8 Determinantes

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Calcula el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 2\cdot 8 = 12 - 16 = -4$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1)\cdot 6 + 1\cdot 0\cdot 0 + 5\cdot(-2)\cdot 3 - 3\cdot(-1)\cdot 0 - 0\cdot(-2)\cdot(-2) - 1\cdot 5\cdot 6 = 12 - 30 + 0 - 0 - 0 - 30 = -48$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 3 + 4\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot(-2)\cdot(-1) - (-1)\cdot 5\cdot(-1) - 1\cdot(-2)\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot 3 = 15 - 4 + 4 - 5 + 2 - 24 = -12$

3. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **halla** A_{23}**,** A_{32} **y** A_{12}**.**

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot 3 = -3$ $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot 4 = -4$ $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot 2 = -2$

4. Calcula el valor de los siguientes determinantes, utilizando sucesivamente la definición por recurrencia.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot A_{11} + 1\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} - 1\cdot A_{14} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$

$+0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 4 + 0 - 4 = 16$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} - 1\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 2\cdot A_{14} + 0\cdot A_{15} = A_{11} - A_{12} + 2A_{14} = -58 + 14 + 176 = 132$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -58$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1\cdot\left(1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}\right) = -(12+2) = -14$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1\cdot\left(1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}\right) = -(-34-54) = 88$$

5. **Ejercicio resuelto.**

6. **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & d \\ c & 3 & d \end{vmatrix} = 5$ **, halla el valor de los siguientes determinantes.**

a) $\begin{vmatrix} a+2d & 2 & d \\ b+2d & 4 & d \\ c+2d & 6 & d \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & 3d & -1-2a \\ b & 3d & -2-2b \\ c & 3d & -3-2c \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ a+b+c & b & c \\ 3d & d & d \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a+2d & 2 & d \\ b+2d & 4 & d \\ c+2d & 6 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & d \\ b & 4 & d \\ c & 6 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2d & 2 & d \\ 2d & 4 & d \\ 2d & 6 & d \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & d \\ c & 3 & d \end{vmatrix} + 0 = 2\cdot 5 = 10$

Hemos usado la propiedad de la suma para descomponer el determinante en suma de dos determinantes. En el primero hemos sacado factor común en la segunda columna, el segundo es nulo por ser la primera y tercera columnas proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} a & 3d & -1-2a \\ b & 3d & -2-2b \\ c & 3d & -3-2c \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & d & 1+2a \\ b & d & 2+2b \\ c & d & 3+2c \end{vmatrix} = -3\left(\begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & d & 2 \\ c & d & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d & 2a \\ b & d & 2b \\ c & d & 2c \end{vmatrix}\right) = -3\cdot(-5) = 15$

En primer lugar, hemos sacado factor en las columnas segunda y tercera y, a continuación, hemos usado la propiedad de la suma para descomponer el determinante en suma de dos determinantes. En el primero hemos usado la propiedad 7, el segundo es nulo por ser la primera y tercera columnas proporcionales.

c) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ a+b+c & b & c \\ 3d & d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2+3 & 2 & 3 \\ a+b+c & b & c \\ d+d+d & d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & d & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ b & b & c \\ d & d & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ c & b & c \\ d & d & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ d & d & d \end{vmatrix} = -5$

Hemos usado la propiedad de la suma para descomponer el determinante en suma de tres determinantes. En el primero hemos usado la propiedad 7 y la 9, el segundo y el tercero son nulos por tener dos columnas iguales.

7. **Si *a*, *b* y *c* son números enteros, comprueba que** $\begin{vmatrix} a & 3b & c \\ 10 & 45 & 25 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **es múltiplo de 15.**

$\begin{vmatrix} a & 3b & c \\ 10 & 45 & 25 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} a & 3b & c \\ 2 & 9 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, por tanto, el determinante es múltiplo de 15.

8. **Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $\det(A) = 4$ y $\det(B) = 2$, halla, razonadamente:**

a) $\det(AB)$ **b)** $\det\left((A^tB)^{-1}\right)$ **c)** $\det(A^3B^2)$ **d)** $\det(2A)$

a) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 8$.

b) $\det\left((A^tB)^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A^tB)} = \dfrac{1}{\det(A^t)\det(B)} = \dfrac{1}{\det(A)\det(B)} = \dfrac{1}{8}$.

c) $\det(A^3B^2) = \det(A^3)\det(B^2) = [\det(A)]^3[\det(B)]^2 = 256$.

d) Sacando factor común a 2 en las tres filas de A obtenemos $\det(2A) = 2^3\det(A) = 32$.

9. **Ejercicio resuelto.**

10. **Utilizando el método de Gauss, calcula los siguientes determinantes.**

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2-4F_1 \\ F_3\to F_3+F_1}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_3\leftrightarrow C_2}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{F_3\to F_3-F_2}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -22$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_1\leftrightarrow F_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-3F_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3\to F_3+F_2 \\ F_4\to F_4+2F_2}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} \underset{F_4\to F_4+F_3}{=}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 42$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2+3F_1 \\ F_3\to F_3+2F_1 \\ F_4\to F_4+4F_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3\to F_3-F_2 \\ F_4\to F_4+F_2}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} \underset{F_4\to F_4-2F_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -48$

11. Calcula los siguientes determinantes desarrollando por los elementos de una fila o columna.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 + F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la primera columna}}}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 50$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la tercera columna}}}{=} 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 40$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 + 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la primera columna}}}{=} -1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -48$

12 y 13. Ejercicios resueltos.

14. Halla el rango de cada una de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rango de A:

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, $\text{rg}(A) \geq 2$. El único menor de orden 3 es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

Rango de B:

$F_3 = 2F_2 - F_1 \Rightarrow \text{rg}(B) = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\text{rg}(B) = 2$

Rango de C:

$C_3 = C_1 + C_2,\ C_4 = C_1 - C_2 \Rightarrow \text{rg}(C) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, $\text{rg}(C) = 3$

Rango de D:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{C_2 \to C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la primera columna}}}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$, $\text{rg}(D) = 4$

15. **Halla el valor de *k* para que** $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & k+1 & 2 \end{pmatrix} = 2$**.**

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, el rango es al menos 2.

Para que el rango sea 2, los dos menores de orden 3 que se obtienen ampliando el anterior se deben anular, es decir:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & k+1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} k+1 & 1 & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} (k+1)^2 - 3(k+1) - 2(k+1) = 0 \\ 2(k+1) + 6k - 6(k+1) - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k+1)(k-4) = 0 \\ 2k - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 4$$

16. **Estudia el rango de** $P = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & \alpha \\ 3\alpha & \alpha^2 & 1 \\ -3 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$ **en función de** α**.**

El único menor de orden 3 se anula si:

$$\begin{vmatrix} 3 & \alpha & \alpha \\ 3\alpha & \alpha^2 & 1 \\ -3 & \alpha & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3\alpha^2 - 3\alpha + 3\alpha^3 + 3\alpha^3 - 3\alpha + 3\alpha^2 = 0 \Rightarrow 6\alpha^3 - 6\alpha = 0 \Rightarrow 6\alpha(\alpha^2 - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0,\ \alpha = -1,\ \alpha = 1$$

Por tanto, si $\alpha \neq -1$, $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$, tenemos $\mathrm{rg}(P) = 3$.

Si $\alpha = -1$ tenemos $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{rg}(P) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$.

Si $\alpha = 0$ tenemos $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{rg}(P) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Si $\alpha = 1$ tenemos $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{rg}(P) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$.

En resumen, si $\alpha = -1$, $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ tenemos $\mathrm{rg}(P) = 2$, en otro caso $\mathrm{rg}(P) = 3$.

17. **Ejercicio interactivo.**

18 y 19. **Ejercicios resueltos.**

20. En cada caso, determina si la matriz tiene inversa.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow A$ es invertible.

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow C$ no es invertible.

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow B$ no es invertible.

$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow D$ es invertible.

21. Halla la matriz inversa de cada una de las matrices.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa de M: $|M| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow M$ es invertible.

$$\text{Adj}(M) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M^{-1} = \frac{1}{|M|}(\text{Adj}(M))^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Inversa de N: $|N| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow N$ es invertible.

$$\text{Adj}(N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } N^{-1} = \frac{1}{|N|}(\text{Adj}(N))^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Inversa de N: $|P| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow P$ es invertible.

$$\text{Adj}(P) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \frac{1}{|P|}(\text{Adj}(P))^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

22. **En cada caso, determina para qué valores del parámetro λ tiene inversa la matriz.**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 3 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -2\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) A tiene inversa si $|A| \neq 0$:

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Por tanto, si $\lambda \neq -1$ la matriz A tiene inversa.

b) B tiene inversa si $|B| \neq 0$:

$$|B| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 3 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -2\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4\lambda^2 + 9\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}, \lambda = 2$$

Por tanto, si $\lambda \neq \frac{1}{4}$ y $\lambda \neq 2$ la matriz B tiene inversa.

c) C tiene inversa si $|C| \neq 0$:

$$|C| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow \text{No hay solución}$$

Por tanto, la matriz C tiene inversa para cualquier valor de λ.

d) D tiene inversa si $|D| \neq 0$:

$$|D| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Por tanto, si $\lambda \neq 2$ la matriz D tiene inversa.

23. **Ejercicio resuelto.**

24. **Identifica las expresiones que sean iguales de entre las siguientes.**

a) $AB + 2A$ **d)** $B(A - I)$ **g)** $AB + CB$

b) $(A + C)B$ **e)** $A(B + 2I)$ **h)** $B + 5A$

c) $AB - B$ **f)** $3A + B + 2A$ **i)** $(B + 2I)A$

$AB + 2A = A(B + 2I)$, es decir, las expresiones a y e son iguales.

$(A + C)B = AB + CB$, es decir, las expresiones b y g son iguales.

$3A + B + 2A = B + 5A$, es decir, las expresiones f y h son iguales.

25. Despeja la matriz *X* en cada una de las siguientes ecuaciones matriciales, suponiendo que todas las matrices son cuadradas de orden 3 y que las matrices que lo requieran tienen inversa.

a) $BX = C$ **d)** $AX^t + B = C$ **g)** $A + BXB = C$

b) $B + XA = C$ **e)** $XAB = A + XB$ **h)** $AX + B = A + X$

c) $XA^2 = A$ **f)** $AXB = C$ **i)** $A(B + XA) = C$

a) $BX = C \Rightarrow X = B^{-1}C$

b) $B + XA = C \Rightarrow XA = C - B \Rightarrow X = (C - B)A^{-1}$

c) $XA^2 = A \Rightarrow X = A(A^2)^{-1} = A(A^{-1})^2 = A^{-1}$

d) $AX^t + B = C \Rightarrow AX^t = C - B \Rightarrow X^t = A^{-1}(C - B) \Rightarrow X = [A^{-1}(C - B)]^t = (C - B)^t (A^{-1})^t = (C^t - B^t)(A^t)^{-1}$

e) $XAB = A + XB \Rightarrow XAB - XB = A \Rightarrow X(AB - B) = A \Rightarrow X = A(AB - B)^{-1} = A[(A - I)B]^{-1} = AB^{-1}(A - I)^{-1}$

f) $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

g) $A + BXB = C \Rightarrow BXB = C - A \Rightarrow X = B^{-1}(C - A)B^{-1}$

h) $AX + B = A + X \Rightarrow AX - X = A - B \Rightarrow (A - I)X = A - B \Rightarrow X = (A - I)^{-1}(A - B)$

i) $A(B + XA) = C \Rightarrow B + XA = A^{-1}C \Rightarrow XA = A^{-1}C - B \Rightarrow X = (A^{-1}C - B)A^{-1}$

26. Resuelve la ecuación matricial $XA - A^2 = B$ siendo las matrices *A* y *B*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos $XA - A^2 = B \Rightarrow XA = B + A^2$, por tanto, si existe A^{-1} tenemos $X = (B + A^2)A^{-1} = BA^{-1} + A$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ existe A^{-1}: $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$X = BA^{-1} + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

27. Resuelve la ecuación matricial: $A = AXA^{-1} + B$ en la que *A* y *B* son las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$A = AXA^{-1} + B \Rightarrow AXA^{-1} = A - B \Rightarrow X = A^{-1}(A - B)A$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ existe A^{-1}: $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$X = A^{-1}(A - B)A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

28. **Ejercicio interactivo.**

29 a 38. **Ejercicios resueltos.**

EJERCICIOS

Cálculo de determinantes

39. **Calcula el determinante de cada una de las matrices siguientes.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$|A| = 11$, $|B| = -14$ y $|C| = -17$

40. **Calcula el determinante de cada una de las matrices siguientes.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$|M| = 5$, $|N| = 14$ y $|P| = 30$

41. **Calcula el determinante de cada una de las matrices siguientes.**

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz S es triangular, por tanto, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir, $|S| = 24$.

Desarrollando por la primera fila, tenemos $|T| = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -24$.

42. **Calcula, en función de *a*, el determinante de cada una de las matrices siguientes.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a-1 \\ a+2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - a + 2a - 1 + 4 - 3a^2 = -3a^2 + a + 9$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a-1 \\ a+2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2(a+2)(a-1) - 2(a-1) + (a+2) = -2a^2 - 3a + 10$$

43. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Calcula los determinantes de las matrices:

a) AB

b) $A+B$

c) $(A+B)^2$

d) A^t-2B

a) $AB=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 3\\ 1 & -2 & 2\\ -4 & 5 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow |AB|=18$

b) $A+B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow |A+B|=8$

c) $(A+B)^2=\begin{pmatrix}5 & 4 & 6\\ 2 & 0 & 4\\ 10 & 4 & 8\end{pmatrix}\Rightarrow \left|(A+B)^2\right|=64$

d) $A^t-2B=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ -3 & 3 & -2\\ 2 & -5 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow |A^t-2B|=-54$

44. Calcula el valor de *m* que hace que el determinante de las matrices *M* y *N* sea el mismo, siendo:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{m} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \boldsymbol{m}-\mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \boldsymbol{m}+\mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$|M|=2m-1-m^2=-m^2+2m-1$ y $|N|=-2(m-1)+2(m+1)-8=-4$, por tanto:

$$|M|=|N|\Rightarrow -m^2+2m-1=-4\Rightarrow -m^2+2m+3=0\Rightarrow m=-1,\ m=3$$

45. Determina los valores de *a* que cumplen la ecuación:

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1}\\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \boldsymbol{a}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 2 & a\end{vmatrix}=0\Rightarrow a^3+4+2-4a-2a-a=0\Rightarrow a^3-7a+6=0\Rightarrow a=-3,\ a=1,\ a=2$$

46. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ x & -1 & x-1\\ 1 & 0 & x\end{vmatrix}=0$

b) $\begin{vmatrix}x+1 & x+2 & x\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & x & -1\end{vmatrix}=0$

a) $\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ x & -1 & x-1\\ 1 & 0 & x\end{vmatrix}=0\Rightarrow x+(x-1)+1-x^2=0\Rightarrow -x^2+2x=0\Rightarrow x=0,\ x=2$

b) $\begin{vmatrix}x+1 & x+2 & x\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & x & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -2(x+1)+x^2+(x+2)=0\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x=0,\ x=1$

47. **Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, se define para cada número real k, la matriz $B=A-kI$, donde I denota la matriz identidad de orden 2. Halla los valores de k que hacen que el determinante de B sea nulo.**

$$|B|=|A-kI|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2-k & -3\\ 1 & -2-k\end{vmatrix}=0\Rightarrow(2-k)(-2-k)+3=0\Rightarrow k^2-1=0\Rightarrow k=-1,\ k=1$$

48. **Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, halla el valor de λ que hace nulo el determinante de la matriz $A^2-\lambda A$.**

$A^2-\lambda A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\lambda & 0\\ \lambda & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2\lambda & 0\\ 3-\lambda & 1-\lambda\end{pmatrix}$, por tanto, $|A^2-\lambda A|=0\Rightarrow(4-2\lambda)(1-\lambda)=0\Rightarrow\lambda=2,\ \lambda=1$.

49. **A partir de la matriz $M=\begin{pmatrix}x & x-1 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & x+1 & 0\end{pmatrix}$, se construye el polinomio $P(x)=\det(M)$. Halla las raíces de $P(x)$.**

$P(x)=0\Rightarrow-2(x-1)-2(x+1)-4+x(x+1)=0\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=-1,\ x=4$.

Propiedades de los determinantes

50. **Si $\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=3$, halla los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas.**

a) $\begin{vmatrix}3a & 3b & 3c\\ -d & -e & -f\\ \frac{g}{2} & \frac{h}{2} & \frac{i}{2}\end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix}a & d-a & g+a\\ b & e-b & h+b\\ c & f-c & i+c\end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix}3a & 3b & 3c\\ -d & -e & -f\\ \frac{g}{2} & \frac{h}{2} & \frac{i}{2}\end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 2}}{=}-\frac{3}{2}\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=-\frac{9}{2}$$

b) $$\begin{vmatrix}a & d-a & g+a\\ b & e-b & h+b\\ c & f-c & i+c\end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 1}}{=}\begin{vmatrix}a & d-a & g\\ b & e-b & h\\ c & f-c & i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & d-a & a\\ b & e-b & b\\ c & f-c & c\end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 4}}{=}\begin{vmatrix}a & d-a & g\\ b & e-b & h\\ c & f-c & i\end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 1}}{=}\begin{vmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a & a & g\\ b & b & h\\ c & c & i\end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 4}}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 9}}{=}\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=3$$

51. **Se sabe que** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2$ **, calcula razonadamente:**

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1-2a_2 & b_1-2b_2 & c_1-2c_2 \\ 3a_3 & 3b_3 & 3c_3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a_2 & 3b_2 & c_2+a_2 \\ 2a_1 & 6b_1 & 2c_1+2a_1 \\ a_3 & 3b_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1-2a_2 & b_1-2b_2 & c_1-2c_2 \\ 3a_3 & 3b_3 & 3c_3 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 1}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ 3a_3 & 3b_3 & 3c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ 3a_3 & 3b_3 & 3c_3 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Propiedad 4}\\ \text{Propiedad 2}}}{=} -6\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 12$$

b) $$\begin{vmatrix} a_2 & 3b_2 & c_2+a_2 \\ 2a_1 & 6b_1 & 2c_1+2a_1 \\ a_3 & 3b_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 1}}{=} \begin{vmatrix} a_2 & 3b_2 & c_2 \\ 2a_1 & 6b_1 & 2c_1 \\ a_3 & 3b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & 3b_2 & a_2 \\ 2a_1 & 6b_1 & 2a_1 \\ a_3 & 3b_3 & a_3 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Propiedad 2}\\ \text{Propiedad 4}}}{=} 2\begin{vmatrix} a_2 & 3b_2 & c_2 \\ a_1 & 3b_1 & c_1 \\ a_3 & 3b_3 & c_3 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 2}}{=} 6\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=}$$

$$= -6\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-6)(-2) = 12$$

52. **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$ **, calcula, sin utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada paso qué propiedad de los determinantes se está utilizando.**

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 2}}{=} \frac{3}{2}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=} -\frac{3}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

b) $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 1}}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 5}}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 1}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 4}}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 2}}{=} 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

53. **Dada la matriz** $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$**, utilizando una sola vez la regla de Sarrus, calcula:** $|M|$, $|M^t|$, $|M^3|$, $|4M|$ **y** $|M^{-1}|$ **.**

$|M| = 0+3-1-0-2-2 = -2$, $|M^t| = |M| = -2$, $|M^3| = |M|^3 = -8$, $|4M| = 4^3|M| = -128$ y $|M^{-1}| = \dfrac{1}{|M|} = -\dfrac{1}{2}$.

54. **Se considera una matriz *G* de orden 3 x 3, cuyas columnas se representan por C_1, C_2, C_3 y cuyo determinante vale 2. Considera la matriz *H* cuyas columnas son C_3, C_3+C_2, $3C_1$. ¿Cuál es el determinante de esa nueva matriz *H*?**

$$\det(H)=\det(C_3,\,C_3+C_2,\,3C_1)\underset{\text{Propiedad 1}}{=}\det(C_3,\,C_3,\,3C_1)+\det(C_3,\,C_2,\,3C_1)\underset{\text{Propiedad 4}}{=}\det(C_3,\,C_2,\,3C_1)\underset{\text{Propiedad 2}}{=}$$

$$=3\det(C_3,\,C_2,\,C_1)\underset{\text{Propiedad 7}}{=}-3\det(C_1,\,C_2,\,C_3)=-3\det(G)=-6\ .$$

55. **Sabiendo que *a*, *b*, *c* y *d* son números distintos de cero, sin aplicar la regla de Sarrus, justifica que:**

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{c} \\ \dfrac{bc}{d} & \dfrac{ac}{d} & \dfrac{ab}{d} \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{c} \\ \dfrac{bc}{d} & \dfrac{ac}{d} & \dfrac{ab}{d} \end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 2}}{=}\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ bc & ac & ab \\ d & d & d \end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 4}}{=}0\ .$$

56. **Sea *C* una matriz cuadrada de orden 2 de columnas C_1 y C_2 y $\det(C)=5$, y sea *B* una matriz cuadrada de orden 2 y con determinante 2. Si *D* es la matriz cuadrada de orden 2 de columnas $4C_2$ y C_1-C_2, calcula el determinante de la matriz BD^{-1}.**

$$\det(D)=\det(4C_2,\,C_1-C_2)\underset{\text{Propiedad 1}}{=}\det(4C_2,\,C_1)-\det(4C_2,\,C_2)\underset{\text{Propiedad 5}}{=}\det(4C_2,\,C_1)\underset{\text{Propiedad 2}}{=}4\det(C_2,\,C_1)\underset{\text{Propiedad 7}}{=}$$

$$=-4\det(C_1,\,C_2)=-4\det(C)=-20\ .$$

Por tanto, $\left|BD^{-1}\right|=\dfrac{|B|}{|D|}=-\dfrac{1}{10}$

57. **Calcula, por transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, el determinante:**

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}\underset{\substack{\text{Propiedad 8:}\\ C_3\to C_1+C_2+C_3}}{=}\begin{vmatrix} 2+a & b & 2+a+b+c \\ a & 2+b & 2+a+b+c \\ a & b & 2+a+b+c \end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 2}}{=}(2+a+b+c)\begin{vmatrix} 2+a & b & 1 \\ a & 2+b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 1}}{=}$$

$$=(2+a+b+c)\left(\begin{vmatrix} 2 & b & 1 \\ 0 & 2+b & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & 2+b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}\right)\underset{\text{Propiedad 5}}{=}(2+a+b+c)\begin{vmatrix} 2 & b & 1 \\ 0 & 2+b & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 1}}{=}$$

$$=(2+a+b+c)\left(\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & b & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}\right)\underset{\text{Propiedad 5}}{=}(2+a+b+c)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4(2+a+b+c)$$

58. Sin desarrollar el determinante prueba que las raíces del polinomio $P(x)$ son 3, 4 y –7, siendo:

$$P(x)=\begin{vmatrix} 4 & 4 & x \\ 3 & x & 4 \\ x & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$P(3)=\begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$, ya que $C_1=C_2$

$P(4)=\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$, ya que $C_2=C_3$

$P(-7)=\begin{vmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 3 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$, ya que $C_3=-C_1-C_2$

59. Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix}=0$.

Observemos que

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2(x+1)(x-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & (x+1)(x-1) \end{vmatrix}=(x+1)(x-1)\begin{vmatrix} 2(x-1) & 1 & x+1 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ x-1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=$$

$$=(x+1)^2(x-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(x+1)^2(x-1)^2x$$

Por tanto, la ecuación se reduce a $(x+1)^2(x-1)^2x=0$, cuyas soluciones son $x=-1$, $x=1$, $x=0$.

Método de Gauss y determinantes

60. Calcula los siguientes determinantes utilizando el método de Gauss.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}\underset{\substack{F_3\to F_3-2F_1 \\ F_4\to F_4+F_1}}{=}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}\underset{\substack{F_3\to F_3+4F_2 \\ F_4\to F_4+2F_2}}{=}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}\underset{F_4\to F_4-F_3}{=}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=-48$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}\underset{\substack{F_2\to F_2+F_1 \\ F_3\to F_3-2F_1 \\ F_4\to F_4-3F_1}}{=}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{vmatrix}\underset{\substack{F_3\to F_3-2F_2 \\ F_4\to F_4+F_2}}{=}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\underset{F_4\to F_4+F_3}{=}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-6$$

61. Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 \to C_3 - 2C_1 \\ C_4 \to C_4 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la primera fila}}}{=} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \underset{C_3 \to C_3 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la tercera fila}}}{=} 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 68$$

62. Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_5 \to F_5 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_2}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - F_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_5 \to F_5 + F_4}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 64$$

63. Halla dos raíces del polinomio de cuarto grado:

$$\boldsymbol{P(x)} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \boldsymbol{x} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \boldsymbol{x} \end{vmatrix}$$

Una raíz es $x = 1$, ya que $P(1) = 0$ por ser las dos primeras filas iguales.

Otra raíz es $x = 3$, ya que $P(3) = 0$ por ser las dos últimas filas iguales.

64. Obtén, en función de *a*, *b* y *c*, el determinante de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}+\boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1}+\boldsymbol{b} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}+\boldsymbol{c} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1 \to F_1 - F_4 \\ F_2 \to F_2 - F_4 \\ F_3 \to F_3 - F_4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la primera fila}}}{=} 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = -abc$$

Rango y determinantes

65. Determina el rango de cada una de las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 3\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Rango de A:

Como el menor $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$, $\text{rg}(A)=2$.

Rango de B:

Como el menor $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, $\text{rg}(B)\geq 2$. El único menor de orden 3 es $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{vmatrix}=0$, por tanto, $\text{rg}(B)=2$.

Rango de C:

Como el menor $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6\neq 0$, $\text{rg}(C)\geq 2$. El único menor de orden 3 es $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 3\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-24\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(C)=3$.

Rango de D:

Como $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}\underset{C_3\to C_3-C_2}{=}\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{vmatrix}\underset{\text{Desarrollando por la primera fila}}{=}1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$, $\text{rg}(D)=4$.

66. Halla el rango de las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6 & 3\\ -3 & 6 & -9 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -5 & 0\\ 5 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -6 & 4 & -2 & 0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 0 & -4 & 0\\ 1 & 2 & 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Rango de A:

Como el menor $\begin{vmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=10\neq 0$, $\text{rg}(A)=2$.

Rango de B:

Como el menor $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=6\neq 0$, $\text{rg}(B)=3$.

Rango de C:

Observemos que $C_1=3C_3$ y $C_2=-2C_3$, así, $\text{rg}(C)=\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}=2$, ya que el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

Rango de D:

Como el menor $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -4 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=8\neq 0$, $\text{rg}(D)=3$.

67. **a)** Determina, razonadamente si la tercera columna de la matriz A siguiente es combinación lineal de las dos primeras.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calcula el rango de la matriz A.

a) Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, las tres columnas son linealmente dependientes.

Además, las dos primeras columnas de A son independientes, ya que no son proporcionales, por tanto, la tercera columna debe ser combinación lineal de las dos primeras.

b) $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

68. **Dada la matriz:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & k \\ -1 & k-2 & -3 & k \\ 2 & 3 & k-2 & 4 \end{pmatrix}$$

Halla, en cada caso, los valores del parámetro *k* para que:

a) La tercera columna sea combinación lineal de las dos primeras.

b) La cuarta columna sea combinación lineal de las dos primeras.

c) El rango de la matriz sea 2.

Observemos que las dos primeras columnas son linealmente independientes, ya que no son proporcionales.

a) Para que la tercera columna sea combinación lineal de las dos primeras debe ser:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & k-2 & -3 \\ 2 & 3 & k-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (k-2)^2 - 12 + 9 + 2(k-2) = 0 \Rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 3$$

b) Para que la cuarta columna sea combinación lineal de las dos primeras debe ser:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & k-2 & k \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(k-2) + 4k - 3k - 2k(k-2) - 3k + 8 = 0 \Rightarrow -2k^2 + 6k = 0 \Rightarrow k = 0, k = 3$$

c) Según los apartados anteriores, si $k = 3$, la tercera y la cuarta columna son combinación lineal de las dos primeras columnas, por lo que el rango de la matriz será 2. En cambio, si $k \neq 3$ bien C_1, C_2, C_3 bien C_1, C_2, C_4 serán linealmente independientes, con lo que el rango de la matriz sería 3.

69. Determina el rango de cada una de las siguientes matrices según el valor del parámetro *k*.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -4\\ 1 & k & 2\\ 2 & 4 & k\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}k-1 & k & 0\\ 0 & k-1 & k\\ k-1 & 0 & k\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}k & k-1 & k(k-1)\\ k & 1 & k\\ k & 1 & k-1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & k & 2\\ 3 & -1 & k\end{pmatrix}$$

Rango de *A*: $|A|=0\Rightarrow -2k^2+8k=0\Rightarrow k=0,\ k=4$, por tanto:

Si $k\neq 0$ y $k\neq 4$, tenemos $\text{rg}(A)=3$.

Si $k=0$ tenemos $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -4\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$ y $\text{rg}(A)=2$, ya que $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4\neq 0$.

Si $k=4$ tenemos $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -4\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$ y $\text{rg}(A)=2$, ya que $\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-4\neq 0$.

Rango de *B*: $|B|=0\Rightarrow 2k^3-3k^2+k=0\Rightarrow k=0,\ k=\frac{1}{2},\ k=1$,por tanto:

Si $k\neq 0, k\neq\frac{1}{2}$ y $k\neq 1$, tenemos $\text{rg}(B)=3$.

Si $k=0$ tenemos $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y $\text{rg}(B)=2$, ya que $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

Si $k=\frac{1}{2}$ tenemos $B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ y $\text{rg}(B)=2$, ya que $\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\neq 0$.

Si $k=1$ tenemos $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $\text{rg}(B)=2$, ya que $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

Rango de *C*: $|C|=0\Rightarrow k^2-2k=0\Rightarrow k=0,\ k=2$, por tanto:

Si $k\neq 0$ y $k\neq 2$, tenemos $\text{rg}(C)=3$.

Si $k=0$ tenemos $C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y $\text{rg}(C)=2$, ya que $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Si $k=2$ tenemos $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $\text{rg}(C)=2$, ya que $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Rango de *D*: $|D|=0\Rightarrow k^2-9k+14=0\Rightarrow k=2,\ k=7$

Por tanto, si $k\neq 2$ y $k\neq 7$, tenemos $\text{rg}(D)=3$.

Si $k=2$ tenemos $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$ y $\text{rg}(D)=2$, ya que $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$.

Si $k=7$ tenemos $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 2\\ 3 & -1 & 7\end{pmatrix}$ y $\text{rg}(D)=2$, ya que $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 7\end{vmatrix}=7\neq 0$.

70. Determina para qué valores de *a* son linealmente independientes los vectores:

$$\vec{u} = (1, -1, 2),\ \vec{v} = (2, a, -1) \text{ y } \vec{w} = (a, 2, a)$$

Formemos una matriz *A* cuyas columnas sean los vectores dados, si el determinante de esta matriz no es nulo los vectores serán linealmente independientes.

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & a & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a^2 + 3a + 10 = 0 \Rightarrow a = -2,\ a = 5$$

Por tanto, los vectores son linealmente independientes si $a \neq -2$ y $a \neq 5$.

71. Estudia el rango de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$ en función de los valores de *a*.

El menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A) \geq 2$.

Ampliando este menor con la tercera fila y la tercera columna tenemos $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A) \geq 3$.

El único menor de orden 4 es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \\ C_4 \to C_4 - 6C_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 & -7 \\ 2 & 0 & -3 & a-12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -7 & a-18 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la tercera fila}}}{=} 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & a-12 \\ -2 & -7 & a-18 \end{vmatrix} = -2a + 12$$

Por tanto, si $a \neq 6$ el rango de *A* es 4 y si $a = 6$ el rango es 3.

72. Halla el rango de cada una de las siguientes matrices según el valor del parámetro.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ k & k^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & a & -3 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

Rango de *A*: El menor $\begin{vmatrix} k & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6k - 18$ se anula si $k = 3$, por tanto:

Si $k \neq 3$, tenemos $\text{rg}(A) = 2$.

Si $k = 3$ tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 1$, ya que $C_2 = 3C_1$.

Rango de *B*: El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = k^3 - 3k + 2$ se anula si $k = -2$ o $k = 1$, por tanto:

Si $k \neq -2$ y $k \neq 1$, tenemos $\text{rg}(B) = 3$.

Si $k = -2$ tenemos $\text{rg}(B) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$.

Si $k = 1$ tenemos $\text{rg}(B) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$, ya que todas las filas coinciden.

Rango de C: El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & a & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = a - 1$ se anula si $a = 1$, por tanto:

Si $a \neq 1$, tenemos $\text{rg}(C) = 3$.

Si $a = 1$ tenemos $\text{rg}(B) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ y los dos menores de orden 3 que se pueden conseguir ampliándolo, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, se anulan.

Rango de D: El menor $\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4$ se anula si $m = -1$ o $m = 2$, por tanto:

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$, tenemos $\text{rg}(D) = 3$.

Si $m = -1$ tenemos $\text{rg}(D) = \text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_3 = C_1 + C_2 \\ C_4 = -C_1 - C_2}}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Si $m = 2$ tenemos $\text{rg}(D) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$, ya que todas las filas son proporcionales.

73. Halla el valor de *k* para que la siguiente matriz tenga rango 2.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{k} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k}+\mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{k}-\mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Para que el rango sea dos, los menores de orden 3 se deben anular, en particular:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ k & 0 & k \\ 1 & k-1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ o } k = 1$$

Si $k = 0$ tenemos $\text{rg}(M) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Si $k = 1$ tenemos $\text{rg}(M) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$.

Por tanto, el rango de M es 3 para cualquier valor de k.

Inversa y determinantes

74. Determina cuáles de las siguientes matrices tienen inversa.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$|A|=1\neq 0\Rightarrow A$ es invertible. $|B|=0\Rightarrow B$ no es invertible. $|C|=0\Rightarrow C$ no es invertible.

75. Calcula, si existe, la matriz inversa de cada una de las matrices siguientes.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Inversa de A: $|A|=-1\neq 0\Rightarrow A$ es invertible.

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -6 & 3 & 5\\ -4 & 2 & 3\end{pmatrix}\text{ y } A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -6 & -4\\ -1 & 3 & 2\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 4\\ 1 & -3 & -2\\ 1 & -5 & -3\end{pmatrix}$$

Inversa de B: $|B|=-2\neq 0\Rightarrow B$ es invertible.

$$\text{Adj}(B)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\text{ y } B^{-1}=\frac{1}{|B|}(\text{Adj}(B))^t=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Inversa de C: $|C|=2\neq 0\Rightarrow C$ es invertible.

$$\text{Adj}(C)=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 7 & -6 & -5\end{pmatrix}\text{ y } C^{-1}=\frac{1}{|C|}(\text{Adj}(C))^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 7\\ 2 & 0 & -6\\ 2 & 1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2}\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

76. Determina si las siguientes matrices tienen inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Inversa de A: $|A|=-2\neq 0\Rightarrow A$ es invertible.

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 0\\ 5 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}\text{ y } A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-4 & 5 & -2\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -\frac{5}{2} & 1\\ 1 & -\frac{3}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

Inversa de B: $|B|=-5\neq 0\Rightarrow B$ es invertible.

$$\text{Adj}(B)=\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 12 & -3 & -4\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}\text{ y } B^{-1}=\frac{1}{|B|}(\text{Adj}(B))^t=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}-8 & 12 & 3\\ 2 & -3 & -2\\ 1 & -4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{5} & -\frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

Inversa de C: $|C|=-1\neq 0\Rightarrow C$ es invertible.

$$\text{Adj}(C)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\text{ y } C^{-1}=\frac{1}{|C|}(\text{Adj}(C))^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

77. Se tiene la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Halla A^{-1} y $\left(A^{-1}\right)^{-1}$.

b) Comprueba que $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

c) Comprueba que $\text{Adj}\left(\text{Adj}(A)\right)=|A|\cdot A$.

a) Inversa de A: $|A|=6\neq 0\Rightarrow A$ es invertible.

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix} \text{ y } A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\text{Adj}(A)\right)^t=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

Inversa de A^{-1}: $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{6}\neq 0\Rightarrow A^{-1}$ es invertible.

$$\text{Adj}\left(A^{-1}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix} \text{ y } \left(A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{\left|A^{-1}\right|}\left(\text{Adj}\left(A^{-1}\right)\right)^t=\frac{1}{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=A$$

b) Queda comprobado en el apartado anterior.

c) $$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow \text{Adj}\left(\text{Adj}(A)\right)=\begin{pmatrix}12 & 6 & -6\\ 6 & 18 & 0\\ 0 & -6 & 6\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=|A|\cdot A$$

78. Determina para qué valores del parámetro *a* no tiene inversa cada una de las matrices siguientes.

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -a\\ 0 & a & -2\end{pmatrix}\quad N=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}a-1 & 2 & a-1\\ 0 & a+1 & -1-a\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\quad Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a^2 & a^2\\ a & a & a^2\end{pmatrix}$$

M no tiene inversa si $|M|=0\Rightarrow -a^2-a+2=0\Rightarrow a=-2, a=1$.

N no tiene inversa si $|N|=0\Rightarrow 0=0$, es decir, para cualquier valor de a N no tiene inversa.

P no tiene inversa si $|P|=0\Rightarrow a^3-3a-2=0\Rightarrow a=-1, a=2$.

Q no tiene inversa si $|Q|=0\Rightarrow a^4-2a^3+a^2=0\Rightarrow a=0, a=1$.

79. Determina para qué valores de los parámetros *a* y *b* tienen inversa las matrices siguientes.

$$A=\begin{pmatrix}a+b & b\\ 2a & a+b\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Las matrices dadas tendrán inversa si su determinante no es nulo, por tanto:

$|A|=(a+b)^2-2ab=a^2+b^2\Rightarrow A$ tiene inversa si $a\neq 0$ o $b\neq 0$.

$|B|=0\Rightarrow B$ no tiene inversa para ningún valor de a y b.

$|C|=1\Rightarrow C$ tiene inversa para cualquier valor de a y b.

80. Determina para qué valores de los parámetros *a*, *b* y *c* ninguna de las tres matrices siguientes tiene inversa:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\a&b&c\\4&4&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&c\\3&1&a\\1&1&5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&-1&2\\b&0&2\end{pmatrix}$$

donde *a*, *b* y *c* son parámetros reales.

Para que las matrices dadas no tengan inversa, sus determinantes deben ser nulos, es decir:

$$\begin{cases}|A|=0\\|B|=0\\|C|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2b+4c=0\\a+2c-5=0\\-4a+7b-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2c\\a+2c=5\\-4a+7b=2\end{cases}\Rightarrow a=3, b=2, c=1$$

81. **a)** Demuestra que la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&a&b-1\\1&a&-1\end{pmatrix}$ tiene inversa si, y solo si, los parámetros *a* y *b* no son nulos.

b) Calcula A^{-1} cuando $a=b=1$.

a) A tiene inversa $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow -ab\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$ y $b\neq 0$.

b) si $a=b=1$ tenemos $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$ y $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

Ecuaciones matriciales

82. Resuelve la ecuación matricial $AX+B=C$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}4&1\\-1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\-2&-1&1&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&-1&2&1\\1&0&-3&0\end{pmatrix}$$

$$AX+B=C\Rightarrow AX=C-B\underset{\text{Si existe }A^{-1}}{\Rightarrow}X=A^{-1}(C-B)$$

Como $|A|=1\neq 0$ existe A^{-1}:

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&4\end{pmatrix}\text{ y }A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}0&-1\\1&4\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=A^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-3&2&2\\3&1&-4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1&4&1\\11&1&-14&-2\end{pmatrix}$

83. Calcula la matriz *X* que verifica la ecuación $AX+B=I$, donde *I* representa la matriz identidad y las matrices *A* y *B* son:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&-1\\-2&1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&3&-2\\-3&6&6\end{pmatrix}$$

$$AX+B=I\Rightarrow AX=I-B\underset{\text{Si existe }A^{-1}}{\Rightarrow}X=A^{-1}(I-B)$$

Como $|A|=-1\neq 0$ existe A^{-1}:

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-3&-4&-2\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\text{ y }A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&-3&-1\\1&-4&-2\\1&-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&1\\-1&4&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=A^{-1}(I-B)=\begin{pmatrix}-1&3&1\\-1&4&2\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&2\\3&-6&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-13&0\\9&-21&-3\\4&-11&-2\end{pmatrix}$

84. **Calcula la matriz cuadrada *X* sabiendo que verifica $XA+BA=A^2$, siendo *A* y *B*:**

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$$

$$XA+BA=A^2 \Rightarrow XA=A^2-BA \underset{\text{Si existe } A^{-1}}{\Rightarrow} X=(A^2-BA)A^{-1}=(A-B)AA^{-1}=A-B$$

Como $|A|=1\neq 0$ existe A^{-1} y, por tanto, $X=A-B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

85. **Halla, si existe, una matriz *X* que verifique la ecuación $B^2X-BX+X=B$ siendo $B=\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\end{pmatrix}$.**

$$B^2X-BX+X=B \Rightarrow (B^2-B+I)X=B \underset{\text{Si existe } (B^2-B+I)^{-1}}{\Rightarrow} X=(B^2-B+I)^{-1}B$$

Tenemos $B^2=\begin{pmatrix}4&-5\\0&9\end{pmatrix}$ y $B^2-B+I=\begin{pmatrix}3&-4\\0&7\end{pmatrix}$, como $|B^2-B+I|=21\neq 0$ existe $(B^2-B+I)^{-1}$:

$$\text{Adj}(B^2-B+I)=\begin{pmatrix}7&0\\4&3\end{pmatrix} \text{ y } (B^2-B+I)^{-1}=\frac{1}{|B^2-B+I|}\left(\text{Adj}(B^2-B+I)\right)^t=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}7&4\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{21}\\0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=(B^2-B+I)^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{21}\\0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{5}{21}\\0&\frac{3}{7}\end{pmatrix}$.

86. **Dadas las matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\2&-3&1\\1&2&-3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación: $I-XA=3X+B$.

$$I-XA=3X+B \Rightarrow -XA-3X=B-I \Rightarrow X(-A-3I)=B-I \underset{\text{Si existe } (-A-3I)^{-1}}{\Rightarrow} X=(B-I)(-A-3I)^{-1}$$

Como $|-A-3I|=\begin{vmatrix}-1&1&-1\\-2&0&-1\\-1&-2&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$ existe $(-A-3I)^{-1}$:

$$\text{Adj}(-A-3I)=\begin{pmatrix}-2&1&4\\2&-1&-3\\-1&1&2\end{pmatrix} \text{ y } (-A-3I)^{-1}=\frac{1}{|-A-3I|}\left(\text{Adj}(-A-3I)\right)^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-2&2&-1\\1&-1&1\\4&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&1\\-1&1&-1\\-4&3&-2\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=(B-I)(-A-3I)^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&1\\-1&1&-1\\-4&3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\4&-4&2\\2&-2&1\end{pmatrix}$.

87. **Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ encuentra la matriz X tal que $AXB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.**

Si existen las inversas de las matrices A y B, tendremos $AXB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow X=A^{-1}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}B^{-1}$.

Como $|A|=1\neq 0$ existe A^{-1}: $\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(\text{Adj}(A)\right)^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Como $|B|=-1\neq 0$ existe B^{-1}: $\text{Adj}(B)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\left(\text{Adj}(B)\right)^t=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

Por tanto, $X=A^{-1}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

88. **Halla todas las matrices X tales que $X\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}X$.**

La matriz X debe ser de orden 2, pongamos $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, entonces:

$$X\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}X\Rightarrow\begin{pmatrix}a+b & a+b\\ c+d & c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ a+c & b+d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=a+c\\ a+b=b+d\\ c+d=a+c\\ c+d=b+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=c\\ a=d\end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación matricial son de la forma $X=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ con $a, b\in\mathbb{R}$.

89. **Resuelve la ecuación matricial $B(2A+I)=AXA+B$, siendo:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$B(2A+I)=AXA+B\Rightarrow AXA=B(2A+I)-B=2BA+B-B=2BA\underset{\text{Si existe }A^{-1}}{\Rightarrow}X=A^{-1}(2BA)A^{-1}=2A^{-1}B$

Como $|A|=1\neq 0$ existe A^{-1}:

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\text{ y }A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\text{Adj}(A)\right)^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=2A^{-1}B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

90. **a)** Despeja la matriz X en la ecuación $(X+M)^2-XM=I+X^2$ en la que M es una matriz regular de orden 3 e I es la identidad del mismo orden.

b) Resuelve la ecuación cuando la matriz M es:

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) $(X+M)^2-XM=I+X^2\Rightarrow X^2+XM+MX+M^2-XM=I+X^2\Rightarrow MX=I-M^2\Rightarrow X=M^{-1}(I-M^2)=M^{-1}-M$

b) Como $|M|=-1\neq 0$ existe M^{-1}:

$$\text{Adj}(M)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\text{ y }M^{-1}=\frac{1}{|M|}\left(\text{Adj}(M)\right)^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=M^{-1}-M=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

91. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **encuentra la matriz *X* que verifica** $A^{-1}XA=B-A$ **.**

$A^{-1}XA=B-A\Rightarrow X=A(B-A)A^{-1}$

Como $|A|=-10\neq 0$ existe A^{-1}:

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -6 & 2 & -6 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=A(B-A)A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ 10 & -3 & -8 \\ 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{21}{5} \\ \frac{31}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

Síntesis

92. a) Estudia para qué valores de α la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene rango máximo.

b) Siendo A^{-1} la inversa de la matriz *A*, calcula $(A^{-1})^2$ para $\alpha=-1$.

a) La matriz *A* tendrá rango máximo, es decir, rango 3, si su determinante no es nulo.

$$|A|=0\Rightarrow 2\alpha^2+\alpha=0\Rightarrow \alpha=0,\ \alpha=-\frac{1}{2}$$

Por tanto, la matriz *A* tendrá rango máximo si $\alpha\neq 0$ y $\alpha\neq -\frac{1}{2}$.

b) Según el apartado anterior, si $\alpha=-1$ el determinante de *A* no se anula ($|A|=1$) y, por tanto, existe A^{-1}:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \text{Adj}(A)=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $(A^{-1})^2=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

93. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{t} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{t}\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

se pide:

a) Hallar el rango de A en función de t.

b) Calcular t para que $\det(A-tI)=0$.

a) Tenemos $|A|=0 \Rightarrow t^2-9t+14=0 \Rightarrow t=2, t=7$, por tanto:

Si $t\neq 2$ y $t\neq 7$, $\text{rg}(A)=3$

Si $t=2$, $\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}=2$ ya que el menor $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$.

Si $t=7$, $\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 2\\ 3 & -1 & 7\end{pmatrix}=2$ ya que el menor $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 7\end{vmatrix}=7\neq 0$.

b) $|A-tI|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-t & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2t+14=0 \Rightarrow t=7$

94. Dadas las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \boldsymbol{k} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{k}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$**.**

a) Determina para qué valores de k las matrices AB y BA tienen inversa.

b) Resuelve la ecuación $ABX=3I$ para $k=0$, donde $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Tenemos:

$|AB|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}k+6 & 2k+4\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -3k-2=0 \Rightarrow k=-\dfrac{2}{3}$

Por tanto, AB tiene inversa si $k\neq -\dfrac{2}{3}$.

$|BA|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}0 & -k & k\\ 1 & k-1 & 3\\ 3 & 3k-2 & 8\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$No depende de k.

Por tanto, BA no tiene inversa.

b) Según el apartado anterior, si $k=0$, $AB=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ tiene inversa ($|AB|=-2$):

$$\text{Adj}(AB)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 6\end{pmatrix} \text{ y } (AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}(\text{Adj}(AB))^t=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}1 & -4\\ -2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

Por tanto, $ABX=3I \Rightarrow X=(AB)^{-1}3I=3(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 6\\ 3 & -9\end{pmatrix}$

95. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-7} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2}-\boldsymbol{a} & \mathbf{3}+\boldsymbol{a} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

a) Estudia el rango de la matriz *B* en función de *a*.

b) Para $a=0$, calcula la matriz *X* que verifica $AX=B$.

a) Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-14\neq 0$ el rango de *B* es al menos 2.

Si los dos menores de orden 3 que se pueden formar ampliando este menor de orden 2 se anulan, el rango de *B* será 2, en caso contrario el rango será 3.

Estudiemos, por tanto, cuando se anulan estos dos menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 2-a & 3+a \end{vmatrix}=0\Rightarrow -40a+40=0\Rightarrow a=1$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -8 \\ 3 & 2-a & 3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -36a+36=0\Rightarrow a=1$$

Por tanto, si $a=1$ tenemos $\text{rg}(B)=2$, y si $a\neq 1$ tenemos $\text{rg}(B)=3$.

b) Si *A* tiene inversa tendremos $X=A^{-1}B$. Como $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4$, existe A^{-1}:

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\text{Adj}(A)\right)^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

96. Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde *B* es una matriz cuadrada de dimensión 2 x 2, se pide:

a) Calcular el valor o valores de *a* para los que esta ecuación tiene solución.

b) Calcular *B* en el caso $a = 1$.

a) Si la matriz $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ tiene inversa, es decir, si su determinante no es nulo, la ecuación tendrá solución. Si la matriz no tiene inversa (su determinante es nulo), la ecuación todavía puede tener solución, por lo que habrá que comprobar este hecho.

Tenemos $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{6}{7}$, por tanto, si $a \neq \frac{6}{7}$ la ecuación tiene solución $B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Analicemos que sucede si $a = \frac{6}{7}$. En este caso no se puede despejar *B*, con lo que pongamos $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, tenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{6}{7}x_1 + 2x_3 & \frac{6}{7}x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 7x_3 & 3x_2 + 7x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{7}x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 7x_3 = 1 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} \frac{6}{7}x_2 + 2x_4 = 1 \\ 3x_2 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

pero ninguno de estos dos sistemas tiene solución, por tanto, si $a = \frac{6}{7}$ la ecuación no tiene solución.

b) Según el apartado anterior, si $a = 1$ la ecuación tiene solución:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

CUESTIONES

97. Si *M* es un matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M| = 7$, razona cuál es el valor de los determinantes $|M^2|$ y $|2M|$.

Usando la propiedad 10 tenemos $|M^2| = |M|^2 = 49$. Usando la propiedad 2, aplicada a cada una de las filas de 2*M*, tenemos $|2M| = 2^2|M| = 28$.

98. Sea *M* una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es $\det(M) = 2$. Calcula:

a) El rango de M^2.

b) El determinante de $2M^t$.

c) El determinante de $(M^{-1})^2$.

d) El determinante de *N*, donde *N* es la matriz resultante de intercambiar la primera y la segunda filas de *M*.

a) Tenemos $|M^2| = |M|^2 = 4 \neq 0$, por lo que el rango de M^2 es 3.

b) Usando la propiedad 2, aplicada a cada una de las filas de $2M^t$, y la propiedad 9, tenemos:

$|2M^t| = 2^3|M^t| = 8|M| = 16$.

c) Usando las propiedades 10 y 11 tenemos $|(M^{-1})^2| = |M^{-1}|^2 = \frac{1}{|M|^2} = \frac{1}{4}$.

d) Usando la propiedad 7 tenemos $|N| = -|M| = -2$.

99. Todos los elementos de la matriz *M* son números naturales, razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El determinante es un número natural.

b) El determinante puede ser fraccionario.

c) El determinante es un número entero.

Si la matriz *M* no es cuadrada no existe su determinante y las tres afirmaciones son falsas.

Si la matriz *M* es cuadrada, como el cálculo del determinante solo involucra sumas, restas y productos de los elementos de *M*, la afirmación c es verdadera.

También la afirmación b es verdadera, ya que todos los números enteros son fraccionarios, pero el determinante nunca podría ser un número fraccionario no entero.

La afirmación a es falsa, como prueba la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es –1.

100. Razona cuál es el valor del determinante de una matriz escalar.

Toda matriz escalar de orden *n* es de la forma λI_n, por tanto, aplicando la propiedad 2 a cada una de las filas de la matriz, obtenemos de su determinante es $|\lambda I_n| = \lambda^n |I_n| = \lambda^n$.

101. En una matriz *D* de dimensión 3 x 4 todos los menores de orden 2 formados con las dos primeras filas son nulos. Razona si son ciertas las afirmaciones siguientes.

a) El rango de *D* no puede ser 2.

b) El rango de *D* no puede ser 3.

c) El rango de *D* no puede ser 4.

Observemos en primer lugar que como *D* tiene 3 filas, su rango no pude ser superior a 3.

Por otro lado, las dos primeras filas de *D* deben ser linealmente dependientes, por lo que el rango tampoco puede ser 3.

Por tanto, las afirmaciones b y c son verdaderas.

La afirmación a es falsa, como prueba la siguiente matriz, cuyo rango es 2 y verifica las condiciones del enunciado:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

102. Se sabe que el determinante del producto de las matrices cuadradas *A* y *B* de orden 3 es $\det(AB) = 2$. Halla el rango de *B*.

Puesto que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, el determinante de *B* no puede ser nulo, con lo que el rango de *B* será 3.

103. Prueba que si *A* es una matriz cuadrada de orden *n* y λ es un número real cualquiera, entonces:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Basta aplicar la propiedad 2 a cada una de las *n* filas de λA para obtener que $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

104. Sea *M* una matriz de dimensión 3 x 4 y de columnas C_1, C_2, C_3 y C_4. Si se sabe que $\det(C_1,C_2,C_3)=0$, $\det(C_2,C_3,C_4)\neq 0$ y $\det(C_1,C_2,C_4)=0$, determina qué columnas son combinación lineal de otras y qué columnas son linealmente independientes. ¿Cuál es el rango de *M*?

Como *M* tiene 3 filas, su rango no puede ser superior a 3, por tanto, al ser $\det(C_2,C_3,C_4)\neq 0$ el rango de *M* es 3 y C_2, C_3 y C_4 son linealmente independientes.

En particular, C_2 y C_3 también son linealmente independientes, por lo que, al ser $\det(C_1,C_2,C_3)=0$ deducimos que C_1 es combinación lineal de C_2 y C_3, pongamos $C_1=\lambda_1C_2+\lambda_2C_3$.

De manera análoga, como $\det(C_1,C_2,C_4)=0$, C_1 es combinación lineal de C_2 y C_4, pongamos $C_1=\alpha_1C_2+\alpha_2C_4$.

Por tanto, obtenemos $\lambda_1C_2+\lambda_2C_3=\alpha_1C_2+\alpha_2C_4$, de donde se deduce que $\lambda_2=0$, ya que en caso contrario podríamos escribir $C_3=\frac{\alpha_1-\lambda_1}{\lambda_2}C_2+\frac{\alpha_2}{\lambda_2}C_4$ como combinación lineal de C_2 y C_4 en contradicción con que $\det(C_2,C_3,C_4)\neq 0$ (de igual manera, tenemos $\alpha_2=0$).

Es decir, hemos obtenido que $C_1=\lambda_1C_2$ es proporcional a C_2.

105. Sea *M* una matriz cuadrada tal que $|M|=-1$ y $|-2M|=8$. Calcula el orden de la matriz *M*.

Si *M* es de orden *n* tenemos $8=|-2M|=(-2)^n|M|=-(-2)^n$, por tanto, $n=3$.

106. ¿Qué condición se debe cumplir para que el determinante de una matriz triangular de orden 3 sea negativo?

El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal, por tanto, para que el determinante sea negativo, exactamente uno o los tres elementos de la diagonal principal deben ser negativos.

107. El determinante de la matriz *M* es 5. La matriz *N* se construye de modo que su primera columna es la tercera de *M*, su segunda columna es la primera de *M* y su tercera columna es la segunda de *M*. Halla el valor del determinante de *N*.

Sea N' la matriz que se obtiene intercambiando la primera y la segunda columna de *M*, con lo que $|N'|=-|M|$.

N se obtiene intercambiando la primera y la tercera columna de N', con lo que $|N|=-|N'|=|M|$.

108. Prueba que si *A* y *B* son matrices cuadradas de orden 2, el determinante de su producto es el producto de sus determinantes, es decir $|AB|=|A||B|$.

Sean $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, tenemos

$$|A||B|=(a_1a_4-a_2a_3)(b_1b_4-b_2b_3)=a_1a_4b_1b_4-a_1a_4b_2b_3-a_2a_3b_1b_4+a_2a_3b_2b_3$$

$$|AB|=\begin{vmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{vmatrix}=(a_1b_1+a_2b_3)(a_3b_2+a_4b_4)-(a_1b_2+a_2b_4)(a_3b_1+a_4b_3)=\cancel{a_1a_3b_1b_2}+a_1a_4b_1b_4+a_2a_3b_2b_3+$$

$$+\cancel{a_2a_4b_3b_4}-\cancel{a_1a_3b_1b_2}-a_1a_4b_2b_3-a_2a_3b_1b_4-\cancel{a_2a_4b_3b_4}=a_1a_4b_1b_4-a_1a_4b_2b_3+a_2a_3b_2b_3-a_2a_3b_1b_4$$

Por tanto, obtenemos que $|AB|=|A||B|$.

109. Una matriz A es idempotente si verifica que $A^2 = A$. Determina qué valor puede tomar el determinante de una matriz idempotente.

Observemos que si $A^2 = A$, la matriz A debe ser cuadrada y $|A^2| = |A|$, es decir, $|A|^2 = |A|$, por lo que $|A| = 0$ o $|A| = 1$.

PROBLEMAS

110. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$.

a) Sin utilizar la regla de Sarrus, calcula el determinante de A.

b) Estudia el rango de A en el caso $b = -a$.

a) $|A| = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & a^2 & a^2 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 2}}{=} a^2 \begin{vmatrix} a & b & b \\ ab & a^2 & b^2 \\ b & a & a \end{vmatrix} \underset{C_3 \to C_3 - C_2}{=} a^2 \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ ab & a^2 & b^2 - a^2 \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por} \\ \text{la tercera columna}}}{=} a^2 (b^2 - a^2)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} =$

$= -a^2 (b^2 - a^2)(a^2 - b^2) = a^2 (a^2 - b^2)^2$

b) Si $b = -a$ tenemos $A = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$, por tanto, todas las filas son proporcionales, con lo que el rango de A es 1 si $a \neq 0$ y 0 si $a = 0$.

111. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$.

a) ¿Cuándo el determinante de A es el seno de un número real?

b) Calcula la inversa de A, cuando exista.

c) Determina todos los pares (a, b) para los que A coincide con su inversa.

a) El determinante de A será el seno de un número real si $-1 \leq |A| \leq 1$, es decir, $-1 \leq b \leq 1$.

b) Existe A^{-1} si $|A| \neq 0$, es decir, si $b \neq 0$. En este caso tenemos:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{b} & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

c) $A = A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{b} & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{a}{b} \\ b = \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(b+1) = 0 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ o } b = -1 \\ b = 1 \text{ o } b = -1 \end{cases}$

Por tanto, A coincide con su inversa si $(a, b) = (0, 1)$ o $(a, b) = (a, -1)$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

112. **Sea *A* una matriz cuadrada de orden 3.**

a) Se sabe que el determinante de la matriz 2*A* es $|2A| = 8$. ¿Cuánto vale el determinante de *A?* Razona la respuesta indicando las propiedades que has utilizado.

b) Calcula para qué valores de *x* se cumple que $|2A| = 8$, siendo *A* la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$$

a) Usando la propiedad 2 aplicada a cada una de las filas de *A* tenemos $|2A| = 2^3|A| = 8|A|$, por tanto, $|A| = 1$.

b) Según el apartado anterior tenemos:

$$|2A| = 8 \Rightarrow |A| = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

113. **Sea** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$**.**

a) Calcula las matrices que verifican la relación $|A| = |A + I|$. (*I* es la matriz identidad y $|A|$ representa el determinante de *A*).

b) Calcula todas las matrices diagonales, que no poseen inversa, y que verifican la relación anterior.

c) ¿Se verifica para cualquier par de matrices *B* y *C* la relación $|B + C| = |B| + |C|$? Si no es cierto pon un contraejemplo.

Justifica todas las respuestas.

a) Tenemos:

$$|A| = |A + I| \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} \Rightarrow ad - bc = (a+1)(d+1) - bc \Rightarrow ad = ad + a + d + 1 \Rightarrow a + d + 1 = 0$$

Por tanto, las matrices que verifican $|A| = |A + I|$ son de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -1-a \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) Ya sabemos que la matriz debe ser de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -1-a \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, además, para que sea diagonal debe ser $b = c = 0$, y para que no tenga inversa debe ser $|A| = 0 \Rightarrow a(-1-a) = 0 \Rightarrow a = 0$ o $a = -1$.

Por tanto, las matrices que cumplen las condiciones son $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) La relación $|B + C| = |B| + |C|$ no se verifica para todas las matrices, por ejemplo, las matrices del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -1-a \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

no verifican $|A + I| = |A| + |I|$, ya que según el apartado a, $|A + I| = |A|$, pero $|A| + |I| = |A| + 1$.

114. a) Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$ donde a, b, c son números reales, calcula los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

b) Razona que, puesto que $|A| = 2$, los parámetros a, b y c deben ser distintos entre sí.

a) $$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 2}}{=} 5\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Propiedad 8} \\ F_1 \to F_1+F_3 \\ F_2 \to F_2+F_3}}{=} 5\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=} -5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=}$$

$$= 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 10$$

b) $$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & b^2+2b+1 & c^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 1}}{=} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

PROFUNDIZACIÓN

115. Dada una matriz cuadrada *A* de orden *n*, se llama polinomio característico de *A* al polinomio $p(x)=|A-xI_n|$

a) Halla las raíces del polinomio característico de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

b) Si *A* es la matriz $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$:

i) Comprueba que su polinomio característico es:

$$p(x)=x^2-(a+d)x+|A|$$

ii) Encuentra los valores de *a*, *b*, *c* y *d* para que *A* tenga como polinomio característico $p(x)=x^2+x+1$. ¿Cuántas matrices hay con el mismo polinomio característico?

iii) Si *A* tiene inversa, demuestra que el polinomio característico de la inversa, A^{-1}, es $p(x)=x^2-\dfrac{a+d}{|A|}x+\dfrac{1}{|A|}$.

a) El polinomio característico de *A* es:

$$p(x)=|A-xI_3|=\begin{vmatrix}3-x & 2 & -1\\ -1 & 4-x & 1\\ 0 & 4 & 2-x\end{vmatrix}=-x^3+9x^2-24x+20=-(x-5)(x-2)^2$$

cuyas raíces son $x=2$ (raíz doble) y $x=5$.

b)

i) El polinomio característico de *A* es:

$$p(x)=|A-xI_2|=\begin{vmatrix}a-x & b\\ c & d-x\end{vmatrix}=(a-x)(d-x)-bc=x^2-(a+d)x+(ad-bc)=x^2-(a+d)x+|A|$$

ii) Tenemos:

$$\begin{cases}a+d=-1\\ |A|=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+d=-1\\ ad-bc=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-a-1\\ ad-bc=1\end{cases}$$

Sustituyendo el valor de *d* en la segunda ecuación obtenemos $bc=ad-1=a(-a-1)-1=-(a^2+a+1)$.

Como a^2+a+1 no se anula nunca, deducimos que *b* y *c* no pueden ser nulos y, por tanto, las soluciones del sistema no lineal son

$$a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R},\ c=-\frac{a^2+a+1}{b}\ \text{y}\ d=-a-1$$

En particular, obtenemos que existen infinitas matrices con el mismo polinomio característico.

iii) Si *A* es invertible será:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}(A))^t=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\dfrac{d}{|A|} & -\dfrac{b}{|A|}\\ -\dfrac{c}{|A|} & \dfrac{a}{|A|}\end{pmatrix}$$

Por tanto, según el aparatado a, el polinomio característico de A^{-1} es:

$$p(x)=x^2-\left(\frac{d}{|A|}+\frac{a}{|A|}\right)x+|A^{-1}|=x^2-\frac{a+d}{|A|}x+\frac{1}{|A|}$$

116. Se consideran las matrices de orden *n* de la forma:

$$\boldsymbol{A_n}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1}\\ -\mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1}\\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{4} & \cdots & \mathbf{1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & \cdots & \mathbf{4}\end{pmatrix}$$

a) Calcula $\det(A_2)$, $\det(A_3)$ y $\det(A_4)$.

b) Formula una hipótesis razonada sobre el valor de $\det(A_n)$.

c) Formula una hipótesis razonada sobre el valor del determinante de la matriz similar a A_n en cuya diagonal principal los elementos distintos del primero valen 7.

a) $\det(A_2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5$ y $\det(A_3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ -1 & -1 & 4\end{vmatrix}\underset{F_3\to F_3+F_1}{=}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}\underset{\substack{\text{Desarrollando por}\\ \text{la última fila}}}{=}5(-1)^{3+3}\det(A_2)=25=5^2$.

$$\det(A_4)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 4 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 4 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 4\end{vmatrix}\underset{F_3\to F_3+F_1}{=}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 4 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix}\underset{\substack{\text{Desarrollando por}\\ \text{la última fila}}}{=}5(-1)^{4+4}\det(A_3)=125=5^3.$$

b) $\det(A_n)=5^{n-1}$, se podría demostrar por inducción usando la técnica anterior.

c) En este caso $\det(A_n)=8^{n-1}$, se podría demostrar por inducción de manera completamente análoga a como se demostraría la expresión anterior.

117. Dada la matriz $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1+\cos\alpha} & \mathbf{1-\operatorname{sen}\alpha}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1+\operatorname{sen}\alpha} & \mathbf{1+\cos\alpha}\end{pmatrix}$**:**

a) Determina para qué valores de α la matriz *M* tiene inversa.

b) Halla la matriz inversa de *M*, cuando exista.

a) *M* tiene inversa si su determinante no es nulo. Tenemos:

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\cos\alpha & 1-\operatorname{sen}\alpha\\ 1 & 1+\operatorname{sen}\alpha & 1+\cos\alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

Por tanto, la matriz *M* tiene inversa para cualquier valor de α.

b) Según el apartado anterior la matriz *M* tiene inversa para cualquier valor de α. Tenemos:

$$\operatorname{Adj}(M)=\begin{pmatrix}1+2\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}(\operatorname{Adj}(M))^t=\begin{pmatrix}1+2\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

118. **Sean las matrices** $A=\begin{pmatrix}\cos a & \operatorname{sen} a\\ -\operatorname{sen} a & \cos a\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}\cos a & 0 & \operatorname{sen} a\\ 0 & b & 0\\ -\operatorname{sen} a & 0 & \cos a\end{pmatrix}$**, estudia qué valores de** a **y** b **hacen que sea cierta la igualdad:**

$$(\det(A))^2-2\det(A)\det(B)+1=0$$

Tenemos $\det(A)=\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1$ y $\det(B)=b\operatorname{sen}^2 a+b\cos^2 a=b\left(\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a\right)=b$, por tanto:

$$(\det(A))^2-2\det(A)\det(B)+1=0\Rightarrow 1-2b+1=0\Rightarrow b=1$$

Así, obtenemos $a\in\mathbb{R},\ b=1$.

119. **Resuelve la ecuación** $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 6 & x & x+1\\ 6 & x+4 & x & x+1\\ x+5 & x+4 & x & x+1\end{vmatrix}=0$.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 6 & x & x+1\\ 6 & x+4 & x & x+1\\ x+5 & x+4 & x & x+1\end{vmatrix}\underset{F_4\to F_4-F_3}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 6 & x & x+1\\ 6 & x+4 & x & x+1\\ x-1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\underset{\substack{\text{Desarrollando por}\\ \text{la última fila}}}{=}(x-1)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & x & x+1\\ x+4 & x & x+1\end{vmatrix}\underset{F_3\to F_3-F_2}{=}$$

$$=-(x-1)\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & x & x+1\\ x-2 & 0 & 0\end{vmatrix}\underset{\substack{\text{Desarrollando por}\\ \text{la última fila}}}{=}-(x-1)(x-2)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & 4\\ x & x+1\end{vmatrix}=-(x-1)(x-2)(3x+3-4x)=$$

$$=(x-1)(x-2)(x-3)$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x=1$, $x=2$ y $x=3$.

120. **Averigua, según el valor de** a**, el número de soluciones de** $\begin{vmatrix}x^2 & a & a & a\\ a & x^2 & a & a\\ a & a & x^2 & a\\ a & a & a & x^2\end{vmatrix}=0$.

$$\begin{vmatrix}x^2 & a & a & a\\ a & x^2 & a & a\\ a & a & x^2 & a\\ a & a & a & x^2\end{vmatrix}\underset{F_1\to F_1+F_2+F_3+F_4}{=}\begin{vmatrix}x^2+3a & x^2+3a & x^2+3a & x^2+3a\\ a & x^2 & a & a\\ a & a & x^2 & a\\ a & a & a & x^2\end{vmatrix}\underset{\text{Propiedad 2}}{=}\left(x^2+3a\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & x^2 & a & a\\ a & a & x^2 & a\\ a & a & a & x^2\end{vmatrix}\underset{\substack{C_2\to C_2-C_1\\ C_3\to C_3-C_1\\ C_4\to C_4-C_1}}{=}$$

$$=\left(x^2+3a\right)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a & x^2-a & 0 & 0\\ a & 0 & x^2-a & 0\\ a & 0 & 0 & x^2-a\end{vmatrix}=\left(x^2+3a\right)\left(x^2-a\right)^3\text{, por tanto,}$$

si $a>0$ la ecuación tiene dos soluciones (triples), $x=-\sqrt{a}$ y $x=\sqrt{a}$.

si $a<0$ la ecuación tiene dos soluciones, $x=-\sqrt{3a}$ y $x=\sqrt{3a}$.

si $a=0$ la ecuación tiene una solución (con multiplicidad 8), $x=0$.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & a & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ a & 2 \end{pmatrix}$**:**

Halla el valor de *a* que hace que $|AB| = 2$**.**

$$|AB| = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2a-2 & 3 \\ 2 & 2a-4 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow (2a-2)(2a-4) - 6 = 2 \Rightarrow 4a^2 - 12a = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 3\ .$$

2. **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ b & 1 & 3 \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$**, calcula el valor de los siguientes determinantes.**

a) $\begin{vmatrix} 0 & a & a-6 \\ 2 & b & b-6 \\ 4 & c & c-6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2a & 2b-1 & 2c-2 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 0 & a & a-6 \\ 2 & b & b-6 \\ 4 & c & c-6 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 2 & b & b \\ 4 & c & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a & 6 \\ 2 & b & 6 \\ 4 & c & 6 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 4}}{=} -\begin{vmatrix} 0 & a & 6 \\ 2 & b & 6 \\ 4 & c & 6 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 2}}{=} -4\begin{vmatrix} 0 & a & 3 \\ 1 & b & 3 \\ 2 & c & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=} 4\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ b & 1 & 3 \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2a & 2b-1 & 2c-2 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 2}}{=} \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 9}}{=}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 3 & 0 & a \\ 3 & 1 & b \\ 3 & 2 & c \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad 7}}{=} -\frac{2}{3}\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ b & 1 & 3 \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}\cdot 3 = -2$$

3. **Determina para qué valores del parámetro *k* tiene inversa la matriz y halla su inversa cuando** $k = 2$**.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & -1 \\ 1 & 3 & 1-k \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A tiene inversa si su determinante no es nulo.

Tenemos:

$$|A| = 0 \Rightarrow -(k-1)(1-k) - 1 - 3 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow k = -1,\ k = 3$$

Por tanto, *A* tiene inversa si $k \neq -1$ y $k \neq 3$.

En particular, para $k = 2$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = -3$ y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4. Halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & m & m+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$ para los distintos valores posibles del parámetro *m*.

Tenemos:

$$|A| = 0 \Rightarrow 3m + 2m + 3(m+1) - 2(m+1) - 9 - m^2 = 0 \Rightarrow -m^2 + 6m - 8 = 0 \Rightarrow m = 2,\ m = 4$$

Por tanto:

si $m \neq 2$ y $m \neq 4$ tenemos $\text{rg}(A) = 3$.

si $m = 2$ tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

si $m = 4$ tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

5. Dada la ecuación matricial $XA - 2B^t = -2X$.

a) Despeja la matriz *X*, cuando sea posible.

b) Halla la matriz *X* si las matrices *A* y *B* son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $XA - 2B^t = -2X \Rightarrow XA + 2X = 2B^t \Rightarrow X(A + 2I) = 2B^t$

Por tanto, si $A + 2I$ es invertible, tendremos $X = 2B^t(A + 2I)^{-1}$.

b) $A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $|A + 2I| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, por lo que $A + 2I$ tiene inversa:

$$\text{Adj}(A + 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } (A + 2I)^{-1} = \frac{1}{|A + 2I|}\left(\text{Adj}(A + 2I)\right)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, según el apartado anterior:

$$X = 2B^t(A + 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. **Calcula el valor del determinante** $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2-F_1\\F_3\to F_3-F_1\\F_4\to F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & c-1 & 0 \\ 0 & b-1 & c-1 & d-1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Desarrollando por}\\\text{la primera columna}}}{=} a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b-1 & 0 & 0 \\ b-1 & c-1 & 0 \\ b-1 & c-1 & d-1 \end{vmatrix} = a(b-1)(c-1)(d-1)$$

7. ***A* y *B* son dos matrices cuadradas de orden 4 cuyos determinantes son: $\det(A)=5$, $\det(B)=2$. Halla:**

a) $\det(A^{-1})$ **b)** $\det(4A)$ **c)** $\det(B^5A)$ **d)** $\det\left((AB)^t\right)$

a) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \dfrac{1}{5}$

b) $\det(4A) = 4^4\det(A) = 1280$

c) $\det(B^5A) = \det(B^5)\det(A) = (\det(B))^5\det(A) = 160$

d) $\det\left((AB)^t\right) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = 10$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. ***A* es una matriz triangular cuyos elementos son números naturales y cuyo determinante es 15.**

A. Algún elemento de *A* vale 3.

B. Algún elemento de *A* vale 1.

C. *A* tiene exactamente tres elementos nulos.

D. A puede tener siete elementos nulos.

A y C son falsas, basta considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

B también es falsa, basta considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

La respuesta correcta es D, basta considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. **El determinante de la matriz *B* es $\det(B)=1$.**

A. *B* es la matriz identidad.

B. *B* coincide con su inversa.

C. $\det(B^2)=1$

D. $\det(B-I)=0$

La respuesta correcta es C, ya que $\det(B^2) = (\det(B))^2 = 1$.

El resto de respuestas son falsas, basta considerar la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con $\det(B)=1$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\det(B-I) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

3. **En la matriz *A*, cuadrada de orden 3, se sabe que: $a_{21} = 0$, $a_{23} = 1$, $A_{22} = 0$ y $A_{23} = m$.**

A. $\det(A) = 0$

B. $\det(A) = m$

C. Las filas 2 y 3 son linealmente independientes.

D. No hay información suficiente para saber el valor de $\det(A)$.

La respuesta correcta es B, desarrollando por la segunda fila de *B* tenemos

$$\det(A) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 0 \cdot A_{21} + a_{22} \cdot 0 + 1 \cdot m = m$$

D obviamente es falsa.

A solo es cierta si $m = 0$.

C es verdadera si $m \neq 0$ (las tres filas serán linealmente independientes), pero puede ser verdadera, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, o falsa, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, si $m = 0$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **En la matriz adjunta de la matriz cuadrada *A*, de orden 3, todos los elementos de la última fila son nulos. Entonces:**

A. $\text{rg}(A) < 3$

B. Una de las dos primeras filas está formada por ceros.

C. La última fila de *A* es combinación lineal de las dos primeras.

D. La matriz *A* no tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Si $A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0 \Rightarrow$ las dos primeras filas de *A* son dependientes la una de la otra, luego $\text{rg}(A) < 3$.

A y D son verdaderas.

5. **El determinante de una matriz cuadrada de orden 4 es un número múltiplo de 3, entonces:**

A. Todos sus elementos son múltiplos de 3.

B. Hay una fila en la que todos los elementos son múltiplos de 3.

C. El rango de la matriz es 3.

D. La matriz tiene inversa.

A, B y C son falsas, basta considerar la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante 3, por tanto, de rango 4.

D también es falsa salvo que añadamos que el determinante de la matriz es un múltiplo de 3 no nulo, en cuyo caso D sería correcta.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Se tiene una matriz de orden 5 de la que se consideran las afirmaciones:

1. Todos los menores de orden 4 son nulos.

2. $\text{rg}(A) < 4$

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

Recordemos que si todos los menores de orden *p* de una matriz son nulos, el rango de la matriz es menor que *p*, por tanto $1 \Rightarrow 2$.

Recíprocamente, si $\text{rg}(A) < 4$ no podemos encontrar ningún menor de orden 4 no nulo, ya que en este caso tendríamos $\text{rg}(A) \geq 4$, por tanto, también $2 \Rightarrow 1$.

Es decir, la relación correcta es C.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se quiere calcular el determinante de una matriz y para ello se tienen los siguientes datos:

1. Es una matriz triangular.

2. Todos los elementos de la última columna son nulos.

3. Hay un menor de orden 2 distinto de cero.

A. El dato 1 es innecesario.

B. El dato 2 es innecesario.

C. El dato 3 es innecesario.

D. Basta con dos datos cualesquiera de los tres.

Con solo el dato 2 podemos saber que el determinante de la matriz debe ser nulo.

No nos basta con el dato 1 y 3, por ejemplo, las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifican 1 y 3 pero sus determinantes no coinciden.

Por tanto, las respuestas correctas son A y C.