e}^{e^2} f(x) dx = \int_{e}^{e^2} \frac{2}{x} dx = 2\left[\ln|x|\right]_{e}^{e^2} = 2 \cdot \left(\ln e^2 - \ln e\right) = 2 \text{ u}^2$$



110. Dadas las parábolas $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ y $g(x) = -x^2 - x + 6$ cuyas gráficas se presentan a continuación, halla el área del recinto acotado encerrado entre ambas.



El área pedida nos la da la integral:

$$\int_{-3}^{2}(g(x)-f(x))dx = \int_{-3}^{2}\left(-x^2 - x + 6 - \left(2x^2 + 2x - 12\right)\right)dx =$$

$$= \int_{-3}^{2}\left(-3x^2 - 3x + 18\right)dx = \left[-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 18x\right]_{-3}^{2} = \frac{125}{2}\ \text{u}^2.$$

111. Se considera la función real de variable real:

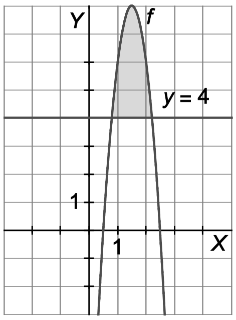
$$f(x) = -8x^2 + 24x - 10$$

a) Calcula los máximos y mínimos locales de *f* y representa gráficamente la función *f*.

b) Determina el área del recinto cerrado comprendido entre la gráfica de la función *f* y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 4$.

a) La función *f* es una parábola cóncava hacia abajo.

Su máximo absoluto es su vértice $V\left(\frac{3}{2}, 8\right)$ y corta al eje *X* en los puntos $A(0{,}5;\ 0)$ y $B(2{,}5;\ 0)$.



b) El área del recinto es:

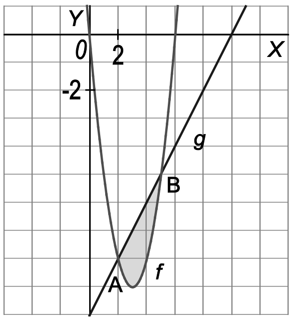
$$A = \int_{1}^{2}(f(x)-g(x))dx = \int_{1}^{2}\left(-8x^2 + 24x - 10 - 4\right)dx =$$

$$= \int_{1}^{2}\left(-8x^2 + 24x - 14\right)dx = \left[-\frac{8}{3}x^3 + 12x^2 - 14x\right]_{1}^{2} = \frac{10}{3}\ \text{u}^2.$$

112. Sean las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 6x$ y $g(x) = x - 10$.

c) Representa gráficamente las funciones *f* y *g*.

d) Calcula el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones *f* y *g*.



a) La función *f* es una parábola cóncava hacia arriba que corta al eje *X* en los puntos $C(0, 0)$ y $D(6, 0)$.

La función *g* es una recta creciente que corta a los ejes en los puntos $E(0, -10)$ y $F(10, 0)$.

Los puntos de corte entre ambas funciones se obtienen al resolver $f(x) = g(x)$ y son $A(2, -8)$ y $B(5, -5)$.

b) Como en el recinto la recta se sitúa por encima de la parábola, el área es:

$$A = \int_{2}^{5}\left(x - 10 - \left(x^2 - 6x\right)\right)dx = \int_{2}^{5}\left(-x^2 + 7x - 10\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 10x\right]_{2}^{5} = \frac{9}{2}\ \text{u}^2.$$

113. Si la derivada de una función real de variable real *f* viene dada por $f'(x)=3x^2+2x$, calcula la expresión de *f*(*x*) sabiendo que su gráfica pasa por el punto *A*(1, 4).

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(3x^2+2x\right)dx=x^3+x^2+C$$

Como f pasa por *A*(1, 4), entonces, *f*(1) = 4, es decir, 1 + 1 + *C* = 4, *C* = 2.

La función buscada es $f(x)=x^3+x^2+2$.

114. Calcula $\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}dx$.

$$\int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}dx=\left[-\frac{2}{x+1}\right]_0^1=1$$

115. Dada la función $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x}$, calcula el área delimitada por la gráfica de *f*(*x*), el eje *X* y las rectas $x=1$ y $x=3$.

En el intervalo [1, 3] la función es continua (los puntos *x* = –2 y *x* = 0 no pertenecen a dicho intervalo) y siempre positiva. Por ello, el área pedida es:

$$A=\int_1^3 f(x)dx$$

Encontramos primero una primitiva de *f*, función racional: $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx=\int \frac{x+1}{x(x+2)}dx$

$$\frac{x+1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}\Rightarrow x+1=A(x+2)+Bx$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-2\Rightarrow -1=-2B\Rightarrow B=\frac{1}{2} \\ x=0\Rightarrow 1=2A\Rightarrow A=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{x(x+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln|x|+\ln|x+2|\right)+C$$

$$A=\int_1^3 \frac{1}{x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\left[\left(\ln|x|+\ln|x+2|\right)\right]_1^3=\frac{1}{2}\cdot\ln 5\ \text{u}^2$$

116. Una función *f*(*x*) tiene como primera derivada $f'(x)=ax+3$. Halla el valor del parámetro *a* si *f*(*x*) pasa por los puntos *A*(1, 0) y *B*(2, –3). Indica también la expresión de la función *f* y calcula $\int_1^3 f(x)dx$.

$$f(x)=\int f(x)dx=\int(ax+3)dx=\frac{a}{2}x^2+3x+C$$

Como *f* pasa por *A*(1, 0), entonces, *f*(1) = 0, es decir, $\frac{a}{2}+3+C=0$ .Como *f* pasa por *B*(2, –3), entonces, *f*(2) = –3, es decir, $2a+6+C=-3$. De estas dos ecuaciones deducimos que *a* = –4 y *C* = –1.

La función buscada es $f(x)=-2x^2+3x-1$.

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3\left(-2x^2+3x-1\right)dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x\right]_1^3=-\frac{19}{3}$$

117. Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{x(2x-1)}{x-1}$, calcula $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}dx$.

$$\int \frac{f(x)}{x^2}dx=\int\left(\frac{x(2x-1)}{x-1}:x^2\right)dx=\int\frac{2x-1}{x(x-1)}dx=\int\frac{2x-1}{x^2-x}dx=\ln\left|x^2-x\right|+C$$

$$\int_2^5\frac{f(x)}{x^2}dx=\left[\ln\left|x^2-x\right|\right]_2^5=\ln 20-\ln 2\ u^2=\ln 10$$

118. Dada la función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-3x+5 & \text{si } x\le 1\\ x^2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) Calcula $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$ ya que en el único punto problemático ($x=1$) se cumple que:

$$\left[\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-x^2-3x+5\right)=1\right]=\left[\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2\right)=1\right]=\left[f(1)=1\right]$$

b) $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1\left(-x^2-3x+5\right)dx+\int_1^2 x^2\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{19}{6}+\frac{7}{3}=\frac{11}{2}$

119. Para estudiar la capacidad de memorizar de un niño se usa el siguiente modelo: si x es su edad en años, entonces dicha capacidad viene dada por $f(x)=1+2x\ln x$, con $0\le x\le 5$.

Calcula el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y su tercer cumpleaños.

Aplicando el teorema del valor medio, se tiene que existe $c\in[1,3]$ que cumple:

$$\int_1^3(1+2x\ln x)dx=f(c)(3-1)$$

Se calcula el valor de la integral y después se halla $f(c)$:

$$\int(1+2x\ln x)dx=\int dx+2\int x\ln x\,dx=x+2\int x\ln x\,dx$$

Esta última integral se calcula por partes: $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad g'(x)=x\Rightarrow g(x)=\dfrac{x^2}{2}$

$$\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)$$

Por tanto:

$$\int_1^3(1+2x\ln x)dx=\left[x+x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^3=\frac{5}{2}+9\left(\ln 3-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{5}{2}+9\left(\ln 3-\frac{1}{2}\right)=f(c)\cdot 2\Rightarrow$$

$\Rightarrow f(c)=\dfrac{5}{4}+\dfrac{9}{2}\cdot\left(\ln 3-\dfrac{1}{2}\right)\simeq 3{,}94$ es el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y tercer cumpleaños.

120. En un examen se ha pedido a los estudiantes que calculen las primitivas de la función $f(x) = 2\text{sen}\,x\cos x$.

I. Gema la resolvió con el cambio de variable $u = \text{sen}\,x$.

II. Fernando utilizó el cambio $y = \cos x$.

III. Iván lo hizo usando la fórmula 2sen x cos x = sen (2x).

Aunque los tres alumnos dieron respuestas distintas, el profesor les dijo que los tres habían calculado correctamente la primitiva.

Encuentra las tres respuestas dadas y explica por qué todas eran correctas sin ser iguales.

La primitiva de Gema: $I_1 = \int 2\text{sen}\,x\cos x\,dx = 2\int u\,du = 2\frac{u^2}{2} = u^2 = \text{sen}^2 x + C$

La primitiva de Fernando: $I_2 = \int 2\text{sen}\,x\cos x\,dx = -2\int y\,dy = -2\frac{y^2}{2} = -y^2 = -\cos^2 x$

La primitiva de Iván: $I_3 = \int 2\text{sen}\,x\cos x\,dx = \int \text{sen}(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) = -\frac{1}{2}(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + C$

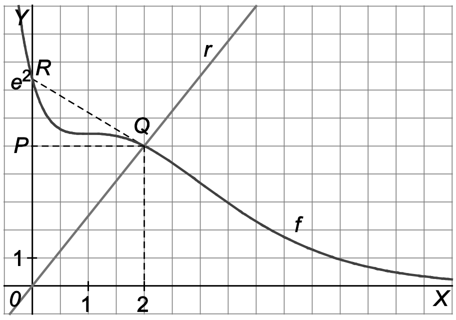
Como $I_1 - I_2 = 1$ e $I_1 - I_3 = \frac{1}{2}$, las tres primitivas se diferencian en una constante.

121. Se trasplanta un árbol y se observa que su tasa de crecimiento a los x años, medidos desde el trasplante, es de $1 - \frac{1}{(x+1)^2}$ metros por año. Si a los 5 años medía 5 metros, ¿cuánto medía al ser trasplantado?

Se calcula una primitiva: $\int \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = F(x)$

Aplicando la regla de Barrow: $\int_0^5 \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = F(5) - F(0) \Rightarrow \frac{25}{6} = 5 - F(0) \Rightarrow F(0) = 5 - \frac{25}{6} \simeq 0{,}83$ m medía al ser trasplantado.

122. Sea f la función definida en $\mathbb{R}$ por $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x+2}$. En el dibujo se muestra un trozo de la gráfica de f, así como de la recta $r: y=\frac{5}{2}x$.



a) Comprueba que el punto $Q(2, 5)$ está en dicha recta y en la gráfica de f.

b) Calcula el área de los triángulos OPQ y ORQ.

c) Determina el área encerrada por las gráficas de f, el eje vertical y la recta r, y comprueba que el número obtenido está comprendido entre los dos números del apartado b.

a) Está en la recta, pues $y(2)=\frac{5}{2}\cdot 2=5$, y también en la curva, pues $f(2)=\left(2^2+1\right)e^{-2+2}=5$.

b) OPQ tiene base 5 y altura 2, su área es 5 u^2.

ORQ tiene base e^2 y altura 2, luego su área es $e^2 \simeq 7{,}389$ u^2.

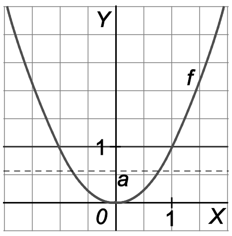
c) $\int_0^2\left(\left(x^2+1\right)e^{-x+2}-\frac{5}{2}x\right)dx=\left[-e^{-x+2}\left(x^2+2x+3\right)-\frac{5x^2}{4}\right]_0^2=3e^2-16\simeq 6{,}167$, que está comprendido entre los valores obtenidos anteriormente.

123. Dos hermanos heredan una parcela que tiene la forma de la región limitada por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=1$. Deciden dividirla en dos regiones de igual área mediante la recta horizontal $y=a$. Calcula el valor de a.

La recta $y=1$ corta a la parábola en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=1$, y la recta $y=a$ la corta en los puntos de abscisa $x=-\sqrt{a}$ y $x=\sqrt{a}$.

Como se ha de dividir en dos partes de igual área mediante la recta $y=a$, tiene que ocurrir que:

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=\frac{2}{3}.$$



Al resolver la integral primera se obtiene: $\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx=\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}=\frac{4a\sqrt{a}}{3}$

Igualando el resultado a $\frac{2}{3}$ y despejando:

$$\frac{4a\sqrt{a}}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow\sqrt{a^3}=\frac{1}{2}\Rightarrow a^3=\frac{1}{4}\Rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\simeq 0{,}63$$

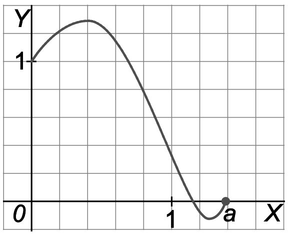
124. * La gráfica de la función $y = f(x)$ es la que tienes debajo. Ordena, de menor a mayor, los siguientes números.

a) $f'(1)$

b) El valor medio de $f(x)$ en el intervalo [0, a]

c) El valor medio de la función $f'(x)$ en el intervalo [0, a]

d) $\int_0^a f(x)dx$



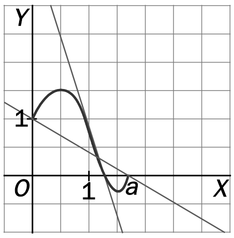
$f'(1)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$.

El valor medio de la función $f'(x)$ en el intervalo [0, a] es la pendiente de la recta que une los puntos

$A(0, f(0))$ y $B(a, f(a))$.

Trazando ambas rectas se observa que la $f'(1)$ es menor que $\dfrac{f(a)-f(0)}{a}$

y que ambos números son negativos.



El valor medio de f es $f(c)$ con $\int_0^a f(x)dx = f(c)(a-0)$, y como a es mayor que 1,

entonces $\int_0^a f(x)dx > f(c)$.

Además, ambos números son positivos, pues claramente el área sobre el eje horizontal es mayor que el área por debajo del eje.

Luego $f'(1) < \dfrac{f(a)-f(0)}{a} < f(c) < \int_0^a f(x)dx$.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. **Si $f(x)=2-\frac{1}{x}-\ln x$, calcula la derivada de la función $G(x)=x-x\ln x$ y obtén $\int_1^6 f(x)dx$.**

Si $G(x)=x-x\ln x$, $G'(x)=1-(\ln x+1)=-\ln x=f(x)+\frac{1}{x}-2$.

Así pues $f(x)=G'(x)-\frac{1}{x}+2$, con lo que $\int_1^6 f(x)dx=\int_1^6\left(G'(x)-\frac{1}{x}+2\right)dx=\left[G(x)\right]_1^6+\left[2x-\ln x\right]_1^6=$

$=\left[x-x\ln x\right]_1^6+\left[2x-\ln x\right]_1^6=6-6\cdot\ln 6-1+12-\ln 6-2=15-7\cdot\ln 6$

2. **Obtén $\int_0^1\left(x^2+1\right)^7 x\,dx$, $\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx$ y $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$.**

$$\int_0^1\left(x^2+1\right)^7 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2+1\right)^7 2x\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^8}{8}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{2^8}{8}-\frac{1}{8}\right)=\frac{255}{16}.$$

$$\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\left[\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^1=\ln\left(e^x+1\right)-\ln 2$$

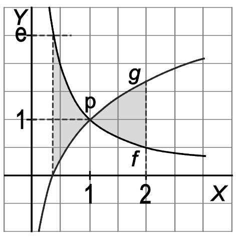
$$\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{1}{2}$$

3. **Calcula el área encerrada entre las gráficas de $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\ln x+1$ y las rectas verticales $x=\frac{1}{e}$ y $x=2$. (Utiliza el ejercicio 1 para obtener una primitiva de g).**

En el ejercicio 1 vimos que si $G(x)=x-x\ln x$, entonces $G'(x)=-\ln x$, así que una primitiva de $g(x)=\ln x+1$ es $T(x)=-G(x)+x$, es decir:

$$T(x)=-x+x\ln x+x=x\ln x.$$

La región de las que nos piden el área es la de la figura, siendo $P(1, 1)$:



El área pedida es:

$$\int_{\frac{1}{e}}^1\left(\frac{1}{x}-\ln x-1\right)dx+\int_1^2\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\ln x-x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^1+\left[x\ln x-\ln x\right]_1^2=-\ln\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}+2\cdot\ln 2-\ln 2=1-\frac{1}{e}+\ln 2.$$

4. Calcula el valor del número positivo *a* en los siguientes casos:

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = a$ **b)** $\int_0^a \frac{1}{x+1}dx = 3$ **c)** $\int_0^3 \frac{1}{x+a}dx = 5$ **d)** $\int_a^3 \frac{1}{x+1}dx = 1$

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = \left[\ln(x+1)\right]_0^3 = \ln 4 = a$.

b) $\int_0^a \frac{1}{x+1}dx = \left[\ln(x+1)\right]_0^a = \ln(a+1) = 3 \Rightarrow a = e^3 - 1$.

c) $\int_0^3 \frac{1}{x+a}dx = \left[\ln(x+a)\right]_0^3 = \ln(3+a) - \ln a = \ln\frac{3+a}{a} = 5$, así que $\frac{3+a}{a} = e^5$, por lo que $3 = a(e^5 - 1)$ y $a = \frac{3}{e^5-1}$.

d) $\int_a^3 \frac{1}{x+1}dx = \left[\ln(x+1)\right]_a^3 = \ln 4 - \ln(a+1) = \ln\frac{4}{a+1} = 1 \Rightarrow \frac{4}{a+1} = e \Rightarrow a = \frac{4-e}{e}$

5. ¿Se puede asegurar que si $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^4 + x^2 + 1}$, entonces $\int_{-2}^2 f(x)dx = 0$?

$f(-x) = \frac{-x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} = -f(x)$, así que $\int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = -\int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = 0$.

6. ¿Cuál es el signo de $\int_1^2 e^x \ln x\, dx$?

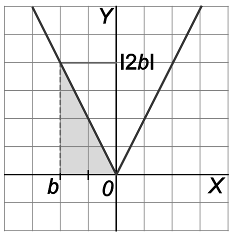
Como en [1, 2] se verifica que $f(x) = e^x \ln x \geq 0$ y f es continua en dicho intervalo, tenemos que $\int_1^2 e^x \ln x\, dx > 0$.

7. Si *f* es continua y $\int_2^4 f(x)dx = 7$, explica por qué $f(x) \geq 3{,}5$ para algún valor de *x* en ese intervalo.

Si $f(x) < 3{,}5$ para cualquier valor de x en [2, 4] su gráfica estaría por debajo de la recta $y = 3{,}5$.

Por tanto, $\int_2^4 f(x)dx < 3{,}5 \cdot (4 - 2) = 7$.

8. Calcula $\int_b^0 |2x|dx$ si *b* es un número negativo.



La integral pedida corresponde al área de la región sombreada:

Su valor es $A = \frac{1}{2}|b||2b| = b^2$.

9. Si *f* es continua y $\int_0^1 f(x)dx = 2$, $\int_0^2 f(x)dx = 1$ y $\int_2^4 f(x)dx = 7$, obtén $\int_0^4 f(x)dx$ y $\int_4^1 f(x)dx$.

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = 1 + 7 = 8$$

$$\int_4^1 f(x)dx = -\int_1^4 f(x)dx = -\left[\int_0^4 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\right] = -[8 - 2] = -6$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. En economía, el coste marginal se identifica con la derivada de coste total. En una empresa, un estudio concluye que el coste marginal $C_m(q)$ en miles de euros es función del número q de artículos fabricados en la forma $C_m(q) = 3q^2 - 12q - 17$. ¿Cuál es el coste total $C_T(q)$ en miles de euros si para 5 artículos es de 20 000 €?

A. $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q$

B. $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + 5$

C. $C_T(q) = 6q - 12$

D. $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + 130$

La respuesta correcta es la D. Una primitiva de $C_m(q) = 3q^2 - 12q - 17$ es $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + C$. Como sabemos que $C_T(5) = 20$, podemos hallar la constante C, $C_T(5) = 5^3 - 6\cdot 5^2 - 17\cdot 5 + C = 20$.

Por tanto, $C = 130$ y $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + 130$.

2. Sea S el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $a \le x \le b$ y $0 \le y \le f(x)$. Si el área de S vale 1, ¿cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) $a = -1$, $b = 0$ y $f(x) = e^{-x}$

b) $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$ y $f(x) = \text{tg } x$

c) $a = 1$, $b = e$ y $f(x) = \frac{1}{x}$

d) $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$ y $f(x) = \text{sen } x$

A. Ninguna **B.** Solo una **C.** Solo dos **D.** Solo tres

La respuesta correcta es C: solo c y d son verdaderas. Calculemos dichas áreas:

a) $\int_{-1}^{0} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0} = e - 1$. FALSA

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}\, x\, dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} \ne 1$. FALSA

c) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x} dx = \left[\ln x\right]_{1}^{e} = \ln e - \ln 1 = 1$. VEDADERA

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, x\, dx = \left[-\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1$. VERDADERA

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

3. Sea $I = \int_{-1}^{2}(x^2 - 1)dx$.

A. I mide el área de la región limitada por $y = x^2 - 1$, las rectas $x = -1$, $x = 2$ e $y = 0$.

B. $I = 0$

C. $I = \int_{-2}^{1}(1 - x^2)dx$

D. $I \le \int_{1}^{2}(x^2 - 1)dx$

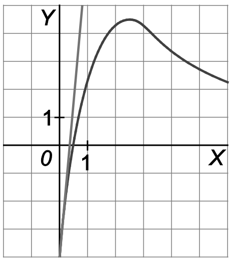
A es incorrecta. La función $f(x) = x^2 - 1$ es una parábola que va por debajo del eje X entre -1 y 1, así pues, I no mide el área entre -1 y 2.

B es correcta: $\int_{-1}^{2}(x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{2} = 0$.

C es correcta ya que $\int_{-2}^{1}(1 - x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = 0$.

D es correcta ya que $\int_{1}^{2}(x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} = \frac{4}{3}$. Entre 1 y 2 la función va siempre por encima del eje X.

4. La gráfica de la figura es la de una función f derivable en [0, 10]



A. $f'(0)=9$

B. $f'(5)>0$

C. Cualquier primitiva de *f* se anula en *x* = 0,5.

D. Cualquier primitiva de *f* decrece en el intervalo $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

A es correcta. La pendiente de la recta tangente en el punto $A(0,-4)$ es $\frac{5-(-4)}{1-0}=9$, por lo que $f'(0)=9$.

B es incorrecta. La función en el punto de abscisa 5 es decreciente y por tanto, $f'(5)$ debe ser negativa.

C es incorrecta. Al ser $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, cualquier primitiva de *f* tendrá un mínimo relativo en $x=\frac{1}{2}$ y este mínimo puede ser distinto de 0.

D es correcta. Al ser f negativa en el intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ sabemos que sus primitivas son decrecientes en dicho intervalo.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

5. Sea *f* una función continua en el intervalo [0, 4]:

1. $\int_0^4 f(x)dx>0$

2. $f(x)>0$ **en [0, 4]**

A. $1\Leftrightarrow 2$

B. $1\Rightarrow 2$, pero $2\not\Rightarrow 1$

C. $2\Rightarrow 1$, pero $1\not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

La respuesta correcta es C. Si *f* es estrictamente positiva en [0, 4] entonces $\int_0^4 f(x)dx$ debe ser positiva ya que dicha integral mide el área entre la curva y el eje *X*. La otra implicación no es cierta ya que la integral definida puede ser mayor que cero sin que la función sea siempre positiva.

Señala el dato innecesario para contestar

6. Sea $f(x)=a\operatorname{sen}x+be^x+c\sqrt{x}$, de la que se sabe que en el punto de abscisa *d* su gráfica presenta tangente horizontal. Para calcular $\int_1^d f''(x)dx$ se dispone de:

1. El valor de *a* **2. El valor de *b*** **3. El valor de *c*** **4. El valor de *d***

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

La respuesta correcta es D.

Como $f'(d)=0$ ya que la tangente en *d* es horizontal, se obtiene: $\int_1^d f''(x)dx=f'(d)-f'(1)=0-f'(1)=-f'(1)$.

Además la derivada de *f* es $f'(x)=a\cos x+be^x+\frac{c}{2\sqrt{x}}$

Por tanto, para calcular $\int_1^d f''(x)dx=-f'(1)$ no hace falta el valor de *d*.