

# 11 ELEMENTOS DE GEOMETRÍA PLANA

## 1 ► DOS RECTAS IMPORTANTES

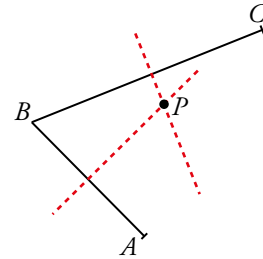
Página 165

**1** Dibuja dos segmentos concatenados,  $AB$  y  $BC$ . Traza sus mediatrices y llama  $P$  al punto en que se cortan.

— Comprueba que  $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ .

— Razona por qué  $P$  está a la misma distancia (equidista) de  $A$ , de  $B$  y de  $C$ .

- $P$  está en la mediatriz del segmento  $AB$ , por tanto:  $\overline{PA} = \overline{PB}$ .
- $P$  está en la mediatriz del segmento  $BC$ , por tanto:  $\overline{PB} = \overline{PC}$ .
- Concluimos, pues, que  $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ ; esto es, que  $P$  equidista de  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

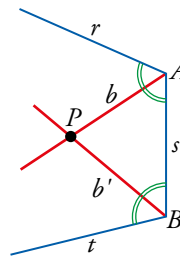


**2** Dibuja en tu cuaderno dos ángulos  $\widehat{rs}$  y  $\widehat{st}$  como se ve en la figura.

— Traza sus bisectrices,  $b$  y  $b'$ , que se cortan en un punto  $P$ .

— Razona que las distancias del punto  $P$  a las rectas  $r$ ,  $s$  y  $t$  coinciden.

- $P$  está en la bisectriz del ángulo  $\widehat{rs}$ ; por tanto, está a igual distancia de los lados del ángulo,  $r$  y  $s$ .
- $P$  está en la bisectriz del ángulo  $\widehat{st}$ ; por tanto, está a igual distancia de los lados del ángulo,  $s$  y  $t$ .
- Concluimos, pues, que  $P$  está a igual distancia de las rectas  $r$ ,  $s$  y  $t$ .

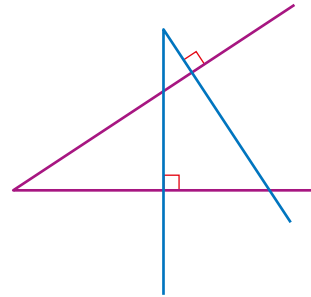
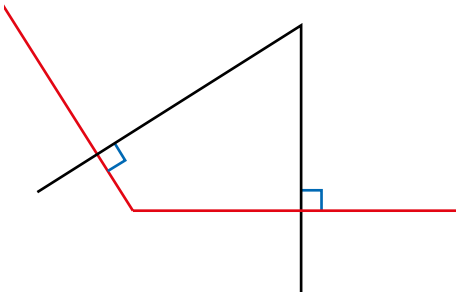


## 2 ▶ RELACIONES ANGULARES

Página 166

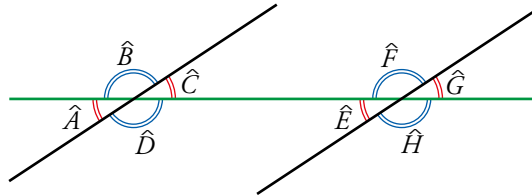
- 1** Dos ángulos de lados perpendiculares pueden ser iguales, pero también pueden ser suplementarios.

Justifícalo en tu cuaderno con un dibujo.



- 2** De estos ángulos, di dos que sean iguales por ser:

- Opuestos por el vértice.
- Correspondientes.
- Alternos internos.
- Alternos externos.



- $\hat{A} = \hat{C}$ ;  $\hat{B} = \hat{D}$ ;  $\hat{E} = \hat{G}$ ;  $\hat{F} = \hat{H}$
- $\hat{A} = \hat{E}$ ;  $\hat{B} = \hat{F}$ ;  $\hat{C} = \hat{G}$ ;  $\hat{D} = \hat{H}$
- $\hat{A} = \hat{G}$ ;  $\hat{B} = \hat{H}$
- $\hat{D} = \hat{F}$ ;  $\hat{C} = \hat{E}$

**3 Cinco de los ángulos de un hexágono irregular miden  $147^\circ$ ,  $101^\circ$ ,  $93^\circ$ ,  $122^\circ$  y  $134^\circ$ .**

**Halla la medida del sexto ángulo.**

Los seis ángulos de un hexágono suman:  $(6 - 2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$

$720^\circ - (147^\circ + 101^\circ + 93^\circ + 122^\circ + 134^\circ) = 720^\circ - 597^\circ = 123^\circ$

El sexto ángulo mide  $123^\circ$ .

**4 ¿Cuánto mide cada ángulo de un hexágono regular? ¿Y de un pentágono regular?**

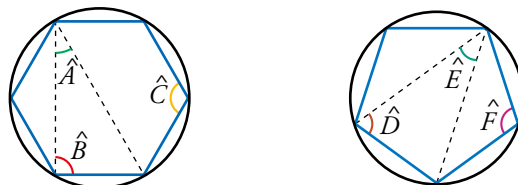
– La suma de los ángulos de un hexágono es  $(6 - 2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ .

Por tanto, cada ángulo mide  $720^\circ : 6 = 120^\circ$ .

– La suma de los ángulos de un pentágono es  $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ .

Entonces, cada ángulo de un pentágono regular mide  $540^\circ : 5 = 108^\circ$ .

**5 Halla el valor de cada uno de los ángulos señalados:**



$\hat{A}$  es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide  $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \rightarrow \hat{A} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

$\hat{B}$  es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide  $180^\circ \rightarrow \hat{B} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\hat{C}$  es uno de los ángulos del hexágono  $\rightarrow \hat{C} = \frac{(6-2)180^\circ}{6} = 120^\circ$

$\hat{D}$  es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide  $2 \cdot \frac{360^\circ}{5} = 144^\circ \rightarrow \hat{D} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$

$\hat{E}$  es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente mide  $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \rightarrow \hat{E} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$

$\hat{F}$  es uno de los ángulos del pentágono  $\rightarrow \hat{F} = \frac{(5-2)180^\circ}{5} = 108^\circ$

## 3 ▶ FIGURAS SEMEJANTES

Página 168

**1** Estas dos figuras son semejantes. Mide y encuentra la razón de semejanza.

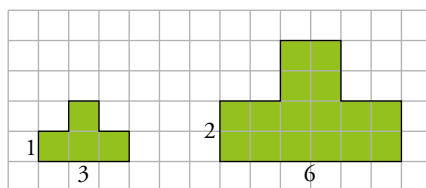


Por ejemplo, medimos las guitarras a lo largo del mástil. Entonces, la guitarra de mayor tamaño mide, aproximadamente, 4 cm y la de menor tamaño mide 3 cm aproximadamente.

$$4 \cdot 0,75 = 3$$

Por tanto, la razón de semejanza es  $r \approx 0,75$ .

**2** Estas dos figuras son semejantes y su razón de semejanza es 2:



**¿Cuántos cuadrados ocupa la primera? ¿Y la segunda? ¿Cuál es la razón entre las áreas?**

La primera figura ocupa 4 cuadrados.

La segunda figura ocupa 16 cuadrados.

La razón entre las áreas es:  $r = \frac{16}{4} = 4$ .

**3 Considera el plano del primer ejemplo.**

a) **Calcula la anchura de la vivienda.**

b) **¿Cuánto mediría esa misma longitud en un plano construido a escala 1/100?**

a) En la imagen, el ancho mide 4,9 cm.

La anchura de la vivienda mide  $4,9 \cdot 200 = 980 \text{ cm} = 9,8 \text{ m}$ .

b) A escala 1/100, la anchura de la vivienda medirá,  $4,9 \cdot 100 = 490 \text{ cm} = 4,9 \text{ m}$ .

**4 a) Calcula la distancia real entre Arrecife de Lanzarote y Las Palmas de Gran Canaria.**

b) **¿A qué escala debería estar el plano para que esa distancia, sobre el papel, fuera el doble?**

a) En la imagen, la distancia entre el Arrecife y Las Palmas de Gran Canaria es 4,1 cm.

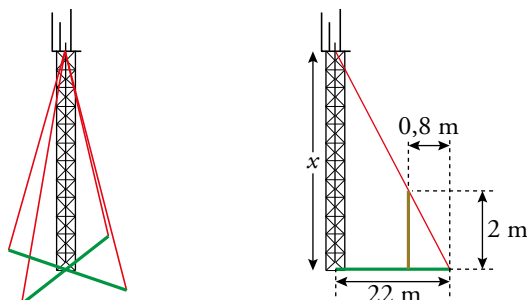
Por tanto, la dimensión real es  $4,1 \cdot 5\,000\,000 = 20\,500\,000 \text{ cm} = 205 \text{ km}$ .

b) Para que la distancia fuera el doble, el plano debería estar a una escala 1/2 500 000.

## 4 ▶ TRIÁNGULOS SEMEJANTES. TEOREMA DE TALES

Página 171

- 1 Una torre de comunicaciones se sustenta por cuatro cables amarrados a su extremo superior y al suelo. Para calcular su altura, Aurora ha colocado un listón de dos metros como indica la figura. Con esos datos, calcula tú la altura de la torre.



$$\frac{2}{0,8} = \frac{x}{22} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 22}{0,8} = 55 \text{ m}$$

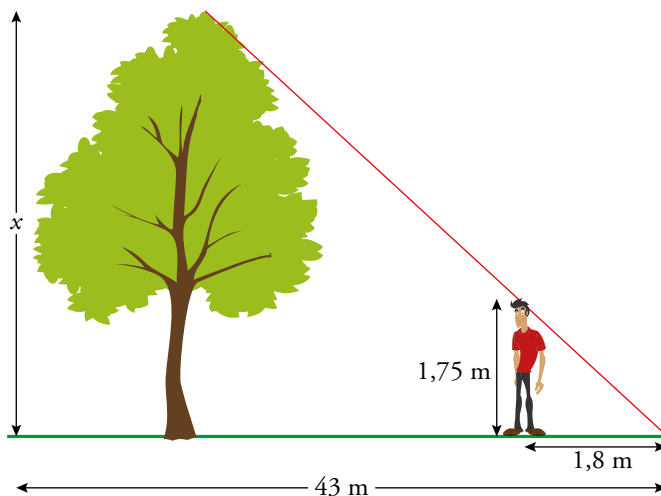
La altura de la torre mide 55 m.

- 2 Cuando mi sombra mide 1,8 m, la del pino del parque mide 43 m. Mi altura es 1,75 m. ¿Cuál es la altura del pino?

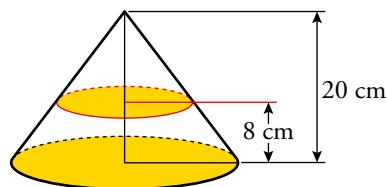
$$\frac{1,75}{1,8} = \frac{x}{43}$$

$$x = \frac{1,75 \cdot 43}{1,8} = 41,81 \text{ m}$$

El pino mide 41,81 m.



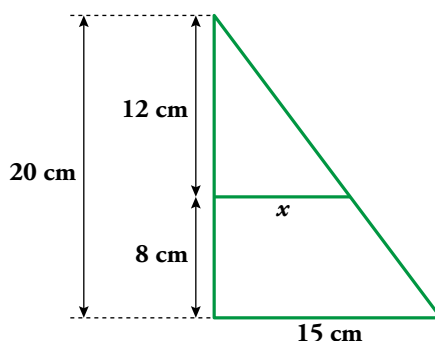
- 3 La altura de un cono recto mide 20 cm, y el radio de la base, 15 cm. ¿Cuál es el radio de la nueva base, si se corta de forma que su altura disminuya en 8 cm?



$$\frac{x}{15} = \frac{12}{20}$$

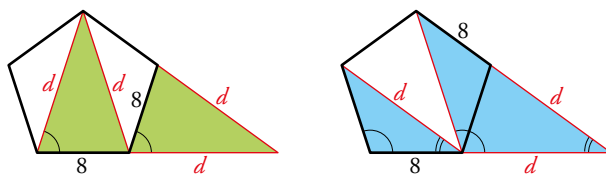
$$x = \frac{12 \cdot 15}{20} = 9 \text{ cm}$$

El radio de la nueva base mide 9 cm.



4 Calcula la diagonal de un pentágono regular de 8 cm de lado.

💡 Observa en la figura que los dos triángulos verdes son iguales, y que los dos azules son semejantes.



$$\frac{8+d}{d} = \frac{d}{8} \rightarrow 8(8+d) = d \cdot d \rightarrow 64 + 8d = d^2 \rightarrow d^2 - 8d - 64 = 0$$

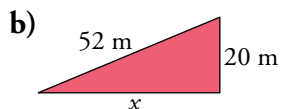
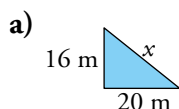
$$d = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 256}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{320}}{2} = \frac{8 \pm 8\sqrt{5}}{2} \text{ cm} \begin{cases} 4 + 4\sqrt{5} \approx 12,94 \text{ cm} \\ 4 - 4\sqrt{5} \approx -4,94 \text{ cm} \end{cases}$$

Solución: La diagonal mide  $4 + 4\sqrt{5} \approx 12,94$  cm.

## 5 ▶ EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Página 173

### 1 Calcula el lado desconocido en cada triángulo:



a)  $x^2 = 20^2 + 16^2 \rightarrow x = \sqrt{400 + 256} = \sqrt{656} = 4\sqrt{41} \approx 25,6 \text{ m.}$

b)  $52^2 = 20^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 52^2 - 20^2$

$x = \sqrt{2704 - 400} = \sqrt{2304} = 48 \text{ m}$

### 2 Averigua cómo son (acutángulos, rectángulos u obtusángulos) los triángulos de lados:

a) 49 m, 18 m y 52 m

b) 44 cm, 17 cm y 39 cm

c) 68 cm, 85 dm, 51 cm

d) 15 cm, 15 cm, 15 cm

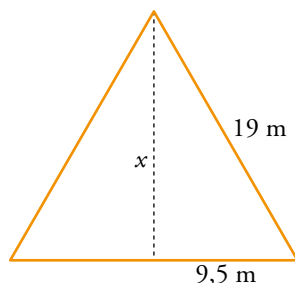
a)  $18^2 + 49^2 = 2725 > 2704 = 52^2 \rightarrow$  Triángulo acutángulo.

b)  $17^2 + 39^2 = 1810 < 1936 = 44^2 \rightarrow$  Triángulo obtusángulo.

c)  $68^2 + 51^2 = 7225 = 85^2 \rightarrow$  Triángulo rectángulo.

d)  $15^2 + 15^2 = 450 > 225 = 15^2 \rightarrow$  Triángulo acutángulo.

### 3 Halla la altura de un triángulo equilátero de 19 m de lado. Da la solución aproximando hasta los centímetros.

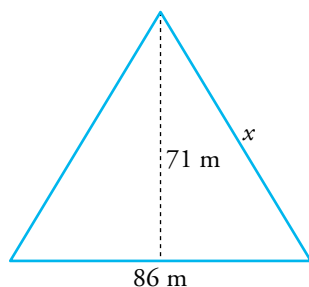


$$19^2 = x^2 + 9,5^2 \rightarrow x^2 = 19^2 - 9,5^2$$

$$x = \sqrt{361 - 90,25} = \sqrt{270,75} \approx 16,45 \text{ m}$$

Solución: La altura mide 16,45 m.

### 4 Halla el perímetro de un triángulo isósceles de lado desigual 86 m y altura correspondiente 71 m.

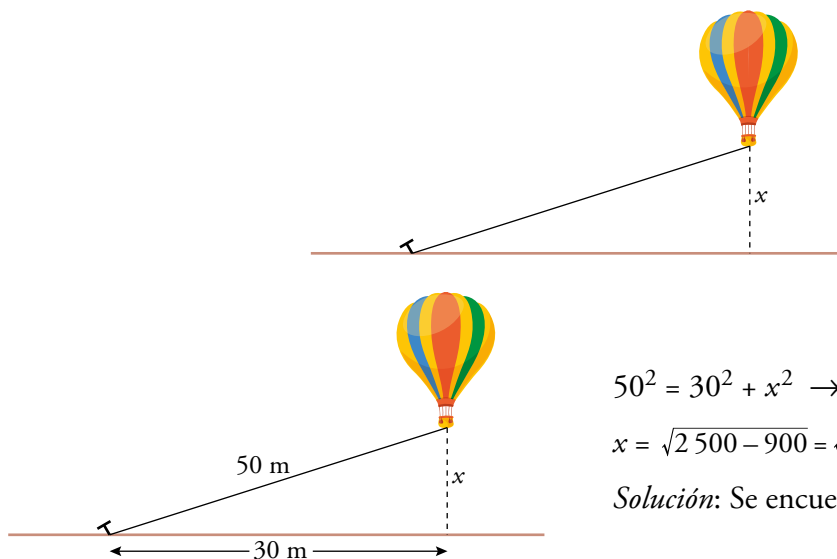


$$x^2 = 71^2 + 43^2 \rightarrow x = \sqrt{6890} = 83,01 \text{ m}$$

$$P = 2 \cdot 83,01 + 86 = 252,02 \text{ m}$$



- 5 Un globo cautivo, amarrado al suelo con una cuerda de 50 metros, ha sido desplazado por el viento 30 metros hacia el oeste. ¿A qué altura se encuentra?



50 m

30 m

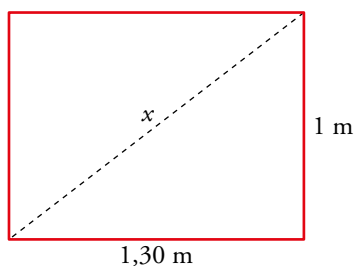
$x$

$$50^2 = 30^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 50^2 - 30^2$$

$$x = \sqrt{2500 - 900} = \sqrt{1600} = 40 \text{ m}$$

*Solución:* Se encuentra a 40 m de altura.

- 6 ¿Será posible introducir, durante una mudanza, el tablero de una mesa de  $1,5 \times 2$  metros, a través del hueco de una ventana de  $1 \times 1,30$  metros? Razona tu respuesta.



$$x^2 = 1,30^2 + 1^2 \rightarrow x = \sqrt{1,69 + 1} = \sqrt{2,69}$$

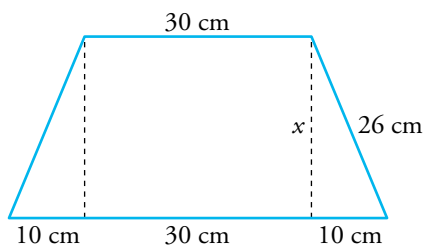
$$x = 1,64 \text{ m}$$

$$1,5 < 1,64$$

*Solución:* Sí, será posible. El ancho de la mesa es 1,5 m y la diagonal de la ventana mide 1,64 m.

Página 175

- 7** Los lados de un trapezio isósceles miden 50 cm, 30 cm, 26 cm y 26 cm. Halla su altura.

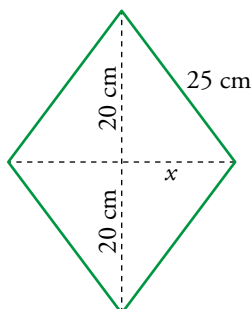


$$26^2 = x^2 + 10^2 \rightarrow x^2 = 26^2 - 10^2$$

$$x = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

La altura del trapezio isósceles es 24 cm.

- 8** Cada uno de los lados de un rombo miden 25 cm, y una de sus diagonales, 40 cm. Halla la longitud de la otra diagonal.

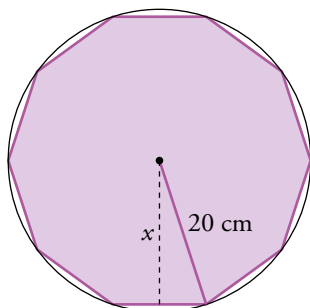


$$25^2 = x^2 + 20^2 \rightarrow x^2 = 25^2 - 20^2$$

$$x = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

La longitud de la otra diagonal es  $15 \cdot 2 = 30$  cm.

- 9** El perímetro de un decágono regular inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio mide 124,9 cm. Halla su apotema.



Perímetro = 124,9 cm

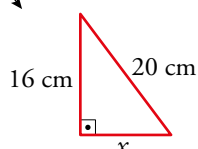
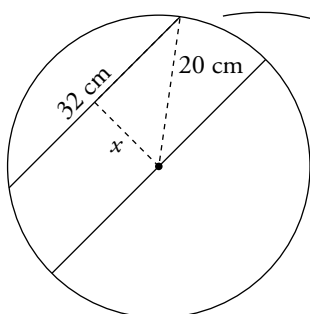
Cada lado del decágono mide  $124,9 : 10 = 12,49$  cm

$$20^2 = x^2 + \left(\frac{12,49}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 = 20^2 - 6,245^2$$

$$x \approx \sqrt{400 - 39} \approx \sqrt{361} \approx 19 \text{ cm}$$

La apotema mide, aproximadamente, 19 cm.

- 10** En una circunferencia hemos dibujado un diámetro de 40 cm y una cuerda paralela a él de 32 cm. ¿A qué distancia están estos dos segmentos?

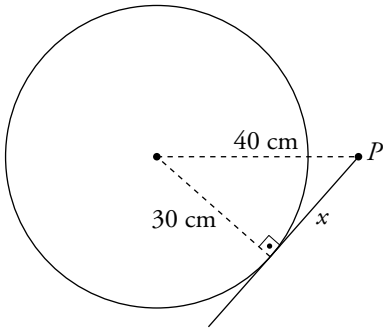


$$20^2 = 16^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 20^2 - 16^2$$

$$x = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

*Solución:* Están a 12 cm de distancia.

- 11** Desde un punto que dista 40 cm del centro de una circunferencia de 60 cm de diámetro, hemos trazado un segmento tangente a ella. ¿Cuál es su longitud?

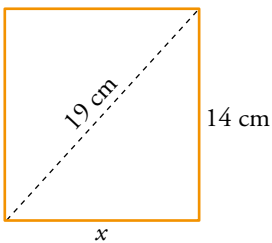


$$40^2 = 30^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 40^2 - 30^2$$

$$x = \sqrt{1600 - 900} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7} = 26,46 \text{ cm}$$

*Solución:* El segmento mide 26,46 cm.

- 12** Halla el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 19 cm, y su lado menor, 14 cm.



$$19^2 = 14^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 19^2 - 14^2$$

$$x = \sqrt{361 - 196} = \sqrt{165} = 12,85 \text{ cm}$$

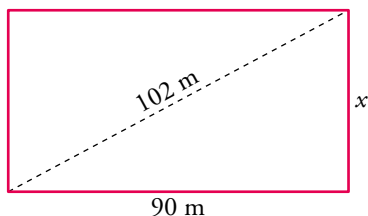
$$P = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 12,85 = 53,7 \text{ cm}$$

*Solución:* El perímetro mide 53,7 cm.

## 6 ▶ ÁREAS DE POLÍGONOS

Página 177

- 1 Un estadio rectangular mide 90 metros de largo, y su diagonal, 102 m. Halla su anchura y su área.



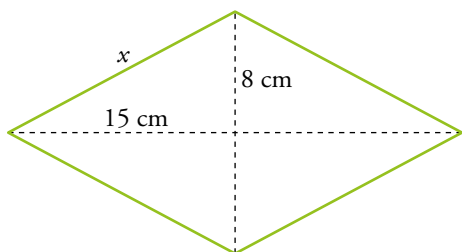
$$102^2 = 90^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 102^2 - 90^2$$

$$x = \sqrt{10\,404 - 8\,100} = \sqrt{2\,304} = 48 \text{ m}$$

$$\text{Área} = 90 \cdot 48 = 4\,320 \text{ m}^2$$

*Solución:* El estadio mide 48 m de ancho y su área es de 4 320 m<sup>2</sup>.

- 2 Las diagonales de un rombo miden 16 cm y 30 cm, respectivamente. Halla el perímetro y el área del rombo.



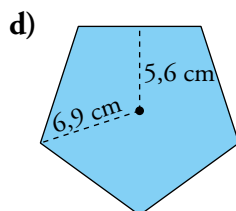
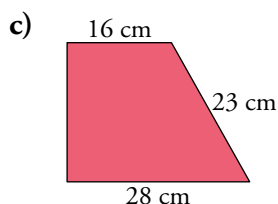
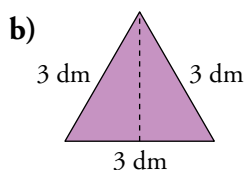
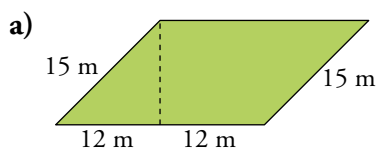
$$x^2 = 15^2 + 8^2 \rightarrow x = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17 \text{ cm.}$$

$$\text{Perímetro} = 4 \cdot 17 = 68 \text{ cm}$$

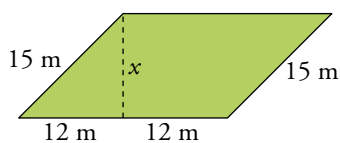
$$\text{Área} = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

El perímetro mide 68 cm y el área, 240 cm<sup>2</sup>.

**3** Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras, calculando previamente el elemento que falta:



a) Calculamos la altura:



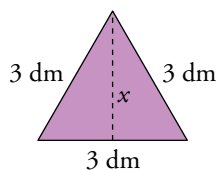
$$15^2 = 12^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 15^2 - 12^2$$

$$x = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9 \text{ m}$$

$$\text{Área} = 9 \cdot (12 + 12) = 9 \cdot 24 = 216 \text{ m}^2$$

$$\text{Perímetro} = 15 \cdot 2 + 24 \cdot 2 = 78 \text{ m}$$

b) Calculamos la altura:

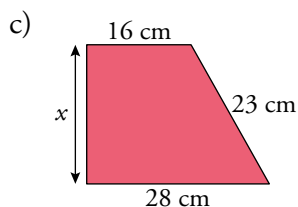


$$3^2 = 1,5^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 3^2 - 1,5^2$$

$$x = \sqrt{9 - 2,25} = \sqrt{6,75} = 2,6 \text{ dm}$$

$$\text{Área} = \frac{3 \cdot 2,6}{2} = 3,9 \text{ dm}^2$$

$$\text{Perímetro} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ dm}$$

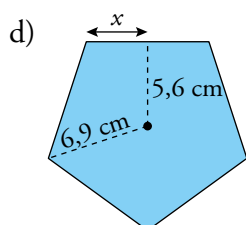


$$23^2 = x^2 + 12^2 \rightarrow x^2 = 23^2 - 12^2$$

$$x = \sqrt{529 - 144} = \sqrt{385} = 19,6 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{16 + 28}{2} \cdot 19,6 = 431,2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro} = 19,6 + 28 + 23 + 16 = 86,6 \text{ cm}$$



$$6,9^2 = 5,6^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 6,9^2 - 5,6^2$$

$$x = \sqrt{47,61 - 31,36} = \sqrt{16,25} \approx 4 \text{ cm} \rightarrow \text{lado} \approx 8 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{(5 \cdot 8) \cdot 5,6}{2} = 112 \text{ cm}^2$$

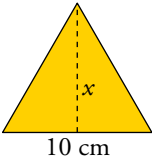
$$\text{Perímetro} = 5 \cdot 8 = 40 \text{ cm}$$

**4 Calcula:**

a) El área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

b) El área de un hexágono regular de lado 10 cm.

a)

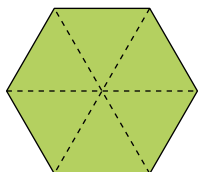


$$10^2 = 5^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 10^2 - 5^2$$

$$x = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ cm}$$

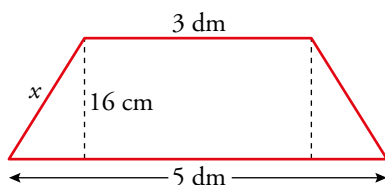
$$\text{Área} = \frac{10 \cdot 8,66}{2} = 43,3 \text{ cm}^2$$

b) El hexágono regular está formado por seis triángulos como el del apartado a).



$$\text{Área} = 6 \cdot 43,3 = 259,8 \text{ cm}^2$$

**5 La altura de un trapecio isósceles mide 16 cm, y sus bases, 5 dm y 3 dm. Halla el perímetro (aproximando a los milímetros) y el área.**



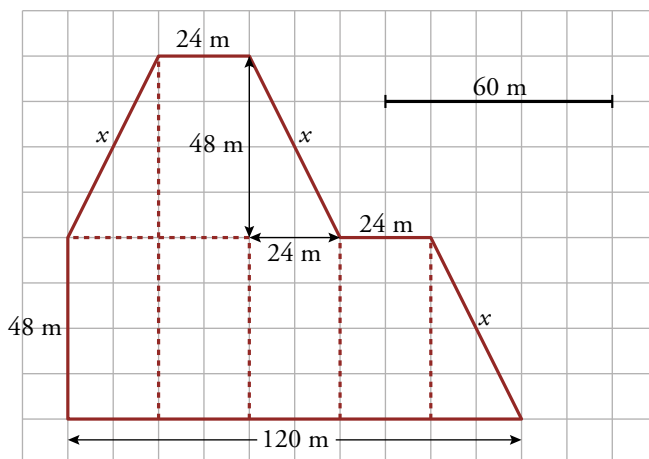
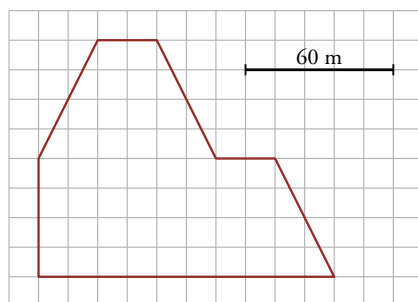
$$x^2 = 16^2 + 10^2 \rightarrow x = \sqrt{256 + 100} = \sqrt{356} = 18,9 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 30 + 50 + 2 \cdot 18,9 = 117,8 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{30 + 50}{2} \cdot 16 = 640 \text{ cm}^2$$

*Solución:* El perímetro mide 117,8 cm y el área, 640 cm<sup>2</sup>.

- 6 En la figura puedes ver el plano de una parcela de terreno. Calcula su superficie y la longitud de la valla.



Cinco cuadraditos son 60 m, entonces, un cuadradito son 12 m.

$$x^2 = 24^2 + 48^2 \rightarrow x = \sqrt{576 + 2304} = \sqrt{2880} = 53,67 \text{ m}$$

Hemos dividido la parcela en rectángulos y triángulos y hemos obtenido 5 rectángulos y 3 triángulos, con las mismas medidas, respectivamente.

$$\text{Área de un rectángulo} = 24 \cdot 48 = 1152 \text{ m}^2$$

$$\text{Área de un triángulo} = \frac{24 \cdot 48}{2} = 576 \text{ m}^2$$

$$\text{Área total} = 5 \cdot 1152 + 3 \cdot 576 = 7488 \text{ m}^2$$

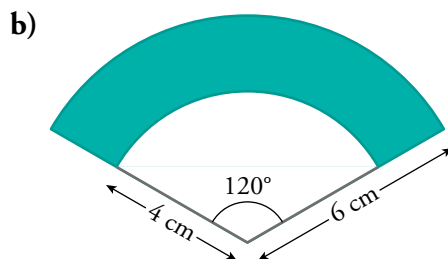
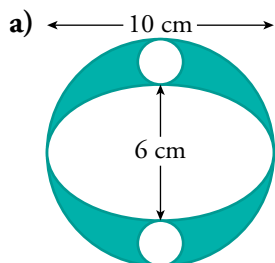
$$\text{Perímetro} = 120 + 48 + 3 \cdot 53,67 + 2 \cdot 24 \approx 377 \text{ m}$$

*Solución:* La superficie de la parcela es de 7488 m<sup>2</sup> y la longitud de la valla, 377 m.

## 7 ▶ ÁREAS Y PERÍMETROS DE ALGUNAS FIGURAS CURVAS

Página 178

1 Halla el área de las figuras coloreadas.



a) Área del círculo grande =  $\pi \cdot 5^2 = \pi \cdot 25 = 78,54 \text{ cm}^2$

Área del círculo pequeño =  $\pi \cdot 1^2 = 3,14 \text{ cm}^2$

Área de la elipse =  $\pi \cdot 3 \cdot 5 = 47,12 \text{ cm}^2$

Área =  $78,54 - 3,14 - 47,12 = 28,28 \text{ cm}^2$

b) Área =  $\frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi(36 - 16)}{3} = 20,94 \text{ cm}^2$



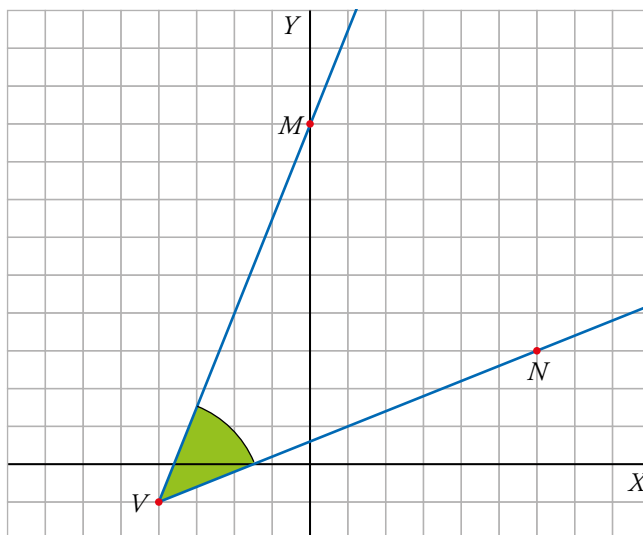
## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 179

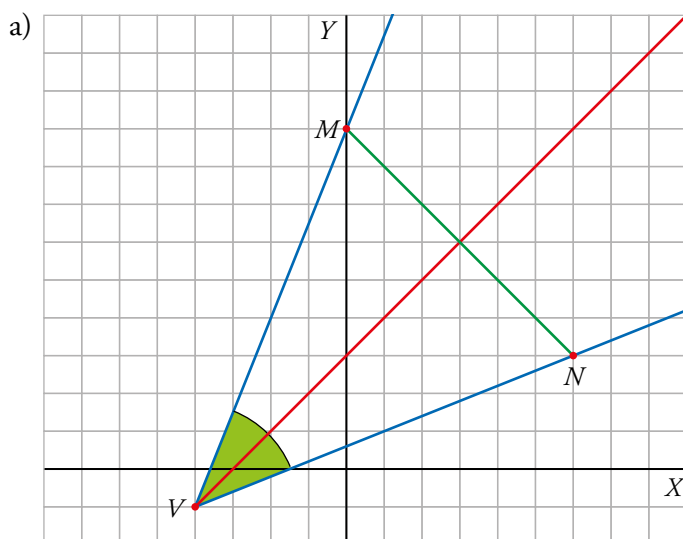
### Practica

#### Bisectriz y mediatriz

1 Copia esta figura en tu cuaderno (con cuadrícula grande trabajarás mejor):

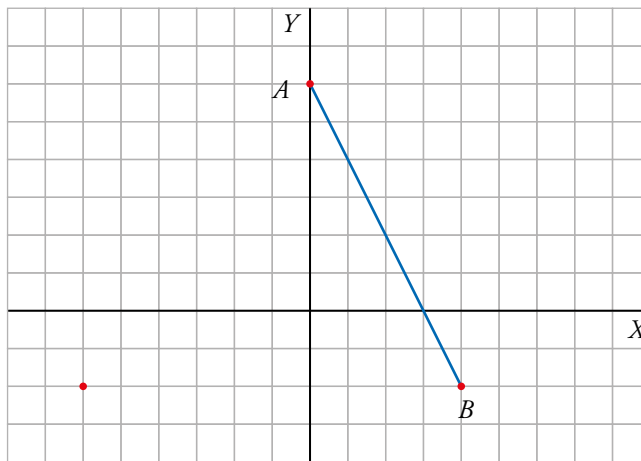


- Traza la bisectriz del ángulo  $\widehat{MVN}$ .
- Comprueba que los segmentos  $VM$  y  $VN$  tienen la misma longitud.
- Dibuja el segmento  $MN$  y traza su mediatriz. ¿Qué observas?

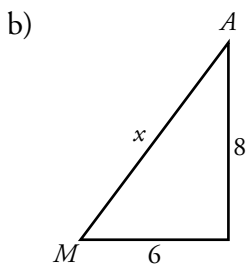
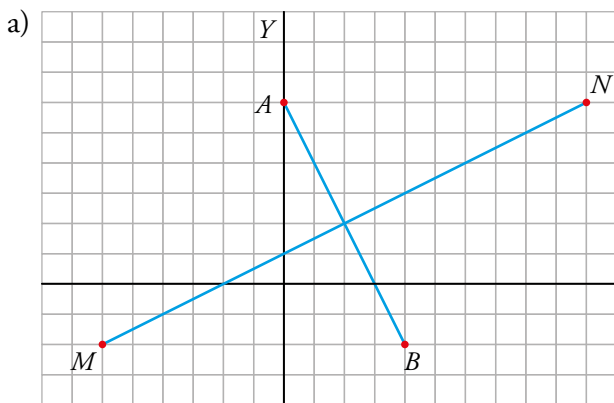


- Midiendo con una regla, se comprueba que  $VM$  y  $VN$  tienen la misma longitud.  
 También puede comprobarse fijándonos en que los segmentos  $VM$  y  $VN$  son las hipotenusas de triángulos rectángulos en los que los catetos miden 10 y 4 cuadraditos de la cuadrícula.
- La mediatriz del segmento  $MN$  coincide con la bisectriz del ángulo  $\widehat{MVN}$ .

2 Observa y reproduce esta figura en tu cuaderno (con cuadrícula grande trabajarás mejor):



- Traza la mediatriz del segmento  $AB$  y comprueba que pasa por  $M$ .
- Tomando el lado de la cuadrícula como unidad, ¿a qué distancia está  $A$  de  $M$ ?
- Señala el punto,  $N$ , simétrico de  $M$  respecto al segmento  $AB$ . ¿Cuáles son sus coordenadas?



$$x^2 = 8^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10$$

$M$  dista 10 unidades del punto  $A$ .

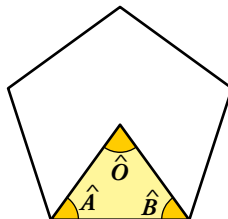
c)  $N = (10, 6)$

## Ángulos

- 3 Observa el triángulo coloreado dentro del pentágono regular y explica el proceso seguido para obtener la medida de cada uno de sus ángulos,  $\hat{O}$ ,  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ :

$$\hat{O} = \frac{360}{5} = 72^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{180 - 72}{2} = 54^\circ = \hat{B}$$



A la vista de los ángulos, ¿cómo es el triángulo, equilátero, isósceles o escaleno?

- $\hat{O}$  es el ángulo central de un pentágono regular, por tanto:

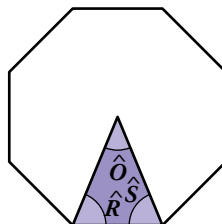
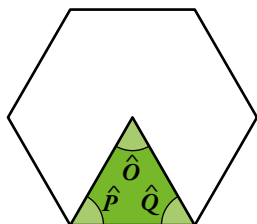
$$\hat{O} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

- La suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ . En el triángulo amarillo, además, los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  son iguales. Por tanto:

$$\hat{A} = \frac{180 - 72}{2} = 54^\circ = \hat{B}$$

- El triángulo es isósceles.

- 4 Siguiendo un proceso similar al del ejercicio anterior, calcula los ángulos señalados en el hexágono regular y en el octógono regular.



¿Cómo son los triángulos coloreados?

- Hexágono regular:

$$\hat{O} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \quad \hat{P} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ = \hat{Q}$$

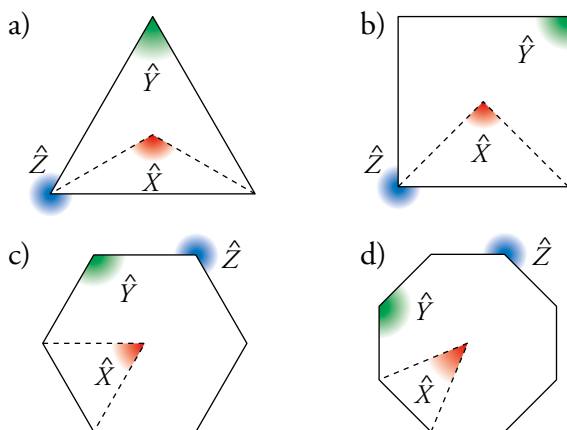
El triángulo es equilátero.

- Octógono regular:

$$\hat{O} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \quad \hat{R} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ = \hat{S}$$

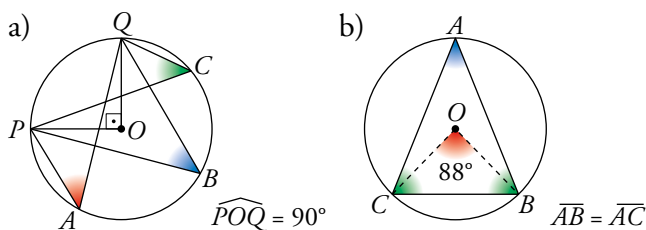
El triángulo es isósceles.

**5** Calcula los ángulos  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  en los siguientes polígonos regulares:



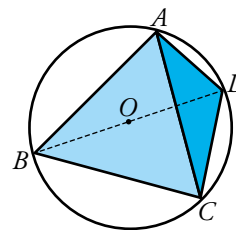
- a)  $\hat{X} = 360^\circ : 3 = 120^\circ$   
 $\hat{Y}$  es un ángulo del triángulo equilátero.  $\hat{Y} = 60^\circ$   
 $\hat{Z} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$
- b)  $\hat{X} = 360^\circ : 4 = 90^\circ$   
 $\hat{Y}$  es un ángulo del cuadrado.  $\hat{Y} = 90^\circ$   
 $\hat{Z} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$
- c)  $\hat{X} = 360^\circ : 6 = 60^\circ$   
 $\hat{Y} = \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$   
 $\hat{Z} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$
- d)  $\hat{X} = 360^\circ : 8 = 45^\circ$   
 $\hat{Y} = \frac{(8-2) \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$   
 $\hat{Z} = 360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$

**6** ¿Cuánto miden los ángulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  en cada una de estas figuras?



- a)  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  son ángulos inscritos cuyo central correspondiente es  $\widehat{POQ} = 90^\circ$ .  
 Entonces  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$
- b)  $\hat{A}$  es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente es  $\widehat{BOC} = 88^\circ$ .  
 $\hat{A} = 88^\circ : 2 = 44^\circ$   
 $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  suman  $180^\circ$  y  $\hat{B} = \hat{C}$ .  
 $(180^\circ - 44^\circ) : 2 = 136^\circ : 2 = 68^\circ$   
 $\hat{A} = 44^\circ$ ,  $\hat{B} = \hat{C} = 68^\circ$

**7** El triángulo  $ABC$  es equilátero y  $O$  es el centro de la circunferencia.



Calcula los ángulos del trapecioide  $ABCD$ .

- $\hat{B} = 60^\circ$

- $\hat{D}$  es un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un arco de  $240^\circ$ . Por tanto:

$$\hat{D} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$$

- Los cuatro ángulos del trapecioide tienen que sumar  $360^\circ$ . Además  $\hat{A} = \hat{C}$ . Por tanto:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \rightarrow \hat{A} + 60^\circ + \hat{C} + 120^\circ = 360^\circ \rightarrow 2\hat{A} = 180^\circ \rightarrow \hat{A} = 90^\circ = \hat{C}.$$

### Semejanza

**8** Debajo tienes el plano de un piso a escala  $1/250$ . Calcula sus dimensiones (largo y ancho) y su superficie.

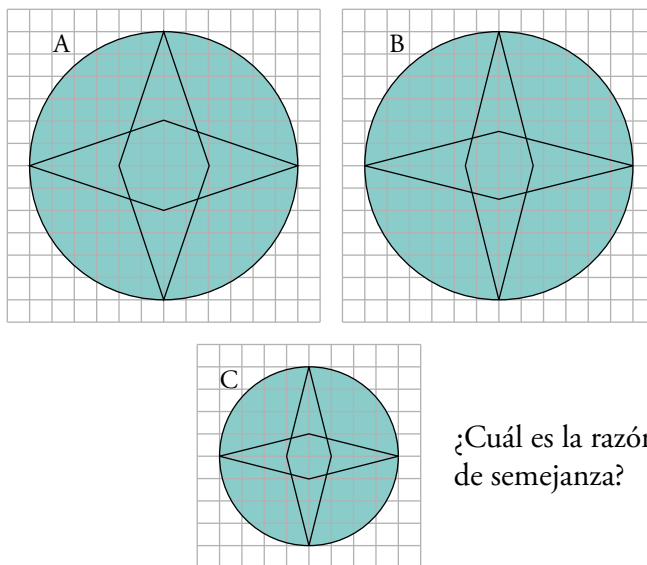


Ancho  $\rightarrow 3,7 \text{ cm} \cdot 250 = 925 \text{ cm} = 9,25 \text{ m}$

Largo  $\rightarrow 7 \cdot 250 = 1750 \text{ cm} = 17,5 \text{ m}$

Área  $= 9,25 \cdot 17,5 = 161,875 \text{ m}^2$

9 Dos de estas figuras son semejantes. ¿Cuáles?

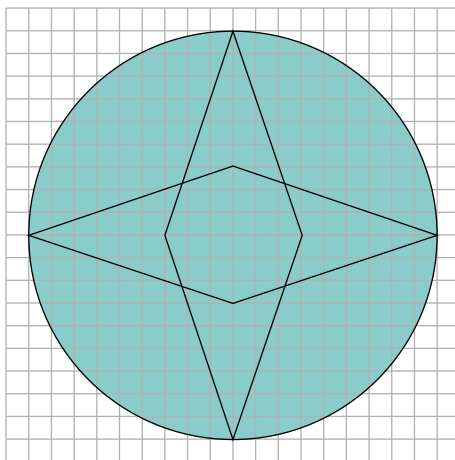


¿Cuál es la razón de semejanza?

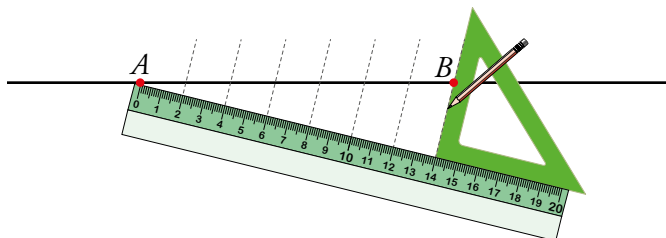
Dibuja en tu cuaderno una figura semejante a la figura A, de forma que la razón de semejanza sea  $3/2$ .

Las figuras B y C son semejantes. Su razón de semejanza es  $r = \frac{2}{3}$

Para dibujar la figura semejante a A, multiplico cada medida por  $\frac{3}{2}$



10 Dibuja en tu cuaderno un segmento cualquiera,  $AB$ , y divídelo en 7 partes iguales como se hace en la ilustración. Justifica el procedimiento seguido.

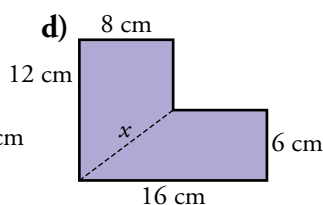
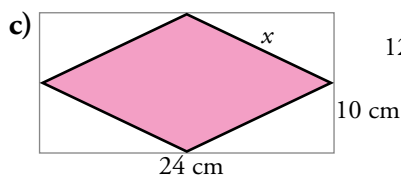
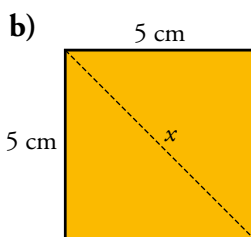
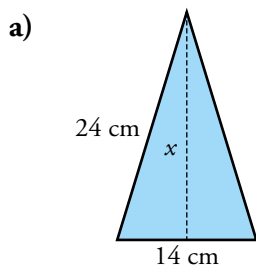


La razón entre dos segmentos cualesquiera de los señalados sobre la regla es siempre 1, pues todos miden lo mismo.

Por el teorema de Tales, la razón entre dos segmentos cualesquiera de los señalados sobre el segmento  $AB$  también tiene que ser 1, pues tiene que coincidir con la razón de los segmentos correspondientes de los señalados sobre la regla. Si la razón entre dos segmentos es 1, quiere decir que miden lo mismo. Por tanto, el segmento  $AB$  está dividido en 7 partes iguales.

## Teorema de Pitágoras

**11** Calcula el valor de  $x$  en cada figura:



$$a) 24^2 = x^2 + 7^2 \rightarrow 576 = x^2 + 49 \rightarrow x^2 = 527$$

$$x = \sqrt{527} = 22,96 \text{ cm.}$$

$$b) x^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 25 + 25 \rightarrow x^2 = 50$$

$$x = \sqrt{50} \rightarrow x = 7,07 \text{ cm.}$$

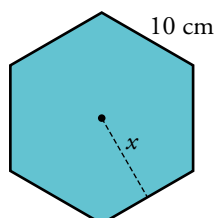
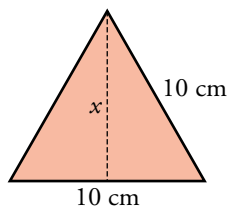
$$c) x^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow x^2 = 144 + 25 \rightarrow x^2 = 169$$

$$x = \sqrt{169} \rightarrow x = 13 \text{ cm.}$$

$$d) x^2 = 8^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 64 + 36 \rightarrow x^2 = 100$$

$$x = \sqrt{100} \rightarrow x = 10 \text{ cm.}$$

**12** Calcula la altura del triángulo equilátero y la apotema del hexágono regular.



- Altura del triángulo equilátero.

$$10^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 100 = x^2 + 25 \rightarrow x^2 = 75$$

$$x = \sqrt{75} \rightarrow x = 8,66 \text{ cm.}$$

- Apotema del hexágono regular:

Teniendo en cuenta que en un hexágono regular el lado mide lo mismo que el radio, su apotema es la altura de un triángulo equilátero de lado 10 cm; es decir, lo que se ha calculado en el caso anterior.

Por tanto:  $x = 8,66 \text{ cm.}$

**13 Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

a) 5 m, 6 m y 7 m

b) 13 m, 15 m y 20 m

c) 45 m, 27 m y 36 m

d) 35 m, 28 m y 46 m

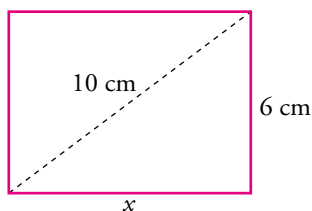
a)  $5^2 + 6^2 = 61 > 49 = 7^2 \rightarrow$  Triángulo acutángulo

b)  $13^2 + 15^2 = 394 < 400 = 20^2 \rightarrow$  Triángulo obtusángulo

c)  $27^2 + 36^2 = 2025 = 45^2 \rightarrow$  Triángulo rectángulo

d)  $28^2 + 35^2 = 2009 < 2116 = 46^2 \rightarrow$  Triángulo obtusángulo

**14 La diagonal de un rectángulo mide 10 cm, y uno de los lados, 6 cm. Calcula su perímetro.**

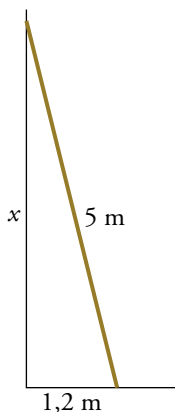


$$10^2 = 6^2 + x^2 \rightarrow 100 = 36 + x^2 \rightarrow x^2 = 100 - 36$$

$$x = \sqrt{64} \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

$$P = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 12 + 16 = 28 \text{ cm}$$

**15 Una escalera de 5 m de largo está apoyada en la pared. Su extremo inferior está a 1,2 m de ella. ¿Qué altura alcanza su extremo superior?**

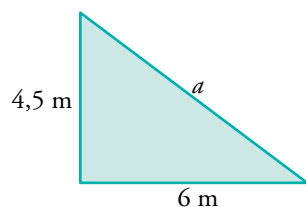


$$5^2 = 1,2^2 + x^2 \rightarrow 25 = 1,44 + x^2 \rightarrow x^2 = 25 - 1,44$$

$$x = \sqrt{23,56} = 4,85 \text{ m}$$

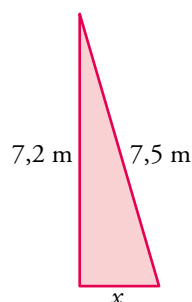
*Solución:* El extremo superior alcanza una altura de 4,85 m.

**16 En un triángulo rectángulo, los catetos miden 4,5 m y 6 m. En otro triángulo rectángulo, un cateto mide 7,2 m, y la hipotenusa, 7,5 m. ¿Cuál de los dos tiene mayor perímetro?**



$$a^2 = 6^2 + 4,5^2 \rightarrow a^2 = 36 + 20,25 \rightarrow a = \sqrt{56,25} = 7,5 \text{ m}$$

$$P = 7,5 + 4,5 + 6 = 18 \text{ m}$$



$$7,5^2 = 7,2^2 + x^2 \rightarrow 56,25 = 51,84 + x^2 \rightarrow x^2 = 56,25 - 51,84$$

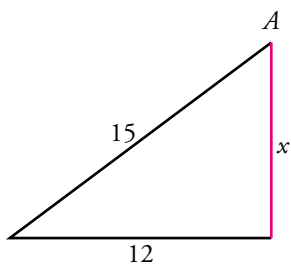
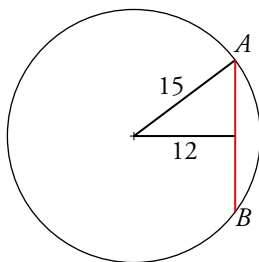
$$x = \sqrt{4,41} = 2,1 \text{ m}$$

$$P = 7,5 + 7,2 + 2,1 = 16,8 \text{ m}$$

*Solución:* El primer triángulo tiene mayor perímetro.



- 17** En una circunferencia de 15 cm de radio, se traza una cuerda,  $AB$ , a 12 cm del centro.  
¿Cuál es la longitud de  $AB$ ?



$$\rightarrow 15^2 = x^2 + 12^2 \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = 9 \text{ cm}$$

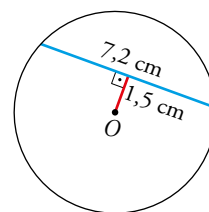
$$\overline{AB} = 2 \cdot x = 2 \cdot 9 = 18 \text{ cm}$$

**18** Observa y calcula:

a) El radio de la circunferencia.

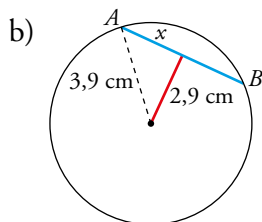
b) La longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm.

c) La distancia al centro de una cuerda que mide 4,68 cm.



a)  $r^2 = 1,5^2 + 3,6^2 \rightarrow r^2 = 2,25 + 12,96 \rightarrow r^2 = 15,21$

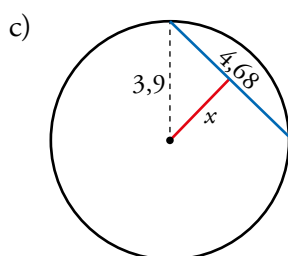
$r = \sqrt{15,21} \rightarrow r = 3,9$  cm



$3,9^2 = x^2 + 2,9^2 \rightarrow 15,21 = x^2 + 8,41 \rightarrow x^2 = 15,21 - 8,41$

$x = \sqrt{6,8} \rightarrow x = 2,6$  cm

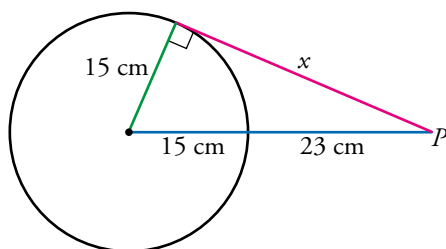
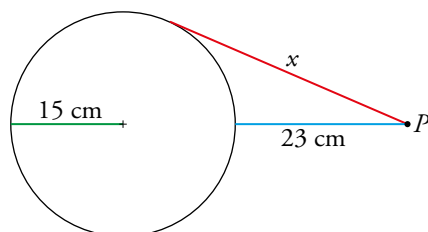
$\overline{AB} = 2 \cdot 2,6 = 5,2$  cm



$3,9^2 = x^2 + (4,68 : 2)^2 \rightarrow 15,21 = x^2 + 5,4756$

$x^2 = 9,7344 \rightarrow x = 3,12$  cm

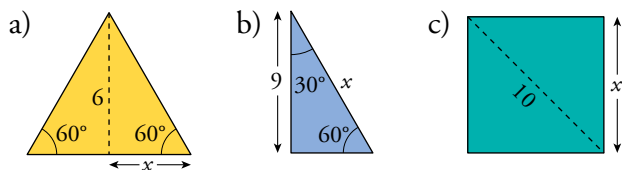
**19** Un punto  $P$  está a 23 cm de una circunferencia de 30 cm de diámetro. Calcula la longitud del segmento tangente desde  $P$  a la circunferencia.



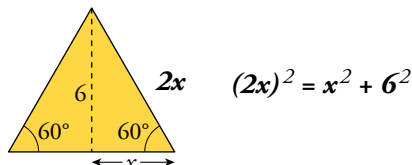
$(15 + 23)^2 = x^2 + 15^2 \rightarrow 1444 = x^2 + 225$

$x^2 = 1219 \rightarrow x = 34,91$  cm

**20** Calcula  $x$  en cada caso (todas las medidas están en centímetros):



**a)** El triángulo amarillo es equilátero y el lado mide  $2x$ .



**b)** ¿Se puede contemplar el triángulo azul como la mitad de un triángulo equilátero?

$$a) (2x)^2 = x^2 + 6 \rightarrow 4x^2 = x^2 + 36 \rightarrow 3x^2 = 36$$

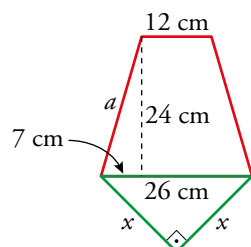
$$x^2 = 12 \rightarrow x = 3,46 \text{ cm}$$

$$b) x^2 = 9^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 = 81 + \frac{x^2}{4} \rightarrow 4x^2 = 324 + x^2 \rightarrow 3x^2 = 324 \rightarrow x^2 = 108 \rightarrow x = 10,39 \text{ cm}$$

$$c) 10^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 100 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 50$$

$$x = 7,07 \text{ cm}$$

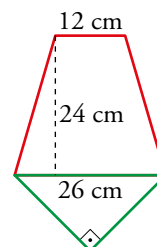
**21** Este pentágono se ha formado haciendo coincidir la base mayor de un trapecio isósceles con la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles. Halla el perímetro del pentágono.



$$a^2 = 24^2 + 7^2 \rightarrow a^2 = 576 + 49 \rightarrow a = \sqrt{625} \rightarrow a = 25 \text{ cm}$$

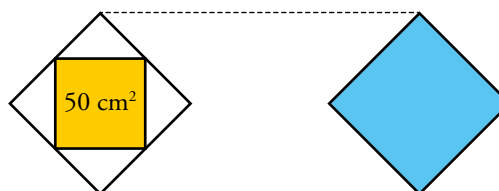
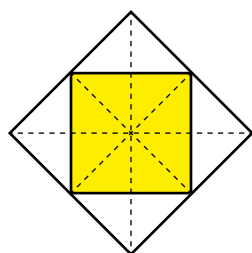
$$26^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 676 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 338 \rightarrow x = \sqrt{338} = 18,3 \text{ cm}$$

$$P = 12 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 18,3 = 98,6 \text{ cm}$$



## Áreas

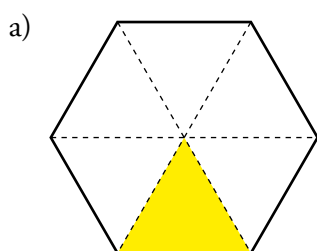
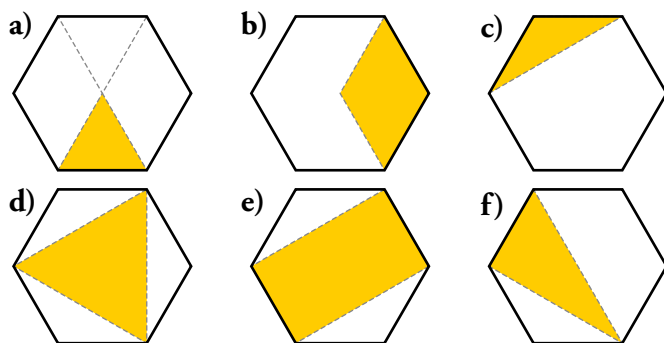
**22** El área del cuadrado amarillo es  $50 \text{ cm}^2$ .  
Calcula el área y el lado del cuadrado azul.



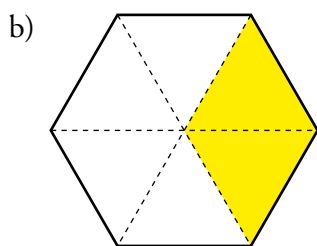
Sin hacer ningún cálculo, solo dividiendo la figura, vemos que la superficie del cuadrado azul es dos veces la del cuadrado amarillo  
 $\rightarrow A = 5 \cdot 50 = 100 \text{ cm}^2$

- El lado de un cuadrado de  $100 \text{ cm}^2$  de área es:  $l = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$

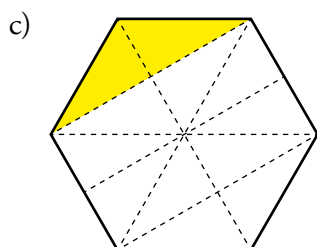
**23** El área de un hexágono regular mide  $18 \text{ m}^2$ . Calcula el área de cada una de las zonas señaladas en su interior.



$$A = \frac{18}{6} = 3 \text{ m}^2$$



$$A = \frac{18}{6} = 6 \text{ m}^2$$



$$A = \frac{2}{6} \cdot 18 = 3 \text{ m}^2$$

d) Fijándonos en el apartado anterior:

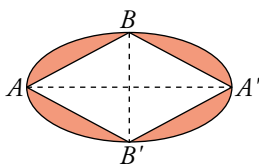
$$A = 18 - 3 \cdot 3 = 9 \text{ m}^2$$

e) Fijándonos en el apartado c):

$$A = 18 - 2 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2$$

f)  $A = 18 - 9 - 3 = 6 \text{ m}^2$

**24** Las diagonales del rombo inscrito en la elipse miden  $16 \text{ cm}$  y  $30 \text{ cm}$ . Halla el área de la parte coloreada.



$$\text{Área de la elipse} = \pi \cdot 8 \cdot 15 = 120\pi \text{ cm}^2 \approx 377 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del rombo} = \frac{16 \cdot 30}{2} = 240 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = 120\pi - 240 = 136,9 \text{ cm}^2$$

**25** Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:

- a) 90°                      b) 120°                      c) 72°                      d) 153°

a) Área =  $\frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 176,7 \text{ cm}^2$

Perímetro =  $\frac{2\pi \cdot 15 \cdot 90^\circ}{360^\circ} + 2 \cdot 15 = 53,5 \text{ cm}$

b) Área =  $\frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 235,6 \text{ cm}^2$

Perímetro =  $\frac{2\pi \cdot 15 \cdot 120^\circ}{360^\circ} + 2 \cdot 15 = 61,4 \text{ cm}$

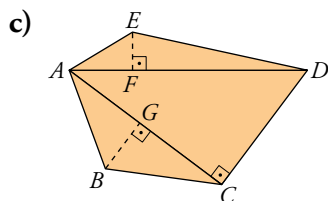
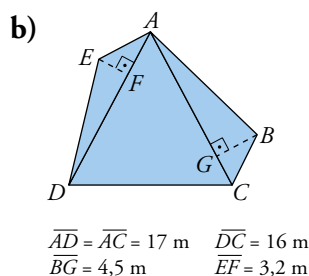
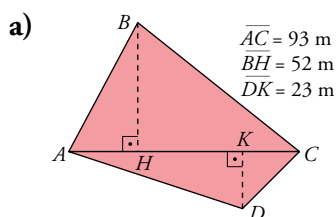
c) Área =  $\frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 72^\circ}{360^\circ} = 141,4 \text{ cm}^2$

Perímetro =  $\frac{2\pi \cdot 15 \cdot 72^\circ}{360^\circ} + 2 \cdot 15 = 48,8 \text{ cm}$

d) Área =  $\frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 153^\circ}{360^\circ} = 300,4 \text{ cm}^2$

Perímetro =  $\frac{2\pi \cdot 15 \cdot 153^\circ}{360^\circ} + 2 \cdot 15 = 70,1 \text{ cm}$

**26** Halla el área de estos polígonos:



a) Área =  $\frac{93 \cdot 52}{2} + \frac{93 \cdot 23}{2} = 2\,418 + 1\,069,5 = 3\,487,5 \text{ m}^2$

b)  $17^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow 289 = x^2 + 64 \rightarrow x^2 = 225$

$x = \sqrt{225} \rightarrow x = 15 \text{ m}$

Calculamos el área como suma de las áreas de los tres triángulos.

Área =  $\frac{3,2 \cdot 17}{2} + \frac{4,5 \cdot 17}{2} + \frac{15 \cdot 16}{2} = 27,2 + 38,25 + 120 = 185,45 \text{ m}^2$

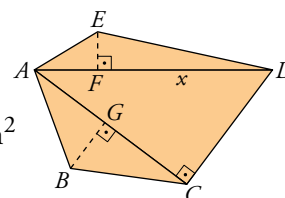
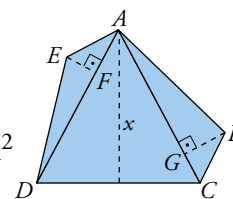
Área = 185,45 m<sup>2</sup>

c) Calculamos el área como suma de las áreas de los tres triángulos

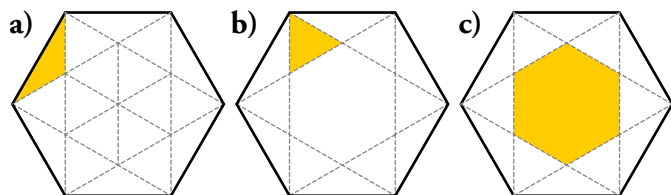
$x^2 = 28^2 + 21^2 \rightarrow x^2 = 1\,225 \rightarrow x = \sqrt{1\,225} \rightarrow x = 35 \text{ m}$

Área =  $\frac{35 \cdot 5,6}{2} + \frac{8,4 \cdot 28}{2} + \frac{28 \cdot 21}{2} = 98 + 117,6 + 294 = 509,6 \text{ m}^2$

Área = 509,6 m<sup>2</sup>



**27** Calcula el área de cada una de las zonas señaladas dentro del hexágono de área  $18 \text{ m}^2$ :



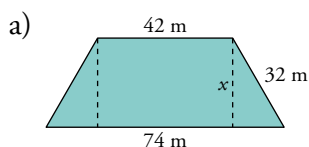
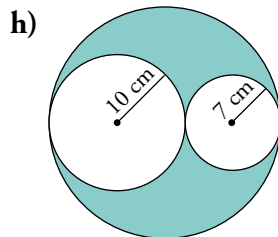
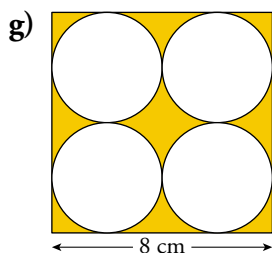
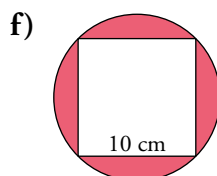
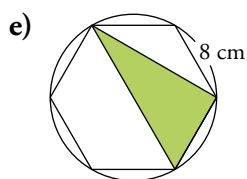
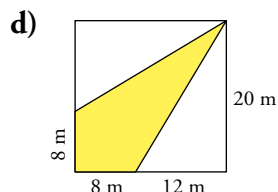
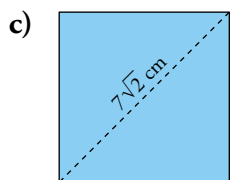
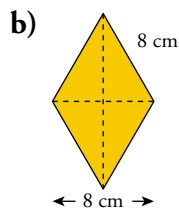
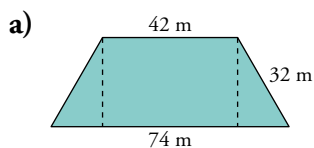
a) Todos los triángulos en los que está dividido el hexágono tienen la misma área. Por tanto:

$$A = \frac{18}{18} = 1 \text{ m}^2$$

b)  $A = 1 \text{ m}^2$ , por el apartado anterior.

c)  $A = 18 - 12 = 6 \text{ m}^2$

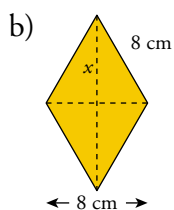
**28** Calcula el área de las figuras coloreadas.



$$32^2 = 16^2 + x^2 \rightarrow 1024 = 256 + x^2 \rightarrow x^2 = 768$$

$$x = \sqrt{768} \rightarrow x = 16\sqrt{3} \text{ m} \approx 27,71 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{42 + 74}{2} \cdot 16\sqrt{3} = 928\sqrt{3} \text{ m} \approx 1607,3 \text{ m}^2$$

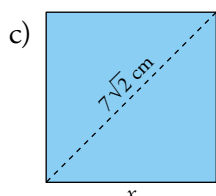


$$8^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow 64 = 16 + x^2 \rightarrow x^2 = 64 - 16$$

$$x = \sqrt{48} \rightarrow x = 4\sqrt{3} \text{ cm} \approx 6,9 \text{ cm}$$

$$D = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \text{ cm} \approx 13,8 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 55,4 \text{ cm}^2$$

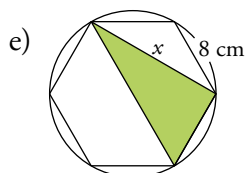


$$x^2 + x^2 = (7\sqrt{2})^2 \rightarrow 2x^2 = 2 \cdot 49 \rightarrow x^2 = 49$$

$$x = 7 \text{ cm}$$

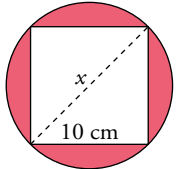
$$\text{Área} = 7^2 = 49 \text{ cm}^2$$

d)  $A_{\text{CUADRADO}} = 20^2 = 400 \text{ u}^2$ ;  $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{20 \cdot 12}{2} = 120 \text{ u}^2$ ;  $\text{Área} = 400 - 2 \cdot 120 = 160 \text{ u}^2$



$$16^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow 256 = x^2 + 64 \rightarrow x^2 = 192 \rightarrow x = 8\sqrt{3} \approx 13,8 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3} \approx 55,4 \text{ cm}^2$$

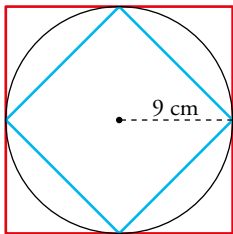
f)   $x^2 = 10^2 + 10^2 \rightarrow x^2 = 200 \rightarrow x = 10\sqrt{2} \approx 14,1 \text{ cm}$   
 $r = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm} \approx 7,07 \text{ cm}$   
 $\text{Área} = \pi \cdot (5\sqrt{2})^2 - 10^2 = 50\pi - 100 = 57,1 \text{ cm}^2$

g) Área del cuadrado =  $8^2 = 64 \text{ cm}^2$   
 Área del círculo =  $\pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2 \approx 12,56 \text{ cm}^2$   
 Área =  $64 - 4 \cdot 4\pi = 64 - 16\pi = 13,73 \text{ cm}^2$

h) Área círculo grande =  $\pi \cdot 17^2 = 289\pi \text{ cm}^2 \approx 907,9 \text{ cm}^2$   
 Área círculo mediano =  $\pi \cdot 10^2 = 100\pi \text{ cm}^2 \approx 314,2 \text{ cm}^2$   
 Área círculo pequeño =  $\pi \cdot 7^2 = 49\pi \text{ cm}^2 \approx 153,9 \text{ cm}^2$   
 Área total =  $289\pi - (100\pi + 49\pi) = 140\pi \approx 439,8 \text{ cm}^2$

**29** En una circunferencia de 56,52 cm de longitud, dibuja el cuadrado circunscrito y el cuadrado inscrito. Calcula el área y el perímetro de cada cuadrado (toma  $\pi = 3,14$ ).

Calculamos el radio:  $56,52 = 2\pi \cdot r \rightarrow r = \frac{56,52}{2\pi} \rightarrow r = 9 \text{ cm}$



Área cuadrado circunscrito =  $18^2 = 324 \text{ cm}^2$

Perímetro cuadrado circunscrito =  $4 \cdot 18 = 72 \text{ cm}$

Calculamos el lado del cuadrado inscrito:

$x^2 = 9^2 + 9^2 \rightarrow x^2 = 81 + 81 \rightarrow x^2 = 162 \rightarrow x = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \approx 12,7 \text{ cm}$

Área cuadrado inscrito =  $(9\sqrt{2})^2 = 162 \text{ cm}^2$

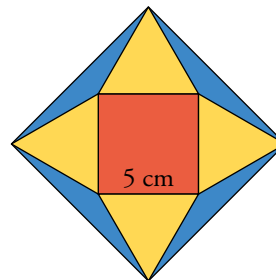
Perímetro cuadrado inscrito =  $4 \cdot 9\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \approx 50,9 \text{ cm}$

**30** Calcula:

a) La superficie de la zona coloreada de rojo.

b) La superficie de la zona coloreada de amarillo.

c) La superficie de la zona coloreada de azul.



a) Área zona roja =  $5^2 = 25 \text{ cm}^2$

b)  $x^2 + 2,5^2 = 5^2 \rightarrow x^2 = 25 - 6,25 \rightarrow x^2 = 18,75 \rightarrow x = 4,3 \text{ cm}$

Área de un triángulo =  $\frac{5 \cdot 4,3}{2} = 10,75 \text{ cm}^2$

Área zona amarilla =  $4 \cdot 10,75 = 43 \text{ cm}^2$

c) Calculamos las diagonales:  $5 + 2 \cdot 4,3 = 13,6 \text{ cm}$

Área cuadrado grande =  $\frac{13,6 \cdot \frac{13,6}{2}}{2} \cdot 2 = \frac{13,6 \cdot 13,6}{2} = 92,48 \text{ cm}^2$

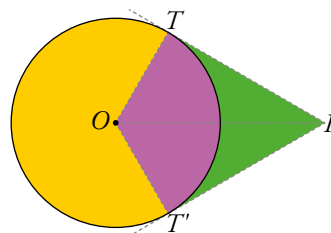
Área zona azul =  $92,48 - (25 + 43) = 24,48 \text{ cm}^2$



**31** Calcula el área que ocupa cada color:

$$\overline{OT} = 15 \text{ cm}$$

$$\overline{OP} = 30 \text{ cm}$$



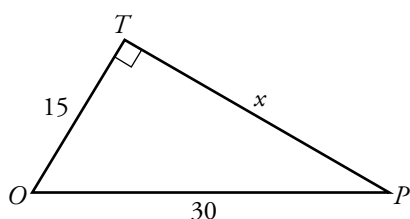
- El color morado ocupa  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  de la superficie del círculo:

$$A_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 = 235,62 \text{ cm}^2$$

- El color amarillo ocupa  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$  de la superficie del círculo:

$$A_2 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 = 471,24 \text{ cm}^2$$

- Para calcular la superficie verde, empezamos calculando la longitud del segmento  $TP$ :



$$30^2 = x^2 + 15^2 \rightarrow x = 25,98$$

$$x = 25,98 \text{ cm}$$

El área del triángulo  $OTP$  es  $\frac{15 \cdot 25,98}{2} = 194,85 \text{ cm}^2$ .

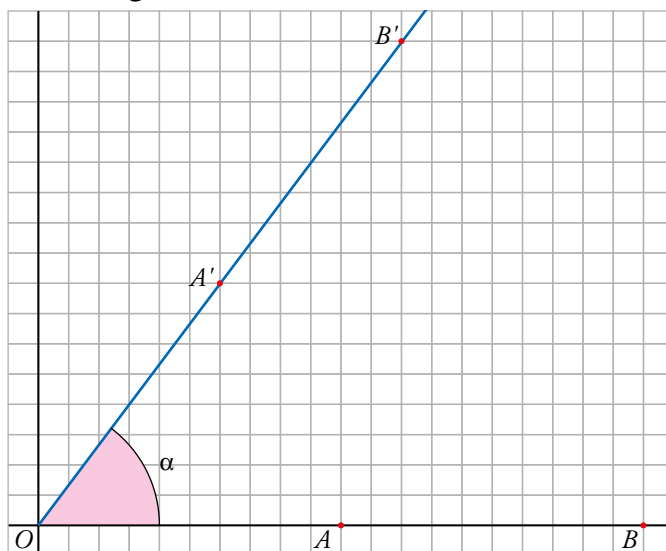
El área del cuadrilátero  $OTPT'$  es  $194,85 \cdot 2 = 397,7 \text{ cm}^2$ .

El área que ocupa la zona verde es la que ocupa el cuadrilátero  $OTPT'$  menos la que ocupa la zona morada:

$$A_3 = 397,7 - 235,62 = 154,08 \text{ cm}^2.$$

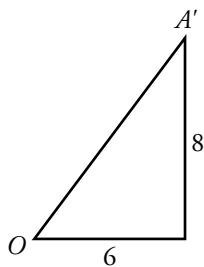
Resuelve problemas

32 Observa y reproduce esta figura en tu cuaderno:

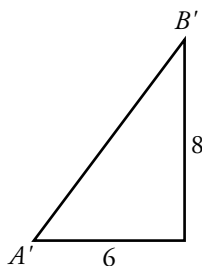


- Comprueba que  $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{OA'} = \overline{A'B'}$ .
- Traza la bisectriz del ángulo  $\alpha$ .
- Traza las mediatrices de los segmentos  $OB$  y  $OB'$  y llama  $C$  al punto en el que se cortan.
- Tomando como unidad el lado de la cuadrícula, ¿cuánto mide  $\overline{CA}$ ? ¿Y  $\overline{CA'}$ ?
- ¿Qué puedes decir del punto  $C$ ?

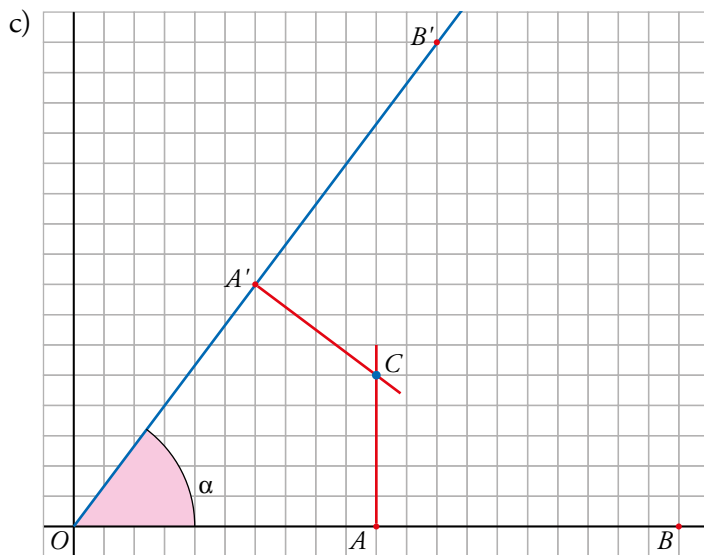
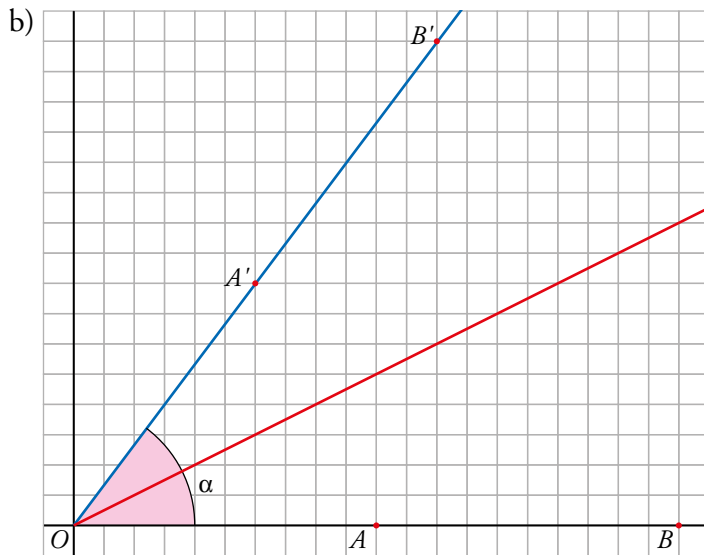
a) Tomando como unidad la medida de un lado de la cuadrícula:  
 $\overline{OA} = \overline{OB} = 10 \text{ u}$



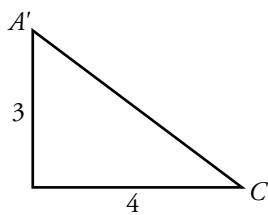
$$\rightarrow \overline{OA'} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ u}$$



$$\rightarrow \overline{A'B'} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ u}$$



d)  $\overline{CA} = 5 u$

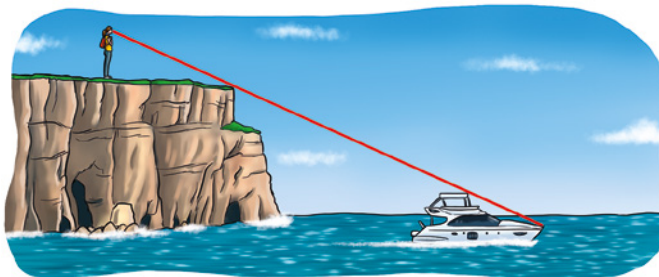


$$\overline{CA'} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 u$$

$$\overline{CA} = \overline{CA'} = 5 u$$

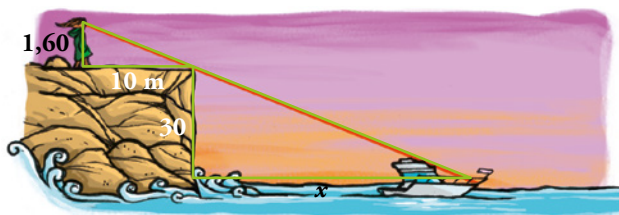
e) El punto C pertenece a la bisectriz del ángulo  $\alpha$ .

- 33** Maribel mide 1,60 m de altura y se encuentra sobre un acantilado, a 30 m sobre el nivel del mar. Ve una barca que navega a cierta distancia de la costa y comprueba que, si se aleja más de 10 metros del borde, hacia el interior, deja de ver la barca. ¿A qué distancia se encuentra la embarcación de la base del acantilado?

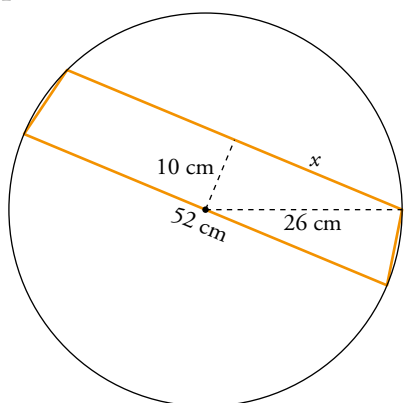


Son triángulos semejantes:  $\frac{30}{1,6} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 10}{1,6} \rightarrow x = 187,5 \text{ m}$

*Solución:* La embarcación se encuentra a 187,5 m de la base del acantilado.



- 34** En un círculo de 52 cm de diámetro se traza una cuerda a 10 cm del centro. Halla el área del cuadrilátero que se forma uniendo los extremos de la cuerda con los del diámetro paralelo a ella.



$$26^2 = 10^2 + x^2 \rightarrow 676 = 100 + x^2 \rightarrow x^2 = 576 \rightarrow x = \sqrt{576} \rightarrow x = 24 \text{ cm}$$

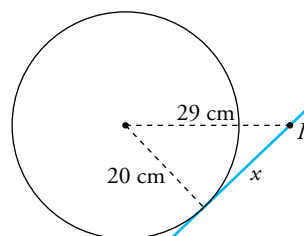
La base menor mide  $24 \cdot 2 = 48 \text{ cm}$

$$\text{Área} = \frac{48 + 52}{2} \cdot 10 = 500 \text{ cm}^2$$

*Solución:* El área del cuadrilátero es de  $500 \text{ cm}^2$ .

- 35** Desde un punto  $P$  que dista 29 cm del centro de una circunferencia de radio 20 cm, se traza una tangente. Calcula la distancia de  $P$  al punto de tangencia.

a)  $29^2 = 20^2 + x^2 \rightarrow 841 = 400 + x^2 \rightarrow x^2 = 441 \rightarrow x = \sqrt{441} \rightarrow x = 21 \text{ cm}$

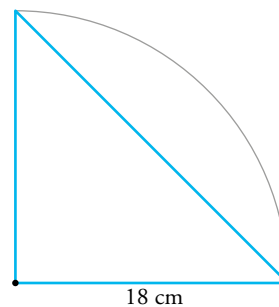


**37** Calcula el área de un segmento circular de  $90^\circ$  de amplitud en un círculo de 18 cm de radio.

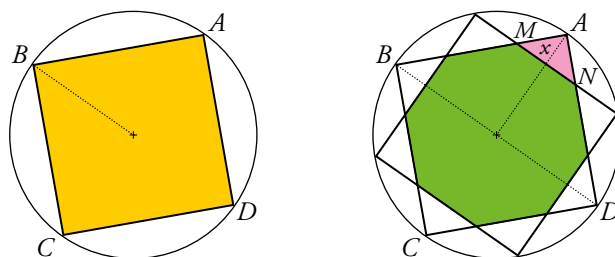
$$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \frac{\pi \cdot 18^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 254,5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{18 \cdot 18}{2} = 162 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 254,5 - 162 = 92,5 \text{ cm}^2$$

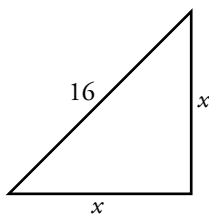


**38** Observa las figuras y calcula los elementos que se te piden después:



- La apotema del cuadrado amarillo y del octógono verde.
- El lado del octógono (los triángulos  $ABD$  y  $AMN$  son semejantes).
- El área del cuadrado y el área del octógono.

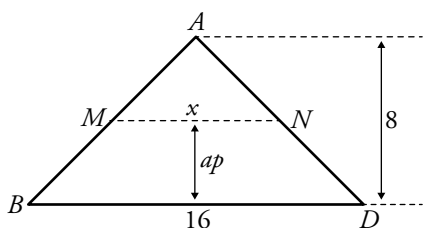
a) Las dos apotemas miden lo mismo. Calculamos la del cuadrado amarillo, que mide lo mismo que medio lado.



$$16^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 16^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{16^2}{2} \rightarrow x = 11,31 \text{ cm mide el lado del cuadrado.}$$

Las apotemas del cuadrado y del octógono miden  $ap = \frac{11,31}{2} = 5,66 \text{ cm}$ .

b)



Por semejanza de los triángulos  $ABD$  y  $AMN$ :

$$\frac{16}{8} = \frac{x}{8 - ap} \rightarrow x = \frac{16(8 - ap)}{8} \rightarrow x = 2(8 - ap) = 2(8 - 5,66) = 4,68 \text{ cm.}$$

El lado del octógono mide 4,68 cm.

c) • En el apartado a) hemos calculado que el lado del cuadrado mide 11,31 cm. Su área es, por tanto:

$$A_{\text{CUADRADO}} = 128 \text{ cm}^2$$

• Calculamos el área del octógono:

$$A_{\text{OCTÓGONO}} = \frac{8 \cdot 4,68 \cdot 5,66}{2} = 105,96 \text{ cm}^2$$

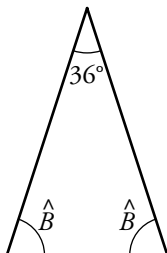
## AUTOEVALUACIÓN

Página 183

1 Calcula el ángulo central y el ángulo interior de un decágono regular.

• Ángulo central =  $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

• Ángulo interior:



$$36^\circ + \widehat{B} + \widehat{B} = 180^\circ \rightarrow \widehat{B} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

El ángulo interior mide  $2\widehat{B} = 144^\circ$ .

2 El triángulo  $ABD$  es equilátero.

Calcula los ángulos coloreados:

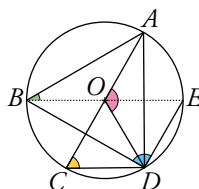
$\widehat{ABE}$ ,  $\widehat{AOD}$ ,  $\widehat{ACD}$ ,  $\widehat{BDE}$

$$\widehat{ABE} = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

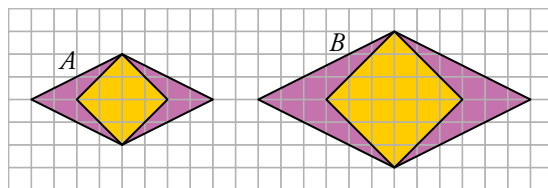
$$\widehat{AOD} = \widehat{AD} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

$$\widehat{ACD} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\widehat{BDE} = \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

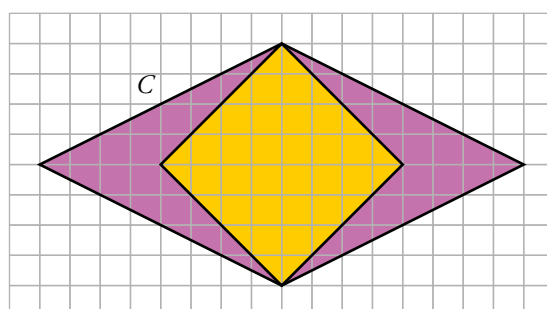


3  $A$  y  $B$  son semejantes. ¿Cuál es la razón de semejanza?

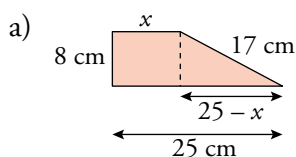
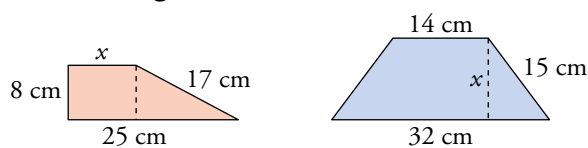


Dibuja en tu cuaderno otra figura semejante,  $C$ , de forma que la razón de semejanza  $B/C$  sea  $3/4$ .

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{La razón de semejanza de } A \text{ y } B \text{ es } 2/3.$$



- 4 a) Calcula  $x$  en cada uno de estos trapecios.  
b) Halla las longitudes de sus diagonales.



$$17^2 = 8^2 + (25 - x)^2$$

$$289 = 64 + 625 - 50x + x^2$$

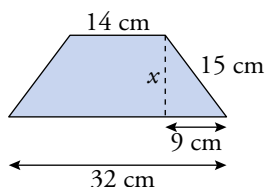
$$x^2 - 50x + 400 = 0$$

$$x = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400}}{2 \cdot 1} = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 1600}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{900}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{50 + 30}{2} = 40 \text{ cm} \\ \frac{50 - 30}{2} = 10 \text{ cm} \end{array} \right\}$$

$x = 40$  no vale porque es mayor que 25.

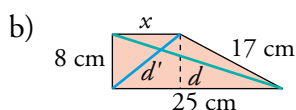
Solución:  $x = 10$  cm.



$$15^2 = 9^2 + x^2 \rightarrow 225 = 81 + x^2 \rightarrow x^2 = 225 - 81$$

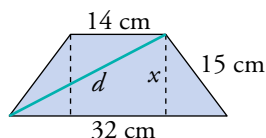
$$x = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

Solución:  $x = 12$  cm.



$$d^2 = 8^2 + 25^2 = 689 \rightarrow d = \sqrt{689} = 26,2 \text{ cm}$$

$$d'^2 = 8^2 + 10^2 = 164 \rightarrow d' = \sqrt{164} = 12,8 \text{ cm}$$

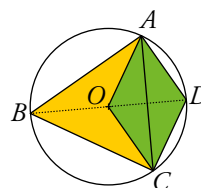


$$d^2 = 23^2 + 12^2 = 673 \rightarrow d = \sqrt{673} = 25,9 \text{ cm}$$

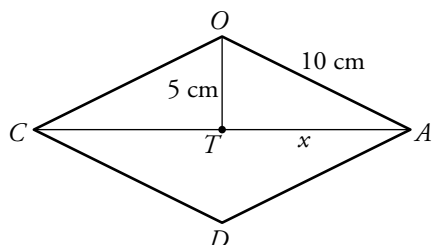
- 5 El triángulo  $ABC$  es equilátero y el radio de la circunferencia mide 10 cm. Calcula el área de los cuadriláteros:

a)  $AOCD$

b)  $ABCO$



a)



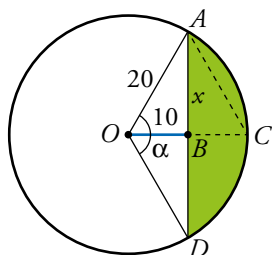
$$x^2 + 5^2 = 10^2 \rightarrow x^2 = 75 \rightarrow x = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$A_{OTA} = \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_{AOCD} = 4 \cdot \left( \frac{25}{2} \cdot \sqrt{3} \right) = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 86,60 \text{ cm}^2$$

b)  $A_{ABCO} = 4 \cdot A_{OTA} = A_{AOCD} = 86,60 \text{ cm}^2$

- 6 En una circunferencia de radio 20 cm, se traza una cuerda a 10 cm del centro. Calcula el área del segmento circular delimitado por la cuerda y el arco correspondiente.



Calculamos  $x$ :  $20^2 = 10^2 + x^2 \rightarrow x = 10\sqrt{3}$  cm

- El triángulo  $AOC$  es equilátero, por tanto,  $\alpha = 120^\circ$ .
- Calculamos el área del sector circular de  $120^\circ$ :

$$A_{SECTOR} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 120}{360} = 418,88 \text{ cm}^2$$

- Calculamos el área del triángulo  $OAD$ :

$$A_{OAD} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 100\sqrt{3} = 173,21 \text{ cm}^2$$

- El área del segmento circular coloreado es el área del sector menos el área del triángulo  $OAD$ :

$$A_{SEGMENTO} = A_{SECTOR} - A_{OAD} = 418,88 - 173,21 = 245,67 \text{ cm}^2$$