1 Sucesiones

Página 61

1. Añade los tres términos siguientes en cada una de estas sucesiones:

a) 10, 15, 20, 25, 30, …

b) 80, 70, 60, 50, 40, …

c) 3, 6, 12, 24, 48, …

d) 1, 3, 4, 6, 7, …

e) 2, 5, 7, 12, 19, …

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, …

a) 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45

b) 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384

d) 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12

e) 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, 9, 8, 10

2. Describe el criterio con el que se ha formado cada una de las seis sucesiones del ejercicio anterior.

a) 10, 15, 20, 25, 30, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 10 y sumando 5 a cada termino para obtener el siguiente.

b) 80, 70, 60, 50, 40, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 80 y restando 10 a cada término para obtener el siguiente.

c) 3, 6, 12, 24, 48, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 3 y multiplicando por 2 cada término para obtener el siguiente.

d) 1, 3, 4, 6, 7, …

Esta sucesión se ha construido empezando por 1 y alternando la suma de 2 y 1 a cada término para obtener el siguiente.

e) 2, 5, 7, 12, 19, …

Los dos primeros términos son 2 y 5 y, a partir de ahí, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

f) 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, …

El primer término de la sucesión es 4 y se construye alternando la suma de 2 y la resta de 1 a cada término para obtener el siguiente.

3. Forma seis sucesiones que empiecen por 6 y que se construyan con los mismos criterios que las del ejercicio 1.

a) 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, …

b) 6, –4, –14, –24, –34, –44, …

c) 6, 12, 24, 48, 96, 192, …

d) 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, …

e) 6, 5, 11, 16, 27, 43, …

f) 6, 8, 7, 9, 8, 10, 9, …

4. Añade a esta sucesión los cuatro términos siguientes, y describe el criterio con el que se ha formado:

10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, …

Los cuatro términos siguientes → 22, 23, 25, 26

El primer término de la sucesión es el 10 y se ha formado alternando la suma de 2 y 1 a cada término para obtener así el siguiente.

Página 62

5. Asocia cada sucesión con su término general, y exprésalo como en el ejemplo:

- **k) 4, 9, 14, 19, 24, … → $k_n = 5n - 1$**

a) 7, 8, 9, 10, 11, …

b) –2, –1, 0, 1, 2, …

c) 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; …

d) 0, 2, 4, 6, 8, …

e) 3, 6, 9, 12, …

f) 4, 7, 10, 13, …

g) 0, 3, 8, 15, 24, …

$n^2 - 1$
$n : 2$
$3n + 1$
$n - 3$
$2(n - 1)$
$3n$
$n + 6$

a) 7, 8, 9, 10, 11, … → $a_n = n + 6$

b) –2, –1, 0, 1, 2, … → $b_n = n - 3$

c) 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; … → $c_n = n : 2$

d) 0, 2, 4, 6, 8, … → $d_n = 2(n - 1)$

e) 3, 6, 9, 12, … → $e_n = 3n$

f) 4, 7, 10, 13, … → $f_n = 3n + 1$

g) 0, 3, 8, 15, 24, … → $g_n = n^2 - 1$

6. Halla el término general de cada una de estas sucesiones:

a) 2, 3, 4, 5, 6, …

b) 0, 1, 2, 3, 4, …

c) 4, 8, 12, 16, 20, …

d) 4, 7, 10, 13, 16, …

e) 10, 20, 30, 40, 50, …

f) 12, 22, 32, 42, 52, …

g) 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, …

h) 11, 102, 1 003, 10 004, 100 005, …

a) 2, 3, 4, 5, 6, … → $a_n = n + 1$

b) 0, 1, 2, 3, 4, … → $b_n = n - 1$

c) 4, 8, 12, 16, 20, … → $c_n = 4n$

d) 4, 7, 10, 13, 16, … → $d_n = 3n + 1$

e) 10, 20, 30, 40, 50, … → $e_n = 10n$

f) 12, 22, 32, 42, 52, … → $f_n = 10n + 2$

g) 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, … → $g_n = 10^n$

h) 11, 102, 1 003, 10 004, 100 005, … → $h_n = 10^n + n$

2 Sucesiones definidas de forma recurrente

Página 63

1. Para construir estas sucesiones, se han utilizado, no consecutivamente, los criterios que ves a su lado:

a) 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, …	**— Añadir sucesivamente 1, 2, 3, 4, …**
b) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, …	**— Sumar los dos términos anteriores.**
c) 10, 2, 8, –6, 14, –20, 34, …	**— Sumar los tres términos anteriores.**
d) 10; 2; 6; 4; 5; 4,5; 4,75; …	**— Restar los dos términos anteriores.**
e) 4, 2, 5, 11, 18, 34, 63, …	**— Promediar los dos términos anteriores.**

Identifica cuál corresponde a cada una y continúalas hasta el término s_{10}.

a) Sumar los dos términos anteriores → 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123

b) Añadir sucesivamente 1, 2, 3, 4, … → 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46

c) Restar los dos términos anteriores → 10, 2, 8, –6, 14, –20, 34, –54, 88, –142

d) Promediar los dos términos anteriores → 10; 2; 6; 4; 5; 4,5; 4,75; 4,625; 4,6875; 4,65625

e) Sumar los tres términos anteriores → 4, 2, 5, 11, 18, 34, 63, 115, 212, 390

2. Asocia cada sucesión con una de las igualdades que ves a la derecha, y describe verbalmente el criterio con el que se han construido:

a) 40, 39, 37, 34, 30, …

b) 1, 3, 5, 11, 21, 43, …

c) 1, 1, 0, 1, –1, 2, –3, …

$a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$
$a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$
$a_{n+1} = a_n - n$

a) 40, 39, 37, 34, 30, … → $a_{n+1} = a_n - n$

a_{n+1} es el término anterior menos la posición que ocupa este último.

b) 1, 3, 5, 11, 21, 43, … → $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$

a_{n+2} es el doble del término que ocupa dos lugares menos más el término anterior.

c) 1, 1, 0, 1, –1, 2, –3, … → $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$

a_{n+2} es el término que ocupa dos lugares menos, menos el término anterior.

3. Observa esta sucesión y calcula los tres términos siguientes:

$$1 \xrightarrow{+2\cdot 1} 3 \xrightarrow{+2\cdot 2} 7 \xrightarrow{+2\cdot 3} 13 \xrightarrow{+2\cdot 4} 21 \quad \ldots$$

Escribe una igualdad que exprese la relación entre dos términos consecutivos, a_n y a_{n+1}.

Los tres términos siguientes son 31, 43, 57.

La relación entre dos términos consecutivos es $a_{n+1} = a_n + 2n$.

3 Progresiones aritméticas

Página 65

1. Escribe los diez primeros términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 8 y cuya diferencia es 7. Calcula su suma.

$a_1 = 8 \qquad d = 7$

8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(8+71) \cdot 10}{2} = 395$$

2. En una progresión aritmética, $a_1 = 10$ y $a_{12} = 54$. Halla:

a) La suma de los doce primeros términos, S_{12}.

b) La diferencia, d, y el término general, a_n.

a) $S_{12} = \dfrac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \dfrac{(10+54) \cdot 12}{2} = 384$

b) $a_{12} = a_1 + (12-1)d \rightarrow 54 = 10 + 11d \rightarrow d = \dfrac{(54-10) \cdot 12}{11} = 4$

$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = 10 + (n-1)4 \rightarrow a_n = 6 + 4n$

3. El término general de una progresión aritmética es $a_n = 10 + 2{,}5n$. Halla a_1, a_{50} y S_{50} (la suma de los 50 primeros términos).

$d = 2{,}5$

$a_1 = 12{,}5$

$a_{50} = 12{,}5 + 2{,}5 \cdot 50 = 135$

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(12{,}5+135) \cdot 50}{2} = 3\,687{,}5$$

4. En una progresión aritmética, $a_1 = 84$ y $a_2 = 79$.

a) Halla d y escribe los ocho primeros términos.

b) Halla el término general.

c) Obtén a_{20} y S_{20}.

a) $d = a_2 - a_1 = 79 - 84 = -5$

Los ocho primeros términos son $\rightarrow$ 84, 79, 74, 69, 64, 59, 54, 49

b) $a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = 84 - 5 \cdot (n-1) = 89 - 5n$

c) $a_{20} = 89 - 5 \cdot 20 = -11$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(84-11) \cdot 20}{2} = 730$$

4 Progresiones geométricas

Página 67

1. Halla los seis primeros términos de las progresiones geométricas definidas así:

a) Primer término: 5 000; razón: 1,2

b) Primer término: 8; razón: 2,5

c) Primer término: 1 000 000; razón: 0,2

d) Primer término: 1; razón: 10

a) 5 000; 6 000; 7 200; 8 640; 10 368; 12 441,6

b) 8; 20; 50; 125; 312,5; 781,25

c) 1 000 000, 200 000, 40 000, 8 000, 1 600, 320

d) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000

2. Considera la progresión 1, 2, 4, 8, 16, …

a) Escribe los cuatro términos siguientes.

b) ¿Cuál es la razón?

c) ¿Qué lugar ocupa el término $2^7 = 128$?

d) Expresa con una potencia de base 2 el término a_{10} de la progresión.

a) Los cuatro términos siguientes son 32, 64, 128, 256.

b) La razón de esta progresión es $r = 2$.

c) $2^7 = 128$ ocupa la posición 8.

d) $a_{10} = 2^9 = 512$

3. Escribe los cuatro primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:

a) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ **b) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$** **c) $c_n = 5 \cdot 10^{n-1}$** **d) $d_n = 5 \cdot 0{,}1^{n-1}$**

a) 5, 10, 20, 40 b) 2, 6, 18, 54 c) 5, 50, 500,5 000 d) 5; 0,5; 0,05; 0,005

4. Asocia cada progresión geométrica con su término general:

a) 3, 6, 12, 24, …

b) 3; 0,3; 0,03; 0,003; …

c) 3, 30, 300, 3 000, …

d) 2, 6, 18, 54, …

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot 10^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot 0{,}1^{n-1}$
$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

a) 3, 6, 12, 24, … → $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) 3; 0,3; 0,03; 0,003; … → $a_n = 3 \cdot 0{,}1^{n-1}$

c) 3, 30, 300, 3 000, … → $a_n = 3 \cdot 10^{n-1}$

d) 2, 6, 18, 54, … → $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

5. **Considera la siguiente progresión:**

$$1;\ 0{,}2;\ 0{,}04;\ 0{,}008;\ \ldots$$

a) Escribe los cuatro términos siguientes.

b) Escribe en forma de potencia el término a_{15} de la progresión.

a) 0,0016; 0,00032; 0,000064; 0,0000128

b) $a_n = 0{,}2^{(n-1)}$

$a_{15} = 0{,}2^{(15-1)} \rightarrow a_{15} = 0{,}2^{14}$

6. **¿En cuánto se convierte un capital de 5 000 €, colocado al 3 % anual durante 10 años, si los intereses se suman al capital al final de cada año?**

Al final de cada año, el capital se multiplica por 1,03.

En diez años, el capital inicial se habrá multiplicado diez veces por 1,03:

$$5\,000 \cdot 1{,}03^{10} = 6\,719{,}58\ €$$

El capital, al cabo de 10 años, es de 6 719,58 €.

7. **Averigua a partir de qué término la progresión geométrica 3, 6, 12, … supera el valor 1 000 000.**

El término general de esta progresión es $a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)}$, entonces, hay que averiguar para que n se cumple que $3 \cdot 2^{(n-1)} > 1\,000\,000 \rightarrow 2^{(n-1)} > \dfrac{1\,000\,000}{3} \approx 333\,333{,}3$.

$2^{10} = 1\,024 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Se queda muy corto, probamos con otro.

$2^{15} = 32\,768 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Sigue estando por debajo pero bastante próximo.

…

$2^{18} = 262\,144 < 333\,333{,}3 \rightarrow$ Es muy próximo al número buscado

$2^{19} = 524\,288 > 333\,333{,}3 \rightarrow$ Es el primero que supera 333 333,3.

Por tanto, $n - 1 = 19 \rightarrow n = 19 + 1 \rightarrow n = 20$

$$a_{20} = 3 \cdot 2^{19} = 1\,572\,864$$

A partir de $a_{20} = 1\,572\,864$ los términos de la progresión superan 1 000 000.

Ejercicios y problemas

Página 68

Practica

1. **Escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:**

a) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es 5.

b) Cada término se obtiene sumando 3 al anterior. El primero es –10.

c) El primer término es 5, y el segundo, 7. A partir del tercero, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

d) El primer término es 16. Los demás se obtienen dividiendo el anterior por 2.

e) El primer término es 36, el segundo, 12, y los siguientes, la semisuma de los dos anteriores.

a) 5, 8, 11, 14, 17, 20

b) –10, –7, –4, –1, 2, 5

c) 5, 7, 12, 19, 31, 50

d) 16; 8; 4; 2; 1; 0,5

e) 36; 12; 24; 18; 21; 19,5

2. **Averigua el criterio con el que se han formado las siguientes sucesiones. Escribe tres términos más de cada una de ellas:**

a) 1, 3, 5, 7, …

b) 7, 5, 3, 1, …

c) 2, 4, 8, 16, …

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

e) 1,5; 1,9; 2,3; 2,7; …

f) 30, 25, 20, 15, …

g) 1, 4, 9, 16, …

h) 2, 5, 10, 17, …

i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

j) 1, 3, 6, 10, …

a) El primer término es 1 y cada término se obtiene sumando 2 al anterior.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

b) El primer término es 7 y cada término se obtiene restando 2 al anterior.

7, 5, 3, 1, –1, –3, –5

c) El primer término es 2 y cada término se obtiene multiplicando por 2 el anterior.

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

d) El primer término es $\frac{1}{2}$ y cada término se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ el anterior.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$$

e) El primer término es 1,5 y cada término se obtiene sumando 0,4 al anterior.

1,5; 1,9; 2,3; 2,7; 3,1; 3,5; 3,9

f) El primer término es 30 y cada término se obtiene restando 5 al anterior.

30, 25, 20, 15, 10, 5, 0

g) El primer término es 1 y cada término se obtiene elevando al cuadrado la posición que ocupa.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

h) El primer término es 2 y cada término se obtiene elevando al cuadrado la posición que ocupa en la sucesión y sumándole 1.

2, 5, 10, 17, 26, 37, 50

i) El primer término es 1 y cada término es la unidad dividida por el lugar que ocupa en la sucesión.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$$

j) El primer término es 1 y, a partir de ahí, se va sumando la posición que ocupa en la sucesión al término anterior.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28

3. **Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:**

a) $n^2 - n$ **b)** $n^2 + n$ **c)** $2^n + 1$

d) $\frac{n-1}{n+1}$ **e)** $\frac{n^2+1}{n}$ **f)** $\frac{2n-1}{n+1}$

g) $(-1)^n$ **h)** $1 + (-1)^n$ **i)** $2^n + n$

a) 0, 2, 6, 12, 20 b) 2, 6, 12, 20, 30 c) 3, 5, 9, 17, 33

d) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ e) $0, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}$ f) $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}$

g) –1, 1, –1, 1, –1 h) 0, 2, 0, 2, 0 i) 3, 6, 11, 20, 37

4. **Escribe el término general de estas sucesiones:**

a) **1, 2, 3, 4, …** **b)** **0, 1, 2, 3, …** **c)** **1, 4, 9, 16, …**

d) **0, 3, 8, 15, …** **e)** **2, 4, 6, 8, …** **f)** **1, 3, 5, 7, …**

g) **3, 5, 7, 9, …** **h)** **12, 14, 16, 18, …** **i)** **2, 4, 8, 16, …**

j) **3, 5, 9, 17, …** **k)** **100, 200, 300, 400, …** **l)** **5, 25, 125, 625, …**

a) $a_n = n$ b) $b_n = n - 1$

c) $c_n = n^2$ d) $d_n = n^2 - 1$

e) $e_n = 2n$ f) $f_n = 2n - 1$

g) $g_n = 2n + 1$ h) $h_n = 2(n + 5) = 2n + 10$

i) $i_n = 2^n$ j) $j_n = 2^n + 1$

k) $k_n = 100n$ l) $l_n = 5^n$

5. Escribe los ocho primeros términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 10 y cuya diferencia es 4. Halla su suma.

$a_1 = 10,\ d = 4 \ \rightarrow\ a_n = 10 + (n - 1) \cdot 4 = 10 + 4n - 4 = 6 + 4n$

El término general de esta progresión es $a_n = 6 + 4n$.

Los ocho primeros términos son: 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38.

$$S_8 = \frac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} = \frac{(10 + 38) \cdot 8}{2} = 192$$

6. De las sucesiones siguientes, definidas por sus términos generales, hay tres que son progresiones aritméticas. Identifícalas y di cuál es la diferencia de cada una de ellas:

a) $5n - 4$ **b)** $5 - 3n$ **c)** $10 - 0{,}5n$ **d)** $n^2 + 1$

a) $5n - 4 \ \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = 5$.

b) $5 - 3n \ \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = -3$.

c) $10 - 0{,}5n \ \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = -0{,}5$.

d) $n^{2+1} \ \rightarrow$ No es progresión aritmética.

7. En una progresión aritmética, $a_1 = 6$ y $a_{15} = 41$. Halla:

a) La suma de los 15 primeros términos.

b) La diferencia, d, y el término general, a_n.

c) El término centésimo, a_{100}.

$a_1 = 6;\quad a_{15} = 41$

a) $S_8 = \dfrac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \dfrac{(6 + 41) \cdot 15}{2} = 352{,}5$

b) $a_{15} = a_1 + (15 - 1)d \ \rightarrow\ 41 = 6 + 14d \ \rightarrow\ d = \dfrac{41 - 6}{14} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

$a_n = a_1 + (n - 1)d \ \rightarrow\ a_n = 6 + 2{,}5(n - 1) \ \rightarrow\ a_n = 3{,}5 + 2{,}5n$

c) $a_{100} = 3{,}5 + 2{,}5 \cdot 100 = 253{,}5$

8. El término general de una progresión aritmética es $a_n = 4 + 3n$. Halla a_1, a_{100} y S_{100}.

$a_n = 4 + 3n$

$a_1 = 4 + 3 \cdot 1 = 7$

$a_{100} = 4 + 3 \cdot 100 = 304$

$S_{100} = \dfrac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \dfrac{(7 + 304) \cdot 100}{2} = 15\,550$

9. En una progresión aritmética, $a_1 = 103$ y $a_2 = 99$.

a) Halla la diferencia, d, y escribe los 10 primeros términos.

b) Obtén el término general.

c) Halla a_{30} y S_{30}.

$a_1 = 103; \quad a_2 = 99$

a) $d = a_2 - a_1 = 99 - 103 = -4$

Los diez primeros términos son 103, 99, 95, 91, 87, 83, 79, 75, 71, 67.

b) $a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = 103 - 4 \cdot (n-1) = 107 - 4n$

El término general de esta progresión aritmética es $a_n = 107 - 4n$.

c) $a_{30} = 107 - 4 \cdot 30 = -13$

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})}{2} = \frac{(103 + (-13)) \cdot 30}{2} = 1\,350$$

10.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

a) Esta es la tabla de multiplicar. Observa en ella cada fila o columna. ¿Qué tipos de sucesiones son? Escribe el término general de cada una.

b) Obtén el término general de la diagonal principal: 1, 4, 9, 16, …

c) La diagonal 2, 6, 12, 20, … se formó multiplicando cada número natural por su siguiente. ¿Cuál es el término general?

a) En la tabla de multiplicar podemos observar que cada fila o columna son progresiones aritméticas.

Los términos generales de cada fila o columna son:

1ª fila o columna: $a_n = n$

2ª fila o columna: $a_n = 2n$

3ª fila o columna: $a_n = 3n$

4ª fila o columna: $a_n = 4n$

5ª fila o columna: $a_n = 5n$

6ª fila o columna: $a_n = 6n$

7ª fila o columna: $a_n = 7n$

8ª fila o columna: $a_n = 8n$

9ª fila o columna: $a_n = 9n$

b) El término general de la diagonal principal es $a_n = n^2$.

c) El término general de la diagonal 2, 6, 12, 20, … es $a_n = n(n+1) = n^2 + n$.

11. **De las siguientes sucesiones, dadas por sus términos generales, unas son progresiones aritméticas, otras, progresiones geométricas, y otras, ni lo uno ni lo otro. Identifica cada una de ellas:**

a) $3n + 5$	**b)** $n^2 + 5$	**c)** $3^n + 5$	**d)** $3^n \cdot 5$
e) $n^2 + n$	**f)** $n + 2$	**g)** $n/2$	**h)** $2/n$

a) $3n + 5 \rightarrow$ Progresión aritmética

b) $n^2 + 5 \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

c) $3^n + 5 \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

d) $3^n \cdot 5 \rightarrow$ Progresión geométrica

e) $n^2 + n \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

f) $n + 2 \rightarrow$ Progresión aritmética

g) $\frac{n}{2} \rightarrow$ Progresión aritmética

h) $\frac{2}{n} \rightarrow$ No es progresión aritmética ni geométrica

Página 69

12. **¿Cuál es el término general de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $a_4 = 40$?**

$a_4 = a_1 + 3d$. Sustituye y halla d.

$a_1 = 7;\quad a_4 = 40$

$a_4 = a_1 + 3d \;\to\; 40 = 7 + 3d \;\to\; d = \dfrac{40-7}{3} \;\to\; d = 11$

$a_n = 7 + (n-1)\cdot 11 = 7 + 11n - 11 \;\to\; a_n = 11n - 4$

El término general de la progresión es $a_n = 11n - 4$.

13. **En una progresión geométrica, $a_1 = 64$ y $r = 0{,}75$.**

a) Calcula el primer término no entero.

b) Ayudándote de la calculadora, di cuál es el primer término menor que 1.

$a_1 = 64;\quad r = 0{,}75$

a) $a_1 = 64$

$a_2 = 64 \cdot 0{,}75 = 48$

$a_3 = 48 \cdot 0{,}75 = 36$

$a_4 = 36 \cdot 0{,}75 = 27$

$a_5 = 27 \cdot 0{,}75 = 20{,}25$

El primer término no entero es $a_5 = 20{,}25$.

b) Con la calculadora: 0,75 ⊗ ⊗ 64 ⊜ ⊜ … ⊜

Para que el resultado sea un número menor que 1 hay que dar 15 veces al botón ⊜.

Por tanto, $a_{15} = 0{,}85526$ es el primer término menor que 1.

Piensa y resuelve

14. **¿Cuál es el término 63 de la siguiente sucesión?**

1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, …

Los términos en esta sucesión se repiten cada 4 posiciones.

La división de 63 entre 4 tiene cociente 15 y resto 3.

Por tanto, término 63 de la sucesión será 3.

15. **a) ¿Cuántos números impares menores que 100 hay? Halla su suma.**

b) Halla la suma de todos los números pares menores que 100.

a) Hay 100 : 2 = 50 números impares menores que 100.

La sucesión de los números impares menores de 100 es 1, 3, 5, 7, …, 99.

En esta sucesión se puede observar que $a_1 = 1$ y $a_{50} = 99$, por tanto, la suma de todos los términos es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50})\cdot 50}{2} = \frac{(1+99)\cdot 50}{2} = 2\,500$$

b) En este caso también hay 100 : 2 = 50 números pares menores que 100.

La sucesión de los números pares menores de 100 es 2, 4, 6, 8, …, 98.

En esta sucesión se puede observar que $a_1 = 2$ y $a_{50} = 98$, por tanto, la suma de todos los términos es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

16. **Una persona que estaba de vacaciones gastó 100 € el primer día, y en cada uno de los siguientes, 5 € menos que el anterior. El dinero le duró 12 días. ¿Cuánto dinero llevó para sus vacaciones?**

La persona se gasta 100 € el primer día $\rightarrow$ $a_1 = 100$

— Cada día gasta 5 euros $\rightarrow$ $d = -5$

— El dinero le dura 12 días $\rightarrow$ la progresión tiene 12 términos, a_1, a_2, a_3, …, a_{12}, cada término es un día.

— El último día se gastó $a_{12} = 100 - 5(12 - 1)$ $\rightarrow$ $a_{12} = 100 - 55 = 45$ €.

— Para saber el dinero que llevó para sus vacaciones solo hace falta calcular S_{12}.

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(100 + 45) \cdot 12}{2} = 870 \text{ €}.$$

Para sus vacaciones llevó 870 €.

17. **Un padre, cuando nace su hijo, abre a su nombre una cuenta bancaria, al 6 % anual, con un capital de 5 000 €, indicando que los intereses se vayan sumando al capital al final de cada año. El hijo podrá disponer del dinero cuando cumpla dieciocho años. ¿A cuánto ascenderá la cuenta en ese momento?**

El capital aumenta en un 6 % anual. Es decir, al finalizar cada año se multiplica el capital que tenga en la cuenta bancaria por 1,6.

Como el hijo puede disfrutar del capital que tenga acumulado en la cuenta bancaria a los 18 años, el capital inicial se habrá multiplicado dieciocho veces por 1,06:

$$5\,000 \cdot 1{,}06^{18} = 14\,271{,}69 \text{ €}$$

Por tanto, cuando el hijo cumpla 18 años la cuenta ascenderá a 14 271,69 €.

18. **¿Cuánto tardará en duplicarse un euro, colocado en el banco, al 5 % anual, si los intereses se van acumulando al final de cada anualidad?**

El euro colocado en el banco aumenta un 5 % anual. Es decir, al finalizar cada año el euro que está en la cuenta bancaría se multiplica por 1,05.

n son el número de años necesarios para duplicar el euro, por tanto, $1 \cdot 1{,}05^n \geq 2$.

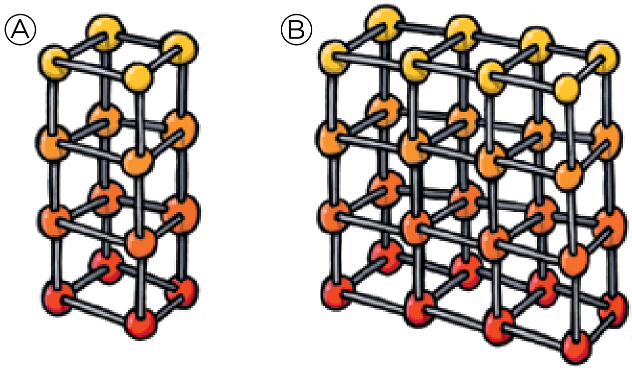
Con la calculadora:

1,05 ⊠ ⊠ 1 ⊜ ⊜ … ⊜ $\rightarrow$ Damos a ⊜ hasta que aparezca un número mayor o igual que 2.

Para que salga un número mayor o igual a 2 debemos dar a ⊜ 15 veces, $1 \cdot 1{,}05^{15} = 2{,}08 \geq 2$.

Por tanto, el euro colocado en el banco tardará 15 años en duplicarse.

19. **Observa estas dos estructuras formadas por palos y bolas engarzables:**



Averigua cuántos palos y cuántas bolas son necesarios para hacer una estructura como la de la figura A, pero de n pisos.

¿Y para la figura B?

— Para la estructura A, se necesitan 4 bolas, 4 palos por cada piso y 4 palos entre los pisos para unirlos. Por tanto, en una estructura de n pisos se necesitan $4n$ bolas y $4n + 4(n - 1)$ palos, es decir, $8n - 4$ palos.

— Para la estructura B, se necesitan 8 bolas, 10 palos por cada piso y 8 palos entre los pisos para unirlos. Por tanto, para una estructura como la B, pero de n pisos, se necesitan $8n$ bolas y $10n + 8(n - 1)$ palos, es decir, $18n - 8$ palos.

20. **Una pelota de goma se lanza a 10 metros de altura y al caer rebota perdiendo el 40 % de altura en cada bote. ¿Cuántos botes da antes de pararse, si al caer desde una altura inferior a 4 centímetros ya no tiene suficiente energía para volver a subir y deja de botar?**

Se lanza la pelota de goma $10 \cdot 100 = 1\,000$ cm hacia arriba y al caer rebota perdiendo 40 % de altura en cada bote, entonces, el índice de variación es 0,6.

Por cada bote que da la pelota hay que multiplicar la altura por 0,6.

Sea n el número de botes que da la pelota antes de pararse, por tanto, hay que calcular n para que $1000 \cdot 0{,}6^n \le 4$.

Con la calculadora:

0,6 $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ 1 000 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ … $\rightarrow$ Damos a $\boxed{=}$ hasta que aparezca un número menor o igual que 4.

Para que salga un número menor o igual que 4 debemos dar a $\boxed{=}$ 11 veces, $1\,000 \cdot 0{,}6^{11} = 3{,}63 \le 4$.

Por tanto, la pelota dará 11 botes antes de pararse.

21. **Un tipo de bacterias se reproduce por bipartición cada 10 minutos. ¿Cuántas bacterias habrá después de 8 horas?**

Cada 10 minutos las bacterias se reproducen por bipartición, es decir, se multiplican por 2.

8 horas son 480 minutos $\rightarrow$ 48 periodos de 10 minutos.

Partiendo de una bacteria, después de ocho horas, habrá $2^{48} \approx 2{,}815 \cdot 10^{14}$ bacterias.