9 Combinatoria

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Con las 5 vocales y las consonantes *b*, *c*, *d* se forman aleatoriamente "palabras" de 5 letras distintas:

a) ¿Cuántas se pueden formar?

b) ¿Cuántas acaban en "ado"?

a) Dos "palabras" son diferentes si al menos una letra de las que incluye la "palabra" es diferente o si las letras están colocadas en diferente orden. Por tanto, se trata de formar "palabras" de 5 letras distintas con las 8 letras disponibles, lo que equivale a formar variaciones sin repetición (letras distintas) de orden 5 de los 8 elementos. Esto es:

$$V_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720 \text{ palabras}$$

b) Si la palabra debe acabar en "ado", quedan solo 2 lugares para 5 letras. Razonando como en el apartado anterior:

$$V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ palabras}$$

3. Si se lanza una moneda 6 veces ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener? ¿En cuántos se obtiene exactamente una cara?

Si se lanza una moneda 6 veces y se anotan los resultados que se van obteniendo, un resultado es distinto de otro si el número de caras (o de cruces) es distinto (*CCXCXC* y *CCXXXX*) o si, habiendo el mismo número de caras (y cruces) están colocadas en distinto orden (*CCXCXC* y *CXCCXC*). Esto equivale a contar las variaciones con repetición de orden 6 (número de lanzamientos) de 2 elementos (*C*: cara y *X*: cruz):

$$VR_{2,6} = 2^6 = 64$$

Además, si se quiere obtener exactamente una cara, los posibles casos son:

CXXXXX   *XCXXXX*   *XXCXXX*   *XXXCXX*   *XXXXCX*   *XXXXXC*

Por tanto, se obtendrá exactamente una cara en 6 de los 64 resultados posibles.

4. Se lanzan cuatro dados cúbicos de diferente color con las caras numeradas del 1 al 6.

a) ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?

b) ¿En cuántos de los anteriores todos los números que aparecen son distintos?

a) Si se lanzan cuatro dados cúbicos de diferente color, un resultado es distinto de otro si los números que han salido son distintos (6552 y 4425) o si, habiéndose obtenido los mismos números, estos están en distintos dados (3344 y 4433). Lo que equivale a contar las variaciones con repetición de orden 4 (número de lanzamientos) de 6 elementos (las caras del dado):

$$VR_{6,4} = 6^4 = 1296 \text{ resultados distintos}$$

b) En este caso, los elementos (del 1 al 6) no se pueden repetir, por lo que manteniéndose que importa el orden y los elementos que forman el lanzamiento, se trata de las variaciones sin repetición de orden 4 de los 6 elementos:

$$V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

En 360 resultados de los 1296 anteriores todos los números son distintos.

5. Se reparten al azar 5 bolas diferentes en 9 urnas:

a) ¿De cuántas formas distintas se puede hacer?

b) Si una urna solo puede contener una bola, ¿cuántas posibilidades hay?

a) Se trata de elegir la urna que contendrá cada bola. Dos elecciones son distintas, si las urnas elegidas son distintas:

$$(U3,\ U2,\ U2,\ U1,\ U8) \text{ y } (U2,\ U9,\ U7,\ U6,\ U2)$$

o, se han elegido en distinto orden:

$$(U4,\ U5,\ U9,\ U7,\ U9) \text{ y } (U9,\ U4,\ U9,\ U7,\ U5)$$

Y, como se ve en los ejemplos, una urna se puede repetir, lo que significa que esa urna ha sido elegida para contener más de una bola. Las urnas que no aparecen en la elección, quedan vacías.

Se trata, por tanto, de variaciones con repetición de orden 5 de las 9 urnas:

$$VR_{9,5} = 9^5 = 59\,049 \text{ formas distintas}$$

b) Si una urna solo puede ser elegida como máximo una vez, estamos en el mismo caso que en el apartado anterior pero sin repetición, es decir, se trata de las variaciones ordinarias de orden 5 de las 9 urnas:

$$V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120 \text{ posibilidades}$$

6. Una línea de autobuses cubre el recorrido entre dos ciudades con parada en otras 6 poblaciones. Teniendo en cuenta el origen y el destino de cada viajero y si éste solicita viaje de ida y vuelta o solo de ida, ¿cuántos billetes distintos pueden expedirse en esta línea de autobuses?

En cada billete se señala la ciudad de origen y de destino, por lo que el número de billetes solo de ida se cuenta como variaciones sin repetición de orden 2 (las ciudades de origen y destino) de las 8 ciudades. Entonces:

$$V_{8,2} = 8 \cdot 7 = 56 \text{ billetes}$$

Si el viajero solicita billete de ida y vuelta, en cada billete figurarán dos ciudades. Por ejemplo, si el billete se solicita de la ciudad *A* a la ciudad *B*, en el mismo figurará "Ida: de *A* a *B* y Vuelta: de *B* a *A*". Por tanto, el número de billetes de ida y vuelta es el mismo que los de ida, es decir, 56 billetes.

En total, se tienen 56 + 56 = 112 billetes distintos que se pueden expedir en esa línea de autobuses.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $V_{x-1,2} - V_{x-2,2} = 8$ **b)** $VR_{x,3} - V_{x,2} = 2V_{x,3} + 4$

a) Se plantea la ecuación, se simplifica y se resuelve:

$$(x-1)(x-2)-(x-2)(x-3)=8 \Rightarrow (x-2)(x-1-x+3)=8 \Rightarrow 2(x-2)=8 \Rightarrow x-2=4 \Rightarrow x=6$$

b) Análogamente:

$$x^3 - x(x-1) = 2x(x-1)(x-2)+4 \Rightarrow x^3 - x^2 + x = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 3x + 4 = 0$$

Una raíz es $x = 4$, de forma que dividiendo, por ejemplo por Ruffini, resulta:

$$(x-4)(x^2-x-1)=0$$

Y las raíces del polinomio de segundo grado que se obtienen son:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

Ninguna de las dos soluciones es entera. Por tanto, la única solución válida es $x = 4$.

8, 9 y 10. Ejercicios resueltos.

11. La clave de seguridad de un ordenador puede incluir hasta cinco letras del alfabeto, distinguiendo mayúsculas y minúsculas, y 4 cifras del 0 al 9. Halla cuántas claves se pueden construir si:

a) Las letras y los dígitos tienen que ser distintos.

b) Solo las letras tienen que ser distintas.

a) Se considera que el alfabeto tiene 26 letras (no se cuentan la “ñ”) y, como se distinguen entre mayúsculas y minúsculas, en total se dispone de 52 letras para elegir 5.

En cuantos a las cifras, se dispone de 10 dígitos (del 0 al 9) para elegir 4.

Si las letras y los dígitos deben ser distintos, y dado que importa tanto el orden de la elección como las letras y dígitos que se elijan, se trata de variaciones sin repetición.

Ahora bien, en primer lugar, de las 9 posiciones disponibles se deben elegir las que corresponden a las 5 letras y a los 4 números, que son:

$$PR_9^{5,4} = \frac{9!}{5!4!} = 126$$

Una vez elegidas las posiciones de las letras, estas se pueden ordenar de tantas formas distintas como variaciones de orden 5 de las 52 letras disponibles:

$$V_{52,5} = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311\,875\,200$$

Una vez elegidas las posiciones de las cifras, éstas se pueden ordenar de tantas formas diferentes como variaciones de orden 4 de las 10 cifras disponibles:

$$V_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

De manera que, en total, el número de claves distintas que se pueden formar sin que se repitan ni las letras ni los números es:

$$126 \cdot 311\,875\,200 \cdot 5040 = 198\,053\,227\,008\,000 \text{ claves}$$

b) Si solo las letras tienen que ser distintas, pudiéndose repetir los números, la diferencia con el apartado anterior es que ahora, en cuanto a las cifras, se dispone de:

$$VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000 \text{ combinaciones}$$

Y en total se tienen:

$$126 \cdot 311\,875\,200 \cdot 10\,000 = 392\,962\,752\,000\,000 \text{ claves}$$

12. ¿De cuántas formas distintas pueden introducirse seis tarjetas diferentes en seis sobres distintos?

Si, por ejemplo, se fijan los sobres, se trata de ordenar las seis cartas en los seis sobres, es decir, permutaciones de 6 elementos:

$$P_6 = 6! = 720 \text{ formas distintas}$$

13. Si se lanzan 7 dados de distinto color, ¿en cuántos lanzamientos se obtienen 2 cuatros, 3 cincos y 2 seises?

Como los dados son distintos, sí importa el orden en que se obtienen los resultados. Por tanto, se trata de permutaciones. Un resultado favorable al que se plantea es, por ejemplo:

4 5 5 6 6 4 5

El número de ordenaciones distintas de esos 7 elementos (2 cuatros, 3 cincos y 2 seises) donde solo 3 de ellos son diferentes, resultan ser las permutaciones con repetición de los 7 elementos, donde el 4 se repite 2 veces, el 5 se repite 3 veces, y el 6, 2 veces:

$$PR_7^{2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!} = 210$$

Se puede obtener 2 cuatros, 3 cincos y 2 seises en 210 lanzamientos.

14. Con las letras de la palabra INCANDESCENTE, ¿cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar?

El número de ordenaciones de las trece letras de la palabra INCANDESCENTE se obtienen mediante permutaciones con repetición, teniendo en cuenta que la E y la N se repite tres veces cada una, la C se repite dos veces, y la letras I, A, D, S y T aparecen una sola vez cada una. Entonces:

$$PR_{13}^{3,3,2,1,1,1,1,1} = \frac{13!}{3!3!2!1!1!1!1!1!} = 86\ 486\ 400 \text{ palabras}$$

15. ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse, en una fila del tablero de ajedrez, las 8 figuras negras: 2 torres, 2 alfiles, 2 caballos, la reina y el rey?

Son 8 figuras, de las cuales la torre (*T*), el alfil (*A*) y el caballo (*C*) se repiten dos veces cada una y la reina (*R*) y el rey (*E*) aparecen solo una vez. Por ejemplo, una posible ordenación sería: *R T A A C E C T*.

El número de estas ordenaciones se obtiene mediante permutaciones con repetición:

$$PR_{8}^{2,2,2,1,1} = \frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 6720 \text{ formas}$$

16, 17 y 18. Ejercicios resueltos.

19. En un campeonato de ajedrez, cada uno de los 17 participantes debe jugar contra todos los demás una sola partida. ¿Cuántas partidas se disputarán en total?

Como no importa el orden de elección de los participantes ya que la partida del jugador *A* contra el jugador *B* es la misma que la de *B* contra *A*, solo importa la elección de cada pareja de jugadores. Por tanto, se trata de las combinaciones de orden 2 de los 17 jugadores:

$$C_{17,2} = \binom{17}{2} = \frac{17!}{2!(17-2)!} = \frac{17!}{2!15!} = \frac{17\cdot 16}{2!} = 136 \text{ partidas}$$

20. Una bolsa contiene bolas de 6 colores distintos, ¿cuántos grupos de 4 bolas se podrán formar en cada caso?

a) Las bolas son de distintos colores.

b) Puede haber bolas del mismo color.

Para formar grupos no importa el orden de la elección, solo el color de las bolas que se seleccionen, por tanto:

a) Si no puede haber bolas del mismo color, son combinaciones sin repetición de orden 4 de los 6 colores:

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!} = 15 \text{ grupos}$$

b) En este caso, las cuatro bolas (•) seleccionadas pueden ser de cada uno de los 6 colores (|) presentes en la bolsa. Por ejemplo, la elección "••| |•| | |•" indica que se han elegido dos bolas del color 1, una bola del color 3 y una bola del color 6. Dado que no importa el orden en el que se seleccionen las bolas, se tienen combinaciones con repetición de orden 4 de los 6 colores:

$$CR_{6,4} = C_{9,4} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!} = 126 \text{ grupos}$$

21. ¿Cuántas comisiones distintas de tres personas pueden formarse seleccionándolas entre un grupo de 30 personas?

Solo interesan las personas que son elegidas y no el orden en el que se escogen, por tanto, se trata de las combinaciones de orden 3 de las 30 personas:

$$C_{30,3} = \binom{30}{3} == \frac{30!}{3!(30-3)!} = \frac{30!}{3!27!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28}{3!} = 4060 \text{ comisiones distintas}$$

22. ¿De cuántas formas se pueden colocar 4 libros iguales en siete estanterías? ¿Y siete libros iguales en 4 estanterías?

En este caso, los cuatro libros (•) se deben colocar en cualquiera de las siete estanterías (|). Por ejemplo, la elección "••| |•| | |•|" indica que se han colocado dos libros en la estantería 1, un libro en la estantería 3 y un libro en la estantería 6. Dado que no importa el orden en el que se seleccionen los libros, se tienen combinaciones con repetición de orden 4 de las 7 estanterías:

$$CR_{7,4} = C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!} = 210 \text{ formas}$$

Si de lo que se trata es de colocar 7 libros iguales en 4 estanterías, hay que elegir las estanterías (|) en las que se van a colocar los libros (•). Por ejemplo, la elección "•|••|•|•••" indica que se ha colocado un libro en la estantería 1, dos libros en la estantería 2, un libro en la estantería 3 y tres libros en la estantería 4. Se trata de las combinaciones con repetición de orden 7 de las 4 estanterías:

$$CR_{4,7} = C_{10,7} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = 120 \text{ formas}$$

23. *Se tienen dibujados en el plano 15 puntos de tal manera que no hay tres alineados.

a) ¿Cuántas rectas pueden trazarse?

b) ¿Cuántos cuadriláteros convexos diferentes pueden dibujarse cuyos vértices se encuentren entre los puntos?

Para formar rectas o cuadriláteros, no importa el orden en el que se elijan los puntos. Por tanto, se trata de combinaciones.

a) En este caso son las combinaciones de orden 2 (los dos puntos que se seleccionan) de los 15 puntos:

$$C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15\cdot 14}{2!} = 105 \text{ rectas}$$

b) Para formar cuadriláteros se deben elegir 4 puntos (no hay 3 alineados), por lo que se trata de las combinaciones de orden 4 de los 15 puntos:

$$C_{15,4} = \binom{15}{4} = \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15!}{4!11!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4!} = 1365 \text{ cuadriláteros}$$

24. Ejercicio interactivo.

25 y 26. Ejercicios resueltos.

27. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\binom{n}{3} = 3\binom{n-1}{2}$ **b)** $\binom{n}{7} + \binom{n}{8} + \binom{n+1}{9} = \binom{n+2}{9}$

a) Se desarrollan los números combinatorios, se simplifica y se resuelve la ecuación resultante:

$$\frac{n!}{(n-3)!3!} = 3\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!} \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 3\frac{(n-1)(n-2)}{2!} \Rightarrow \frac{n}{3!} = 3\frac{1}{2!} \Rightarrow n = 3\frac{3!}{2!} \Rightarrow n = 3\cdot 3 = 9$$

b) Aplicando las propiedades de los números combinatorios a los dos primeros sumandos se obtiene que:

$$\binom{n}{7} + \binom{n}{8} = \binom{n+1}{8} \Rightarrow \binom{n}{7} + \binom{n}{8} + \binom{n+1}{9} = \binom{n+1}{8} + \binom{n+1}{9} = \binom{n+2}{9}$$

De manera que para cualquier $n \geq 8$, n será solución de la ecuación planteada.

28. Desarrolla y simplifica.

a) $\left(x^2+3\right)^4$ **b)** $(1-2x)^5$ **c)** $\left(2a^2-\dfrac{1}{2a}\right)^6$

a) $\left(x^2+3\right)^4=\binom{4}{0}\left(x^2\right)^4+\binom{4}{1}\left(x^2\right)^3\cdot 3+\binom{4}{2}\left(x^2\right)^2\cdot 3^2+\binom{4}{3}x^2\cdot 3^3+\binom{4}{4}3^4=x^8+12x^6+54x^4+108x^2+81$

b) $(1-2x)^5=\binom{5}{0}-\binom{5}{1}(2x)+\binom{5}{2}(2x)^2-\binom{5}{3}(2x)^3+\binom{5}{4}(2x)^4-\binom{5}{5}(2x)^5=1-10x+40x^2-80x^3+80x^4-32x^5$

c) $\left(2a^2-\dfrac{1}{2a}\right)^6=\binom{6}{0}\left(2a^2\right)^6-\binom{6}{1}\left(2a^2\right)^5\dfrac{1}{2a}+\binom{6}{2}\left(2a^2\right)^4\left(\dfrac{1}{2a}\right)^2-\binom{6}{3}\left(2a^2\right)^3\left(\dfrac{1}{2a}\right)^3+$

$$+\binom{6}{4}\left(2a^2\right)^2\left(\frac{1}{2a}\right)^4-\binom{6}{5}2a^2\left(\frac{1}{2a}\right)^5+\binom{6}{6}\left(\frac{1}{2a}\right)^6=$$

$$=64a^{12}-96a^9+60a^6-20a^3+\frac{15}{4}-\frac{3}{8a^3}+\frac{1}{64a^6}$$

29. Escribe el séptimo término de:

a) $\left(\dfrac{1}{x^2y}+3xy\right)^8$ **b)** $\left(2x-\dfrac{3}{x}\right)^{12}$

a) Para la suma, el término k – ésimo es $\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$. Entonces, el séptimo término resulta:

$$\binom{8}{7-1}\left(\frac{1}{x^2y}\right)^{8-(7-1)}(3xy)^{7-1}=\binom{8}{6}\left(\frac{1}{x^2y}\right)^2(3xy)^6=28\frac{1}{x^4y^2}3^6x^6y^6=20\,412x^2y^4$$

b) Para la diferencia, el término k – ésimo es $(-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$. Entonces, el séptimo término resulta:

$$(-1)^{7-1}\binom{12}{7-1}(2x)^{12-(7-1)}\left(\frac{3}{x}\right)^{7-1}=(-1)^6\binom{12}{6}(2x)^6\left(\frac{3}{x}\right)^6=924\cdot 2^6x^6\cdot\frac{3^6}{x^6}=924\cdot 2^6\cdot 3^6=43\,110\,144$$

30. Ejercicio interactivo.

EJERCICIOS

Variaciones

41. Se lanza un dado octaédrico, con las caras numeradas del 1 al 8, cinco veces, anotando el número obtenido en cada lanzamiento.

a) ¿Cuántos números distintos de cinco dígitos se pueden formar?

b) ¿Cuántos números capicúas mayores que 20 000 se pueden formar?

a) Cada número es distinto de otro si tiene al menos un dígito distinto, por ejemplo:

2 7 7 8 1 3 2 6 5 5

o si los dígitos están en distinto orden, por ejemplo:

3 2 3 8 5 5 3 3 8 2

Además, como se ve, los dígitos se pueden repetir. Por tanto, se pueden formar tantos números de cinco dígitos como variaciones con repetición de orden 5 de los 8 dígitos del dado:

$$VR_{8,5} = 8^5 = 32\,768$$

b) Los números capicúas mayores que 20 000 serán de la forma:

$$2\,a\,b\,a\,2 \quad 3\,a\,b\,a\,3 \quad 4\,a\,b\,a\,4 \quad 5\,a\,b\,a\,5 \quad 6\,a\,b\,a\,6 \quad 7\,a\,b\,a\,7 \quad 8\,a\,b\,a\,8$$

donde *a* y *b* son números del 1 al 8. Por lo tanto, se tienen 7 casos distintos donde por cada caso se tiene una variación con repetición de orden 8 (los números del dado) de 2 elementos (*a* y *b*). Entonces:

$$VR_{8,2} = 8^2 = 64$$

Por tanto, habrá $7 \cdot 64 = 448$ números capicúas mayores que 20 000.

42. Una empresa decide generar el código de seguridad de acceso al edificio con un número de cinco cifras utilizando los dígitos del 1 al 9.

a) ¿Cuántos códigos distintos puede generar?

b) ¿Y si el código es de 3 dígitos seguido de 2 letras?

a) Cada código es diferente de otro si tiene al menos un dígito distinto o si los dígitos están colocados en distinto orden. Se pueden distinguir dos situaciones:

Si los dígitos no se pueden repetir (variaciones sin repetición de orden 5 de 9 elementos):

$$V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120 \text{ códigos}$$

Si los dígitos se pueden repetir (variaciones con repetición de orden 5 de 9 elementos):

$$VR_{9,5} = 9^5 = 59\,049 \text{ códigos}$$

b) Teniendo en cuenta que el alfabeto tiene 26 caracteres, distinguimos los siguientes casos como en el apartado anterior.

No se pueden repetir ni dígitos ni letras: $V_{9,3} \cdot V_{26,2} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 26 \cdot 25 = 327\,600$ códigos

No se pueden repetir dígitos pero sí las letras: $V_{9,3} \cdot VR_{26,2} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 26^2 = 340\,704$ códigos

Se pueden repetir dígitos pero no letras: $VR_{9,3}V_{26,2} = 9^3 \cdot 26 \cdot 25 = 473\,850$ códigos

Se pueden repetir tanto dígitos como letras: $VR_{9,3} \cdot VR_{26,2} = 9^3 \cdot 26^2 = 492\,804$ códigos

Permutaciones

43. En una oficina se deben distribuir 4 cartas distintas en otros tantos sobres dirigidos a personas diferentes. Si las cartas se distribuyen al azar en los sobres:

a) ¿Cuántas distribuciones diferentes puede haber?

b) ¿En cuántas de estas distribuciones coinciden al menos dos cartas con sus sobres?

a) Si se fijan los sobres, las cartas se podrán distribuir de tantas formas como ordenaciones posibles se puedan formar con las cuatro cartas. Entonces:

$$P_4 = 4! = 24 \text{ distribuciones}$$

b) Para que coincidan al menos dos cartas con sus sobres, deben distinguirse los casos:

Exactamente dos de las cartas coinciden con sus sobres (y las otras dos no coinciden). En este caso, se pueden formar tantas distribuciones como ordenaciones de las 4 cartas, donde hay dos que coinciden y dos que no coinciden. Es decir:

$$PR_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ distribuciones}$$

Exactamente tres de las cartas coinciden con sus sobres, luego necesariamente la cuarta carta debe también coincidir con su sobre. Solo hay un caso en el que esto sucede.

Por tanto, del total de 24 distribuciones posibles, en $6+1=7$ de ellas coinciden al menos dos cartas con sus sobres.

44. Se quieren colocar en una estantería 4 libros de matemáticas, 2 de economía y 3 de historia.

a) ¿De cuántas formas pueden ordenarse?

b) ¿Y si los libros de cada materia deben quedar juntos?

a) Se trata de las permutaciones con repetición de los nueve libros, donde 4 son de matemáticas, 2 de economía y 3 de historia:

$$PR_9^{4,2,3} = \frac{9!}{4!2!3!} = 1260 \text{ formas}$$

b) En este caso, las ordenaciones son de tres elementos (las tres materias), por lo que hay:

$$P_3 = 3! = 6 \text{ formas}$$

45. Con las letras de la palabra RINOCERONTE:

a) ¿Cuántas palabras con o sin sentido se pueden formar?

b) ¿Cuántas de las anteriores empiezan por RINO?

En la palabra RINOCERONTE las letras R, N, O y E se repiten dos veces cada una, en tanto que las letras I, C y T solo aparecen una vez.

a) Se pueden formar tantas palabras como permutaciones con repetición de las 11 letras:

$$PR_{11}^{2,2,2,2,1,1,1} = \frac{11!}{2!2!2!2!1!1!1!} = 2\,494\,800 \text{ palabras}$$

b) Si las palabras deben empezar por RINO, quedan 7 letras, de las cuales la E repite 2 veces y el resto solo aparecen una vez cada una. Por tanto, si empiezan por RINO se tienen:

$$PR_7^{2,1,1,1,1,1} = \frac{7!}{2!1!1!1!1!1!} = 2520 \text{ palabras}$$

46. Seis niños de preescolar juegan al corro en el patio de recreo.

a) ¿De cuántas formas distintas pueden formar el corro?

b) ¿De cuántas pueden formar el corro si Alicia y Francisco deben ir juntos en el corro?

a) Se trata de permutaciones circulares de los seis niños. Entonces, $PC_6 = P_5 = 5! = 120$ formas.

b) En este caso, si Alicia y Francisco deben ir juntos, ellos se pueden ordenar de dos formas distintas y, por cada una de estas, los demás niños pueden ordenarse de tantas formas como permutaciones de 4 elementos. En total, $2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$ formas.

Combinaciones

47. Seis amigos acuden una tarde al cine, pero solo hay entradas para cuatro personas. Si deciden sortear los que entrarán a ver la película, ¿de cuántas formas distintas se puede hacer el reparto?

No importa el orden en el que se reparten las entradas, solo hay que tener en cuenta las personas a las que les toca el sorteo, por tanto se trata de las combinaciones de orden 4 de los 6 amigos:

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} = 15 \text{ formas}$$

48. Entre los 12 empleados en el departamento de una empresa, debe formarse un grupo de trabajo de 4 personas, ¿de cuántas formas puede hacerse si:

a) todos los empleados pueden formar parte del grupo?

b) María es la coordinadora de grupo?

Solo importa las personas que vayan a formar el grupo de trabajo y no el orden en el que se seleccionen.

a) Se trata, en este caso, de las combinaciones de orden 4 de las 12 personas disponibles:

$$C_{12,4} = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!} = 495 \text{ formas}$$

b) Si María debe ser la coordinadora del grupo, quedan 11 personas para seleccionar 3. Entonces:

$$C_{11,3} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} = 165 \text{ formas}$$

49. Una bolsa contiene 8 bolas blancas y 6 verdes, todas numeradas. Se extraen simultáneamente dos bolas al azar.

a) ¿Cuántos resultados posibles pueden darse?

b) ¿En cuántos de los resultados las dos bolas son verdes?

c) ¿En cuántos de los resultados se observa una bola de cada color?

a) Al no importar el orden, el número de resultados posibles es:

$$C_{14,2} = \binom{14}{2} = \frac{14 \cdot 13}{2!} = 91 \text{ resultados}$$

b) Para que las dos bolas sean verdes, deben ser extraídas entre las 6 bolas verdes de la bolsa:

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15 \text{ resultados}$$

c) Una bola será blanca y, además, por cada bola blanca se tienen 6 bolas verdes. En total:

$$C_{8,1} \cdot C_{6,1} = \binom{8}{1}\binom{6}{1} = 8 \cdot 6 = 48 \text{ formas}$$

Números combinatorios

50. Calcula en cada caso el valor de *x*.

a) $\binom{46}{5x-4}=\binom{46}{2x+8}$

b) $5\binom{x}{2}=3\binom{x}{4}$

c) $\binom{x}{3}=\binom{x+1}{5}-\binom{x}{4}$

d) $\binom{16}{y}+\binom{x}{y+1}=\binom{17}{y+1}$

a) Aplicando las propiedades de los números combinatorios, puede ser:

$$5x-4+2x+8=46 \Rightarrow 7x=42 \Rightarrow x=6 \text{ o } 5x-4=2x+8 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$$

b) Aplicando las propiedades de los números combinatorios, debe ser:

$$5\frac{x(x-1)}{2!}=3\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!} \Rightarrow \frac{5\cdot 4!}{3\cdot 2!}=(x-2)(x-3) \Rightarrow 20=x^2-5x+6 \Rightarrow x^2-5x-14=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+56}}{2}=\frac{5\pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=7 \\ x_2=-2 \end{cases} \Rightarrow$$ $x=7$ es la única solución pues x no puede ser negativo.

c) Por una propiedad de los números combinatorios se tiene que $\binom{x}{3}+\binom{x}{4}=\binom{x+1}{4}$. Entonces:

$$\binom{x}{3}=\binom{x+1}{5}-\binom{x}{4} \Rightarrow \binom{x}{3}+\binom{x}{4}=\binom{x+1}{4}=\binom{x+1}{5} \Rightarrow \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4!}=\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)}{5!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5!}{4!}=(x-3) \Rightarrow 5=x-3 \Rightarrow x=8$$

d) Aplicando las propiedades de los números combinatorios, queda que x = 16 e y puede ser cualquier número entero mayor o igual que 0 y menor o igual que 15.

51. Escribe el desarrollo de los siguientes binomios, simplificando el resultado.

a) $\left(\frac{x}{2}-x^2\right)^5$

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{2x}\right)^6$

a) Se desarrolla el binomio y se simplifica:

$$\left(\frac{x}{2}-x^2\right)^5=\binom{5}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\binom{5}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^4x^2+\binom{5}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3(x^2)^2-\binom{5}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^2(x^2)^3+\binom{5}{4}\frac{x}{2}(x^2)^4-\binom{5}{5}(x^2)^5=$$

$$=\frac{1}{32}x^5-\frac{5}{16}x^6+\frac{5}{4}x^7-\frac{5}{2}x^8+\frac{5}{2}x^9-x^{10}$$

b) Se desarrolla el binomio y se simplifica:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{2x}\right)^6=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6-\binom{6}{1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5\sqrt{2x}+\binom{6}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4\left(\sqrt{2x}\right)^2-\binom{6}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\left(\sqrt{2x}\right)^3+$$

$$+\binom{6}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\left(\sqrt{2x}\right)^4-\binom{6}{5}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{2x}\right)^5+\binom{6}{6}\left(\sqrt{2x}\right)^6=$$

$$=\frac{1}{x^3}-\frac{6\sqrt{2}}{x^2}+\frac{30}{x}-40\sqrt{2}+60x-24\sqrt{2}x^2+8x^3$$

52. Halla el término del desarrollo $\left(\frac{2}{x^2}+2x\right)^{14}$ cuya parte literal es x^2.

El término k - ésimo en el desarrollo del binomio tiene la forma: $\binom{14}{k-1}a^{14-(k-1)}b^{k-1}$. Con los datos del enunciado queda $\binom{14}{k-1}\left(\frac{2}{x^2}\right)^{14-(k-1)}(2x)^{k-1}=\binom{14}{k-1}\frac{2^{14-(k-1)}2^{k-1}x^{k-1}}{\left(x^2\right)^{14-(k-1)}}=\binom{14}{k-1}2^{14}x^{3(k-1)-28}$.

El exponente de la parte literal debe ser 2. Por tanto, $3(k-1)-28=2\Rightarrow 3(k-1)=30\Rightarrow k=11$.

De modo que el término cuya parte literal es x^2 es: $\binom{14}{10}\left(\frac{2}{x^2}\right)^4(2x)^{10}=16\,400\,384x^2$.

Síntesis

53. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3VR_{x,3}-5VR_{x-13}=23$

b) $\frac{V_{x,2}}{VR_{x,2}}+\frac{V_{x,x-1}}{x!}=\frac{3}{2}$

c) $V_{x,3}-VR_{x,2}=23C_{x,1}$

d) $\binom{x-2}{3}=\frac{2}{7}\binom{x}{4}$

a) Se desarrollan las variaciones, se simplifica y se resuelve la ecuación resultante:

$$3x^3-5(x-1)^3=23\Rightarrow 3x^3-5\left(x^3-3x^2+3x-1\right)=23\Rightarrow 2x^3-15x^2+15x+18=0$$

Dividiendo por $x-6$, (por ejemplo, por Ruffini), resulta: $(x-6)\left(2x^2-3x-3\right)=0$.

La ecuación de segundo grado resultante tiene soluciones: $x=\frac{3\pm\sqrt{9+24}}{4}$

Estas soluciones no son enteras. Por tanto, la única solución factible es $x=6$.

b) $\frac{V_{x,2}}{VR_{x,2}}+\frac{V_{x,x-1}}{x!}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{x(x-1)}{x^2}+\frac{x!}{x!}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{(x-1)}{x}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2(x-1)=x\Rightarrow 2x-2=x\Rightarrow x=2$

c) Se desarrollan las variaciones y combinaciones, se simplifica y se resuelve la ecuación:

$$V_{x,3}-VR_{x,2}=23C_{x,1}\Rightarrow x(x-1)(x-2)-x^2=23x\Rightarrow x^3-4x^2-21x=0\Rightarrow x\left(x^2-4x-21\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x^2-4x-21=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+84}}{2}=\begin{cases}x_1=7\\ x_2=-3\end{cases}\end{cases}$$ $\Rightarrow$ La única solución factible es $x=7$.

d) Desarrollando los números combinatorios:

$$\binom{x-2}{3}=\frac{2}{7}\binom{x}{4}\Rightarrow\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{3!}=\frac{2}{7}\cdot\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\Rightarrow\frac{x-4}{6}=\frac{x^2-x}{84}\Rightarrow 14(x-4)=x^2-x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-15x+56=0\Rightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{225-224}}{2}=\frac{15\pm1}{2}=\begin{cases}x_1=8\\ x_2=7\end{cases}$$

De manera que las dos soluciones son factibles para la ecuación planteada.

54. En un certamen literario se reparten 3 premios entre los 15 relatos presentados. Indica de cuántas formas pueden repartirse los premios en cada caso:

a) Los premios son distintos y un relato no puede recibir más de un premio.

b) Los premios son distintos y un relato puede recibir más de un premio.

c) Los premios son iguales y un relato no puede recibir más de un premio.

d) Los premios son iguales y un relato puede recibir más de un premio.

a) En este caso, dado que los premios se distinguen unos de otros, dos repartos son distintos si los relatos elegidos son diferentes o si se han elegido en distinto orden. Se trata, entonces, de las variaciones sin repetición de orden 3 de los 15 relatos:

$$V_{15,3} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730 \text{ formas}$$

b) En esta ocasión, la situación es análoga a la del apartado anterior, excepto porque un relato puede recibir más de un premio. Luego se trata de variaciones con repetición de orden 3 de los 15 relatos:

$$VR_{15,3} = 15^3 = 3375 \text{ formas}$$

c) Dado que los premios son iguales, no interesa el orden en el que se elijan los relatos, solo los relatos que se eligen, es decir, se trata de combinaciones (sin repetición) de orden 3 de los 15 relatos:

$$C_{15,3} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = 455 \text{ formas}$$

d) Si los premios son iguales y un relato puede recibir más de un premio, se trata de combinaciones con repetición de orden 3 de los 15 relatos:

$$CR_{15,3} = C_{17,3} = \binom{17}{3} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{3!} = 680 \text{ formas}$$

CUESTIONES

55. Halla el valor de:

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots \pm \binom{n}{n}$$

Si se considera el binomio $(1-1)^n$ y se lleva a cabo su desarrollo queda:

$$(1-1)^n = \binom{n}{0}1^n - \binom{n}{1}1^n + \binom{n}{2}1^n - \binom{n}{3}1^n + \ldots \pm (-1)^n \binom{n}{n}$$

Teniendo en cuenta que $(1-1)^n = 0$, queda:

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots \pm \binom{n}{n}$$

De manera que:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots \pm \binom{n}{n}$$

Como $\binom{n}{0} = 1$, resulta:

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots \pm \binom{n}{n} = 1$$

56. Demuestra las siguientes identidades.

a) $\binom{n-1}{k-1}n = k\binom{n}{k}$

b) $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$

c) $VR_{x,2} + C_{x,1} = V_{x+1,2}$

a) Si se desarrolla por separado cada miembro de la igualdad, se comprueba que coinciden:

$$\binom{n-1}{k-1}n = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}n = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!k}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$$

b) Si se desarrolla por separado cada miembro de la igualdad, se comprueba que coinciden:

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{r!}{k!(r-k)!} = \frac{n!}{(n-r)!k!(r-k)!} = \frac{n!}{k!(n-r)!(r-k)!}$$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!} = \frac{n!}{k!(r-k)!(n-r)!}$$

c) Si se desarrolla por separado cada miembro de la igualdad, se comprueba que coinciden:

$$VR_{x,2} + C_{x,1} = x^2 + x$$

$$V_{x+1,2} = (x+1)x = x^2 + x$$

PROBLEMAS

57. Un examen tipo test consta de 8 preguntas, para cada una de las cuales se proporcionan cuatro respuestas *A*, *B*, *C* y *D*. El estudiante debe elegir solo una de las cuatro. Si se responde al azar, ¿cuántos resultados distintos pueden obtenerse en el conjunto del test?

Cada resultado posible, se diferencia de otro en el orden en el que se elijan las respuestas y en las repuestas que se seleccionen. Por tanto, se trata de variaciones con repetición de orden 8 de las 4 respuestas posibles (*A*, *B*, *C* y *D*). Por tanto:

$$VR_{4,8} = 4^8 = 65\,536 \text{ resultados distintos}$$

58. En una reunión de representantes de países, se van a sentar a negociar 3 delegados franceses, 3 alemanes y 3 ingleses. Si la mesa es redonda, ¿de cuántas formas distintas se pueden sentar a la mesa si los delegados:

a) se sientan al azar?

b) de cada país deben sentarse en sillas contiguas?

En cualquiera de los dos casos se trata de permutaciones circulares:

a) Si los delegados se sientan al azar, son permutaciones circulares de los 9 delegados:

$$PC_9 = P_8 = 8! = 40\,320 \text{ formas distintas}$$

b) Si los delegados de cada país deben sentarse en sillas contiguas, el número de formas distintas en que pueden sentarse es:

PC_3 para las diferentes posiciones de las tres delegaciones en la mesa.

P_3 para las distintas ordenaciones de cada una de las delegaciones. Como son tres delegaciones, hay $(P_3)^3$ formas distintas.

De modo que en total $PC_3 \cdot (P_3)^3 = 2! \cdot (3!)^3 = 432$ formas distintas.

59. A una reunión de profesionales de la restauración, cuando todos los asistentes se saludaron, se contabilizaron 1653 saludos. ¿Cuántas personas asistieron a la reunión? Si el 50 % de los asistentes eran hombres, ¿cuántos saludos se produjeron entre un hombre y una mujer?

Sea *n* el número de asistentes a la reunión, para intercambiar un saludo entre dos personas no importa el orden en el que se elijan las mismas. Por tanto, se trata de combinaciones de orden 2 de los *n* asistentes. Por tanto:

$$C_{n,2} = \frac{n(n-1)}{2!} = 1653 \Rightarrow n^2 - n - 3306 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 13\,224}}{2} = \frac{1 \pm 115}{2} = \begin{cases} n_1 = 58 \\ n_2 = -57 \end{cases}$$

Como el número de asistentes no puede ser negativo, queda que los asistentes fueron 58.

Si la mitad de los asistentes son hombres, a la reunión asisten 29 hombres y 29 mujeres. Por lo que el número de saludos que se produjeron entre un hombre y una mujer son $29 \cdot 29 = 841$ saludos.

60. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, pueden formarse con las letras de la palabra CUADERNO de tal manera que empiecen y terminen por vocal? ¿Y cuántas empezarían y terminarían en consonante?

La palabra CUADERNO tiene 8 letras, todas distintas entre sí. Si se quiere que la palabra empiece por vocal, se tienen 4 posibilidades distintas (U, A, E y O). También se desea que acabe en vocal, luego quedarán 3 posibilidades pues una de las vocales se ha usado al principio de la palabra. Si se elige, por ejemplo, como primera vocal la U de entre las 4 que hay, quedaría:

U __ __ __ __ __ __ (A, E u O)

Para el resto de letras, que son 6 elementos, se deben repartir en 6 posiciones distintas:

$$P_6 = 6! = 720 \text{ formas}$$

Por tanto, la cantidad total de palabras que empiezan y acaban por vocal son $4 \cdot 720 \cdot 3 = 8640$.

Como hay el mismo número de vocales que de consonantes y todas son distintas entre sí, el número de palabras que empiezan y terminan por consonante es el mismo que para los que empiezan y acaban por vocal, es decir, 8640 palabras.

61. En un partido de baloncesto, un jugador ha encestado 4 de 10 intentos de lanzamientos de tres puntos. ¿De cuántas formas distintas pueden repartirse los aciertos y los fallos en los 10 intentos?

En este caso, el jugador encesta (*A*) o no encesta (*F*). Si en los diez lanzamientos la *A* "aparece" 4 veces y la *F*, por tanto, seis veces, el número de formas distintas en que pueden repartirse los fallos (*F*) y los aciertos (*A*) son las permutaciones con repetición de los 10 intentos en los que el acierto (*A*) se repite 4 veces y el fallo (*F*) se repites seis veces. Por tanto:

$$PR_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4!6!} = \binom{10}{4} = 210 \text{ formas distintas}$$

62. Un examen consta de 5 preguntas, cada una de las cuales se califica con 0, 1 o 2 puntos. ¿De cuántas formas distintas puede calificarse un examen:

a) si se considera el orden en el que han planteado las preguntas?

b) si no se considera el orden en que se formularon las preguntas?

Se entiende que se trata de contar las diferentes calificaciones que se pueden otorgar a las cinco preguntas y no la puntuación del examen, consistente en sumar las puntuaciones de cada pregunta, ya que en este último caso la puntuación del examen será siempre de 0 a 10.

a) En este caso, una calificación se diferencia de otra en el orden en el que se califican y en las calificaciones elegidas, pudiendo repetirse las calificaciones otorgadas a cada pregunta. Son, por tanto, variaciones con repetición de orden 5 de las 3 posibles puntuaciones (0, 1, 2):

$$VR_{3,5} = 3^5 = 243 \text{ formas}$$

b) Si no importa el orden en el que se formularon las preguntas, se trata de las combinaciones con repetición de orden 5 de las 3 posibles puntuaciones a cada pregunta (0, 1, 2):

$$CR_{3,5} = C_{7,5} = C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21 \text{ formas}$$

63. Un equipo de fútbol tiene 21 jugadores en plantilla: 3 porteros, 8 defensas, 6 centrocampistas y 5 delanteros. Si el entrenador decide jugar al 1−4−4−2 ¿Cuántas alineaciones distintas podrá hacer respetando el puesto de cada jugador? ¿Y si decide un 1−4−3−3?

Si decide jugar al 1−4−4−2, debe elegir un portero, cuatro defensas, cuatro centrocampistas y dos delanteros. Como no importa el orden en el que se elijan los jugadores, en cada puesto se trata de combinaciones del orden requerido para cada puesto y contando con los jugadores disponibles para cada puesto. Para el total de resultados posibles, se aplica la regla de la multiplicación:

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{2} = 3 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 3 \cdot 70 \cdot 15 \cdot 10 = 31\,500 \text{ alineaciones}$$

Razonando de forma análoga, si el entrenador decide la táctica 1−4−3−3:

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{5}{3} = 3 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 3 \cdot 70 \cdot 20 \cdot 10 = 42\,000 \text{ alineaciones}$$

64. Un polígono de *n* vértices tiene 3 veces más diagonales que lados, ¿cuántos lados tiene?

En un polígono de n vértices se contabilizan n lados y el número de diagonales se cuenta mediante las combinaciones de orden 2 de los n vértices menos el número de lados, ya que para formar una diagonal no importa el orden en el que se elijan los vértices. Por tanto:

$$C_{n,2} - n = 3n \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 3n \Rightarrow n(n-1) - 2n = 6n \Rightarrow n^2 - 9n = 0 \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 0 \\ n_2 = 9 \end{cases}$$

De manera que la única solución válida para este caso es que el polígono tenga 9 lados.

65. El profesor de matemáticas debe elegir un grupo de trabajo de 5 alumnos entre los 30 alumnos de su clase. Si en el grupo uno de ellos es el coordinador y ha sido elegido previamente, ¿cuántos grupos de trabajo distintos pueden formarse?

Se puede elegir un coordinador de 30 formas distintas pues la clase son 30 alumnos distintos. Para los otros cuatro puestos del equipo, quedan 29 alumnos disponibles. Como no importa el orden en el que se elijan los alumnos, se trata de las combinaciones sin repetición de orden 4 de los 29 alumnos:

$$C_{29,4} = \binom{29}{4} = \frac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{4!} = 23\ 751$$

En total, pueden formarse hasta $30 \cdot 23\ 571 = 712\ 530$ grupos de trabajo distintos.

66. Una caja contiene 24 pares de zapatos. Se eligen 6 zapatos al azar.

a) ¿De cuántas formas diferentes puede hacerse esta elección?

b) ¿En cuántas de estas elecciones no hay ninguna pareja de zapatos?

a) En la elección de los zapatos no importa el orden en que estos se elijan, una selección se diferencia de otra solo por los zapatos elegidos. Se trata, por tanto, de combinaciones de orden 6 de los 48 zapatos que contiene la caja

$$C_{48,6} = \binom{48}{6} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}{6!} = 12\ 271\ 512 \text{ formas}$$

b) Para que en la elección no haya una pareja de zapatos, se procede al recuento distinguiendo los siguientes casos:

Se eligen los 6 zapatos derechos: $C_{24,6}$

Se eligen 5 derechos y 1 izquierdo: $C_{24,5} \cdot C_{19,1}$ (el izquierdo no se puede elegir entre los 5 que ya se eligieron para el derecho, de ahí que para la elección del izquierdo haya solo 24 – 5 = 19 zapatos)

Se eligen 4 derechos y 2 izquierdos: $C_{24,4} \cdot C_{20,2}$ (se razona de forma análoga para los izquierdos).

Se eligen 3 derechos y 3 izquierdos: $C_{24,3} \cdot C_{21,3}$ (se razona de forma análoga para los izquierdos).

Se eligen 2 derechos y 4 izquierdos: $C_{24,2} \cdot C_{22,4}$ (se razona de forma análoga para los izquierdos).

Se elige 1 derecho y 5 izquierdos: $C_{24,1} \cdot C_{23,5}$ (se razona de forma análoga para los izquierdos).

Se eligen los seis izquierdos: $C_{24,6}$.

De manera que, en total:

$$\binom{24}{6} + \binom{24}{5}\binom{19}{1} + \binom{24}{4}\binom{20}{2} + \binom{24}{3}\binom{21}{3} + \binom{24}{2}\binom{22}{4} + \binom{24}{1}\binom{23}{5} + \binom{24}{6} =$$

$$= 134\ 596 + 807\ 576 + 2\ 018\ 940 + 2\ 691\ 920 + 2\ 018\ 940 + 807\ 576 + 134\ 596 = 8\ 614\ 144$$

Por tanto, en 8 614 144 de todas las posibles elecciones no hay ninguna pareja de zapatos.

67. Una panadería vende pasteles de seis tipos distintos y cuatro tipos de bocadillos. Si cinco amigos deciden comprar la merienda del sábado en esta panadería, y cada uno quiere un bocadillo y un pastel, ¿de cuántas formas distintas podrán hacer la compra?

Dado que los pasteles son distintos, y los amigos pueden elegir los mismos pasteles, se trata de variaciones con repetición de orden 5, de los 6 pasteles: $VR_{6,5} = 6^5 = 7776$.

Análogamente, con los bocadillos calcula de la misma forma: $VR_{4,5} = 4^5 = 1024$.

Por cada elección de los pasteles se pueden elegir las 1024 de los bocadillos. De modo que el total de elecciones posibles es $7776 \cdot 1024 = 7\,962\,624$ formas.

68. Utilizando los símbolos del lenguaje Morse, el punto y la raya, ¿cuántas palabras diferentes se pueden formar utilizando 8 símbolos?

Una palabra se diferencia de otra por los símbolos que utiliza y por el orden en el que están colocados. Se trata de variaciones con repetición de orden 8 de los dos símbolos (punto y raya):

$$VR_{2,8} = 2^8 = 256 \text{ formas}$$

69. Un byte es una secuencia de ocho dígitos formada exclusivamente por ceros y unos. ¿Cuántas secuencias se pueden formar? ¿En cuántas de ellas aparecen exactamente 3 ceros?

Una secuencia de ocho dígitos se diferencia de otra por los ceros y unos que contenga y por el orden en el que están colocados. Se trata, entonces, de variaciones con repetición de orden 8 de los dos elementos (0 y 1):

$$VR_{2,8} = 2^8 = 256 \text{ formas}$$

Si en la secuencia de 8 dígitos hay exactamente 3 ceros (y 5 unos), el número de ellas que se pueden formar es el de las permutaciones con repetición de 8 dígitos donde uno se repite 3 veces (el 0) y el otro 5 veces (el 1):

$$PR_8^{3,5} = \frac{8!}{3!5!} = 56 \text{ formas}$$

70. En una carrera de *cross* intervienen 3 corredores españoles, 4 ingleses, 2 italianos, 3 portugueses y 2 franceses. Al podio suben los tres primeros ¿de cuántas formas pueden repartirse los tres puestos si

a) se tiene en cuenta el corredor?

b) solo se tiene en cuenta el país al que representa?

a) Un podio se diferencia de otro tanto en los corredores que lo ocupan como el orden en que lo forman. Se trata, por tanto, de las variaciones de orden 3 de los 14 corredores:

$$V_{14,3} = 14 \cdot 13 \cdot 12 = 2184 \text{ formas}$$

b) En este caso, al tener solo en cuenta el país al que cada corredor representa, un podio se diferencia de otro por los países que lo ocupan y por el orden en que lo ocupan, pudiéndose repetir estos. Se cuenta con 5 países, pero dos de ellos no llegan a 3 corredores, por lo que no pueden completar un podio por sí mismos. De modo que el total de podios que pueden formarse contando solo el país participante son las variaciones con repetición de orden 3 de los 5 países, descontando las 2 ordenaciones de los dos países que no llegan a tres participantes:

$$VR_{5,3} - 2 = 5^3 - 2 = 123 \text{ formas}$$

71. Con las letras de la palabra ÁRBOL, ¿cuántas palabras distintas con o sin sentido se pueden formar de modo que las dos vocales nunca están juntas?

Se consideran todas las palabras, con o sin sentido, que se pueden formar con la palabra ÁRBOL. Como todas las letras son distintas se tienen:

$$P_5 = 5! = 120 \text{ palabras}$$

Ahora se consideran todas las palabras, con o sin sentido, que se pueden formar con la palabra ÁRBOL de modo que las dos vocales siempre estén juntas. Hay 8 formas posibles en las cuales las vocales A y O van juntas:

AO _ _ _ *OA* _ _ _ _ *AO*_ _ _ *OA*_ _ _ _*AO* _ _ _ *OA*_ _ _ _*AO* _ _ _*OA*

Por cada una de estas ordenaciones se pueden escribir, P_3, $3! = 6$ palabras distintas con o sin sentido.

Por tanto, si se consideran todas las palabras posibles que se pueden formar (120 palabras) y se resta el número de número de palabras que no cumplen los requisitos del enunciado, quedan:

$$120 - 8 \cdot 6 = 72 \text{ palabras}$$

72. Con las letras de la palabra PERMANENTEMENTE:

a) ¿Cuántas palabras distintas con o sin sentido pueden formarse?

b) ¿Cuántas de las anteriores tienen las vocales y las consonantes en los mismos lugares que la palabra original?

a) En esta palabra la letra E se repite cinco veces, la N, tres veces, la M y la T se repiten dos veces cada una y las letras P, R y A solo aparecen una vez. Por tanto, se pueden formar tantas palabras como permutaciones con repetición de las 15 letras donde algunas de ellas son indistinguibles entre sí:

$$PR_{15}^{5,3,2,2,1,1,1} = \frac{15!}{5!3!2!2!1!1!1!} = 454\ 053\ 600 \text{ palabras}$$

b) La palabra tiene 9 consonantes, de las cuales la P y la R aparecen una sola vez cada una, la M y la T aparecen dos veces cada una y la N se repite tres veces. Por tanto, el número de ordenaciones distintas de las consonantes en sus lugares originales es:

$$PR_9^{3,2,2,1,1} = \frac{9!}{3!2!2!1!1!} = 15\ 120$$

En tanto que las 6 vocales, la E, que se repite 5 veces, y la A que aparece solo una vez, de modo que el número de ordenaciones distintas de las vocales en sus lugares originales es:

$$PR_6^{5,1} = \frac{6!}{5!1!} = 6$$

Dado que por cada ordenación de las consonantes se producen 6 ordenaciones distintas de las vocales, el número total de ordenaciones manteniendo las consonantes y las vocales en sus lugares son:

$$6 \cdot 15\,120 = 90\ 720 \text{ palabras}$$

73. Con los dígitos impares 1, 3, 5, 7, 9:

a) ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántos son mayores de 350?

c) Si se ordenan de menor a mayor, ¿qué lugar ocupa el número 531?

a) Un número es distinto de otro si los dígitos que lo forman son distintos o si están en distinto orden, no pudiendo repetirse los dígitos en el número. Por tanto, se trata de las variaciones sin repetición orden 3 de los 5 dígitos:

$$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ números}$$

b) Serán mayores de 350 los números en las siguientes situaciones:

La cifra de las centenas está ocupada por el 3, la de las decenas por el 5, el 7 o el 9 y la de las unidades por cualquier número no elegido antes. Aplicando la regla de la multiplicación queda:

$$1 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \text{ números}$$

La cifra de las centenas está ocupada por un número mayor que 3 (5, 7 o 9), la de las decenas por cualquier número no elegido para las decenas y las unidades por cualquier número no elegido antes. Aplicando la regla de la multiplicación queda:

$$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36 \text{ números}$$

En total, son mayores que 350, $9 + 36 = 45$ números.

c) Ordenados de menor a mayor:

Empiezan por 1: $V_{4,2} = 12$

Empiezan por 3: $V_{4,2} = 12$

Empiezan por 51: $V_{3,1} = 3$

Hasta aquí van 27 números. El siguiente número es el 531 que ocupa, por tanto, el lugar 28.

74. Determina el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x + y + z + t = 3$.

Los valores que pueden tener las cuatro variables *x*, *y*, *z*, *t*, son 0, 1, 2 o 3. A continuación se estudian las diferentes posibilidades que resuelven la ecuación:

Tres de las variables toman el valor 1 y la cuarta toma el valor 0. Hay tantas posibles soluciones en este caso como las permutaciones con repetición de 4 elementos (3 unos y 1 cero) donde el 1 se repite tres veces y el 0 solo una vez:

$$PR_4^{3,1} = \frac{4!}{3!1!} = 4 \text{ soluciones}$$

Dos de la variables toman el valor 0, una tercera el valor 1 y la cuarta el valor 2. Se calcula el número de posibles soluciones:

$$PR_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12 \text{ soluciones}$$

Una de las variables toma el valor 3 y las otras tres el valor 0. En este caso, el número de soluciones es:

$$PR_4^{3,1} = \frac{4!}{3!1!} = 4 \text{ soluciones}$$

De manera que el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación se obtiene sumando las de las tres posibilidades descritas. En total, $4 + 12 + 4 = 20$ posibilidades.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Una bolsa contiene 8 bolas numeradas, del 1 al 5 son blancas y del 6 al 8 verdes. De la bolsa se extraen una a una 3 bolas.

a) ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar?

b) ¿En cuántas extracciones habrá dos bolas blancas con número par?

c) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar solo con las bolas blancas?

a) Al extraer una a una las bolas sin reemplazamiento, se pueden formar tantos números de tres cifras como variaciones de orden 3 de los 8 números. Por tanto:

$$V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ números}$$

b) Hay dos bolas blancas con número par, que deben ocupar dos de las tres posiciones. El número de posibilidades para estas dos bolas es el de variaciones de orden 2 de las 3 posiciones:

$$V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$$

Por cada una de éstas, la posición restante puede ser ocupada por cualquiera de las 6 bolas restantes De modo que, en total, el número de posibles extracciones con las dos bolas blancas con número par es:

$$6 \cdot V_{3,2} = 36 \text{ extracciones}$$

c) Si solo se eligen las bolas blancas, se pueden formar tantos números de tres cifras como las variaciones, sin repetición, de orden 3 de las 5 bolas blancas. Esto es:

$$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ números}$$

2. En un centro de formación en idiomas ofrecen alemán, inglés, francés y chino. Si 10 estudiantes van a matricularse al centro ¿de cuántas formas distintas podrán hacerlo?

Una matrícula de los estudiantes se diferencia de otra en los idiomas en que se matriculan y en el orden en el que los estudiantes se matriculan. Luego, se podrán matricular de tantas formas distintas como variaciones con repetición de orden 10 de los 4 idiomas. Por tanto:

$$VR_{4,10} = 4^{10} = 1\,048\,576 \text{ formas}$$

3. De una baraja de 40 cartas, se reparten 4.

a) ¿De cuántas formas distintas puede hacerse el reparto?

b) ¿En cuántas de esas entran dos ases?

c) ¿En cuántas las 4 cartas son del mismo palo?

a) En el reparto de las 4 cartas solo importa las cartas que se reciben y no el orden en el que se reciben. Se trata, por tanto, de las combinaciones sin repetición de orden 4 de las 40 cartas:

$$C_{40,4} = \binom{40}{4} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4!} = 91\,390 \text{ formas}$$

b) Los 2 ases deben ser elegidos entre los 4 ases y, por cada una de esas elecciones las otras 2 cartas se elegirán de las 36 restantes que no son ases. En total:

$$C_{4,2}C_{36,2} = \binom{4}{2}\binom{36}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{36 \cdot 35}{2!} = 3780 \text{ formas}$$

c) En primer lugar debe elegirse el palo: hay 4 posibilidades. Por cada elección del palo, las 4 cartas deben elegirse de las 10 del palo. De esta manera:

$$4 \cdot C_{10,4} = 4 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 840 \text{ formas}$$

4. ¿De cuántas maneras se pueden pintar las caras de un prisma recto hexagonal con ocho colores distintos?

Dado que un prisma hexagonal tiene 8 caras y se van a emplear 8 colores distintos, se tienen permutaciones de 8 elementos:

$$P_8 = 8! = 40\,320 \text{ maneras distintas}$$

5. Con las letras de la palabra JACINTO, ¿cuántas palabras diferentes con sentido o sin sentido se pueden formar de tal manera que tengan juntas las 4 consonantes?

Dada una palabra que cumpla el requisito del enunciado, es decir, que tenga las 4 consonantes juntas, estas se pueden combinar de 24 formas distintas ($P_4 = 4! = 24$). Además, las otras 3 vocales se pueden combinar de 6 formas distintas ($P_3 = 3! = 6$). Esto sucede por cada palabra que cumpla los requisitos del enunciado.

Los diferentes casos en los que se puede dar esta situación son en los cuatro siguientes:

C C C C V V V   *V C C C C V V*   *V V C C C C V*   *V V V C C C C*   con *V*: Vocal y *C*: Consonante

Por tanto, aplicando la regla de la multiplicación se tienen $4 \cdot P_4 \cdot P_3 = 4 \cdot 24 \cdot 6 = 576$ palabras distintas.

6. Se disponen de 6 bolas iguales que se quieren distribuir en 4 cajas distintas. ¿De cuántas formas puede hacerse?

Para repartir las 6 bolas (•) entre las 4 cajas (I) y teniendo en cuenta que una caja puede recibir más de una bola (•), se utiliza la codificación de puntos y barras:

•|••||•••   1ª Caja: 1 bola; 2ª Caja: 2 bolas; 3ª Caja: 0 bolas; 4ª Caja: 3 bolas

El número de formas distintas en que pueden repartirse 6 bolas entre 4 cajas es:

$$CR_{4,6} = C_{9,6} = \frac{9!}{6!3!} = 84 \text{ formas}$$

7. Diez estudiantes, cuatro del grupo *A*, tres del grupo *B* y tres del grupo *C*, llegan juntos a la cafetería a la hora de la comida.

a) ¿De cuántas formas se pueden colocar en la fila para recoger la bandeja?

b) ¿Y si solo se tiene en cuenta el grupo al que pertenecen?

a) En este caso, son las permutaciones de los diez estudiantes:

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800 \text{ formas}$$

b) Si solo se tiene en cuenta el grupo al que pertenece cada alumno, el número de ordenaciones es el de las permutaciones con repetición de los 10 estudiantes, donde la *A* se repite 4 veces y la *B* y la *C* tres cada una:

$$PR_{10}^{4,3,3} = \frac{10!}{4!3!3!} = 4200 \text{ formas}$$

8. En un torneo de ajedrez se inscriben 57 personas. Si en cada partida el perdedor queda eliminado y no se contemplan los empates, ¿cuántas partidas se celebrarán hasta que se proclame el vencedor?

Dado que en cada partida se elimina un único jugador, que el torneo empieza con 57 jugadores y sólo hay un ganador, a la fuerza se celebran en total 56 partidas.

9. Se lanza una moneda 10 veces. ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener? ¿En cuántos de ellos se obtienen como mucho tres caras?

Cada resultado del lanzamiento de una moneda 10 veces, es una variación con repetición de orden 10 de 2 elementos (cara y cruz):

$$VR_{2,10} = 2^{10} = 1024 \text{ resultados}$$

Para contar los resultados en los que se obtiene como mucho 3 caras, se procede a contar los resultados en los que haya exactamente 0, 1, 2, y 3 caras respectivamente:

Solo hay 1 resultado en el haya exactamente 0 caras (10 cruces)

Para contar los resultados donde haya exactamente 1 cara y 9 cruces, se pueden utilizar las permutaciones con repetición de los 10 lanzamientos donde la cara se repite 1 vez y la cruz 9 veces:

$$PR_{10}^{1,9} = \frac{10!}{1!9!} = 10$$

Para contar exactamente 2 caras y 8 cruces, se cuenta nuevamente por las permutaciones con repetición:

$$PR_{10}^{2,8} = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

De la misma forma se cuenta el número de resultados en los que hay exactamente 3 caras y 7 cruces:

$$PR_{10}^{3,7} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

En total, $1+10+45+120 = 176$ resultados a favor.

10. Calcula el valor de *n* en cada caso.

a) $2V_{n+1,2} - V_{n+2,2} = 18$

b) $\binom{12-n}{n+1} = \binom{12-n}{2n-5}$

c) $P_n = 20\, P_{n-2}$

a) Se desarrollan las variaciones, se opera y resuelve la ecuación resultante:

$$2(n+1)n - (n+2)(n+1) = 18 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \begin{cases} n_1 = 5 \\ n_2 = -4 \end{cases}$$

De modo que la única solución factible es $n = 5$.

b) Aplicando las propiedades de los números combinatorios y resolviendo se tiene que:

$$n+1+2n-5 = 12-n \Rightarrow 4n = 16 \Rightarrow n = 4$$

c) Se desarrollan las permutaciones, se opera y resuelve la ecuación resultante:

$$n! = 20 \cdot (n-2)! \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 20 \Rightarrow n \cdot (n-1) = 20 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \begin{cases} n_1 = 5 \\ n_2 = -4 \end{cases}$$

De modo que la única solución factible es $n = 5$.

11. Determina el término independiente en el desarrollo del binomio:

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x^2}\right)^{12}$$

El término independiente no debe incluir parte literal, es decir, el exponente de *x* debe ser cero. Como el término *k* − ésimo del desarrollo es:

$$(-1)^{k-1}\binom{12}{k-1}\left(\frac{x}{3}\right)^{12-(k-1)}\left(\frac{4}{x^2}\right)^{k-1} = (-1)^{k-1}\binom{12}{k-1}\frac{x^{13-k}}{3^{13-k}}\frac{4^{k-1}}{x^{2k-2}} = (-1)^{k-1}\binom{12}{k-1}\frac{4^{k-1}x^{15-3k}}{3^{13-k}}$$

Como $x^{15-3k} = x^0 \Rightarrow 15 - 3k = 0 \Rightarrow k = 5$. Y, por lo tanto, queda que el término independiente es:

$$(-1)^{5-1}\binom{12}{5-1}\left(\frac{x}{3}\right)^{12-(5-1)}\left(\frac{4}{x^2}\right)^{5-1} = \binom{12}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^{8}\left(\frac{4}{x^2}\right)^{4} = 495 \cdot \frac{1}{6561} \cdot 256 = \frac{14\,080}{729}$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Si se quiere formar más de 200 palabras de tres letras distintas ¿Cuántas letras del alfabeto habrá que elegir como mínimo?

A. 10 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 7

La solución es D. En este caso se trata de variaciones de orden 3 de *n* elementos (las 3 letras distintas), es decir, $V_{n,3}=n(n-1)(n-2)$. Se comprueba que si tomamos 6 letras distintas se tienen:

$$V_{6,3}=6(6-1)(6-2)=120 \text{ palabras}$$

Mientras que si se escogen 7 letras distintas ya se tienen más de las 200 palabras pedidas:

$$V_{7,3}=7(7-1)(7-2)=210 \text{ palabras}$$

2. De una caja que contiene 4 tornillos defectuosos, se extraen 3 tornillos a la vez. Si en 60 de tales extracciones solo uno de los tres tornillos es defectuoso, ¿cuál es el número de tornillos que contiene la caja?

A. 7 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

La solución es C. Se supone que hay *n* tornillos en total. El número de formas distintas de extraer un tornillo defectuoso y 2 tornillos no defectuosos sin reemplazamiento es, respectivamente, 4 y $\binom{n-4}{2}$, de donde se deduce, por la regla de la multiplicación, que $4\binom{n-4}{2}=60$. Se resuelve quedando que:

$$4\binom{n-4}{2}=60\Rightarrow\binom{n-4}{2}=15\Rightarrow\frac{(n-4)!}{(n-6)!2!}=15\Rightarrow(n-4)(n-5)=30\Rightarrow n^2-9n-10=0$$

Se resuelve la ecuación:

$$n=\frac{9\pm\sqrt{81+40}}{2}=\frac{9\pm 11}{2}=\begin{cases}n_1=10\\ n_2=-1\end{cases}$$

Siendo solo posible la solución $n = 10$. Por tanto, C es la solución.

3. A cada uno de los 8 niños que asisten a un cumpleaños les regalan una bolsa con chuches a cada uno y sobran 3. Si pueden llevarse más de una de las sobrantes y se cuentan 20 formas distintas de repartir estas tres bolsas ¿Cuántos niños no quisieron repetir?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

La solución es B. En total hay 8 niños, *n* niños que sí repiten y 8 – *n* que no lo hacen. Para repartir las 3 bolsas de chuches entre los *n* niños (I) y teniendo en cuenta que un niño puede recibir más de una bolsa (•), se utiliza la codificación de puntos y barras:

•||••||||… Niño 1: 1 bolsa; Niño 3: 2 bolsas; Del Niño 4 al Niño *n*: 0 bolsas

El número de formas distintas en que pueden repartirse 3 bolsas entre *n* niños es:

$$CR_{n,3}=C_{n+2,3}=\binom{n+2}{3}=\frac{(n+2)!}{(n-1)!3!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

Como en el enunciado se afirma que $CR_{n,3}=20$, se tiene que:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}=20\Rightarrow n(n+1)(n+2)=120$$

Se observa que si $n = 4$, entonces $4(5+1)(6+2)=120.$ Por tanto, 4 niños sí repitieron y otros 4 no lo hicieron.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. En el coeficiente binomial $\binom{\mathbf{12}}{\boldsymbol{x-3}} = \mathbf{220}$**,**

A. $x = 12$ **B.** $x = 7$ **C.** $x = 11$ **D.** $x = 6$

Las soluciones son A y D. Si $x = 12$ y aplicamos la definición, se obtiene que:

$$\binom{12}{12-3} = \binom{12}{9} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3!} = 220$$

Por otro lado, si se aplican las propiedades de los números combinatorios se obtiene que:

$$\binom{12}{12-3} = \binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \binom{12}{6-3}$$

Por tanto, la A y D son las respuestas correctas. Con B y C la igualdad no se cumple.

5. Se lanza 10 veces una moneda, el número de resultados en los que se obtienen 4 caras es:

A. $C_{10,6}$ **B.** $CR_{10,4}$ **C.** $PR_{10}^{6,4}$ **D.** $C_{10,4}$

Las soluciones son A, C y D.

Los posibles resultados de lanzar una moneda 10 veces y obtener 4 caras resultan ser permutaciones de 10 elementos con repetición de un elemento que se repite 4 veces (caras) y otro se repite 6 veces (cruces). Por tanto, se tratan de $PR_{10}^{6,4}$, luego la respuesta C es correcta.

Como además se tiene que $PR_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!4!} = C_{10,6} = C_{10,4}$, las respuestas A y D también resultan ser ciertas.

Señala el dato innecesario para contestar

6. Un grupo de excursionistas se divide en dos subgrupos. Uno iniciará una marcha y el otro preparará el vivac para pasar la noche. ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar en fila los que harán la marcha?

1. **El número de excursionistas.**
2. **El número de marchadores.**
3. **El número de los que preparan el vivac.**

A. Sobra el dato 1. **C.** Sobran los datos 2 y 3.

B. Sobra el dato 2. **D.** No sobra ningún dato.

La solución es A y B. Para resolver este problema se necesita conocer el número de marchadores, luego, o sobran los datos 1 y 3 o sobra el 2. Por tanto A y B son respuestas correctas, sin el dato 1 puede resolverse porque se conoce 2 y sin el dato 2 puede resolverse porque se conocen 1 y 3.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

7. Considera las siguientes ordenaciones:

1. **Combinaciones de orden *k* de los *n* elementos.**
2. $\boldsymbol{PR_n^{k,\,n-k}}$

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$ **C.** $1 \Leftrightarrow 2$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$ **D.** Nada de lo anterior

La solución es C. Si se aplican las definiciones de permutaciones con repetición y combinaciones se observa, en este caso, que ambas afirmaciones son equivalentes:

$$PR_n^{k,\,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = C_{n,\,k}$$