2 Derivadas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Aplicando la definición de derivada, decide si las siguientes funciones son derivables en los puntos indicados y calcula, si existe, la derivada.

a) $f(x) = x^3$ en $x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $x = 2$

c) $f(x) = x|x|$ en $x = 0$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h^2+3h+3)}{h} = 3$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{h+4}-2)(\sqrt{h+4}+2)}{h(\sqrt{h+4}+2)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h(\sqrt{h+4}+2)} = \dfrac{1}{4}$

c) Se expresa $f(x)$ como una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x(-x) & \text{si } x \le 0 \\ xx & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h^2}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2}{h} = 0 \end{cases}$$. Luego $f'(0) = 0$.

d) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$

4. Estudia si las siguientes funciones son derivables en el punto en el que se cambia su definición.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \le 1 \\ x^3-x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

En todos los casos se comienza estudiando si la función es continua en los puntos donde cambia su definición, porque si no lo es, no será derivable.

a) La función es continua en $x = 0$ porque $\lim\limits_{h\to 0^+} f(0+h) = 0 = f(0) = \lim\limits_{h\to 0^-} f(0+h)$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{3h}{h} = 3 \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2}{h} = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Luego no existe el límite, por tanto, la función no es derivable.

b) La función es continua en $x = 1$ porque $\lim\limits_{h\to 0^+} f(1+h) = 3 = f(1) = \lim\limits_{h\to 0^-} f(1+h)$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(1+h)^2+2-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h(h+2)}{h} = 2 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(1+h)^3-(1+h)+3-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h(h^2+3h+2)}{h} = 2 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Luego $f'(1) = 2$

5. **Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $f(x)=\sqrt{x+1}$ en el punto de abscisa 0.**

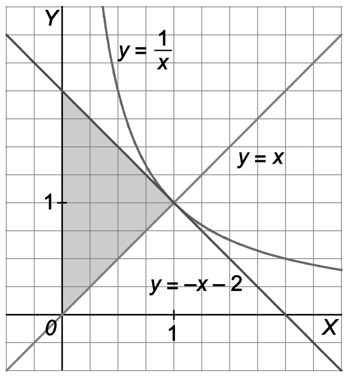
La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(0+h)+1}-\sqrt{0+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h+1}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{h+1}-1)(\sqrt{h+1}+1)}{h(\sqrt{h+1}+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{h+1}+1)}=\frac{1}{2}.$$

Luego la recta tangente es $y-1=\frac{1}{2}x \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$ y la recta normal es $y-1=-2x \Rightarrow y=-2x+1$.

6. **Calcula el área del triángulo formado por el eje vertical y las rectas tangente y normal a la curva $f(x)=\frac{1}{x}$ en el punto de abscisa 1, previa deducción del número $f'(1)$.**

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(1+h)}=-1$$



La recta tangente tiene pendiente m = -1 y pasa por el punto $A(1, f(1)) = A(1, 1)$,

luego su ecuación es $y = -x + 2$ y la recta normal en $A(1, 1)$

tiene pendiente $m' = 1$, luego su ecuación es $y = x$.

Hay que calcular el área del triángulo rectángulo cuyos vértices son $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ y $B(0, 2)$.

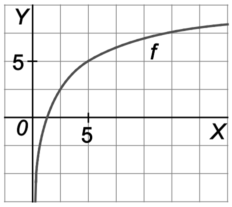
Por tanto, el área es 1 u^2.

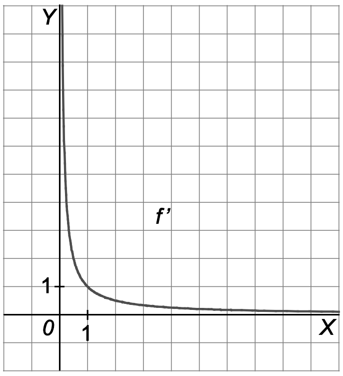
7. **La tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(2, f(2))$ pasa también por el punto $Q(-3,0)$. Si $f'(2)=\frac{1}{2}$, calcula $f(2)$.**

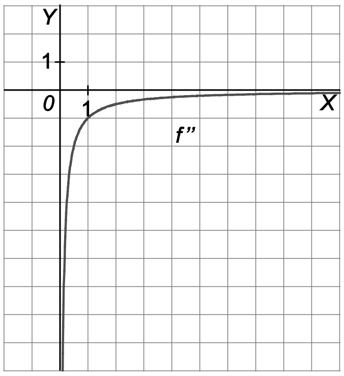
La ecuación de la recta que pasa por Q con pendiente $\frac{1}{2}$ es $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Además, como la recta pasa por el punto $P(2, f(2))$, entonces $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

8 y 9. Ejercicios resueltos.

10. **Para una función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ cuya gráfica es la de la figura, esboza las gráficas de $y=f'(x)$ y $y=f''(x)$.**







11. **Si $f(x)=|x-3|(x-3)$, ¿existen los números $f''(0)$ y $f''(3)$?**

$$f(x)=\begin{cases}(-x+3)(x-3) & \text{si } x\le 3\\ (x-3)(x-3) & \text{si } x>3\end{cases}=\begin{cases}-(x-3)^2 & \text{si } x\le 3\\ (x-3)^2 & \text{si } x>3\end{cases}$$

Se estudia que ocurre con $f'(3)$:

$$f'(x)=\begin{cases}-2(x-3) & si\ x<3\\ 2(x-3) & si\ x>3\end{cases}\Rightarrow f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2}{h}=0\\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h}=0\end{cases}$$

Así pues, $f'(x)=\begin{cases}-2(x-3) & si\ x\le 3\\ 2(x-3) & si\ x>3\end{cases}=2|x-3|$ que, como ya se sabe, no es derivable en $x=3$, pues

$$f''(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(3+h)-f'(3)}{h}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{-2h}{h}=-2\\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h}=2\end{cases}$$

Si $x\ne 3$, $f''(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x<3\\ 2 & \text{si } x>3\end{cases}$. Luego $f''(0)=-2$.

12. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x\le 0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$. Calcula, si existen: $f'(-2)$, $f''(-2)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'(3)$ y $f''(3)$.

Si $x<0$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2+2(x+h)-1-(x^2+2x-1)}{h}=2x+2$ y

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+2-(2x-2)}{h}=2$$

Se sabe que $f'(-2)=-2$ y $f''(-2)=2$.

Si $x>0$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)-1-(2x-1)}{h}=2$ y, por tanto, $f''(x)=0$

Así pues, $f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(3)=2$ y $f''(3)=0$

Para calcular las derivadas en $x=0$ se observa primero si f y f' son continuas allí y se calculan los límites laterales:

$$f'(0):\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2-2h-1-(-1)}{h}=2 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2h-1-(-1)}{h}=2 \end{cases}\text{, así pues, } f'(0)=2$$

$$f''(0):\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{2h+2-(-2)}{h}=2 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2-2}{h}=0 \end{cases}\text{, así pues, no existe } f''(0).$$

13. ¿Es la siguiente función derivable en $x=0$?

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{2}+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(h+1)=1$$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{h^2}{2}+1-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{2}=0$$

Luego la función no es derivable en $x=0$.

14. ¿Es f derivable en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ -4(x+1) & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 3x^2 - 4 & \text{si } 0 < x \le 2 \\ 12x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(-2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(-2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 - 4h}{h} = -4$$

$$f'(-2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-4(-2+h+1) - 4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-4h}{h} = -4$$

Luego la función es derivable en $x = -2$ y $f'(-2) = -4$.

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-4(0+h+1) - (-4)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-4h}{h} = -4$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h^2 - 4 - (-4)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3h^2}{h} = 0$$

La función no es derivable en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 8$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 25$

Por tanto, la función no es continua en $x = 2$ y, en consecuencia, no es derivable en $x = 2$.

15 a 18. Ejercicios resueltos.

19. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 8(7x^5 - x^2) + 6(-x+4)$

b) $f(x) = (x-1)(3x^2 - x + 4)$

c) $f(x) = (4x+2)(x^2 - 2x + 1) - x^3(6x^2 - 3x - 3)$

d) $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4 + x^2 + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{(x^2-3)(x-1)}{x^2+1}$

f) $f(x) = (x^4 + 3x^3 + 2x - 1)(2x+1)(x^2 - 3x + 4)$

a) $f'(x) = 8(35x^4 - 2x) - 6 = 280x^4 - 16x - 6$

b) $f'(x) = (3x^2 - x + 4) + (x-1)(6x-1) = 9x^2 - 8x + 5$

c) $f'(x) = 4(x^2 - 2x + 1) + (4x+2)(2x-2) - 3x^2(6x^2 - 3x - 3) - x^3(12x - 3) = -30x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 12x$

d) $f'(x) = \dfrac{5x^4(x^4 + x^2 + 1) - x^5(4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + 1)^2} = \dfrac{x^8 + 3x^6 + 5x^4}{x^8 + 2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1}$

e) $f'(x) = \dfrac{[2x(x-1) + (x^2-3)](x^2+1) - 2x(x^2-3)(x-1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4 + 6x^2 - 8x - 3}{x^4 + 2x^2 + 1}$

f) $f'(x) = (4x^3 + 9x^2 + 2)(2x+1)(x^2 - 3x + 4) + 2(x^4 + 3x^3 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 4) +$

$+(x^4 + 3x^3 + 2x - 1)(2x+1)(2x-3) = 14x^6 + 6x^5 - 50x^4 + 92x^3 + 30x + 3$

20. Calcula, sin usar la derivada del cociente, la derivada de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3}$ **b)** $f(x)=\dfrac{5x^3-6x^2+7x}{x}$

a) $f(x)=\dfrac{1}{3}(2x+1)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3}$

b) $f(x)=5x^2-6x+7\Rightarrow f'(x)=10x-6$

21. Calcula la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$. ¿Hay algún punto en la gráfica de $f(x)$ en el que la tangente sea horizontal?

La derivada es $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)-x2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$.

La tangente en un punto es horizontal si la derivada se anula. Es decir, buscamos valores de x tales que $\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=0$, como $-x^2-1=0$ no tiene soluciones reales. Por tanto, no hay ningún punto con tangente horizontal.

22. Calcula la derivada de $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x+1$ y halla la abscisa de los puntos de la curva en los que la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante, $y=x$.

La derivada es $f'(x)=x^2-2x+1$.

Se buscan los puntos en los que la pendiente de la recta tangente sea 1. Para ello se igual la derivada a 1.

$$x^2-2x+1=1\Rightarrow x=0, x=2$$

Luego la abscisa de los puntos buscados es $x=0$ o $x=2$.

23. Demuestra que, para cualesquiera números reales a y b (no simultáneamente nulos), la gráfica de $y=\dfrac{ax+b}{ax-b}$ no tiene ninguna tangente horizontal.

La derivada es $y'=\dfrac{-2ab}{(ax-b)^2}$.

Si tuviera tangente horizontal, entonces $y'=0$. Luego $\dfrac{-2ab}{(ax-b)^2}=0\Rightarrow a=0, b=0$.

Si $a=0$, $b\neq 0$, entonces $y=-1$, recta paralela al eje X.

Si $a\neq 0$, $b=0$, entonces $y=1$, recta paralela al eje X.

24. Comprueba que las funciones $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ tienen la misma derivada. Sin calcular las derivadas, ¿sabrías deducir que iban a ser iguales?

$f'(x)=\dfrac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$ $g'(x)=\dfrac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

Sí se podría deducir que iban a ser iguales porque $f(x)-g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}=1$. Luego, $f(x)=g(x)+1$.

Por tanto, sus derivadas son iguales.

25 a 27. Ejercicios resueltos.

28. Copia y completa la siguiente tabla.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(f \circ g)'(x)$
–1	1	0	1	0	•••	•••
0	3	2	–2	1	•••	•••
2	–1	–1	0	2	•••	•••

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(f \circ g)'(x)$
–1	1	0	1	0	3	0
0	3	2	–2	1	–1	0
2	–1	–1	0	2	1	2

29. Sean $f(x) = \left(x^2+1\right)^3$ y $g(x) = \dfrac{5}{x}$. Calcula.

a) $t(x) = (f \circ g)(x)$ y $t'(x)$

b) $f'(g(x))$ y $g'(x)$

c) Comprueba que el resultado del apartado a) coincide con el resultado del producto de las funciones del apartado b).

a) $t(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{5}{x}\right) = \left(\left(\dfrac{5}{x}\right)^2 + 1\right)^3 = \left(\dfrac{25+x^2}{x^2}\right)^3$

$$t'(x) = 3\left(\frac{25+x^2}{x^2}\right)^2 \frac{2x^3 - 2x\left(25+x^2\right)}{x^4} = 3\left(\frac{25+x^2}{x^2}\right)^2 \frac{(-50)}{x^3}$$

b) $f'(x) = 3\left(x^2+1\right)^2 2x$. Luego $f'(g(x)) = 3\left(\dfrac{25}{x^2}+1\right)^2 \dfrac{10}{x}$ y $g'(x) = \dfrac{-5}{x^2}$.

c) $f'(g(x))g'(x) = 3\left(\dfrac{25}{x^2}+1\right)^2 \dfrac{10}{x}\dfrac{(-5)}{x^2} = 3\left(\dfrac{25+x^2}{x^2}\right)^2 \dfrac{(-50)}{x^3} = t'(x)$

30 y 31. Ejercicios resueltos.

32. Calcula, utilizando la derivada de la función inversa, la derivada de la función:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

Elevamos a n, tenemos que $[f(x)]^n = x$ y derivamos ambos miembros.

$n[f(x)]^{n-1} f'(x) = 1$. Despejando obtenemos $f'(x) = \dfrac{1}{n[f(x)]^{n-1}} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

33. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

b) $f(x)=\sqrt[4]{1-\sqrt{x}}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{2x+1}}$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

a) $f'(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(1-\sqrt{x})^3}}\dfrac{(-1)}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{8\sqrt{x}\sqrt[4]{(1-\sqrt{x})^3}}$

c) $f'(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-x\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}}{\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^2}=\dfrac{4x+3}{3(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}}$

d) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2x\sqrt[3]{(2x+1)^2}}{2\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{4\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt[3]{2x+1}}}{\sqrt[3]{(2x+1)^4}}=\dfrac{6x(2x+1)-8(x^2+1)}{6(2x+1)\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=\dfrac{2x^2+3x-4}{(6x+3)\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

34. Calcula en cada caso, el valor de *a*:

a) $f'(2)=3$ $\quad f^{-1}(0)=2$ $\quad (f^{-1})'(0)=a$

b) $f'(-1)=4$ $\quad f^{-1}(4)=-1$ $\quad (f^{-1})'(4)=a$

c) $f'(5)=a$ $\quad f^{-1}(3)=5$ $\quad (f^{-1})'(3)=6$

a) $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{3}$

b) $(f^{-1})'(4)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(4))}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{4}$

c) $f'(5)=f'(f^{-1}(3))=\dfrac{1}{(f^{-1})'(3)}=\dfrac{1}{6}$

35. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y=\sqrt[5]{x}$ en el punto de abscisa 32, previa deducción de la derivada de dicha función.

Como $f^{-1}(x)=x^5$ y $(f^{-1})'(x)=5x^4$, se tiene que $x=(f^{-1}\circ f)(x)$. Derivando se obtiene:

$1=(f^{-1}\circ f)'(x)=(f^{-1})'(\sqrt[5]{x})f'(x)=5\sqrt[5]{x^4}f'(x)$, luego $1=5\sqrt[5]{x^4}f'(x)$ por lo que $f'(x)=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente buscada es $y=f'(32)(x-32)+f(32)=\dfrac{1}{80}x+\dfrac{8}{5}$.

36. Calcula la derivada de $x=-1$ de la inversa de la función $f(x)=x^3$.

La función inversa de *f* es $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$. Teniendo en cuenta que $f'(x)=3x^2$, se obtiene:

$(f^{-1})'(-1)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(-1))}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{3\cdot(-1)^2}=\dfrac{1}{3}$

37 y 38. Ejercicios resueltos.

39. Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=e^{x^3+4}$ **b)** $f(x)=(3x^2-2x+1)e^{\sqrt{x}+2}$ **c)** $f(x)=7^{\sqrt[5]{x^3}+x}$

a) $f'(x)=3x^2e^{x^3+4}$

b) $f'(x)=(6x-2)e^{\sqrt{x}+2}+\dfrac{(3x^2-2x+1)}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}+2}=\left(6x-2+\dfrac{3x^2-2x+1}{2\sqrt{x}}\right)e^{\sqrt{x}+2}$

c) Escribimos $f(x)=7^{\sqrt[5]{x^3}+x}=e^{\ln 7^{\sqrt[5]{x^3}+x}}=e^{\left(\sqrt[5]{x^3}+x\right)\ln 7}$

$f'(x)=\ln 7\left(\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}+1\right)e^{\left(\sqrt[5]{x^3}+x\right)\ln 7}=\ln 7\left(\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}+1\right)7^{\sqrt[5]{x^3}+x}$

40. Obtén la ecuación de la tangente a la curva $y=e^{2x+1}$ en el punto de abscisa $-\dfrac{1}{2}$.

$f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1}=2$ y $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+1=2x+2$.

41. Determina si existe algún punto con tangencia horizontal en la curva:

$$y=e^{x^3+x+1}$$

Igualando la derivada a cero: $f'(x)=(3x^2+1)e^{x^3+x+1}=0$. No obstante, como la derivada no se anula nunca, ya que tanto $3x^2+1$ como e^{x^3+x+1} son positivas, la curva no tiene tangentes horizontales.

42. Obtén la ecuación de la tangente a la curva $y=e^{e^x-1}$ en el punto de abscisa 0.

$f'(x)=e^xe^{e^x-1}$, $f'(0)=1$ y $f(0)=1$, luego la recta tangente es $y=x+1$.

43 a 45. Ejercicios resueltos.

46. Calcula la derivada de:

a) $f(x)=\ln\left[\left(x^3+1\right)\left(x^2-3\right)\right]$

b) $f(x)=\ln\left[\left(x^2+1\right)\right]^3$

c) $f(x)=\sqrt{4x^2-3x}\,\ln\sqrt{x+2}$

d) $f(x)=\log_3\left[\left(x^4+2x^2+1\right)\right]^2$

a) $f'(x)=\dfrac{3x^2\left(x^2-3\right)+\left(x^3+1\right)2x}{\left(x^3+1\right)\left(x^2-3\right)}=\dfrac{3x^4-9x^2+2x^4+2x}{x^5-3x^3+x^2-3}=\dfrac{5x^4-9x^2+2x}{x^5-3x^3+x^2-3}$

b) $f'(x)=\dfrac{3\left(x^2+1\right)^2 2x}{\left(x^2+1\right)^3}=\dfrac{6x}{x^2+1}$ (si se escribe $f(x)=3\ln\left(x^2+1\right)$ se obtiene la derivada con mayor facilidad).

c) $f'(x)=\dfrac{8x-3}{2\sqrt{4x^2-3x}}\ln\sqrt{x+2}+\dfrac{\sqrt{4x^2-3x}}{\sqrt{x+2}\,2\sqrt{x+2}}=\dfrac{8x-3}{2\sqrt{4x^2-3x}}\ln\sqrt{x+2}+\dfrac{\sqrt{4x^2-3x}}{2(x+2)}$

d) Se escribe $f(x)=\dfrac{2\ln\left(x^4+2x^2+1\right)}{\ln 3}=\dfrac{4\ln\left(x^2+1\right)}{\ln 3}$, entonces $f'(x)=\dfrac{8x}{\left(x^2+1\right)\ln 3}$.

47. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y=\ln x$ trazada desde el origen.

La ecuación de la recta tangente a la curva por el punto $(a,f(a))$ es $y=\dfrac{1}{a}x+\ln a-1$.

Si pasa por el origen debe ser $0=\ln a-1$, entonces $\ln a=1$, $a=e$ y la ecuación buscada es $y=\dfrac{x}{e}$.

48. ¿Hay algún punto de la gráfica de $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ con tangente horizontal?

Como $D(f)=(-1,1)$ y $f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ no se anula en ese intervalo, por tanto, la gráfica no tiene tangentes horizontales.

49. Calcula, simplificando al máximo, la derivada de la función: $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

Derivando directamente obtenemos $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)\left(\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}\right)=\dfrac{-2e^x}{e^{2x}-1}$.

Si antes de derivar usamos las propiedades de logaritmos para reescribir la función: $f(x)=\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^x-1\right)$, entonces se obtiene también: $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{e^x}{e^x-1}=\dfrac{-2e^x}{e^{2x}-1}$

50. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\operatorname{sen}x$ en el origen.

$f'(0)=\cos 0=1$ y $f(0)=0$.

Así pues, la recta tangente es $y=x$.

51. ¿Hay algún punto de la gráfica de $f(x) = \text{tg}\,2x$ en el que la tangente esté menos inclinada que la bisectriz del primer cuadrante?

$f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x} \geq 2$, luego las tangentes a la curva siempre tienen pendiente mayor que 2. Por tanto, no existe un punto donde la tangente a la gráfica de la función esté menos inclinada que la bisectriz del primer cuadrante.

52. Obtén la derivada de las funciones:

a) $f(x) = \text{sen}\left(x^2 + e^{2x} - \sqrt{x}\right)$

b) $f(x) = \sqrt{\text{sen}\,x}$

a) $f'(x) = \cos\left(x^2 + e^{2x} - \sqrt{x}\right)\left(2x + 2e^{2x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

b) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen}\,x}}$

53. Encuentra los puntos con abscisa en $[0, 2\pi]$ para los que la tangente a la curva $f(x) = \text{sen}\,x + \cos x$ es horizontal.

$f'(x) = \cos x - \text{sen}\,x = 0$ si $\cos x = \text{sen}\,x$, luego $x = \dfrac{\pi}{4}$ o $x = \dfrac{5\pi}{4}$.

Los puntos buscados son $P\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y $Q\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

54. Pon tu calculadora en grados y obtén, con ayuda de la misma, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\,x}{x}$. Compara el resultado con el obtenido en radianes y justifica la ventaja de utilizar radianes en Análisis.

x	0,1º	–0,1º	0,01	0,001º
$f(x)$	0,017453283	0,017453283	0,017453292	0,017453292

El límite es $\dfrac{\pi}{180}$.

55. Halla las derivadas de las funciones:

a) $f(x) = \text{sen}^3\left(x^2 - x\right)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3\left(3x^2 + 2x\right)}$

a) $f'(x) = 3\,\text{sen}^2\left(x^2 - x\right)\cos\left(x^2 - x\right)(2x - 1)$

b) $f'(x) = \dfrac{3\cos^2\left(3x^2 + 2x\right)\text{sen}\left(3x^2 + 2x\right)(6x + 2)}{\cos^6\left(3x^2 + 2x\right)} = \dfrac{(18x + 6)\,\text{sen}\left(3x^2 + 2x\right)}{\cos^4\left(3x^2 + 2x\right)}$

56. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \text{arcsen}\sqrt{x}$

c) $f(x) = \arccos e^x$

b) $f(x) = \text{arctg}(\ln x)$

d) $f(x) = \text{arcsen}\,x - \arccos x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1 - x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1 - x)}}$

c) $f'(x) = -\dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x\left(1 + \ln^2 x\right)}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

57. Deriva $f(x)=\operatorname{arcsen}x+\arccos x$ y explica el resultado.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

La razón de este resultado es que $\arccos x+\operatorname{arcsen}x=\frac{\pi}{2}$ y al derivar ambos miembros se obtiene:

$$(\arccos x+\operatorname{arcsen}x)'=0$$

58. Deriva las funciones:

a) $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}x)$

b) $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{arctg}(x))$

a) $f'(x)=\dfrac{1}{1+\operatorname{arctg}^2(x)}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2x\cdot\operatorname{arctg}^2(x)}\cdot\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\cos^2x}+\dfrac{\operatorname{tg}x}{1+x^2}\right)$

59. Ejercicio interactivo.

60. Calcula, mediante derivada logarítmica las derivadas de:

a) $f(x)=x^x$ con $x>0$

b) $f(x)=x^{2+\operatorname{sen}x}$ con $x>0$

a) $\ln(f(x))=\ln x^x=x\ln x\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1\Rightarrow f'(x)=x^x(\ln x+1)$

b) $\ln(f(x))=\ln\left(x^{2+\operatorname{sen}x}\right)=(2+\operatorname{sen}x)\ln x\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\ln x+\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{x}\Rightarrow f'(x)=x^{2+\operatorname{sen}x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{x}\right)$

61. Si f y g son funciones positivas y derivables, deduce la derivada de fg y $\frac{f}{g}$ mediante derivación logarítmica.

$\ln(fg)=\ln f+\ln g$, derivando, se obtiene: $\dfrac{(fg)'}{fg}=\dfrac{f'}{f}+\dfrac{g'}{g}\Rightarrow(fg)'=f'g+fg'$

$\ln\left(\dfrac{f}{g}\right)=\ln f-\ln g$, derivando se obtiene: $\dfrac{\left(\frac{f}{g}\right)'}{\frac{f}{g}}=\dfrac{f'}{f}-\dfrac{g'}{g}\Rightarrow\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

62. Calcula mediante derivación logarítmica la derivada de las siguientes funciones sin preocuparte del dominio de las funciones que aparecen ni de su signo.

a) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ **c)** $f(x)=x^{(x^x)}$

b) $f(x)=(\text{arctg}\,x)^x$ **d)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$

a) $\ln(f(x))=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=x(\ln(x+1)-\ln x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(x+1)-\ln x+\frac{x}{x+1}-1\Rightarrow f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln(x+1)-\ln x+\frac{x}{x+1}-1\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$

b) $\ln(f(x))=\ln\left((\text{arctg}\,x)^x\right)=x\ln(\text{arctg}\,x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(\text{arctg}\,x)+\frac{x}{(1+x^2)\,\text{arctg}\,x}\Rightarrow f'(x)=(\text{arctg}\,x)^x\left(\ln(\text{arctg}\,x)+\frac{x}{(1+x^2)\,\text{arctg}\,x}\right)$$

c) $\ln(f(x))=\ln\left(x^{(x^x)}\right)=x^x\ln x$

Por el ejercicio 60 a) sabemos que $(x^x)'=x^x(\ln x+1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(x^x)'\ln x+\frac{x^x}{x}=x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}\Rightarrow f'(x)=x^{(x^x)}\left(x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}\right)$$

d) $\ln(f(x))=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}\right)=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)-\dfrac{2}{3}\ln(x+2)-\dfrac{3}{2}\ln(x+3)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}-\frac{3}{2(x+3)}\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}-\frac{3}{2(x+3)}\right)$$

63. Obtén, en $P(\pi,1)$, la ecuación de la tangente a la curva:

$$\pi^2y^3\cos x-x^2y+2\pi^2.$$

Derivando la expresión, se obtiene: $-\pi^2y^3\operatorname{sen}x+3\pi^2y^2y'\cos x-2xy-x^2y'=0$, si $x=\pi$, $y=1$ y se obtiene:

$-3\pi^2y'-2\pi-\pi^2y'=0$, luego $y'=-\dfrac{1}{2\pi}$ y la ecuación de la recta tangente es $y=-\dfrac{1}{2\pi}(x-\pi)+1=-\dfrac{x}{2\pi}+\dfrac{3}{2}$.

64. Obtén la ecuación de la tangente a la curva $x^2+y^2=13$ en $P(2,3)$ de dos formas: utilizando la derivación implícita y despejando *y*.

Derivación implícita: $2x+2yy'=0$ en $x=2$, $y=3$ se tiene $y'=-\dfrac{2}{3}$.

Despejando y (observa que está cerca de $y=3$, luego y es positivo):

$y=\sqrt{13-x^2}\Rightarrow y'=-\dfrac{x}{\sqrt{13-x^2}}$, en $x=2$, $y'=-\dfrac{2}{3}$. Así pues la recta tangente es $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{13}{3}$.

65. Calcula, derivando implícitamente, la derivada segunda en cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

Derivando una vez tenemos: $2x + 2yy' = 0$, luego $y' = -\frac{x}{y}$. Derivando de nuevo tenemos: $2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$.

Por tanto, $y'' = -\frac{1+(y')^2}{y} = -\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y} = -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{9}{y^3} = -\frac{9}{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}$.

66. Usa la derivación implícita para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto de abscisa *x*.

a) $x^2y^3 = 27$, si $x = 1$

b) $x^2y - 2xy^3 + 6 = 2x + 2y$, si $x = 0$

a) Se deriva: $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$. Si $x = 1$, entonces $y = 3$. Por tanto, $y' = -2$.

La ecuación de la recta tangente es $y = -2x + 5$.

b) Se deriva: $2xy + x^2y' - 2y^3 - 6xy^2y' = 2 + 2y'$. Si $x = 0$, entonces $y = 3$. Por tanto, $y' = -28$.

La ecuación de la tangente es: $y = -28x + 3$

67. Usa la derivación implícita para calcular $f''(x)$ si:

$$3x^2 - 2(f(x))^2 = 12.$$

Se deriva una vez la expresión: $6x - 4f(x)f'(x) = 0 \Rightarrow 3x - 2f(x)f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{3x}{2f(x)} = \frac{3x}{\sqrt{2}\sqrt{3x^2-12}}$

Se deriva esta expresión: $3 - 2\left[(f'(x))^2 + f(x)f''(x)\right] = 0 \Rightarrow (f'(x))^2 + f(x)f''(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{f(x)}\left[\frac{3}{2} - (f'(x))^2\right]$

Por tanto: $f''(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3x^2-12}}\left[\frac{3}{2} - \frac{9x^2}{2\left(3x^2-12\right)}\right]$

68 y 69. Ejercicios resueltos.

70. Las aproximaciones lineales son útiles solo si Δx es pequeño. Justifica esta afirmación obteniendo con la calculadora $\sqrt{117}$ considerando 117 como cercano a 100 en lugar de a 121.

Con la calculadora obtenemos $\sqrt{117} \simeq 10{,}81665$.

Con la aproximación lineal tomando $f(x) = \sqrt{x}$ como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\sqrt{117} = f(117) \simeq f(100) + f'(100)(117-100) = 10 + \frac{17}{20} = 10{,}85$$

Sin embargo, si hacemos la aproximación con 121 obtenemos:

$$\sqrt{117} = f(117) \simeq f(121) + f'(121)(117-121) = 11 - \frac{4}{22} = 10{,}\widehat{81}$$

71. Utiliza las diferenciales para aproximar el valor de $2{,}001^7 + 3\cdot 2{,}001^4 - 5\cdot 2{,}001^2$ y compara el resultado con el número obtenido directamente con la calculadora.

Se considera $f(x) = x^7 + 3x^4 - 5x^2$, $f'(x) = 7x^6 + 12x^3 - 10x$. Por tanto, $f(2) = 156$ y $f'(2) = 534$.

Valor de la aproximación lineal: $L(2{,}001) = f(2) + f'(2)\cdot 0{,}001 = 156 + 0{,}534 = 156{,}534$.

Con la calculadora se obtiene: 156,5247396.

72 a 83. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica

84. Calcula, usando la definición, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x$ en $x = 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ en $x = -1$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(1+h)^2 - 4(1+h) + 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h^2 + 2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3h+2) = 2$

b) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{h+2} - \frac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{2h(h+2)} = -\dfrac{1}{4}$

85. Explica por qué no existen las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ en $x = 2$

b) $f(x) = \left|x^2 - 7x + 12\right|$ en $x = 4$

a) La función no es continua en x = 2 (tiene una asíntota vertical) y, por tanto, no es derivable.

b) $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{\left|h^2 + h\right|}{h} = \begin{cases} h+1 & \text{si } h > 0 \\ -h-1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$. Luego no existe la derivada porque no existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$.

86. Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $x = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} 7 - 3x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 7x + 11 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 6 & si\ x < 3 \\ \dfrac{x}{2 - x} & si\ x \geq 3 \end{cases}$ en $x = 3$

a) Continuidad: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-2)(x-1)}{x-1} = -1 = f(-1)$. Luego la función es continua en $x = 1$.

Derivabilidad: $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{(1+h)^2 - 3(1+h) + 2}{h} + 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2}{h^2} = 1$. Luego la función es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 1$.

b) Continuidad: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (7 - 3x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x^2 - 7x + 11\right) = 1$ y $f(2) = 1$. Por tanto, la función es continua en $x = 2$.

Derivabilidad: $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{7 - 3(2+h) - 1}{h} = -3 \\ \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(2+h)^2 - 7(2+h) + 11 - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h(h-3)}{h} = -3 \end{cases}$. Por tanto, la función es derivable en $x = 2$ y $f'(2) = -3$.

c) Continuidad: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \left(x^2 - 2x - 6\right) = -3$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \left(\dfrac{x}{2 - x}\right) = -3$ y $f(3) = -3$. Por tanto, la función es continua en $x = 3$.

Derivabilidad: $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 6 + 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h^2 + 4h}{h} = 4 \\ \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\dfrac{3+h}{-1-h} + 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{-2h}{h(-1-h)} = 2 \end{cases}$. Por tanto la función no es derivable en $x = 3$.

87. Calcula la ecuación de la recta tangente a cada gráfica en el punto indicado. Comprueba a continuación tu respuesta representando, con ayuda de una calculadora gráfica o un ordenador, la gráfica de la función y la recta tangente.

a) $f(x) = x^2 + 1$ en $A(3, f(3))$

b) $g(x) = \sqrt{x+1}$ en $B(3, g(3))$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $C(0, h(0))$

a) $f'(x) = 2x$, $f'(3) = 6$ y $f(3) = 10$

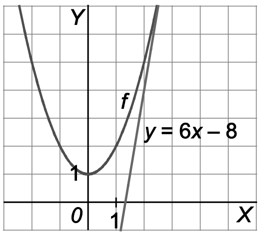
Recta tangente: $y = 6x - 8$

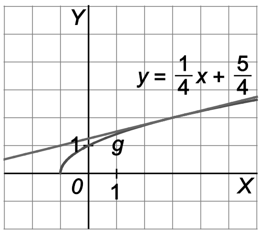
b) $g'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(3+h) - g(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+4} - 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h\left(\sqrt{h+4} + 2\right)} = \dfrac{1}{4}$ y $g(3) = 2$

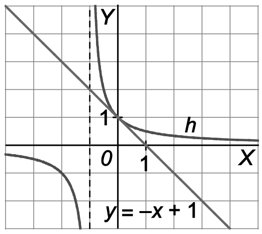
Recta tangente: $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

c) $h'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{h(t) - h(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+t} - 1}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-t}{t(t+1)} = -1$ $h(0) = 1$

Recta tangente: $y = -x + 1$







88. Halla los puntos de intersección de las funciones $y = x$ e $y = \dfrac{1}{x}$. Comprueba que en dichos puntos la tangente a $y = \dfrac{1}{x}$ es perpendicular a $y = x$.

$x = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ o $x = -1$. Calculamos la pendiente de la tangente en los puntos $x = 1$ y $x = -1$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{h+1} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(h+1)} = -1$$

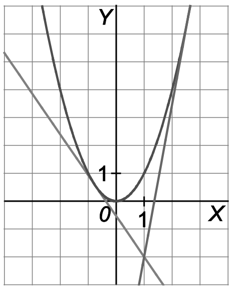
$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{h-1} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(h-1)} = -1$$

Luego las rectas tangentes son $y = -x + 2$ e $y = -x - 2$, ambas perpendiculares a $y = x$.

89. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $y = x^2$ trazadas desde el punto $P(1,-2)$. Representa gráficamente la parábola y las dos tangentes obtenidas.

$f(a) = a^2$ y $f'(a) = 2a$, la ecuación de la recta tangente a la parábola por el punto $A(a,a^2)$ es $y = 2ax - a^2$.

Si se quiere que pase por el punto $P(1,-2)$ debe ser $-2 = 2a - a^2$ cuyas soluciones son $a = 1+\sqrt{3}$ y $a = 1-\sqrt{3}$ y las tangentes buscadas son $y = 2(1+\sqrt{3})x - 2(2+\sqrt{3})$ y $y = 2(1-\sqrt{3})x - 2(2-\sqrt{3})$.



90. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Halla los valores de a y b para que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica en el punto $P(2,4)$.

Como la parábola pasa por $P(2,4)$ debe ser $4 + 2a + b = 4$.

Además, como la tangente en ese punto tiene pendiente 2, debe ser $f'(2) = 2 \cdot 2 + a = 2$, luego $a = -2$ y $b = 4$.

91. Halla todas las tangentes a la curva $y = x^4$ que pasen por $P(2,0)$.

La tangente a la curva por el punto de abscisa $x = a$ tiene ecuación $y = 4a^3x - 3a^4$. Para que pase por $P(2,0)$ debe ser $0 = 8a^3 - 3a^4$ cuyas soluciones son $a = 0$ y $a = \frac{8}{3}$.

Luego las tangentes buscadas son $y = 0$ e $y = \left(\frac{8}{3}\right)^3(4x - 8)$.

92. Halla el área limitada por la recta $y = 4$, la normal a la curva $y = -x^2 + 5x$ en el punto de abscisa $x = 2$ y la tangente a la parábola $y = x^2 + 2x + 3$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Se representa gráficamente dicha área.

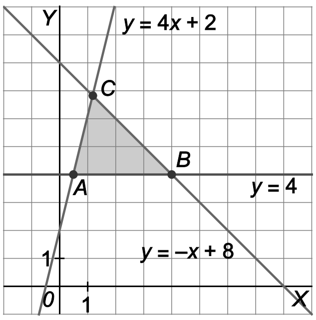
Para ello se halla la normal a la curva $y = -x^2 + 5x$ en el punto de abscisa $x = 2$:

$$f'(2) = 1,\ y = -x + 8$$

Y la tangente a la parábola $y = x^2 + 2x + 3$ en $x = 1$ es $y = 4x + 2$.

Se hallan los puntos de intersección de las tres rectas:

$$A\left(\frac{1}{2},4\right),\ B(4,4)\ \text{y}\ C\left(\frac{6}{5},\frac{34}{5}\right)$$



El área es $A = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{34}{5} - 4\right) = 4{,}9\ \text{u}^2$.

93. Halla el valor de los números reales *a* y *b* sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $y = ax^2 + bx$ en el punto $P(2,2)$ vale 5.

Sabemos que $f(2) = 2$ y $f'(2) = 5$, es decir $4a + 2b = 2$ y $4a + b = 5$, luego $b = -3$ y $a = 2$ con lo que la ecuación de la parábola es $y = 2x^2 - 3x$.

Función derivada. Derivadas laterales

94. Aplicando la definición, calcula la derivada de las funciones siguientes en los puntos en los que estén definidas.

a) $f(x) = \sqrt{12-4x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

a) $f(x) = \sqrt{12-4x}$ si $x < 3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{12-4(x+h)} - \sqrt{12-4x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{12-4(x+h)} - \sqrt{12-4x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{12-4(x+h)} + \sqrt{12-4x}}{\sqrt{12-4(x+h)} + \sqrt{12-4x}} = \lim_{h\to 0}\frac{-4h}{h\left(\sqrt{12-4(x+h)} + \sqrt{12-4x}\right)} = \frac{-2}{\sqrt{12-4x}}$$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ si $x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{x+h}}{x+h+1} - \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+1)\sqrt{x+h} - (x+h+1)\sqrt{x}}{h(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+1)\sqrt{x+h} - (x+h+1)\sqrt{x}}{h(x+h+1)(x+1)}\cdot\frac{(x+1)\sqrt{x+h} + (x+h+1)\sqrt{x}}{(x+1)\sqrt{x+h} + (x+h+1)\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[(x+1)^2 - 2x(x+1) - hx\right]}{h(x+h+1)(x+1)\left((x+1)\sqrt{x+h} + (x+h+1)\sqrt{x}\right)} = \frac{-x+1}{2(x+1)^2\sqrt{x}}$$

95. Demuestra que la segunda derivada de una función polinómica de segundo grado es siempre una función constante. ¿Cuánto vale esa constante?

$P(x) = ax^2 + bx + c$; entonces $P'(x) = 2ax + b$ y $P''(x) = 2a$ que es constante. La constante es el doble del coeficiente principal.

96. Encuentra un polinomio $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 2$; $f'(1) = 4$; $f''(1) = 10$; $f'''(1) = 12$, y $f^{n)}(x) = 0$ si $n >$ 3.

Como las derivadas son cero a partir de la cuarta, el polinomio es de tercer grado: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y sus derivadas sucesivas son: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$ y $f'''(x) = 6a$.

Utilizando los valores de la función y las derivadas en $x = 1$ se plantea el sistema $\begin{cases} 6a = 12 \\ 6a + 2b = 10 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ a + b + c + d = 2 \end{cases}$

Resolviendo el sistema se tiene que el polinomio buscado es $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.

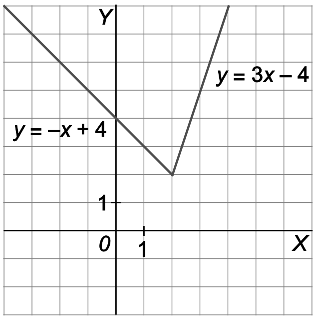
97. Calcula las derivadas laterales de la función $f(x) = |2x - 4| + x$ en el punto $x = 2$. ¿Es la función derivable en dicho punto? Esboza su gráfica.

Se escribe la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 2 \\ 3x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$f'(2^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{4 - 2 - h - 2}{h} = -1$

$f'(2^+) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{6 + 3h - 4 - 2}{h} = 3$

La función no es derivable en $x = 2$



98. Calcula las derivadas laterales en $x = 1$ (si existen) y decide si las funciones son derivables en dicho punto.

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

b) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) La función está definida en $[-1, 1]$, luego no existe la derivada lateral derecha.

$f'(1^-) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{-2h - h^2}}{h} = -\infty$. La función no es derivable en $x = 1$.

b) $f'(1^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h^3}{h} = 0$, $f'(1^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h^2}{h} = 0$. La función es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 0$.

c) $f'(1^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{2h + h^2}{h} = 2$, $f'(1^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{2h + 2 - 1}{h} = +\infty$. La función no es continua en en $x = 1$ y, por tanto, no es derivable en ese punto.

d) $f'(1^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = 2$, $f'(1^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1 + h - 1}{h} = 1$. La función no es derivable en $x = 1$.

99. Dadas las funciones $f(x)=x^2+2x-1$, $g(x)=-x^2+6x+2$ y $F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x<1 \\ g(x) & \text{si } x\geq 1\end{cases}$, calcula:

a) $f'(1)$ y $f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)$

b) $g'(1)$ y $g'(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} g'(x)$

c) $F'(1^-)$ y $F'(1^+)$

¿Es $F(x)$ derivable en $x=1$? ¿Es $F(x)$ continua en $x=1$?

a) $f'(x)=2x+2$, $f'(1)=4$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=4$

b) $g'(x)=-2x+6$, $g'(1)=4$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} g'(x)=4$

c) Observa que $F(1)=g(1)=7$

$$F'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2+2(1+h)-1-7}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+4h-5}{h}=+\infty$$

$$F'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(1+h)^2+6(1+h)+2-7}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(-h+4)}{h}=4$$

d) Como $F'(1^+)$ y $F'(1^-)$ no coinciden, la función $F(x)$ no es derivable en $x=1$ a pesar de que $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$. El problema es que $F(x)$ no es continua en $x=1$ pues $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=7=F(1)$.

Derivadas de las operaciones con funciones

100. Dadas las funciones $f(x)=x^2+2x+1$ y $g(x)=3x-1$, calcula:

a) $f'(x)$ y $g'(x)$

b) $(5f)'(x)$

c) $(f+g)'(x)$

d) $(2f-3g)'(x)$

e) $(f^2)'(x)$

f) $(fg)'(x)$

g) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(x)$

h) $\left(\dfrac{1}{f+g}\right)'(x)$

a) $f'(x)=2x+2$ y $g'(x)=3$

b) $(5f)'(x)=5f'(x)=10x+10$

c) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)=2x+5$

d) $(2f-3g)'(x)=2f'(x)-3g'(x)=2(2x+2)-9=4x-5$

e) $(f^2)'(x)=(ff)'(x)=2f(x)f'(x)=2(x^2+2x+1)(2x+2)$

f) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=(2x+2)(3x-1)+3(x^2+2x+1)$

g) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}=\dfrac{3(x^2+2x+1)-(3x-1)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

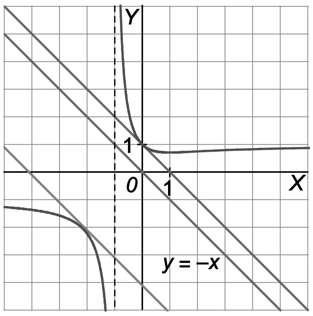
h) $\left(\dfrac{1}{f+g}\right)'(x)=\dfrac{-(f+g)'(x)}{((f+g)(x))^2}=-\dfrac{f'(x)+g'(x)}{(f(x)+g(x))^2}=-\dfrac{2x+2+3}{(x^2+2x+1+3x-1)^2}=-\dfrac{2x+5}{(x^2+5x)^2}$

101. Sea la función:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

Represéntala con la calculadora gráfica o el ordenador y halla aproximadamente los puntos en los que su gráfica admite una tangente paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

En la gráfica hay dos puntos en los que la tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.



Como se quiere $f'(x)=1$, se calcula:

$$f'(x)=\frac{\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2}=\frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}=-1 \text{ si } (x+1)^2\sqrt{x^2+1}+x-1=0$$

La solución $x=0$ es fácil de encontrar por tanteo. La segunda solución se aproxima con ayuda de la calculadora. En la gráfica se observa que está entre –3 y –2 más cerca del –2.

Haciendo una pequeña tabla de valores:

–2	–2,2	–2,16	–2,15	–2,1
0,34164	0,08044	0,01338	–0,0045	–0,10148

Se observa que $x-1+(x+1)^2\sqrt{x^2+1}>0$ si $x>-2{,}16$ y $x-1+(x+1)^2\sqrt{x^2+1}<0$ si $x<-2{,}15$.

Luego el punto buscado tiene abscisa $x=-2{,}15\ldots$

Derivada de la composición de funciones

102. Calcula la derivada de las siguientes funciones compuestas.

a) $f(x)=\left(\sqrt{x}+x\right)^5$ **b)** $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x^3}}$ **c)** $f(x)=\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^3$

a) $f'(x)=5\left(\sqrt{x}+x\right)^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)$

b) $f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{2x+1}}\cdot\frac{-4x-3}{x^4}$

c) $f'(x)=3\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2\cdot\frac{-8}{(x-5)^2}=-\frac{8}{3}\frac{(x+3)^2}{(x-5)^4}$

103. Sabiendo que $f(2)=1$; $f'(2)=3$; $g(2)=2$; $g'(2)=5$ y $g'(1)=0$, calcula:

a) $(f\circ g)'(2)$ **c)** $(f^2\circ g)'(2)$ **e)** $(\sqrt{g})'(2)$

b) $(g\circ f)'(2)$ **d)** $\left(\frac{1}{f}\circ g\right)'(2)$ **f)** $(f^n)'(2)$

a) $(f\circ g)'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(2)5=15$

b) $(g\circ f)'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(1)3=0$

c) $(f^2\circ g)'(2)=2f(g(2))f'(g(2))g'(2)=2f(2)f'(2)5=10\cdot 1\cdot 3=30$

d) $\left(\frac{1}{f}\circ g\right)'(2)=\left(\frac{1}{f}\right)'(g(2))g'(2)=-\frac{f'(g(2))}{(f(g(2)))^2}g'(2)=-\frac{f'(2)}{(f(2))^2}5=-15$

e) $(\sqrt{g})'(2)=\frac{g'(2)}{2\sqrt{g(2)}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

f) $(f^n)'(2)=nf^{n-1}(2)f'(2)=3n$

104. Obtén la derivada de $f(x)=\frac{1+x^3}{2-x}$ y, a partir del resultado obtenido, escribe la derivada de $g(x)=\frac{1-x^3}{2+x}$.

$$f'(x)=\frac{3x^2(2-x)+1+x^3}{(2-x)^2}=\frac{-2x^3+6x^2+1}{(2-x)^2}$$

Como $g(x)=f(-x)$, se tiene que $g'(x)=-f'(-x)=\frac{-2x^3-6x^2-1}{(2+x)^2}$.

105. Sea *f* una función derivable que cumple $f(x+3)=8x-12$ cualquiera que sea el valor de *x*. Calcula:

a) $f(f'(1))$ **b)** $f'(f(1))$

Derivando la expresión $f(x+3)=8x-12$ se tiene $(f(x+3))'=(8x-12)'\Rightarrow f'(x+3)\cdot 1=8$, para todo *x*.

a) Como $f'(1)=8$, entonces $f(f'(1))=f(8)=f(5+3)=8\cdot 5-12=28$.

b) $f'(f(1))=f'(f(-2+3))=f'(-28)=8$

Derivada de la función inversa

106. Calcula en cada caso, el valor de *b*.

a) $f'(1)=-5$ $f^{-1}(0)=1$ $(f^{-1})'(0)=b$

b) $f'(0)=1$ $f^{-1}(5)=0$ $(f^{-1})'(-5)=b$

c) $f'(-1)=b$ $(f^{-1})(6)=-1$ $(f^{-1})'(6)=8$

a) $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{f'(1)}=-\frac{1}{5}$

b) $(f^{-1})'(-5)=\frac{1}{f'(f^{-1}(-5))}=\frac{1}{f'(0)}=1$

c) $f'(-1)=f'(f^{-1}(6))=\frac{1}{(f^{-1})'(6)}=\frac{1}{8}$

107. Si $f(x)=x^3+x-10$, calcula $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

Como $f'(x)=3x^2+1$ y $f^{-1}(0)=2$, entonces $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{13}$

Derivadas de las funciones exponencial y logarítmica

108. Calcula las derivadas de estas funciones.

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{3+x^2}{3}\right)$ **b)** $f(x)=e^{3+x^2}$

a) $f'(x)=\dfrac{2x}{3+x^2}$ **b)** $f'(x)=2xe^{3+x^2}$

109. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos en los que existan.

a) $f(x)=\dfrac{x^2\ln x}{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{e^x}{\ln x}$ **c)** $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{x-1}}$ **d)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{xe^x}}{\sqrt[4]{x^3-x^2}}$

a) $f'(x)=\dfrac{(2x\ln x+x)\left(x^2-1\right)-2x^3\ln x}{\left(x^2-1\right)^2}$

b) $f'(x)=\dfrac{e^x\ln x-\dfrac{e^x}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{e^x(x\ln x-1)}{x\ln^2 x}$

c) $f'(x)=\dfrac{e^{x^2}\left(2x\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)}{x-1}=\dfrac{e^{x^2}\left(4x(x-1)-1\right)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

d) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{e^x(1+x)\sqrt[4]{x^3-x^2}}{2\sqrt{xe^x}}-\dfrac{\sqrt{xe^x}\left(3x^2-2x\right)}{4\left(\sqrt[4]{x^3-x^2}\right)^3}}{\sqrt{x^3-x^2}}=\dfrac{2e^x(1+x)\left(x^2-x\right)-e^x\left(3x^2-2x\right)}{4\sqrt{xe^x}\left(x^2-x\right)\sqrt[4]{x^3-x^2}}=\dfrac{e^x\left(2x^2-3x\right)}{4\sqrt{xe^x}(x-1)\sqrt[4]{x^3-x^2}}$

110. Calcula las derivadas sucesivas de las siguientes funciones y escribe la expresión general de la derivada enésima.

a) $f(x)=e^{7x}$ **b)** $f(x)=\ln x$

a) $f^{n)}(x)=7^n e^{7x}$

b) $f^{n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

111. ¿Para qué valores de *x* se anulan las derivadas de las funciones siguientes?

a) $f(x) = e^{2x} - 4e^{x}$ **c)** $f(x) = x\ln x - x$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ **d)** $f(x) = e^{\frac{x^2}{x-3}}$

a) $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^{x} = e^{x}\left(2e^{x} - 4\right) = 0 \Rightarrow 2e^{x} - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$

b) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)(x-2)}$ no se anula nunca.

c) $f'(x) = \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

d) $f'(x) = e^{\frac{x^2}{x-3}} \cdot \dfrac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 6$.

Derivadas de las funciones trigonométricas y sus inversas

112. Calcula las derivadas de estas funciones.

a) $f(x) = \text{sen}^3\left(x^2\right)$

b) $f(x) = 3\text{arcsen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $f(x) = \left(\text{sen}\, x^2 + \cos 3\right)^3$

a) $f'(x) = 6x\text{sen}^2\left(x^2\right)\cos\left(x^2\right)$

b) $f'(x) = \dfrac{-6}{x\sqrt{x^4 - 1}}$

c) $f'(x) = 3\left(\text{sen}\left(x^2\right) + \cos 3\right)^2\left(2x\cos\left(x^2\right)\right)$

113. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos en los que existan.

a) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{arctg}x}$

b) $f(x)=e^{x}\cos x+e^{-x}\operatorname{sen}x$

c) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^3 x^3+1\right)^3$

d) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)+2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}$

e) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)\operatorname{tg}x$

f) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+4}\right)$

g) $f(x)=\dfrac{2\pi^2\ln\left(x^3+x\right)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$

h) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arcsen}3^x}{x\cos^3\left(e^x\right)}$

a) $f'(x)=\dfrac{\cos x\operatorname{arctg}x-\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+x^2}}{(\operatorname{arctg}x)^2}$

b) $f'(x)=e^{x}(\cos x-\operatorname{sen}x)+e^{-x}(-\operatorname{sen}x+\cos x)=(\cos x-\operatorname{sen}x)\left(e^{x}+e^{-x}\right)$

c) $f'(x)=\cos\left(\left(\operatorname{sen}^3\left(x^3\right)+1\right)^3\right)3\left(\operatorname{sen}^3\left(x^3\right)+1\right)^2 3\operatorname{sen}^2\left(x^3\right)\cos\left(x^3\right)3x^2=$

$=27\cos\left(\left(\operatorname{sen}^3\left(x^3\right)+1\right)^3\right)\left(\operatorname{sen}^3\left(x^3\right)+1\right)^2\operatorname{sen}^2\left(x^3\right)\cos\left(x^3\right)x^2$

d) Se escribe la función como:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}^2(2x)+2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{1+2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{1+\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}+1$$

$$f'(x)=\frac{-2\cos(2x)}{(\operatorname{sen}(2x))^2}$$

e) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}\operatorname{tg}x+\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{\cos^2 x}$

f) $f'(x)=\dfrac{x\cos\left(\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+4}}$

g) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2\pi^2\left(3x^2+1\right)\operatorname{tg}(\pi x)}{x^3+x}-\dfrac{2\pi^3\ln\left(x^3+x\right)}{\cos^2(\pi x)}}{(\operatorname{tg}(\pi x))^2}$

h) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{\ln 3\left(x\cos^3\left(e^x\right)\right)3^x}{\sqrt{1-3^{2x}}}-\operatorname{arcsen}\left(3^x\right)\left(\cos^3\left(e^x\right)-3xe^x\cos^2\left(e^x\right)\operatorname{sen}\left(e^x\right)\right)}{\left(x\cos^3\left(e^x\right)\right)^2}$

114. Calcula las derivadas sucesivas de las siguientes funciones y escribe la expresión general de la derivada enésima.

a) $f(x)=\operatorname{sen}x$

b) $f(x)=\cos(3x)$

a) $f^{4n)}(x)=\operatorname{sen}x$, $f^{4n+1)}(x)=\cos x$, $f^{4n+2)}(x)=-\operatorname{sen}x$ y $f^{4n+3)}(x)=-\cos x$

b) $f^{4n)}(x)=3^{4n}\cos(3x)$, $f^{4n+1)}(x)=-3^{4n+1}\operatorname{sen}(3x)$, $f^{4n+2)}(x)=-3^{4n+2}\cos(3x)$ y $f^{4n+3)}(x)=3^{4n+3}\operatorname{sen}(3x)$

115. La función $f(x)=\sqrt{x}$ no es derivable en $x = 0$, y la función $g(x)=\operatorname{sen} x$, sí. ¿Es derivable en $x = 0$ la función $p(x)=\sqrt{x}\operatorname{sen} x$?

Como $D(p)=[0,+\infty)$, solo se puede calcular la derivada lateral a derecha. Dicha derivada, sí existe, y para calcularla observa que existen los límites $\lim\limits_{h\to 0^+}\sqrt{h}$ y $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}=1$.

Luego $p'(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\sqrt{h}\operatorname{sen} h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\sqrt{h}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}=0\cdot 1=0$.

116. ¿Para qué valores de *x* se anulan las derivadas de las funciones siguientes?

a) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$ **b)** $f(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}\right)$ **c)** $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{sen} x}$

a) $f'(x)=\dfrac{-\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen} x)+\cos^2 x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}=\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}$ no se anula nunca.

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}-\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)=\dfrac{-\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x}=-\operatorname{tg} x=0\Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

c) $f'(x)=\dfrac{1+\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x\cos^2 x}{\cos^2 x(1+\operatorname{sen} x)^2}=\dfrac{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x+1}{\cos^2 x(1+\operatorname{sen} x)}$ no se anula nunca.

117. Estudia la continuidad y la derivabilidad en $x=3\pi$ de la función: $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & \text{si } \dfrac{3\pi}{2}\le x<3\pi\\ x-3\pi & \text{si } 3\pi\le x\le 12\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 3\pi^-} f(x)=\operatorname{sen}(3\pi)=0=\lim\limits_{x\to 3\pi^+} f(x)=f(3\pi)$. Luego la función es continua en $x=3\pi$.

Calculemos la derivada a izquierda y a derecha:

$f'(3\pi^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(3\pi+h)-3\pi}{h}=1$ $f'(3\pi^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}(3\pi+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}3\pi\cos h+\cos 3\pi\operatorname{sen} h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-\operatorname{sen} h}{h}=-1$

La función es derivable en $x=3\pi$ y $f'(3\pi)=1$.

118. Estudia en qué puntos es derivable la función: $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } 0\le x\le 2\\ x-1 & \text{si } x>2\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\le 0\\ 0 & \text{si } 0\le x\le 2\\ 1 & \text{si } x>2\end{cases}$. Se estudia la derivabilidad en $x=0$ y en $x=2$.

$f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2+1-1}{h}=0$ $f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1-1}{h}=0$

$f'(2^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1-1}{h}=0$ $f'(2^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(2+h)-1-1}{h}=1$

Así pues, f es derivable en $x=0$ y no lo es en $x=2$.

Derivación logarítmica e implícita

119. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^{1-x}$

b) $f(x) = x^{e^x}$

c) $f(x) = (x + \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\operatorname{sen} x - \cos x}$

a) $f'(x) = x^{1-x}\left(-\ln x + \dfrac{1-x}{x}\right)$

b) $f'(x) = x^{e^x} e^x \left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

c) $f'(x) = (x + \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}} \left(\dfrac{\ln(x + \operatorname{sen} x)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}\,(1 + \cos x)}{x + \operatorname{sen} x}\right)$

d) $f'(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\operatorname{sen} x - \cos x}\left((\cos x + \operatorname{sen} x)\ln(\operatorname{sen} x + \cos x) - \dfrac{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{sen} x + \cos x}\right)$

120. Dada la curva $x^2 y + xy^2 + \operatorname{sen}(x + y) + x = \pi$:

a) Comprueba que el punto $P(\pi, 0)$ pertenece a dicha curva.

b) Calcula la ecuación de la tangente en dicho punto.

a) $\pi^2 \cdot 0 + \pi \cdot 0^2 + \operatorname{sen}(\pi + 0) + \pi$ es, efectivamente, π.

b) Calculemos $y'(\pi)$: $2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' + (1 + y')\cos(x + y) + 1 = 0$.

Sustituyendo $x = \pi$ e $y = 0$: $\pi^2 y'(\pi) + (1 + y'(\pi))\cos(\pi) + 1 = 0 \Rightarrow \pi^2 y'(\pi) - y'(\pi) = 0$.

Luego $y'(\pi) = 0$ y la recta tangente en $P(\pi, 0)$ es $y = 0$.

Diferencial de una función. Aproximación lineal de una función en un punto

121. Sabiendo que $\ln 2 \simeq 0{,}69315$:

a) Obtén la aproximación lineal de la función $f(x) = \log_2 x$ en $x = 2$ y utilízala para obtener los valores aproximados de $f(x)$ en $x = 2{,}01$; $x = 1{,}9$ y $x = 2{,}9$. Compara estos resultados con los obtenidos con la calculadora.

b) ¿Qué ocurre a medida que nos alejamos del 2?

a) $L(x) = \ln 2 + \dfrac{x-2}{2}$

$L(2{,}01) = \ln 2 + \dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}69315 + 0{,}005 = 0{,}69815$. Con la calculadora se obtiene $L(2{,}01) = 0{,}698134722$.

$L(1{,}9) = \ln 2 - \dfrac{0{,}1}{2} = 0{,}69315 - 0{,}05 = 0{,}64315$. Con la calculadora se obtiene $L(1{,}9) = 0{,}641853886$.

$L(2{,}9) = \ln 2 + \dfrac{0{,}9}{2} = 0{,}69315 + 0{,}45 = 1{,}14315$. Con la calculadora se obtiene $L(2{,}9) = 1{,}064710737$.

b) A medida que nos alejamos del 2 la aproximación lineal va empeorando.

122. Realiza una estimación lineal de la variación de la siguiente función al incrementar la x de 2 a 2,1.

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{x+1}$$

$f(2) = \frac{7}{3}$, $f'(2) = \frac{8}{9}$; $L(x) = \frac{7}{3} + \frac{8}{9}(x-2)$ y $L(2{,}1) = \frac{7}{3} + \frac{8}{9}(2{,}1-2) = \frac{7}{3} + \frac{4}{45}$

Por tanto, la variación es $\frac{4}{45}$.

Síntesis

123. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x} + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

¿Hay algún valor de k para que f sea derivable en $x = 1$?

Continuidad en $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{2} = 1 = f(1) \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(-\frac{1}{x} + k \right) = -1 + k$$

Luego $-1 + k = 1 \Rightarrow k = 2$

Derivabilidad en $x = 1$ para $k = 2$

$$f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{(1+h)^2+1}{2} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1+h^2+2h+1-2}{2}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h(h+2)}{2h} = 1$$

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-\frac{1}{1+h} + 2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h(1+h)} = 1$$

Por tanto para $k = 2$ la función f es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 1$.

124. Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si } x<0 \\ -x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ en $x=0$

b) $f(x)=\begin{cases} 2\operatorname{sen}x-2 & \text{si } x\neq \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ en $x=\frac{\pi}{2}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } x<0 \\ \sqrt{4-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ en $\mathbb{R}$

a) Continuidad en $x=0$:

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0=f(0)$ y $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3-x\right)=0$. Así pues, la función es continua en $x=0$.

Derivabilidad en $x=0$:

$f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{-h}{h}=-1$ $\qquad f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^3-h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h\left(h^2-1\right)}{h}=-1$. Luego f es derivable en $x=0$.

b) Continuidad en $x=\frac{\pi}{2}$:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2\operatorname{sen}x-2)=0$. Así pues, la función es continua en $x=\frac{\pi}{2}$.

Derivabilidad en $x=\frac{\pi}{2}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}^+\right)=\lim_{h\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos h+2\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}h-2}{h}=2\lim_{h\to 0^+}\frac{\cos h-1}{h}=2\cos'(0)=0$$

$f'\left(\frac{\pi}{2}^-\right)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-2}{h}=2\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\cos h-1}{h}=2\cos'(0)=0$. Luego la función f es derivable en $x=\frac{\pi}{2}$.

c) Basta con estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=0$, porque en otro caso la función es continua y derivable.

Continuidad en $x=0$:

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{4-x}=2=f(0)$ y $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+2\right)=2$. Así pues, la función es continua en $x=0$.

Derivabilidad en $x=0$:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{4-h}-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{4-h}-2\right)\left(\sqrt{4-h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4-h}+2\right)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h\left(\sqrt{4-h}+2\right)}=\frac{-1}{4}$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}h=0$$

Luego la función f no es derivable en $x=0$.

125. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\left(x^4-3x^2\right)\sqrt[3]{x^2-2}$

b) $f(x)=\dfrac{\ln(2x-3)}{x^3+x-1}$

c) $f(x)=e^{3x^2-1}\text{sen}(x+3)$

d) $f(x)=\text{arcsen}\left(x^2-1\right)-\text{arctg}\left(x^2-1\right)$

a) $f'(x)=\left(4x^3-6x\right)\sqrt[3]{x^2-2}+\dfrac{2x\left(x^4-3x^2\right)}{3\left(\sqrt[3]{x^2-2}\right)^2}=\dfrac{2x\left(7x^4-24x^2+18\right)}{3\left(\sqrt[3]{x^2-2}\right)^2}$

b) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2\left(x^3+x-1\right)}{2x-3}-\ln(2x-3)\left(3x^2+1\right)}{\left(x^3+x-1\right)^2}=\dfrac{2\left(x^3+x-1\right)-\left(3x^2+1\right)(2x-3)\ln(2x-3)}{(2x-3)\left(x^3+x-1\right)^2}$

c) $f'(x)=e^{3x^2-1}\left(6x\text{sen}(x+3)+\cos(x+3)\right)$

d) $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2-1\right)^2}}-\dfrac{2x}{1+\left(x^2-1\right)^2}$

126. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}$.

Comprueba que la recta tangente en el punto de corte con el eje *Y* es paralela a la asíntota de dicha función.

La función corta al eje *Y* en $A(0,f(0))$, luego $A\left(0,\dfrac{5}{3}\right)$ y la pendiente de la recta tangente en ese punto es $f'(0)$.

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x+3)(x^2+3)-2x(x^3-x^2+3x+5)}{(x^2+3)^2}\Rightarrow f'(0)=1$$

Como $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}=x-1+\dfrac{8}{x^2+3}$, la asíntota es $y=x-1$ que también tiene pendiente 1.

127. Dada la curva $2xy+y-x-6=0$, se pide:

a) Calcular la segunda coordenada del punto $P(5,\bullet)$, que pertenece a dicha curva.

b) Calcular $y'(5)$ utilizando la derivación implícita.

c) Calcular $y'(5)$ despejando previamente la *y* y derivando posteriormente la función obtenida. (Los valores obtenidos deben coincidir).

a) Sustituyendo *x* por 5 se tiene $10y+y=11$. Luego $y=1\Rightarrow P(5,1)$

b) Derivando se obtiene $2y+2xy'+y'-1=0$ y sustituyendo *x* por 5 e *y* por 1:

$$2\cdot 1+10y'+y'-1=0$$

Luego $y'(5)=-\dfrac{1}{11}$

c) $(2x+1)y=x+6$. Luego $y=\dfrac{x+6}{2x+1}$ e $y'=\dfrac{-11}{(2x+1)^2}\Rightarrow y'(5)=-\dfrac{1}{11}$

Cuestiones

128. Si $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x\le 0 \\ \operatorname{sen} x + x^3+1 & \text{si } x>0\end{cases}$ se verifica que:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<0 \\ \cos x+3x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$$

¿Coinciden las derivadas laterales de f en $x=0$?

Aunque $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1$, las derivadas laterales en $x=0$ no coinciden, pues, en caso de hacerlo, f sería derivable en $x=0$ y no lo es, puesto que no es continua ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$.

Las derivadas laterales son:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} h+h^3+1-0}{h}=+\infty$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(h+1)=1$$

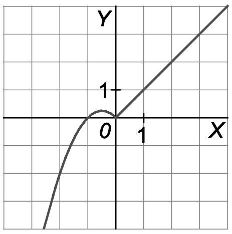
129. La función $f(x)=|x|$ no es derivable en $x=0$ y la función $g(x)=\operatorname{sen} x$ sí lo es. ¿Es derivable en $x=0$ la función $p(x)=f(x)g(x)$?

Veamos si existe $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{p(0+h)-p(0)}{h}$:

Como $\dfrac{p(0+h)-p(0)}{h}=\dfrac{|h|\operatorname{sen} h}{h}$, entonces $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{p(0+h)-p(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|\operatorname{sen} h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}|h|\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}=0\cdot 1=0$

Luego $p(x)=|x|\operatorname{sen} x$ es derivable en $x=0$, y su derivada es 0.

130. La función $f(x)=\begin{cases} -x^2-x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\ge 0\end{cases}$, cuya gráfica es la de la figura no es derivable en x = 0 como puedes observar. ¿Lo es $g(x)=xf(x)$?



La función $g(x)$ es: $g(x)=\begin{cases} -x^3-x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

$$g'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^3-h^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-h^2-h)=0$$

$$g'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0^+}h=0$$

Así pues, $g(x)$ es derivable en $x=0$ y su derivada es 0.

131. Si f es una función par y derivable en $\mathbb{R}$, ¿es $f'(0)=0$ necesariamente?

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}$$

Como *f* es par, $f(-h)=f(h)$, así que $f'(0^-)=-\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=-f'(0^+)$

Al ser *f* derivable en $x=0$, debe ser $f'(0^-)=f'(0^+)$, es decir, $f'(0)=0$.

132. Si la función *f* verifica que para cualesquiera números reales *a* y *b* se cumple que $f(a+b)=f(a)+f(b)+2ab$ y que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, demuestra que *f* es derivable en todos los números reales.

Veamos si existe $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ sea cual fuere *x*.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}=\frac{f(h)}{h}+2x$$

Así pues, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h)}{h}+2x\right]=2+2x$, es decir, *f* es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x)=2+2x$

133. Si $f(x)g(x)=e^x$, ¿puede haber algún número real para el que se anulen simultáneamente las derivadas de *f* y *g*?

$(f(x)g(x))'=e^x=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ no se hace cero nunca, por lo que no puede haber ningún número *x* para el que se anule simultáneamente f' y g', puesto que, de ser así, se anularía la suma.

134. La función $f(x)=x^4+x^2$ es una función par ($f(-x)=f(x)$) y su derivada $f'(x)=4x^3+2x$ es una función impar, ($f'(-x)=-f'(x)$). Justifica que esto ocurre siempre; en concreto: si *f* derivable en $\mathbb{R}$ es una función par, entonces f' es una función impar y si *f* es impar entonces f' es una función par.

Si *f* es par, $f(-x)=f(x)\Rightarrow[f(-x)]'=[f(x)]'\Rightarrow -f'(-x)=f'(x)\Rightarrow$ f' es impar

Si *f* es impar, $f(-x)=-f(x)\Rightarrow[f(-x)]'=[-f(x)]'\Rightarrow -f'(-x)=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)\Rightarrow$ f' es par

135. Demuestra esta sencilla fórmula que nos da la derivada segunda de un producto:

$$(fg)''=f''g+2f'g'+fg''$$

$$(fg)''=((fg)')'=(f'g+fg')'=f''g+f'g'+f'g'+fg''=f''g+2f'g'+fg''$$

136. Comprueba que las definiciones:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

son la misma y, aplicando la segunda definición, calcula: $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos^3 x+1}{x-\pi}$.

En $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ llamamos $x=a+h$, por lo que $x\to a \Leftrightarrow h\to 0$ y escribimos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Tomando $f(x)=\cos^3 x$, $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos^3 x+1}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = f'(\pi)$.

$f'(x) = 3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)$, así que $f'(\pi)=0$, es decir, $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos^3 x+1}{x-\pi}=0$.

137. Sin calcular la derivada, comprueba que las siguientes parejas de funciones tienen la misma derivada:

a) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ y $g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

b) $f(x)=\cos 2x$ y $g(x)=2\cos^2 x$

c) $f(x)=\operatorname{arctg} x$ y $g(x)=-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

d) $f(x)=\ln(2x^2+1)$ y $g(x)=\ln(20x^2+10)$

Para comprobarlo no es necesario derivar, basta ver que las funciones difieren en una constante.

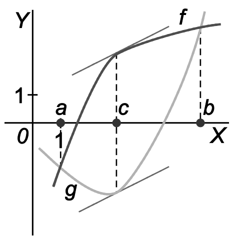
a) $g(x)-f(x)=\frac{2x+1}{x+1}-\frac{x}{x+1}=1$

b) $f(x)-g(x)=\cos 2x-2\cos^2 x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-2\cos^2 x=-\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=-1$

c) $f(x)-g(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. Si $\operatorname{arctg} x=n$, $\operatorname{tg} n=x$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=v$, $\operatorname{tg} v=\frac{1}{x}$. Entonces n y v son ángulos complementarios, es decir, $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

d) $g(x)-f(x)=\ln(20x^2+10)-\ln(2x^2+1)=\ln\left[10(2x^2+1)\right]-\ln(2x^2+1)=\ln 10+\ln(2x^2+1)-\ln(2x^2+1)=\ln 10$.

138. Si *f* y *g* son funciones derivables en $\mathbb{R}$ cuyas gráficas en el intervalo $[a,b]$ son como las de la figura, es decir, $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, $f(x)>g(x)$ en (a,b), parece que hay un número *c* en (a,b) tal que $f'(c)=g'(c)$. ¿Será eso siempre cierto?



Sí, siempre es cierto, pues la función $h(x)=f(x)-g(x)$ es continua y derivable en $[a,b]$. Tomemos el valor de c donde alcanza el máximo $h(x)$. Se trata, pues, de un punto en (a,b) pues $h(a)=0$ y $h(b)=0$.

Así que, $h'(c)=0$, es decir, $f'(c)=g'(c)$.

Problemas

139. Dadas las parábolas $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=x^2-16x+63$, calcula el área del triángulo formado por el eje *X* y las rectas tangentes a dichas parábolas en el punto de corte entre ellas.

Se comienza calculando el punto de corte entre las parábolas: $x^2-4x+3=x^2-16x+63 \Rightarrow x=5$. El punto de corte es $A(5,8)$.

En $A(5,8)$ la recta tangente a $f(x)=x^2-4x+3$ es $y-8=6(x-5)$. Operando se obtiene $y=6x-22$.

En $A(5,8)$ la recta tangente a $g(x)=x^2-16x+63$ es $y-8=-6(x-5)$. Operando se obtiene $y=-6x+38$.

El área del triángulo de vértices $A(5,8)$, $B\left(\frac{11}{3},0\right)$ y $C\left(\frac{19}{3},0\right)$ es $A=\left(\frac{19}{3}-\frac{11}{3}\right)\cdot\frac{8}{2}=\frac{32}{3}$ u^2.

140. Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y=\frac{2x}{1-x^2}$ para $x>1$. En el punto $P\left(2,-\frac{4}{3}\right)$ la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de dicha recta tangente.

b) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en el que la partícula encuentra al eje *X*.

c) Si el desplazamiento es de derecha a izquierda, encuentra el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto *P*.

a) $y'=\frac{2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$, $y'(2)=\frac{10}{9}$. La ecuación de la tangente es $y=\frac{10}{9}x-\frac{32}{9}$.

b) Como la partícula no corta al eje si *x* está en el intervalo $(1,2)$, cuando sigue la trayectoria $y=\frac{2x}{1-x^2}$, el corte debe darse si $x>2$. Así pues, debe ser $\frac{10}{9}x-\frac{32}{9}=0$. La partícula encuentra el eje *X* en el punto $A(3,2;0)$.

c) La asíntota más próxima a *P* es $x=1$. Luego la partícula se encuentra con esa asíntota en $B\left(1,-\frac{22}{9}\right)$.

141. Dadas las dos curvas:

$$y^3+5xy+3x-2y=0 \qquad\qquad xy^2+7xy+2x+3y=0$$

a) Demuestra que ambas pasan por el origen de coordenadas.

b) Demuestra que las rectas tangentes a dichas curvas en el origen son perpendiculares entre sí.

a) Al sustituir en ambas ecuaciones $x=y=0$, se observa que se cumplen ambas igualdades.

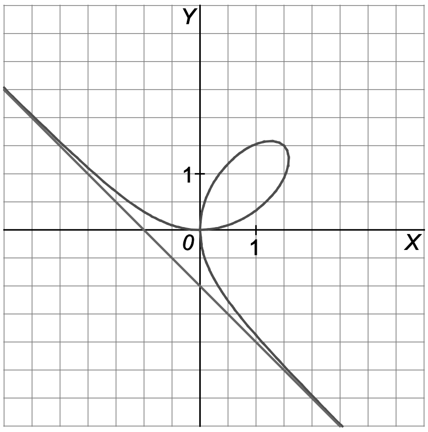
b) Se calculan las derivadas implícitas de ambas curvas y se sustituye *x* e *y* por 0 para obtener $y'(0)$.

$3y^2y'+5y+5xy'+3-2y'=0$. Por tanto, $y'(0)=\frac{3}{2}$

$y^2+2xyy'+7y+7xy'+2+3y'=0$. Por tanto, $y'(0)=-\frac{2}{3}$

Luego las tangentes tienen pendientes $\frac{3}{2}$ y $-\frac{2}{3}$ y, por tanto, son perpendiculares.

142. La *Hoja de Descartes* es la curva que corresponde a la gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ y tiene esta bella forma.



a) Explica por qué la Hoja de Descartes no es una función.

b) Comprueba que el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ pertenece a la *Hoja de Descartes*.

c) Mediante la derivación implícita comprueba que la tangente a la hoja en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ es paralela a la asíntota de la *Hoja de Descartes*.

a) La Hoja de Descartes no es una función porque corta a algunas rectas verticales más de una vez (por ejemplo, a la recta $x = 1$)

b) Sustituyendo x e y por $\frac{3}{2}$ se observa que se verifica la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$

c) Derivando: $3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy'$

Si $x = y = \frac{3}{2}$, se tiene $\frac{27}{4} + \frac{27}{4}y' = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}y'$

Luego la pendiente de la tangente en dicho punto es $y' = -1$, que es paralela a la asíntota.

143. Sea $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = (1 - |x|)(1 - [x])}$$

donde $[x]$ representa la parte entera de *x*, es decir, el mayor entero menor o igual que *x*.

Justifica la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) f es derivable en $(-2, 2)$.

b) Si x no es entero, $f^{4)}(x) = 0$.

a) Se escribe f como función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} 3(1+x) & \text{si } -2 \le x < -1 \\ 2(1+x) & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$.

Derivando se tiene que: $f'(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } -2 < x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$, luego la función es derivable si x no es entero.

b) $f''(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -2 < x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$, $f'''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$. Por tanto, las derivadas sucesivas ya serán 0.

144. Sea f la función definida en $(0,+\infty)$ por: $f(x)=x^2\ln x-\frac{3}{2}x^2$

Demuestra que para todo entero $n\geq 3$, es: $f^{n)}=\dfrac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$

$f'(x)=2x\ln x-2x$, $f''(x)=2\ln x$, $f'''(x)=\frac{2}{x}$ y a partir de aquí se tiene las derivadas sucesivas de $\frac{1}{x}$ siempre multiplicadas por 2. Como si $g(x)=\frac{1}{x}$, entonces $g^{n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, se obtiene el resultado buscado.

145. Determina todas las funciones *f* de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ con $a\neq 0$ y que verifican $f'(-1)=f'(1)=0$

¿Algunas de las funciones obtenidas anteriormente verifica $f(0)=f(1)$?

Derivando se obtiene $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Se quiere que $3a-2b+c=3a+2b+c=0$. Luego $b=0$ y $c=-3a$.

Las funciones que verifican esto son de la forma $f(x)=ax^3-3ax+d$.

Si además se impone la condición de que $f(0)=f(1)$ debe ser $d=a-3a+d$, luego *a* debería ser 0. Así pues, ninguna de las anteriores verifica que $f(0)=f(1)$.

146. Un profesor algo despistado propone a sus estudiantes que encuentren una función *f* definida en $(0,+\infty)$ tal que:

$$f'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0<x\leq 7\\ 2 & \text{si } x>7\end{cases}$$

y que $f(7)=3$. Un estudiante intenta calcular *f* y se lleva una sorpresa. Explica qué ha ocurrido.

Si intenta hallar una función con estas características se tendría $f(x)=\begin{cases}x+a & \text{si } 0<x\leq 7\\ 2x+b & \text{si } x>7\end{cases}$ que debería ser continua en $x=7$ pues es derivable allí, luego $a=-4$ y $b=-11$ pero la función así obtenida no es derivable en $x=7$ y, por tanto, su derivada no vale 1 en $x=7$ como debería.

147. Supón que f es derivable en x. Demuestra que:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

(Indicación: resta y suma en el numerador $f(x)$).

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\left(f(x-h)-f(x)\right)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)=$$

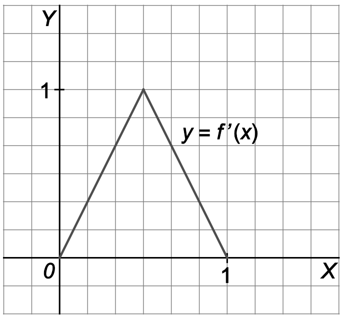
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)==\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right)=\frac{1}{2}\left(f'(x)+f'(x)\right)=f'(x)$$

148. En la figura se representa la gráfica de la función derivada f' de una cierta función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

a) Halla una expresión algebraica de *f* sabiendo que su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

b) Representa gráficamente la función $f(x)$.

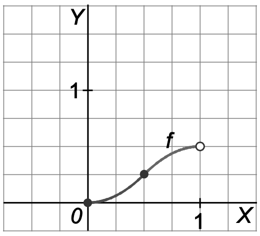
c) ¿Se verifica $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$?



a) $f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{2}\\ -2x+2 & \text{si } \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$. Luego $f(x)=\begin{cases}x^2+a & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{2}\\ -x^2+2x+b & \text{si } \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$

Como $f(0)=0$ y, al ser derivable, f es continua en $\frac{1}{2}$, se tiene que $a=0$ y $\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}+1+b$. Luego $b=-\frac{1}{2}$.

b)



c) En la gráfica de $f'(x)$ se observa que no existe $f''\left(\frac{1}{2}\right)$. Se comprueba calculando:

$$f''\left(\frac{1}{2}^-\right)=\lim_{h\to 0^-}\frac{2\left(h+\frac{1}{2}\right)-1}{h}=2\neq f''\left(\frac{1}{2}^+\right)=\lim_{h\to 0^+}\frac{-2\left(h+\frac{1}{2}\right)+2-1}{h}=-2$$

149. El coste total de producción de *q* unidades de cierto producto viene dado, en euros, por la expresión:

$$C(q)=2q^2+5q+10$$

Una empresa produce en la actualidad un total de 50 unidades y estudia la posibilidad de aumentar la producción a 50,5 unidades. Estima, utilizando la aproximación lineal, cuál será la diferencia de costes si se producen 50,5 unidades en lugar de 50.

$L(q+0{,}5)=C(q)+0{,}5C'(q)$

$L(50{,}5)=5260+102{,}5$

Luego la diferencia de costes es de 102,5 €.

150. Sea *f* una función definida en $\mathbb{R}$ que pasa por el origen, y que admite segunda derivada y que verifica:

$$[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = 2$$

Calcula la ecuación de la tangente a la gráfica de *f* en el punto $(3,1)$.

Se sabe que $2 = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = (f(x)f'(x))'$.

Luego $2 = (f(x)f'(x))'$ y una función cuya derivada es 2 tiene la forma $2x + a$, así pues $f(x)f'(x) = 2x + a$. Como $f(0) = 0$, debe ser a = 0 y se tiene $f(3)f'(3) = 6 \Rightarrow 1 \cdot f'(3) = 6 \Rightarrow f'(3) = 6$.

Así pues, la ecuación de la recta tangente en $(3,1)$ es $y = 6x - 17$.

151. Supón que *f* y *g* son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ y tales que:

i) $f(0) = 1$ **y** $g(0) = 0$

ii) $f'(x) = -g(x)$ **y** $g'(x) = f(x)$

a) Sea $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Calcula $h'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para probar que $f^2(x) + g^2(x) = 1$ para todo *x*.

b) Supón que *F* y *G* son otro par de funciones derivables que verifican i), ii) y considera la función:

$$k(x) = [f(x) - F(x)]^2 + [g(x) - G(x)]^2$$

Calcula $k'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para decidir qué relación existe entre *f* y *F* y entre *g* y *G*.

c) ¿Conoces algún par de funciones *f* y *g* que verifiquen i), ii)? ¿Puede haber otras?

a) $h'(x) = (f^2(x) + g^2(x))' = 2f'(x)f(x) + 2g'(x)g(x) = -2g(x)f(x) + 2f(x)g(x) = 0$

Luego $h(x)$ es constante y como $h(0) = f(0) + g(0) = 1 + 0 = 1$, entonces $h(x) = 1$ para todo x y, por tanto, $f^2(x) + g^2(x) = 1$ para todo *x*.

b) $k'(x) = \left([f(x) - F(x)]^2 + [g(x) - G(x)]^2\right)' = 2(f'(x) - F'(x))(f(x) - F(x)) + 2(g'(x) - G'(x))(g(x) - G(x)) =$

$= 2(-g(x) + G(x))(f(x) - F(x)) + 2(f(x) - F(x))(g(x) - G(x)) = 0$

Luego *k* es constante y como $k(0) = (f(0) - F(0)) + (g(0) - G(0)) = 0$, entonces $k(x) = 0$ para todo *x*, y como *k* es la suma de dos cuadrados, deben ser $f(x) - F(x) = 0$ y $g(x) - G(x) = 0$. Luego $f(x) = F(x)$ y $g(x) = G(x)$ para todo *x*.

c) Sí, $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ satisfacen las condiciones, y por b) son las únicas.

152. Una partícula que se mueve en el plano *XY* baja deslizándose a lo largo de la curva de ecuación $y=\sqrt{x^2+9}$. En el punto $P(4,5)$ abandona la curva y sigue por la recta tangente a dicha curva.

a) Calcula el punto *R* del eje *Y* por el que pasará la partícula.

b) ¿Existe algún otro punto *Q* de la curva tal que la recta tangente a la curva en el punto *Q* corte al eje *Y* en el mismo punto *R* anterior?

a) Como $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, $y'(4)=\dfrac{4}{5}$. Recta tangente en $P(4,5)$: $y-5=\dfrac{4}{5}(x-4)\Rightarrow y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{9}{5}$

Punto de corte de la recta tangente con el eje *Y*: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{9}{5}\Rightarrow R\left(0,\dfrac{9}{5}\right)$.

b) Recta tangente a la curva $y=\sqrt{x^2+9}$ en el punto $Q\left(a,\sqrt{a^2+9}\right)$:

$$y-\sqrt{a^2+9}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+9}}\right)(x-a)\Rightarrow y=\frac{a}{\sqrt{a^2+9}}x+\frac{9}{\sqrt{a^2+9}}$$

Si queremos que pase por $R\left(0,\dfrac{9}{5}\right)$, entonces $\dfrac{9}{5}=\dfrac{9}{\sqrt{a^2+9}}\Rightarrow a=4$ o $a=-4$.

Luego si $a=4$, $Q(4,5)$ y si $a=-4$, $Q(-4,5)$. Por tanto, la recta tangente a la curva en $Q(-4,5)$ también corta al eje *Y* en el punto $R\left(0,\dfrac{9}{5}\right)$.

153. Define a trozos la función:

$$f(x)=\min\left(\frac{x^2}{2},\frac{1}{1+x^2}\right)$$

y calcula $(f\circ f')(2)$.

Resolvemos la inecuación $\dfrac{x^2}{2}\le\dfrac{1}{1+x^2}$, como $1+x^2$ es siempre positiva, se obtiene la inecuación equivalente:

$$x^2\left(1+x^2\right)\le 2\Rightarrow x^4+x^2-2\le 0$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada $x^4+x^2-2=0$ se obtienen las soluciones $x=-1$ y $x=1$. Observando qué ocurre en los intervalos $(-\infty,-1)$, $[-1,1]$ y $(1,+\infty)$ se tiene que:

$\dfrac{x^2}{2}\le\dfrac{1}{1+x^2}$ si $x\in[-1,1]$ $\qquad$ $\dfrac{x^2}{2}>\dfrac{1}{1+x^2}$ si $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

La función es $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & \text{si } x\in[-1,1]\\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x\notin[-1,1]\end{cases}$

Como $f'(2)=\dfrac{-2\cdot 2}{\left(1+2^2\right)^2}=-\dfrac{4}{25}$, entonces $(f\circ f')(2)=f(f'(2))=f\left(-\dfrac{4}{25}\right)=\dfrac{\left(-\dfrac{4}{25}\right)^2}{2}=\dfrac{8}{625}$

Para profundizar

154. Halla la función f que cumple la ecuación:

$$\left(1+x^2\right)f''(x)+2xf'(x)=2$$

para todo x, sabiendo que $f(0)=f'(0)=0$.

De la ecuación anterior se deduce que: $(1+x^2)f''(x)+2xf'(x)=((1+x^2)f'(x))'=2 \Rightarrow (1+x^2)f'(x)=2x+a$.

Por tanto, $f'(x)=\dfrac{2x+a}{1+x^2}$, pero como $f'(0)=0$, $a=0$.

Ahora debemos encontrar una función cuya derivada sea $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ y esta es $f(x)=\ln(1+x^2)+b$.

Como $f(0)=0$, $b=0$ y la función buscada es $f(x)=\ln(1+x^2)$.

155. Los siguientes límites se pueden escribir como el valor de una cierta función en un punto. Aplicando esta idea, calcúlalos.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{20}-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

d) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}$

a) Tomando $f(x)=x^{20}$, $f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{20}-1}{x}=20$.

b) Sea $f(x)=\cos x-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos\left(h+\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(h+\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

c) Llamando $f(x)=\operatorname{tg}x$ y $h=x-\dfrac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(h+\frac{\pi}{4}\right)-tg\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=2$.

d) Llamando $f(x)=\cos x$ y $h=x-\pi$, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(h+\pi)-\cos\pi}{h}=f'(\pi)=-\operatorname{sen}(\pi)=0$.

156. a) Encuentra dos números reales a y b para los que: $\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$

b) Sea $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ definida mediante la fórmula: $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

Obtén la fórmula para la derivada n-ésima de f.

a) Debe ser $2x=ax+a+bx-b$ para todo x. En particular, si $x=0$, se tiene $0=a-b$ y si $x=1$, $2=2a$. Luego los números buscados son $a=1$ y $b=1$.

b) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$. Como si $g(x)=\dfrac{1}{x}$, entonces $g^{n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, se tiene:

$$f^{n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

157. Considera una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ para cualesquiera x_1, x_2.

2. $f(0)\neq 0$

3. $f'(0)=1$

a) Demuestra que $f(0)=1$. Indicación: Toma $x_1=x_2=0$ en 1.

b) Demuestra que $f(x)\neq 0$ para todo *x*. Indicación: Toma $x_2=-x_1$ en 1.

c) Utiliza la definición de derivada para probar que $f'(x)=f(x)$ para todo número real *x*.

d) Sea *g* otra función que satisface las tres condiciones y considera $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Demuestra que *k* es derivable en todo $\mathbb{R}$, y obtén $k'(x)$. ¿Qué relación entre *f* y *g*?

e) ¿Conoces alguna función f que satisfaga las tres condiciones? ¿Puede haber más de una?

a) Llamando $a=f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)=a^2$. Por tanto, $a=a^2$. Luego $a = 0$ o $a = 1$ y como $f(0)\neq 0$ se concluye que $f(0)=1$.

b) Como $f(0)=f(x+(-x))=f(x)f(-x)=1$, entonces $f(x)$ no puede ser cero.

c) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-1}{h}=f(x)f'(0)=f(x)1=f(x)$.

d) $k'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k(x+h)-k(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)f(h)}{g(x)g(h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)f(h)-f(x)g(h)}{g(x)g(h)h}=\dfrac{f(x)}{g(x)}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-g(h)}{g(h)h}=$

$=\dfrac{f(x)}{g(x)}0=0$.

Luego $k(x)$ es una función constante ya que su derivada se anula para todo *x*.

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=a\Rightarrow f(x)=ag(x)$. Pero como $f(0)=1$ y $g(0)=1$, entonces a = 1 y $f(x)=g(x)$.

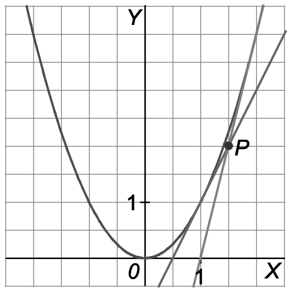
e) La función $f(x)=e^x$ satisface las tres condiciones y por d) es la única.

Autoevaluación

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y = x^2$ trazadas desde el punto $P\left(\frac{3}{2},2\right)$.

Llamemos a a la abscisa del punto de tangencia como se muestra en la figura (habrá dos tangentes desde P).



La pendiente de r es $2a$ y también es $\dfrac{a^2-2}{a-\frac{3}{2}}$.

Así pues, $2a = \dfrac{a^2-2}{a-\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a^2 - 3a = a^2 - 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1$ o $a = 2$.

Los puntos de tangencia son, pues $(1,1)$ y $(2,4)$ por lo que las ecuaciones de las tangentes pedidas son:

$y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 1 \quad y - 4 = 4(x-2) \Rightarrow y = 4x - 4$

2. *Como ya sabes, si f es continua en a, y existe $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$, dicho número coincide con $f'(a^-)$ (derivada en a por la izquierda). Análogamente por la derecha. Aplicando ese resultado, calcula los números a y b para que $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \le 1 \\ b + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable en $\mathbb{R}$.

El único punto donde podría no ser derivable es en $x = 1$. Para que lo sea, f debe ser continua en $x = 1$, es decir, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, por lo que $a = b$.

Por otra parte, $f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, así que, $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = 2a$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 1$.

Entonces, si $a = b$ y $2a = 1$, f es derivable en $x = 1$, por tanto, si $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$ se verifica que f es derivable en $\mathbb{R}$.

3. Calcula la derivada de las siguientes funciones (no te preocupes por el dominio de f o de f').

a) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos x}{x^2}\right)$ **b)** $f(x) = \operatorname{sen}^3\left[(x^3+1)\right]^3$ **c)** $f(x) = \sqrt{1+e^{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}}$

a) $f'(x) = \left[\cos\left(\dfrac{\cos x}{x^2}\right)\right]\dfrac{-x^2\operatorname{sen} x - 2x\cos x}{x^4} = -\left(\cos\left(\dfrac{\cos x}{x^2}\right)\right)\dfrac{x\operatorname{sen} x + 2\cos x}{x^3}$

b) $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2\left[(x^3+1)\right]^3 \cos\left[(x^3+1)\right]^3 3(x^3+1)^2 3x^2$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+e^{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}}} e^{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

4. Calcula la derivada en $x = 0$ de la inversa de la función $f(x) = x^3 + x - 30$.

Llamando $g(x)$ a la inversa de $f(x)$ tenemos que $g(f(x)) = x$, así que $g'(f(x))f'(x) = 1$. Nos piden $g'(0)$.

Si $f(x) = 0$, $x^3 + x - 30 = 0$, $x = 3$, así pues $g'(0)\cdot f'(3) = 1$, por lo que $g'(0) = \dfrac{1}{f'(3)}$ siendo $f'(x) = 3x^2 + 1$, es decir, $f'(3) = 28$, con lo que $g'(0) = \dfrac{1}{28}$.

5. Calcula la derivada por la derecha en $x = 1$ de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4} & \text{si } x<1\\ \text{arctg}(1+\ln x) & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

¿Diferiría mucho de la derivada en $x = 1$ de la función $g(x)=\text{arctg}(1+\ln x)$?

$f(x)$ es continua en $x = 1$.

Derivando la función se obtiene: $f'(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ \dfrac{1}{1+(1+\ln x)^2}\cdot\dfrac{1}{x} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

Por tanto $f'(1^+)=\dfrac{1}{1+(1+\ln 1)^2}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{2}$.

Se obtiene el mismo resultado calculando $g'(1)=\dfrac{1}{2}$ puesto que $f(x) = g(x)$ si $x \geq 1$.

6. Calcula la ecuación de la tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ en los puntos de ordenadas $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Realiza los cálculos sin obtener *y* como función de *x*.

Derivando implícitamente, tenemos que $\dfrac{2x}{9}+\dfrac{2yy'}{4}=0$, por lo que $y'=-\dfrac{4x}{9y}$.

Si $y=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$, tenemos que $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4\cdot 5}{4\cdot 9}=1$, con lo que $\dfrac{x^2}{9}=1-\dfrac{5}{9}=\dfrac{4}{9}$, luego $x = 2$ o $x = -2$.

Si $x = 2$, $y'=-\dfrac{8}{6\sqrt{5}}=-\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$ y la recta pedida será $y-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}=\dfrac{-4}{3\sqrt{5}}(x-2)$.

Si $x = -2$, $y'=\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$ y la recta pedida será $y-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}=\dfrac{4}{3\sqrt{5}}(x+2)$.

7. Obtén la función *f* para la que $f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{si } x\leq 1\\ 5+\cos\pi x & \text{si } x>1\end{cases}$ y $f(0)=2$.

Si $f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{si } x\leq 1\\ 5+\cos\pi x & \text{si } x>1\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}x^3+x+a & \text{si } x\leq 1\\ 5x+\dfrac{1}{\pi}\text{sen}\,\pi x+b & \text{si } x>1\end{cases}$.

Como $f(0)=2$, tenemos que $0^3+0+a=2$, $a = 2$ y si *f* es derivable en $x = 1$, debe ser continua, por lo que:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, es decir, $2+a=5+\dfrac{1}{\pi}\text{sen}\,\pi+b$, con lo que $4=5+b$, $b = -1$, así que:

$$f(x)=\begin{cases}x^3+x+2 & \text{si } x\leq 1\\ 5x+\dfrac{1}{\pi}\text{sen}\,\pi x-1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

8. Calcula las derivadas laterales en $x = 0$ de la función $f(x)=\sqrt{x^2(1+x)}$. ¿Existe $f'(0)$?

$f(x)=|x|\sqrt{1+x}$

$f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|\sqrt{1+h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h\sqrt{1+h}}{h}=1$

$f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|\sqrt{1+h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h\sqrt{1+h}}{h}=-1$

Por tanto, *f* no es derivable en $x = 0$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **Sea f una función definida en $\mathbb{R}$, que admite segunda derivada.**

   A. Si $f(0) > f(1)$, entonces $f'(0) \geq f'(1)$.

   B. Si $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$, entonces $g'(0) > f'(0)$.

   C. Para cualquier número real *x*, se verifica que:

   $$(f \cdot f')'(x) - f(x)f''(x) \geq 0$$

   D. Existen números *a* para los que $\lim\limits_{x \to a^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$.

   La respuesta correcta es C. $(f \cdot f')'(x) = f'(x)f'(x) + f(x)f''(x)$, por lo que $(f \cdot f')'(x) - f(x)f''(x) = (f'(x))^2 \geq 0$.

2. **Sea $g(x) = 2x - 6$ y *f* una función tal que $f'(x) = e^{x^2}$. La tangente a la curva $y = (f \circ g)(x)$ en el punto de abscisa 3 verifica que:**

   A. Es horizontal.

   B. Tiene pendiente negativa.

   C. Su pendiente es mayor que $f'(1)$.

   D. Es paralela a la gráfica de $y = g(x)$.

   La respuesta correcta es D. $(f \circ g)'(3) = f'(g(3))g'(3)$. Como $g(3) = 0$ y $g'(3) = 2$, es $(f \circ g)'(3) = f'(0) \cdot 2 = 2$.

3. **Considera la función $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$.**

   A. Presenta un punto con tangente horizontal.

   B. Su derivada siempre es positiva.

   C. No es derivable en los puntos de corte con el eje horizontal.

   D. $|f'(x)| \geq 1$ en los puntos en los que es derivable.

   La respuesta correcta es D. Como $|\cos x| \leq 1$ para todo valor de *x*, entonces $|f'(x)| = \dfrac{1}{|\cos x|} \geq 1$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y tal que su gráfica es simétrica respecto de la recta $x = 2$.**

   A. $\forall x, f(2 + x) = f(2 - x)$

   B. $\forall x, f(x) = f(4 - x)$

   C. $\forall x, f'(2 + x) = f'(2x)$

   D. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

   Son verdaderas la A y la D. Si la gráfica es simétrica respecto de la recta *x* = 2, debe ocurrir que $f(2 + x) = f(2 - x)$ sea cual fuere *x*.

   Observando ahora que los números *x* y 4 – *x* equidistan de 2 pues $|2 - x| = |4 - x - 2|$ concluimos que B también es verdadera.

   La afirmación C es falsa como lo prueba, por ejemplo, la función $f(x) = (x - 2)^2$ y $x = 0$.

5. Para todo *x* mayor que 1 se verifica:

A. Si $f(x)=e^{x^2} \Rightarrow f''(x)=e^{x^2}$

B. Si $f(x)=e^{x^2} \Rightarrow f''(x)=2xe^{x^2}$

C. Si $f(x)=\operatorname{sen}x \Rightarrow f''(x)=\operatorname{sen}(x+\pi)$

D. Si $f(x)=\cos x \Rightarrow f''(x)=\cos(x+\pi)$

C es verdadera ya que si $f(x)=\operatorname{sen}x$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\operatorname{sen}x$ y $\operatorname{sen}(x+\pi)=-\operatorname{sen}x$.

D también es verdadera ya que $f(x)=\cos x$ nos lleva a $f'(x)=-\operatorname{sen}x$, $f''(x)=-\cos x$ y $\cos(x+\pi)=-\cos x$.

A y B son falsas porque $f''(x)=(2+4x^2)e^{x^2}$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable.

1. La tangente a la curva $y=f^2(x)$ en $x=3$ es horizontal.

2. La curva $y=f(x)$ corta al eje de abscisas en el punto $x=3$.

A. 1 $\Leftrightarrow$ 2

B. 1 $\Rightarrow$ 2 pero 2 $\not\Rightarrow$ 1

C. 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2.

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

La relación correcta es la C.

$y'=2f(x)f'(x)$, por lo que si se da 2 es $f(3)=0$, con lo que $y'(3)=0$ y se da 1. Así que 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2, como prueba, por ejemplo, $y=\left((x-3)^2+1\right)^2$, con lo que $f(x)=(x-3)^2+1$ verifica pues $y'=2\left((x-3)^2+1\right)2(x-3)$, es decir, $y'(3)=0$ pero $f(x)=(x-3)^2+1$ no corta al eje horizontal, es decir, no se verifica 2.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Sea $f(x)=xg(x)+a\operatorname{sen}x+be^x$ donde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función derivable. Para calcular la ecuación de la tangente a la curva $y=f(x)$ en $x=0$ nos dan los siguientes datos:

1. La curva $y=g(x)$ corta al eje vertical en $(0,4)$.

2. Las curvas $y=f(x)$ y $y=g(x)$ se cortan en $x=1$.

3. $y=f(x)$ tiene tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante en $(0,4)$.

4. El punto $(0,a+b)$ es el máximo de la curva $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

La ecuación de la tangente pedida es $y-f(0)=f'(0)x$, $f(0)=b$.

$f'(x)=g(x)+xg'(x)+a\cos x+be^x$, por lo que $f'(0)=g(0)+a+b$ con el dato 1, se obtiene $g(0)=4$.

El dato 2 nos dice que $f(1)=g(1)$, o sea, $g(1)+a\operatorname{sen}1+be=g(1)$, así que $a\operatorname{sen}1+be=0$, que junto con el dato 4 nos permite calcular *a* y *b* que el máximo de la curva $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ se alcanza en $x=0$ y vale 1, por lo que según el dato 4, $a+b=1$, que junto a la igualdad anterior, dada por el dato 2, nos permite calcular *a* y *b* y hemos obtenido la ecuación de la tangente a $y=f(x)$ sin tener que utilizar el dato 3. Por tanto, la respuesta correcta es C.