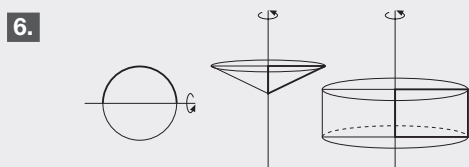


Cuerpos geométricos

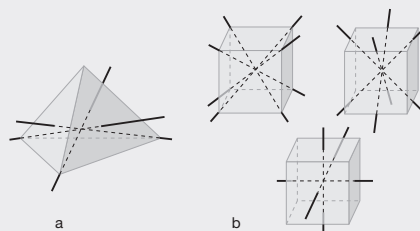
1. Sí. Todas las caras de un poliedro regular pueden apoyarse sobre un plano. Por lo tanto, es un poliedro convexo.
Sí. Todos los poliedros convexos cumplen la relación de Euler.
2. El poliedro de la figura está formado por 2 tetraedros superpuestos y tiene 6 caras, que son triángulos equiláteros idénticos. Por lo tanto, sus caras son polígonos regulares e iguales entre sí. Sin embargo, se observa que en unos vértices concurren 3 caras y en otros 4, por lo que no es un poliedro regular.
3. Cuando su base es un polígono cóncavo.
No, pues su base es un polígono regular y, por lo tanto, convexo.
Sí, pues se trata de un poliedro convexo.
4. No. Un prisma es cóncavo cuando sus bases son polígonos cóncavos.
Los prismas, cóncavos o convexos, cumplen la relación de Euler. Basta observar que un prisma cóncavo tiene el mismo número de caras, aristas y vértices que un prisma convexo cuya base tenga el mismo número de lados.
5. En la pirámide recta todas sus caras laterales son triángulos isósceles y en la oblicua no todos lo son.



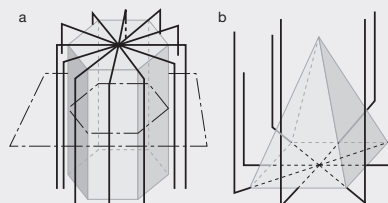
7. a) Actividad TIC
b) París (2° 20' E, 48° 52' N); Tokio (139° 46' E, 35° 42' N); Río de Janeiro (43° 17' O, 22° 53' S); Ankara (32° 50' E, 39° 55' N); El Cairo (31° 15' E, 30° 3' N)
c) Expresamos las longitudes en forma incompleja de grados:
 $8^{\circ} 42' \text{ O} = 8,7^{\circ} \text{ O}$
Calculamos la diferencia entre las longitudes:
 $8,7^{\circ} \text{ O} - 2,8^{\circ} \text{ E} = 11,5^{\circ}$
Puesto que cada 15° corresponde a una diferencia horaria de 1 h:
 $11,5^{\circ} \cdot \frac{1 \text{ h}}{15^{\circ}} = 0,77 \text{ h}$

La diferencia de hora solar entre las ciudades de Vigo y Girona es de 0,77 h, esto es, 46 min.

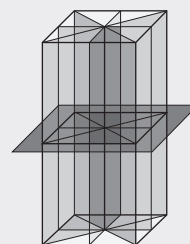
8. a) Un tetraedro tiene 4 ejes de simetría ternarios. Son los formados por las rectas perpendiculares a cada cara que pasan por el vértice opuesto del tetraedro.
b) Un hexaedro tiene 3 ejes de simetría cuaternarios, que pasan por los centros de caras opuestas; 6 ejes de simetría binarios, que unen los puntos medios de aristas opuestas, y 4 ejes ternarios, que unen vértices opuestos.



9. a) Un prisma hexagonal regular tiene 7 planos de simetría, uno de ellos paralelo a las bases y los otros 6 perpendiculares a ellas y que pasan por 2 aristas laterales opuestas o por los puntos medios de 2 aristas opuestas de la base.
b) Una pirámide cuadrada tiene 4 planos de simetría, que pasan por el vértice superior y, además, por 2 vértices opuestos de la base o por los puntos medios de las aristas opuestas de la base.

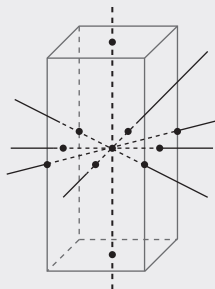


10. a) El rutilo tiene 5 planos de simetría:
 - dos que pasan por los puntos medios de las aristas de la base;
 - dos que pasan por los vértices opuestos de la base;
 - uno que pasa por los puntos medios de las aristas laterales.



- b) El rutilo tiene 5 ejes de giro:
 - un eje de giro de orden cuatro (eje cuaternario) que es la recta perpendicular a las bases y que pasa por su punto medio;

- dos ejes de giro de orden dos (eje binario) que son las rectas paralelas a las bases que pasan por el centro de cada dos caras paralelas;
- dos ejes de giro de orden dos (eje binario) que son las rectas que pasan por los puntos medios de 2 aristas laterales opuestas.



- 11.** Dodecaedro — d — $A = 30 a \cdot ap$
 Octaedro — e — $A = 2\sqrt{3}a^2$
 Cubo — a — $A = 6 a^2$
 Icosaedro — b — $A = 5\sqrt{3}a^2$
 Tetraedro — c — $A = \sqrt{3}a^2$

- 12.** a) Lado que falta en la base:

$$h = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Perímetro del triángulo:

$$P = 3 + 4 + 5 = 12$$

$$A_{\text{lateral}} = P \cdot h = 12 \cdot 7 = 84$$

$$A_{\text{base}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 A_{\text{base}} = 84 + 2 \cdot 6 = 96$$

El área lateral del prisma es de 84 cm² y el área total, de 96 cm².

$$b) A_{\text{lateral}} = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{24 \cdot 5}{2} = 60$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}} = 60 + 6^2 = 96$$

El área lateral de la pirámide es de 60 cm² y el área total, de 96 cm².

$$c) A_{\text{trapecio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(5 + 2) \cdot 7}{2} = 24,5$$

$$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot 24,5 = 98$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{b1} + A_{b2} = 98 + 5^2 + 2^2 = 127$$

El área lateral del tronco de pirámide es de 98 cm² y el área total, de 127 cm².

- 13.** a) $A_{\text{lateral}} = 2 \pi r \cdot g = 2 \pi \cdot 3 \cdot 10 = 188,50$

$$A_{\text{total}} = 2 \pi r \cdot (g + r) = 2 \pi \cdot 3 (10 + 3) = 245,04$$

El área lateral es de 188,50 cm² y el área total, de 245,04 cm².

$$b) g = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} = 12,37$$

$$A_{\text{lateral}} = \pi r \cdot g = \pi \cdot 3 \cdot 12,37 = 116,58$$

$$A_{\text{total}} = \pi r (g + r) = \pi \cdot 3 (12,37 + 3) = 144,86$$

El área lateral es de 116,58 cm² y el área total, de 144,86 cm².

$$c) g = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 10,05$$

$$A_{\text{lateral}} = \pi g (R + r) = \pi \cdot 10,05 (4 + 3) = 221,01$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + \pi R^2 + \pi r^2 = 221,01 + \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 3^2 = 299,55$$

El área lateral es de 221,01 cm² y el área total, de 299,55 cm².

14. $V = a^3$

15. a) $V = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 4 \cdot 8 = 128 \text{ cm}^3$

b) $V = a \cdot b \cdot c = 10 \cdot 2 \cdot 3 = 60 \text{ cm}^3$

c) $V = a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30 \text{ cm}^3$

- 16.** — Sus bases tienen la misma área:

$$A_{\text{base}} = 6 \cdot 2 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2$$

Las secciones por planos paralelos a las bases tienen la misma área, pues estas secciones son iguales a las bases.

— Tienen la misma altura: 9 cm.

Aplicando el principio de Cavalieri, estas condiciones permiten afirmar que tienen el mismo volumen.

17. a) $ap = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 3,46$

$$A_{\text{base}} = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{24 \cdot 3,46}{2} = 41,52$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = 41,52 \cdot 10 = 415,2$$

El volumen del prisma es de 415,2 cm³.

$$b) A_{\text{base}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = 14 \cdot 10 = 140$$

El volumen del prisma es de 140 cm³.

$$c) r = \sqrt{10,44^2 - 10^2} = 3,00$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 282,74$$

El volumen del cilindro es de 282,74 cm³.

18. a) $ap = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = \sqrt{6,75} = 2,60$

$$A_{\text{base}} = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{18 \cdot 2,60}{2} = 23,40$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 23,40 \cdot 10 = 78$$

El volumen de la pirámide es de 78 cm³.

b) $A_{\text{base}} = b \cdot h = 5 \cdot 5 = 25$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 10 = 83,3$$

El volumen de la pirámide es de 83,3 cm³.

c) $r = \sqrt{10,44^2 - 10^2} = \sqrt{6,75} = 3$

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 94,25$$

El volumen del cono es de 94,25 cm³.

19. $V_{\text{semiesfera}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 2^3 = 16,75$

El volumen de la semiesfera es de 16,75 cm³.

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = 25,13$$

El volumen del cilindro es de 25,13 cm³.

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = 8,38$$

El volumen del cono es de 8,38 cm³.

— Los tres cuerpos geométricos tienen la misma altura. Además, las secciones de la semiesfera por un plano paralelo a la base son iguales a las del cilindro menos las del cono. Entonces, si aplicamos el principio de Cavalieri a la semiesfera y al cuerpo que resulta de extraer el cono del cilindro, tenemos que:

$$V_{\text{semiesfera}} = V_{\text{cilindro} - \text{cono}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}}$$

Comprobamos si se cumple esta relación en los volúmenes obtenidos:

$$V_{\text{semiesfera}} = 16,75 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}} = 25,13 \text{ cm}^3 - 8,38 \text{ cm}^3 = 16,75 \text{ cm}^3$$

$$\text{Efectivamente, } V_{\text{semiesfera}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}}.$$

20. $A_{\text{esfera}} = 4 \pi r^2 = 4 \pi \cdot 7^2 = 615,75$

$$360 : 36 = 10$$

$$A_{\text{huso esférico}} = A_{\text{esfera}} : 10 = 615,75 : 10 = 61,58$$

El área de la esfera es de 615,75 cm² y la del huso esférico, de 61,58 cm².

21. En primer lugar, calcularemos el radio de la esfera:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{V}{\pi}\right)}$$

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{288\pi}{\pi}\right)} = \sqrt[3]{216} = 6$$

El radio vale 6 cm.

Ahora calculamos el área:

$$A = 4 \pi r^2 = 4 \pi \cdot 6^2 = 452,39$$

El área vale 452,39 cm².

22. Sean L_1 , L_2 y L_3 las dimensiones del cuerpo de volumen V y $L'_1 = kL_1$, $L'_2 = kL_2$ y $L'_3 = kL_3$

$$\text{Entonces: } V' = L'_1 \cdot L'_2 \cdot L'_3 = kL_1 \cdot kL_2 \cdot kL_3 = k^3 L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot V$$

Los objetos semejantes no siempre son más grandes que el original, sino que depende del valor de k :

$$\text{Si } 0 < k < 1 \Rightarrow V' < V$$

$$\text{Si } k = 1 \Rightarrow V' = V$$

$$\text{Si } k > 1 \Rightarrow V' > V$$

23. De la relación:

$$V' = k^3 \cdot V$$

Y sabiendo que se trata de una pirámide de base cuadrada: $V = 16 \text{ m}^3$, entonces:

$$2 = k^3 \cdot 16 \Rightarrow k = \sqrt[3]{2}$$

Por lo tanto, las dimensiones de la nueva pirámide semejante son:

$$a' = k \cdot a = 2 \text{ m}$$

$$h' = k \cdot h = 1,5 \text{ m}$$

24. a) El factor de escala es:

$$K = \frac{2,15}{1,72} = 1,25$$

b) El cociente entre las áreas es el cuadrado del factor de escala. De aquí deducimos el área de la lente real.

$$\frac{A_A}{A_B} = k^2 \rightarrow A_B = \frac{A_A}{k^2} = \frac{43}{1,25^2} = 27,52 \text{ cm}^2$$

Del área se deduce el radio.

$$A_B = \pi r_B^2 \rightarrow r_B = \sqrt{\frac{A_B}{\pi}} = \sqrt{\frac{27,52}{\pi}} = 2,96 \text{ cm}$$

c) Hallamos el volumen del tubo de ensayo y, a continuación, aplicamos el factor de escala para obtener el volumen del tubo de la escultura.

$$V_B = \pi r_B^2 \cdot h_B = \pi \cdot 0,5^2 \cdot 15 = 11,78 \text{ cm}^3$$

$$V_A = k^3 \cdot V_B = 1,25^3 \cdot 11,78 = 23 \text{ cm}^3$$

Actividades finales

25. No, puesto que un poliedro convexo cumple la relación de Euler: $C + V = A + 2$.

Entonces, si $C + V = A$:

$C + C = C + 2 \rightarrow C = 2$, y un poliedro no puede tener 2 caras.

- 26.** Puntos situados en el meridiano de Greenwich:
- Longitud: 0°
 - Latitud: varía de 0° a 90° en dirección Norte y Sur desde el Ecuador.

Puntos situados en el Ecuador:

- Longitud: varía de 0° a 180° en dirección Este y Oeste desde el meridiano de Greenwich.
- Latitud: 0°

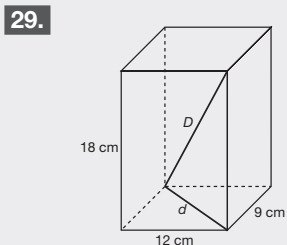
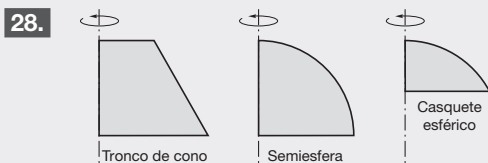
Puntos situados en los Polos:

- Longitud: 0°
- Latitud: el polo norte 90° en dirección Norte y el polo sur 90° en dirección Sur desde el Ecuador.

- 27.** Longitud: $180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$

Latitud: 45°

Las coordenadas geográficas de B son (158° O, 45° N).



— Diagonal de la base del prisma:

$$d = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \text{ cm}$$

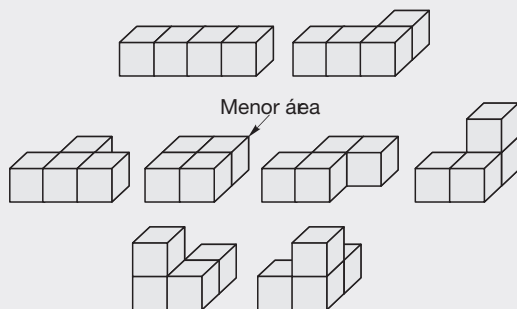
La diagonal de la base mide 15 cm.

— Diagonal del prisma:

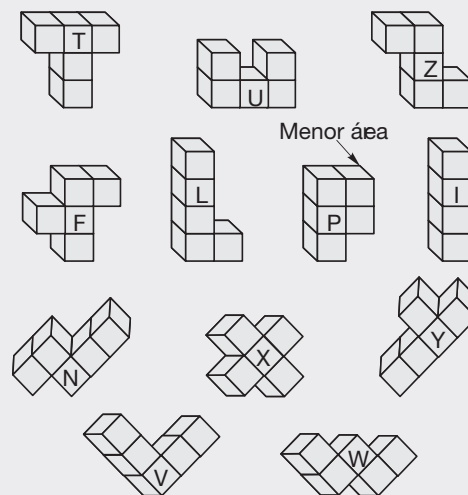
$$D = \sqrt{15^2 + 18^2} = 23,43 \text{ cm}$$

La diagonal del prisma mide 23,43 cm.

- 30.** Poliedros que pueden formarse con 4 cubos iguales:



Poliedros que pueden construirse con 5 cubos iguales:



- 31.** Si consideramos el radio de la Tierra como $R = 6300 \text{ km}$ y el ángulo es de 90° , el arco de circunferencia es de:

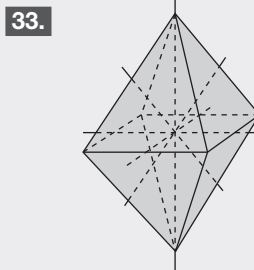
$$L_{\text{arco}} = \frac{\pi \cdot 6300}{180} \cdot 90 = 9896,02 \text{ km}$$

El camino en línea recta equivaldría a la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados 6300 km.

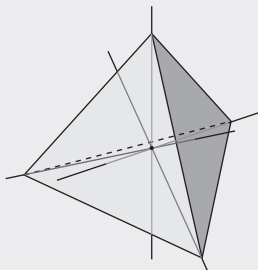
$$H = \sqrt{6300^2 + 6300^2} = 8909,55 \text{ km}$$

- 32.** Si suponemos la Tierra redonda, las distancias son iguales y equivalen a media circunferencia, puesto que las dos tienen un ángulo de 180° y un radio de 6300 km.

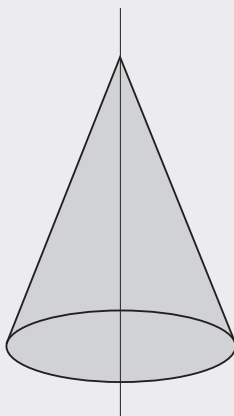
En la realidad, es más corto el camino pasando por el polo, puesto que la Tierra es achatada por los polos, con lo que el radio es menor, y, en consecuencia, también es menor el arco de circunferencia.



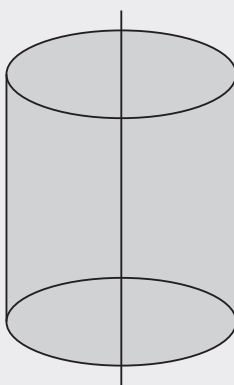
- 34.** Tetraedro. Tiene 4 ejes de simetría.



Cono. Tiene 1 eje de simetría que coincide con su eje de revolución.

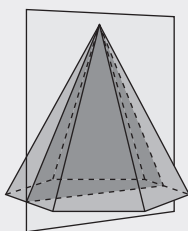


Cilindro. Tiene 1 eje de simetría que coincide con su eje de revolución.

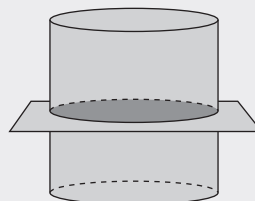


Esfera. Tiene infinitos ejes de simetría. Cualquier recta que pase por su centro.

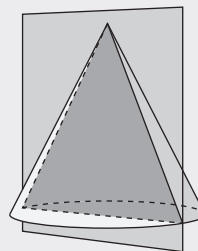
- 35.** Pirámide hexagonal



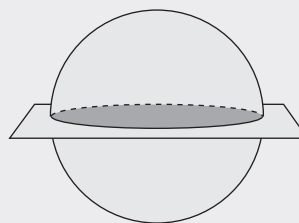
Cilindro



Cono



Esfera



— La pirámide hexagonal tiene 6 planos de simetría.
El cilindro, el cono y la esfera tienen infinitos planos de simetría.

- 36.** Tetraedro: 4 ejes de simetría, las rectas perpendiculares a cada cara por el vértice opuesto y 6 planos de simetría, los formados por cada arista y el punto medio de la arista opuesta.

Hexaedro: 13 ejes de simetría, 3 las rectas perpendiculares a cada par de caras paralelas por su punto medio, 4 las rectas que unen los vértices opuestos y 6 rectas que unen los centros de las aristas opuestas; 9 planos de simetría, 3 paralelos a cada par de caras paralelas por el punto medio de las aristas que las unen, y 6 formados por los pares de aristas opuestas.

Octaedro: 13 ejes de simetría, las 3 rectas que unen vértices opuestos, 6 rectas que unen los centros de aristas opuestas y 4 rectas que unen los baricentros de las caras opuestas; 9 planos de simetría, 3 que contienen cada grupo de aristas coplanares y 6 perpendiculares a cada par de aristas paralelas.

Dodecaedro: 21 ejes de simetría, las 6 rectas que unen los centros de caras opuestas y las 15 rectas que unen los centros de aristas opuestas; 15 planos de simetría que contienen cada pareja de aristas opuestas coplanares.

Icosaedro: 21 ejes de simetría, las 6 rectas que unen los vértices opuestos y las 15 que unen los centros de aristas opuestas; 15 planos de simetría que contienen cada pareja de aristas opuestas coplanares.

- 37.** El área de un cubo es seis veces el área de una de sus caras. Así, si a es la arista:

$$A = 6a^2$$

- 38.** $A_{\text{esfera}} = 4\pi r^2$

$$A_{\text{círculo máximo}} = \pi r^2$$

$$\frac{4\pi r^2}{\pi r^2} = 4$$

El área de la esfera es cuatro veces la de un círculo máximo.

- 39.** Por el principio de Cavalieri, podemos asegurar que tienen el mismo volumen.

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ A &= 4\pi r^2 \end{aligned} \right\} \frac{V}{A} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

El cociente entre el área de la esfera y su volumen es igual al radio partido por tres.

- 41.** Resultan dos conos.

Primer cono ($r = 5$; $h = 12$):

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 5^2 \cdot 12 = 314,16$$

Segundo cono ($r' = 12$; $h' = 5$):

$$V'_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r'^2 h' = \frac{1}{3}\pi 12^2 \cdot 5 = 753,98$$

El volumen de uno de los conos es de $314,16 \text{ cm}^3$ y el del otro cono, de $753,98 \text{ cm}^3$.

- 42.** Hallamos el área lateral del primer cilindro.

$$A_{\text{lateral}} = 2\pi r \cdot g = 2\pi \cdot 3 \cdot 12 = 226,19 \text{ cm}^2$$

Hallamos la generatriz del segundo cilindro.

$$A'_{\text{lateral}} = 2\pi r' \cdot g$$

$$226,19 = 2\pi \cdot 5 \cdot g$$

$$g = \frac{226,19}{2\pi \cdot 5} = \frac{226,19}{31,42} = 7,20$$

La generatriz del segundo cilindro mide $7,20 \text{ cm}$.

- 43.** Si llamamos a a la arista del cubo, d a la diagonal de una cara y D a la diagonal del cubo, tenemos:

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$D^2 = d^2 + a^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

$$10^2 = 3a^2; a^2 = \frac{10^2}{3}$$

$$A = 6a^2 = 6 \cdot \frac{10^2}{3} = 200$$

El área del cubo es de 200 cm^2 .

- 44.** El cuerpo está formado por 5 prismas (4 prismas iguales y uno diferente).

$$A_1 = 12 \cdot 7 + 2 \cdot 12 \cdot 2 + 2 \cdot 7 \cdot 2 + 12 \cdot 7 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 240$$

$$A_2 = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 1 = 17$$

$$A = A_1 + 4 A_2 = 240 + 4 \cdot 17 = 308$$

El área del cuerpo es de 308 cm^2 .

- 45.** Tetraedro:

$$A = \sqrt{3}a^2 \rightarrow 240 = \sqrt{3}a^2 \rightarrow a^2 = \frac{240}{\sqrt{3}}$$

$$a^2 = 138,56; a = 11,77$$

Las aristas del tetraedro miden $11,77 \text{ cm}$.

Octaedro:

$$A = 2\sqrt{3}a^2 \rightarrow 240 = 2\sqrt{3}a^2 \rightarrow a^2 = \frac{240}{2\sqrt{3}}$$

$$a^2 = 69,28 \rightarrow a = 8,32$$

Las aristas del octaedro miden $8,32 \text{ cm}$.

- 46.** Primero hallamos la longitud del lado desconocido del trapecio.

$$l = \sqrt{20^2 + 2,5^2} = \sqrt{406,25} = 20,16$$

A continuación calculamos el área lateral y el área total del prisma.

$$A_{\text{lateral}} = P \cdot h = (2 \cdot 20,16 + 10 + 15) \cdot 30 = 1\,959,60$$

$$A_{\text{base}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(10+15) \cdot 20}{2} = 250$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}} = 1\,959,60 + 2 \cdot 250 = 2\,459,60$$

El área lateral del prisma es de $1\,959,60 \text{ cm}^2$ y el área total, de $2\,459,60 \text{ cm}^2$.

- 47.** $A_{\text{base}} = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4,33}{2} = 64,95$

$$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot 5 \cdot 23 = 690$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}} = 690 + 2 \cdot 64,95 = 819,9$$

El área total del prisma hexagonal es de $819,9 \text{ cm}^2$.

- 48.** a) $A = \sqrt{3}a^2 = \sqrt{3} \cdot 4^2 = 27,71$

El área del tetraedro es de $27,71 \text{ cm}^2$.

$$\text{b) } A = 2\sqrt{3}a^2 = 2\sqrt{3} \cdot 5^2 = 86,60$$

El área del octaedro es de $86,60 \text{ cm}^2$.

$$\text{c) } A = 5\sqrt{3}a^2 = 5\sqrt{3} \cdot 6^2 = 311,77$$

El área del icosaedro es de $311,77 \text{ cm}^2$.

$$\text{d) } A = 6a^2 = 6 \cdot 7^2 = 294$$

El área del cubo es de 294 cm^2 .

$$\text{e) } A = 30a \cdot ap = 30 \cdot 1,8 \cdot 1,24 = 66,96$$

El área del dodecaedro es de $66,96 \text{ cm}^2$.

49. a) Se trata de un prisma y de medio cilindro.

Calculamos el área de las 3 caras laterales y de la base del prisma y también la del medio cilindro.

$$A_{3 \text{ caras laterales}} = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 72$$

$$A_{\text{base}} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$A_{\text{semicilindro}} = \pi r (g + r) = \pi \cdot 1 (9 + 1) = 31,42$$

El área del cuerpo geométrico es:

$$A = A_{3 \text{ caras laterales}} + 2 A_{\text{base}} + A_{\text{semicilindro}}$$

$$A = 72 + 2 \cdot 6 + 31,46 = 115,46$$

Calculamos los volúmenes del prisma y del medio cilindro.

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = 6 \cdot 9 = 54$$

$$V_{\text{semicilindro}} = \frac{1}{2} \pi r^2 h = \frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 \cdot 19 = 14,14$$

El volumen del cuerpo geométrico es:

$$V = 54 + 14,14 = 68,14$$

El área del cuerpo es de 115,46 cm² y el volumen, de 68,14 cm³.

- b) El cuerpo consiste en un cilindro hueco.

Calculamos las áreas laterales exterior e interior del cilindro.

$$A_{\text{lat. ext.}} = 2 \pi R \cdot g = 2 \pi \cdot 6 \cdot 12 = 452,39$$

$$A_{\text{lat. int.}} = 2 \pi r \cdot g = 2 \pi \cdot 3 \cdot 12 = 226,19$$

La base es una corona circular. Hallamos su área.

$$A_{\text{corona}} = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi (6^2 - 3^2) = 84,82$$

El área del cuerpo geométrico es:

$$A = 452,39 + 226,19 + 2 \cdot 84,82 = 848,22$$

El volumen del cuerpo geométrico es igual al volumen del cilindro exterior menos el del cilindro interior:

$$V_{\text{cil. ext.}} = \pi R^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 1\,357,17$$

$$V_{\text{cil. int.}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 339,29$$

$$V = 1\,357,17 - 339,29 = 1\,017,88$$

El área del cuerpo es de 848,22 cm² y el volumen, de 1 017,88 cm³.

- c) El cuerpo está formado por un cono, un cilindro y una semiesfera.

Hallamos las alturas del cono y el cilindro.

$$h_{\text{cono}} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

$$h_{\text{cilindro}} = 26 - 12 = 14$$

Hallamos las áreas parciales y el área total del cuerpo geométrico.

$$A_{\text{lateral cono}} = \pi r \cdot g_{\text{cono}} = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 204,20$$

$$A_{\text{lateral cilindro}} = 2 \pi r \cdot g_{\text{cilindro}} = 2 \pi \cdot 5 \cdot 14 = 439,82$$

$$A_{\text{semiesfera}} = \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi 5^2 = 157,08$$

$$A = 204,20 + 439,82 + 157,08 = 801,10$$

Hallamos los volúmenes parciales y el volumen total del cuerpo geométrico.

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 314,16$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 14 = 1\,099,56$$

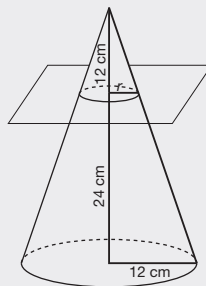
$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{2} = \frac{4}{6} 2\pi 5^3 = 261,80$$

$$V_{\text{cuerpo}} = 314,16 + 1\,099,56 + 261,80 = 1\,675,52$$

El área del cuerpo es de 801,10 cm² y el volumen, de 1 675,52 cm³.

50. Las dos figuras resultantes son un cono y un tronco de cono.

En primer lugar, hallamos el radio de la base del cono resultante aplicando la semejanza de triángulos.



$$\frac{36}{12} = \frac{12}{r} \rightarrow r = \frac{12 \cdot 12}{36} = 4$$

A continuación, calculamos el volumen de las dos figuras resultantes:

$$V_{\text{cono menor}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 201,06$$

$$V_{\text{tronco cono}} = V_{\text{cono mayor}} - V_{\text{cono menor}} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot h - \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot 36 - 201,06 = 5\,227,61$$

El volumen del cono es de 201,06 cm³ y el del tronco de cono, de 5 227,61 cm³.

51. a) Tenemos que:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$h = \frac{1}{0,54} = 1,85 \text{ dm} = 18,5 \text{ cm}$$

- b) Si la base fuera un cuadrado de lado 7 cm:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$1 = 0,7^2 \cdot h$$

$$h = \frac{1}{0,49} = 2,041 \text{ dm} = 20,41 \text{ cm}$$

- c) La superficie del primer envase es:

$$A = 0,9 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,9 \cdot 1,85 + 2 \cdot 0,6 \cdot 1,85 = 6,09 \text{ dm}^2$$

Mientras que la segunda es de:

$$A = 0,7^2 + 4 \cdot 0,7 \cdot 2,041 = 6,20 \text{ dm}^2$$

Como conclusión, para determinar la forma de un envase es necesario saber qué figura contiene mayor volumen a igual superficie.

52. a) Sabemos que la altura es un cateto de un triángulo que pasa por el vértice, uno de cuyos lados coincide con el lado del octaedro, y el otro es la mitad de la diagonal del cuadrado central del octaedro.

$$\text{Diagonal} = \sqrt{7^2 + 7^2} = 9,9 \text{ cm}$$

Por lo tanto:

$$\text{Altura} = \sqrt{7^2 - \left(\frac{9,9}{2}\right)^2} = 4,95 \text{ cm}$$

- b) Son triángulos equiláteros, por lo tanto:

$$\text{Altura} = \sqrt{7^2 - 3,5^2} = 6,06 \text{ cm}$$

- c) La superficie del octaedro corresponde a ocho veces la superficie de los triángulos equiláteros:

$$A = 8 \cdot \left(\frac{7 \cdot 6,06}{2}\right) = 169,68 \text{ cm}^2$$

El volumen será:

$$V = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 7^2 \cdot 4,95\right) = 161,7 \text{ cm}^3$$

53. Podemos descomponer la figura en 2 medias esferas y 3 cilindros.

Como se indica en la figura, el volumen de esfera tiene un radio de 5 cm:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi \cdot 5^3\right) = 261,8 \text{ cm}^3$$

El volumen de los cilindros es el siguiente:

$$V_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 392,7 \text{ cm}^3$$

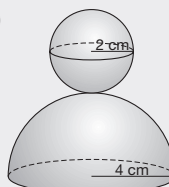
$$V_2 = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 392,7 \text{ cm}^3$$

$$V_3 = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 1570,8 \text{ cm}^3$$

Por lo tanto el volumen total es:

$$V_{\text{Total}} = 261,8 + 392,7 + 1570,8 + 392,7 - 261,8 = 2356,3 \text{ cm}^3$$

54. a)



El cuerpo está formado por una esfera y una semiesfera.

Hallamos las áreas parciales y el área total del cuerpo geométrico.

$$A_{\text{esfera}} = 4 \pi r^2 = 4 \pi \cdot 2^2 = 50,27$$

$$A_{\text{semiesfera}} = 2 \pi r^2 = 2 \pi \cdot 4^2 = 100,53$$

$$A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,27$$

$$A_{\text{cuerpo}} = 50,27 + 100,53 + 50,27 = 201,07$$

Hallamos los volúmenes parciales y el volumen total del cuerpo geométrico.

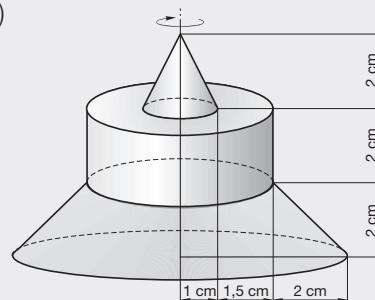
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = 33,51$$

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 4^3 = 134,04$$

$$V_{\text{cuerpo}} = 33,51 + 134,04 = 167,55$$

El área del cuerpo de revolución es de 201,07 cm² y el volumen, de 167,55 cm³.

- b)



El cuerpo está formado por un cono, un cilindro y un tronco de cono.

Hallamos las áreas parciales y el área total del cuerpo geométrico.

$$g_{\text{cono}} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2,24$$

$$A_{\text{lateral cono}} = \pi r \cdot g = \pi \cdot 1 \cdot 2,24 = 7,04$$

$$A_{\text{corona circular}} = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi (2,5^2 - 1^2) = 16,49$$

$$A_{\text{lateral cilindro}} = 2 \pi r \cdot g = 2 \pi \cdot 2,5 \cdot 2 = 31,42$$

$$g_{\text{tronco de cono}} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2,83$$

$$A_{\text{lat. tronco}} = \pi g \cdot (R + r) = \pi 2,83 \cdot (4,5 + 2,5) = 62,23$$

$$A_{\text{base tronco de cono}} = \pi R^2 = \pi \cdot 4,5^2 = 63,62$$

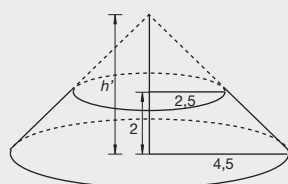
$$A_{\text{cuerpo}} = 7,04 + 16,49 + 31,42 + 62,23 + 63,62 = 180,80$$

Hallamos los volúmenes parciales y el volumen total del cuerpo geométrico.

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2,09$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 2 = 39,27$$

El volumen del tronco de cono es igual al volumen del cono mayor de la figura menos el volumen del cono menor.



$$\frac{h'}{4,5} = \frac{h' - 2}{2,5}$$

$$V_{\text{cono grande}} = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot h' = \frac{1}{3} \pi \cdot 4,5^2 \cdot 4,5 = 95,43$$

$$V_{\text{cono pequeño}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 2,5^2 \cdot 2,5 = 16,36$$

$$V_{\text{tronco de cono}} = 95,43 - 16,36 = 79,07$$

$$V_{\text{cuerpo}} = 2,09 + 39,27 + 79,07 = 120,43$$

El área del cuerpo de revolución es de 180,80 cm² y el volumen, de 120,43 cm³.

55. $V' = k^3 \cdot V = 1,2^3 \cdot 3 = 5,16$

El volumen del segundo cuerpo es de 5,16 m³.

56. No, porque no todos los lados tienen la misma razón de semejanza. Obtendríamos un prisma recto.

57. Si los cuerpos son semejantes:

$$V' = k^3 \cdot V$$

$$12 = 2 \cdot k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{6} = 1,82$$

Por lo tanto no es cierta la afirmación.

58.

- Son rectos
- Tienen la misma altura

$$\bullet 6$$

$$\bullet A = 2a^2 + 4ah$$

$$\bullet V = a^2h$$

$$\bullet 2$$

$$\bullet A = \frac{\pi}{2} a^2 + ah\pi$$

$$\bullet V = \frac{\pi}{4} a^2h$$

Ambas son figuras rectas de altura h , pero tienen diferentes área y volumen.

$$\frac{V_P}{V_C} = \frac{4}{\pi} > 1 \Rightarrow V_P > V_C \quad A_P > A_C$$

59. Hallamos el área de la cúpula semiesférica.

$$A_{\text{cúpula}} = 2 \pi r^2 = 2 \pi \cdot 6^2 = 226,19 \text{ m}^2$$

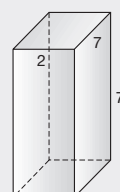
Si por cada 6 m² se emplea 1 L de pintura, la cantidad de pintura necesaria será:

$$\frac{226,19}{6} = 37,70$$

Son necesarios 37,70 L.

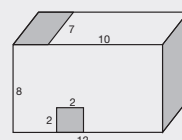
60. Descomponemos el edificio en cuerpos más simples para calcular las áreas parciales.

— Calculamos el área lateral del siguiente prisma.



$$A_1 = P \cdot h = (4 \cdot 2) \cdot 7 = 56$$

— Calculamos el área no sombreada del siguiente prisma.



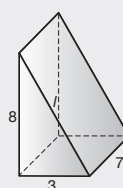
$$A_{\text{parte frontal}} = 12 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 92$$

$$A_{\text{parte posterior}} = 12 \cdot 8 = 96$$

$$A_{\text{parte lateral}} = 2 \cdot 8 = 16$$

$$A_2 = 92 + 96 + 16 = 204$$

— Calculamos el área de las caras triangulares del siguiente prisma.



$$A_3 = 2 \cdot \frac{8 \cdot 3}{2} = 24$$

Así, el área de la fachada es:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = 56 + 204 + 24 = 284 \text{ m}^2$$

Si se invierte 1 h en restaurar 0,5 m², el tiempo total empleado será:

$$\frac{284}{0,5} = 568$$

Se emplearán 568 horas en restaurar toda la fachada.

- 61.** Hallamos el área lateral de una lata:

$$A_{\text{lateral}} = 2\pi r \cdot g = 2\pi \cdot 7 \cdot 20 = 879,65 \text{ cm}^2$$

El área lateral de las 100 latas será:

$$879,65 \cdot 100 = 87\,965 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, se necesitan 87 965 cm² de papel.

Hallamos el volumen de una lata.

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 7^2 \cdot 20 = 3\,078,76 \text{ cm}^3$$

El volumen de las 100 latas será:

$$3\,078,76 \cdot 100 = 307\,876 \text{ cm}^3$$

La masa de aceite que ocupa este volumen es:

$$307\,876 \text{ cm}^3 \cdot 0,92 \text{ g/cm}^3 = 283\,246 \text{ g}$$

Necesitaremos 283 246 g o 283,246 kg.

- 62.** La razón entre las alturas de dos pesas será igual a la razón de semejanza. La razón entre los volúmenes de dos pesas es igual al cubo de la razón de semejanza.

Puesto que la masa es directamente proporcional al volumen, la razón entre las masas de dos pesas también será el cubo de la razón de semejanza.

Masa	Razón de semejanza	Altura
10 g	$k = \sqrt{\frac{2000}{10}} = 5,85$	$h = \frac{8 \text{ cm}}{5,85} = 1,37 \text{ cm}$
20 g	$k = \sqrt{\frac{2000}{20}} = 4,64$	$h = \frac{8 \text{ cm}}{4,64} = 1,72 \text{ cm}$
50 g	$k = \sqrt{\frac{2\,000}{50}} = 3,42$	$h = \frac{8 \text{ cm}}{3,42} = 2,34 \text{ cm}$
100 g	$k = \sqrt{\frac{2\,000}{100}} = 2,71$	$h = \frac{8 \text{ cm}}{2,71} = 2,95 \text{ cm}$
200 g	$k = \sqrt{\frac{2\,000}{200}} = 2,15$	$h = \frac{8 \text{ cm}}{2,15} = 3,72 \text{ cm}$
500 g	$k = \sqrt{\frac{2\,000}{500}} = 1,59$	$h = \frac{8 \text{ cm}}{1,59} = 5,03 \text{ cm}$
1000 g	$k = \sqrt{\frac{2\,000}{1000}} = 1,26$	$h = \frac{8 \text{ cm}}{1,26} = 6,35 \text{ cm}$

- 63.** El volumen de refresco que hemos comprado es:

$$V_{\text{refresco}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3,2^2 \cdot 11 = 353,87 \text{ cm}^3$$

En cada vaso debemos colocar la mitad:

$$\frac{353,87}{2} = 176,93 \text{ cm}^3$$

La altura necesaria para ocupar este volumen en el vaso será:

$$V = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{176,93}{\pi \cdot 2,8^2} = 7,18$$

La altura a la que llegará el refresco dentro de cada uno de los vasos es de 7,18 cm.

- 64.** a) El radio y el volumen del primer cilindro son:

$$r_1 = \frac{L_1}{2\pi} = \frac{40}{2\pi} = 6,37 \text{ cm}$$

$$V_1 = \pi r_1^2 h_1 = \pi \cdot 6,37^2 \cdot 20 = 2\,549,5 \text{ cm}^3$$

El radio y el volumen del segundo cilindro son:

$$r_2 = \frac{L_2}{2\pi} = \frac{20}{2\pi} = 3,18 \text{ cm}$$

$$V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi \cdot 3,18^2 \cdot 40 = 1\,270,8 \text{ cm}^3$$

- b) Hallamos el área total y la relación V/A_{total} para los dos cilindros:

$$A_{\text{total1}} = 2\pi r_1 (g_1 + r_1) = 2\pi \cdot 6,37 \cdot (20 + 6,37) = 1\,055,4 \text{ cm}^2$$

$$\frac{V_1}{A_{\text{total1}}} = \frac{2\,549,5}{1\,055,4} = 2,42 \text{ cm}$$

$$A_{\text{total2}} = 2\pi r_2 (g_2 + r_2) = 2\pi \cdot 3,18 \cdot (40 + 3,18) = 862,8 \text{ cm}^2$$

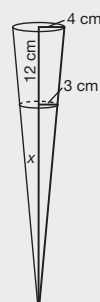
$$\frac{V_2}{A_{\text{total2}}} = \frac{1\,270,8}{862,8} = 1,47 \text{ cm}$$

La relación V/A_{total} es mayor en el primer cilindro.

- 65.** Los dos triángulos dibujados son semejantes. De aquí deducimos el valor de x .

$$\frac{4}{12+x} = \frac{3}{x}$$

$$x = 36$$



El vaso tiene forma de tronco de cono. Su volumen es:

$$V_{\text{vaso}} = V_{\text{cono mayor}} - V_{\text{cono menor}}$$

$$V_{\text{vaso}} = \frac{1}{3}\pi r_1^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi r_2^2 \cdot h_2$$

$$V_{\text{vaso}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 48 - \frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 36 = 464,96$$

La capacidad del vaso es de 464,96 cm³, o bien 0,465 L.

- 66.** a) Aplicamos el factor de escala para hallar la altura del edificio en la maqueta:

$$h_B = \frac{h_A}{k} = \frac{84}{850} = 0,099 \text{ m}$$

En la maqueta el edificio tendrá 9,9 cm de altura.

- b) El cociente entre las áreas es el cuadrado del factor de escala. De aquí deducimos la extensión de la urbanización.

$$A_A = k_2 \cdot A_B = 850^2 \cdot 1,18 \text{ m}^2 = 852\,550 \text{ m}^2$$

La extensión de la urbanización es de 0,85 km².

- c) Hallamos la capacidad de la piscina de la maqueta y después aplicamos el factor de escala para obtener la capacidad de la piscina real.

$$V_B = a \cdot b \cdot c = 2,9 \cdot 0,5 \cdot 0,2 = 0,29 \text{ m}^3$$

$$V_A = k^3 \cdot V_B = 850^3 \cdot 0,29 = 178\,096\,250 \text{ m}^3$$

La capacidad de la piscina real es de 178 m³.

- 67.** El volumen del agua del acuario sin el cubo es $V_{\text{agua}} = 25 \cdot 15 \cdot 10 = 3750 \text{ cm}^3$.

El volumen del cubo es $V_{\text{cubo}} = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$.

Con la inserción del cubo en el acuario tenemos que sumar los dos volúmenes arriba:

$$V_{\text{agua acuario y cubo}} = 3750 + 216 = 3966 \text{ cm}^3$$

Ahora, tenemos que calcular la nueva altura del agua del acuario: $25 \cdot 15 \cdot h = 3966$

$$h = \frac{3966}{375} = 10,576 \text{ cm}^3$$

- 68.** El volumen del cilindro es:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 = 1570,8 \text{ cm}^3$$

El volumen de la semiesfera es:

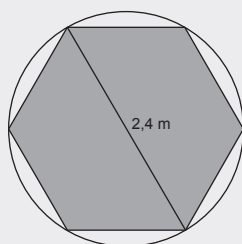
$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \right)$$

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 \right) = 261,8 \text{ cm}^3$$

Así, el volumen del sólido es:

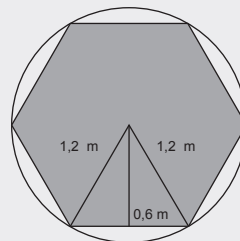
$$V_{\text{sólido}} = 1570,8 - 261,8 = 1309 \text{ cm}^3$$

- 69.** Primero tenemos que calcular el área de la base. La base es un hexágono inscrito en una circunferencia de diámetro 2,4 metros:



Así, podemos dividir el hexágono en 6 triángulos equiláteros congruentes.

Tenemos que calcular la altura de un triángulo para poder calcular su área:



Así, por el Teorema de Pitágoras, tenemos: $1,2^2 = h_{\text{triángulo}}^2 + 0,6^2 \rightarrow h_{\text{triángulo}}^2 = 1,08 \rightarrow h_{\text{triángulo}} = 1,04$

Por lo tanto, el área del triángulo es:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{1,2 \cdot 1,04}{2} = 0,624 \text{ m}^2$$

Como la base tiene 6 triángulos congruentes, tenemos que el área de la base del satélite es:

$$A_{\text{base}} = 6 \cdot 0,624 = 3,744 \text{ m}^2$$

El volumen del satélite es:

$$V_{\text{satélite}} = A_{\text{base}} \cdot h = 3,744 \cdot 5 = 18,7 \text{ m}^3$$

- 70.** Tenemos que resolver un sistema de ecuaciones de primer grado. Representemos por x la longitud y por y el diámetro. Así:

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 9,5 \\ x &= \frac{15}{4}y \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{15}{4}y + y = 9,5$$

$$\frac{15}{4}y + y = \frac{19}{2}$$

$$15y + 4y = 38$$

$$19y = 38$$

$$y = 2 \text{ cm} \rightarrow x = \frac{15}{4} \cdot 2 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ cm}$$

El volumen de la vena cava superior es:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 7,5 = 23,6 \text{ cm}^3$$

- 71.** Dos semicilindros con la misma altura y con el mismo radio es igual a un cilindro con esa misma altura y con ese mismo radio.

Así, el volumen del cilindro es:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = 25 \text{ cm}^3$$

Ahora, el volumen del prisma rectangular es:

$$V_{\text{prisma}} = 4 \cdot 2 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^3$$

Por lo tanto, el volumen del helado es:

$$V = 25 + 48 = 73 \text{ cm}^3 = 0,073 \text{ dm}^3 = 0,073 \text{ L} = 73 \text{ mL}$$

- 72.** Tenemos que dividir el octaedro en dos pirámides cuadrangulares congruentes, calcular el volumen de una y, por último, multiplicar ese valor por dos.

Primero, calculamos la apotema de una de las caras de la pirámide con la ayuda del teorema de Pitágoras:

$$10^2 = ap^2 + 5^2$$

$$ap^2 = 75 \rightarrow ap = \sqrt{75} \text{ cm}$$

Ahora, calculamos la altura de la pirámide:

$$(\sqrt{75})^2 = h^2 + 5^2$$

$$75 = h^2 + 25 \rightarrow h = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$$

Tenemos todos los datos para calcular el volumen de la pirámide:

$$V_{\text{pirámide}} = A_{\text{base}} \cdot h = 10^2 \cdot 7,07 = 707 \text{ cm}^3$$

$$\text{Por lo tanto, } V_{\text{octaedro}} = 2 \cdot V_{\text{pirámide}} = 2 \cdot 707 = 1414 \text{ cm}^3$$

- 73.** El área de una semiesfera es $A = 2\pi r^2$. Así, tenemos que:

$$2\pi r^2 = 1,62\pi \rightarrow r = 0,9 \text{ cm}$$

Tenemos que el radio de la base superior del cono truncado es 0,9 cm.

Consideremos el siguiente esquema del cono truncado. Representamos por $x + 5$ la altura del cono no truncado:



Tenemos dos triángulos semejantes. Así:

$$\frac{x+5}{1,5} = \frac{x}{0,9}$$

$$0,9x + 4,5 = 1,5x$$

$$0,6x = 4,5 \rightarrow x = 7,5 \text{ cm}$$

$$\text{Por lo tanto, } x + 5 = 7,5 + 5 = 12,5 \text{ cm.}$$

El volumen del cono mayor es:

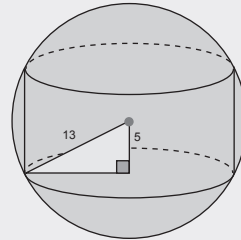
$$V_{\text{cono mayor}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 1,5^2 \cdot 12,5 = \frac{1}{3} \pi \cdot 2,25 \cdot 12,5 = 29,54 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{cono menor}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 0,9^2 \cdot 7,5 = \frac{1}{3} \pi \cdot 0,81 \cdot 7,5 = 6,36 \text{ cm}^3$$

El volumen del cono truncado es:

$$V_{\text{cono mayor}} - V_{\text{cono menor}} = 29,45 - 6,36 = 23 \text{ cm}^3$$

- 74.** Tenemos un triángulo rectángulo como el de la figura:



Representamos por x el radio de la base del cilindro. Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$13^2 = 5^2 + x^2$$

$$169 = 25 + x^2$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12 \text{ cm}$$

El volumen de la esfera es:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 13^3 = 9203 \text{ cm}^3$$

El volumen del cilindro es:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 12^2 \cdot 10 = 4524 \text{ cm}^3$$

Entonces, tenemos que el porcentaje de plastilina no utilizada es:

$$\frac{4524}{9203} = 0,49 = 49 \%$$

- 75.** La base de la pirámide es un hexágono. Podemos dividir el hexágono en 6 triángulos equiláteros congruentes.

Tenemos que calcular la altura de un triángulo para poder calcular su área:

$$8^2 = x^2 + 4^2 \rightarrow x^2 = 48 \rightarrow x = \sqrt{48} = 6,9 \text{ cm}$$

El área de un triángulo es:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{8 \cdot 6,9}{2} = 27,6 \text{ cm}^2$$

$$\text{Así, el área de la base es } A_{\text{base}} = 6 \cdot 27,6 = 165,6 \text{ cm}^2.$$

El volumen de la pirámide es:

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 165,6 \cdot 15 = 828 \text{ cm}^3$$

La impresora 3D tiene una velocidad de 46 cm^3 por hora. Así, tenemos:

$$\frac{828}{46} = 18$$

Por lo tanto, la impresora 3D necesita 18 horas para construir la pirámide.

Pon a prueba tus competencias

- 1.** a) Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$ap^2 = 17,71^2 + 21,64^2 = 781,93 \rightarrow ap = 28 \text{ m}$$

$$b) A_{\text{lateral}} = \frac{35,42 \cdot 28}{2} = 496 \text{ m}^2$$

- c) Representemos por x el número de rombos, y por y el número de triángulos.

Así, tenemos un sistema de ecuaciones de primer grado:

$$\begin{cases} x + y = 673 \\ x = 43 + 8y \end{cases}$$

$$43 + 8y + y = 673$$

$$43 + 9y = 673$$

$$9y = 630$$

$$y = 70 \rightarrow x + 70 = 673 \rightarrow x = 603$$

Por lo tanto, la pirámide del Louvre tiene 603 rombos y 70 triángulos.

- d) Sabemos que 18 triángulos corresponden a 9 rombos. Así, tenemos $9 + 153 = 162$ rombos.

El área lateral de una de las caras completamente acristaladas de la pirámide es 496 m^2 . Así, tenemos:

$$A_{\text{rombo}} = \frac{496}{162} = 3 \text{ m}^2$$

2. a) $V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 9 = 236 \text{ cm}^3$

b) $V_{\text{cono}} = 236 \text{ cm}^3 = 0,236 \text{ dm}^3 = 0,236 \text{ L}$

Se prepararon 0,236 L de café.

- c) Como el volumen de un cono es un tercio del volumen de un cilindro con la misma base y la misma altura del cono, tenemos:

$$\frac{9}{3} = 3 \text{ cm}$$

La altura del café en el recipiente es de 3 cm.

d) $0,236 : (7,375 \cdot 10^{-3}) = (2,36 \cdot 10^{-1}) : (7,375 \cdot 10^{-3}) = 0,32 \cdot 10^2 = 32$

El café tarda en prepararse 32 s.

- 3.** a) La escala del plano es 1:50. Así, las medidas de 12 cm, 8,4 cm y 1 cm del plano corresponden a 6 m, 4,2 m y 0,5 m, respectivamente, en la realidad.

La altura de las paredes es 2,5 m. Por lo tanto, el área de la pared del garaje es:

$$(0,5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 4,2) \cdot 2,5 = 17,2 \cdot 2,5 = 43 \text{ m}^2$$

b) $\frac{43}{10} = 4,3$. Elena utilizó 4,3 L de pintura.

- c) $4,3 : 0,75 = 5,73$. Fueron necesarios 6 botes de pintura.

- d) $6 \cdot 10,35 = 62,10$. Elena gastó 62,10 € para pintar el garaje.

4. a) $V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h = \pi \cdot 0,25^2 \cdot 1 = 0,196 \text{ m}^3$

b) $V_{\text{cilindro}} = 0,196 \text{ m}^3 = 196 \text{ dm}^3 = 196 \text{ L}$

- c) Representemos por x la cantidad de agua y por y la cantidad de aceite. Así, tenemos un sistema de ecuaciones de primer grado:

$$\begin{cases} x + y = 196 \\ x = \frac{3}{4}y \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}y + y = 196$$

$$\frac{7}{4}y = 196$$

$$y = 112 \text{ L} \rightarrow x + 112 = 196 \rightarrow x = 84 \text{ L}$$

Tenemos 84 L de agua y 112 L de aceite.

d) $V_{\text{recipiente}} = A_{\text{base}} \cdot h = \pi \cdot 0,15^2 \cdot 0,25 = 0,018 \text{ m}^3 = 18 \text{ dm}^3 = 18 \text{ L}$

Tenemos 112 L de aceite para distribuir en recipientes con 18 L de capacidad:

$$\frac{112}{18} = 6,2$$

Por lo tanto, fueron necesarios 7 recipientes para almacenar el aceite.

- 1.** a) El volumen del cilindro es
 $V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura} = \pi \cdot 6,52 \cdot 5 \approx 664 \text{ cm}.$
 b) $d = m / V$; $1,15 = m / 664$; $m = 763,6 \text{ g}.$
 c) $360 : 30 = 12$; $763,6 : 12 = 63,63 \text{ g}.$
 La masa de la porción es de 63,63 g
 d) $\frac{16,95}{1} = \frac{x}{0,06363} \rightarrow x = 1,08 \text{ €}$
 Laura ha pagado 1,08 € por la porción de queso.

- 2.** a) $V = 1\,000 \text{ cm}^3$
 b) $l = \sqrt[3]{1\,000} = 10$. La arista mide 10 cm.
 c) Cada cara del satélite mide $10^2 = 100 \text{ cm}^2$ de área.
 d) El área de todas las caras del cubo es $6 \cdot 100 = 600 \text{ cm}^2.$
 e) El área total es $8 \cdot 100 = 800 \text{ cm}^2.$
 f) $\frac{800}{600} \approx 1,333$
 El área aumentó un 33,3%.

- 3.** a) La cuerda mide $4,8 : 3 = 1,6 \text{ m}.$
 b) $1,6 : 8 = 0,2 \text{ m}.$ La distancia entre las flores es de 20 cm.
 c) Para determinar la posición central ha trazado la mediatriz de los lados del triángulo. El punto de intersección de las mediatrices es el centro del triángulo.
 d) El jardinero plantó $8 \cdot 3 + 1 = 25$ flores.

- 4.** a) $V = 25 \cdot 5 \cdot 30 = 3\,750 \text{ cm}^3.$
 b) $3\,250 = 25 \cdot 5 \cdot a$; $a = 26$
 El detergente llega a una altura de 26 cm.
 c) $550 \cdot 1,2 = 660$
 El nuevo envase tiene 660 g de detergente.
 d) $\frac{26}{550} = \frac{x}{660} \rightarrow x = 17\,160 : 550 = 31,2 \text{ cm}$
 La altura del nuevo envase es de 31,2 cm.
 e) En el envase original:
 $\frac{1,69}{550} = \frac{x}{100} \rightarrow x = \frac{169}{550} \approx 0,307$
 En el envase original cada 100 g cuestan 0,307 €.
 Para el segundo envase tenemos:
 $\frac{2}{660} = \frac{x}{100} \rightarrow x = \frac{200}{660} \approx 0,303$
 En el nuevo envase cada 100 g cuestan 0,303 €.
 El nuevo envase resulta más económico.

- 5.** a) Por el teorema de Tales tenemos:
 $\frac{8}{8,54} = \frac{5,2}{CE} \rightarrow CE = 44,408 : 8 \approx 5,55 \text{ m}$

Así, la rampa tiene $8,54 + 5,55 = 14,09 \text{ m}$ de longitud.

- b) Por el teorema de Pitágoras tenemos:
 $AE^2 = AD^2 + DE^2 \rightarrow 14,09^2 =$
 $= (8 + 5,2)^2 + DE^2 \rightarrow DE = \sqrt{24,2881} \approx 4,93 \text{ m}$
 El garaje tiene una altura de 4,93 m.
 c) $180^\circ - 159,44^\circ = 20,56^\circ$. La rampa tiene $20,56^\circ$ de inclinación.

- d) La velocidad del coche es de
 $30 \text{ km/h} = \frac{30 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{30\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}}$
 $\frac{30\,000}{3\,600} = \frac{14,09}{x} \rightarrow x = 1,69 \text{ s}$
 Sonia tardó 1,69 s.

- e) $AC^2 = AB^2 + BC^2 \rightarrow 8,54^2 =$
 $= 8^2 + BC^2 \rightarrow BC = \sqrt{8,9316} \approx 2,99 \text{ m}$
 Por lo tanto, el área del trapecio rectángulo es
 $A = \frac{2,99 + 4,93}{2} \cdot 5,2 = 20,59 \text{ m}^2$

- 6.** a) $15^2 = 12^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{81} = 9 \text{ m}$
 La base del triángulo rectángulo mide 9 m.
 Por lo tanto, el área del terreno triangular es:
 $A = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54 \text{ m}^2$
 b) La longitud del rectángulo es igual a $24 - 9 = 15 \text{ m}.$
 Por lo tanto, el área del terreno rectangular es:
 $A = 12 \cdot 15 = 180 \text{ m}^2$
 c) El perímetro del trapecio rectangular es $12 + 24 + 15 + 15 = 66 \text{ m}.$ Por lo tanto se necesitan 66 m de red.
 d) La cerca cuesta $14,99 \cdot 66 = 989,34 \text{ €}.$

- 7.** a) Como los triángulos son semejantes, tenemos que:
 $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE} \rightarrow \frac{12}{18} = \frac{13}{CE} \rightarrow CE = 19,5 \text{ m}$
 b) $EC^2 = CD^2 + DE^2 \rightarrow 19,5^2 =$
 $= 18^2 + DE^2 \rightarrow DE = \sqrt{56,25} = 7,5 \text{ m}$
 Por lo tanto, el lado ED mide 7,5 m
 c) El área del césped es:
 $A = \frac{18 \cdot 7,5}{2} = 67,5 \text{ m}^2$
 d) La piscina es un prisma triangular recto. Por lo tanto su volumen es:
 $V = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$
 Primero, tenemos que determinar el área de la base. Como los triángulos son semejantes, podemos calcular la razón de semejanza

$$r = \frac{18}{12} = 1,5$$

Con la razón de semejanza podemos hallar el área de la base de la piscina:

$$\frac{67,5}{A_{\text{base}}} = 1,5^2 \rightarrow A_{\text{base}} = \frac{67,5}{2,25} = 30 \text{ m}^2$$

Así, el volumen de la piscina es:

$$V = 30 \cdot 2 = 60 \text{ m}^3$$

9. a) $V_P = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 3,6 = 10,8 \text{ cm}^3$

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot (3,6 - 1,2) = 3,2 \text{ cm}^3$$

Por lo tanto, el volumen del bombón es:

$$V_p - V_p = 10,8 - 3,2 = 7,6 \text{ cm}^3$$

b) $\frac{1,308}{1} = \frac{x}{7,6} \rightarrow x = 1,308 \cdot 7,6 = 9,94 \text{ g}$

El bombón pesa 9,94 g.

c) La masa es de $25 \cdot 9,94 = 248,5 \text{ g}$.

d) $\frac{0,07}{100} = \frac{x}{9,94} \rightarrow x = \frac{0,07 \cdot 9,94}{100} =$
 $= 6,958 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 6,958 \text{ mg}$

Cada bombón tiene 6,958 mg de sal.

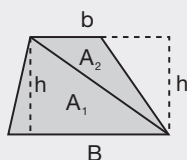
e) $\frac{6,958}{2\,300} = 3 \cdot 10^{-3} = 0,3 \text{ \%}$.

1. La suma de los ángulos será:
 $180^\circ (n - 2) = 180^\circ (10 - 2) = 1\ 440^\circ$

2. Circuncentro: punto en el que se cortan las tres mediatrices de un triángulo.
 Incentro: punto en el que se cortan las tres bisectrices de un triángulo.
 Baricentro: punto en el que se cortan las tres medianas de un triángulo.
 Ortocentro: punto en el que se cortan las tres alturas de un triángulo.

3. $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

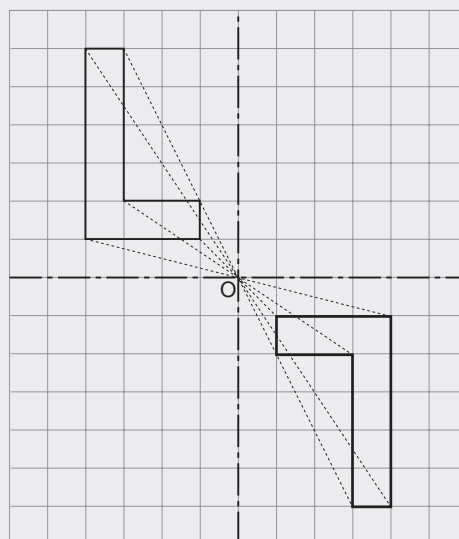
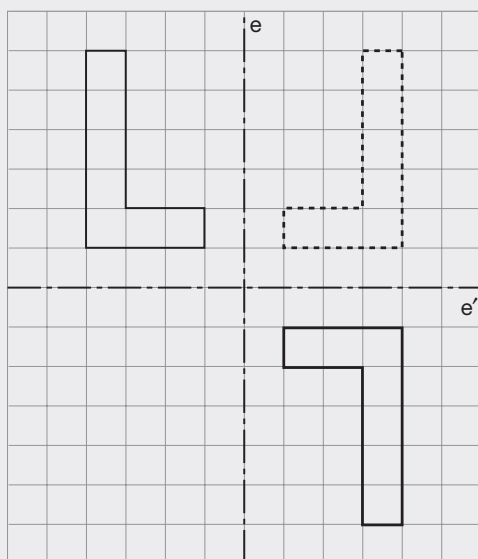
Para deducir esta fórmula, descomponemos el trapecio en dos triángulos.



El área del trapecio es la suma de las áreas de los dos triángulos.

$$A_1 + A_2 = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

4. Dos rectas que se cortan determinan dos pares de ángulos opuestos por el vértice. Cada par de ángulos son iguales entre sí.
5. La composición de dos simetrías axiales de ejes perpendiculares da como resultado una simetría central con centro en el punto de corte de los ejes.



6. Sí, es posible. Se dice que son mosaicos con una estructura básica y los únicos polígonos regulares que pueden formar este tipo de estructura son el triángulo, el cuadrado y el hexágono.
7. Aplicamos la relación de Euler:
 $C + V = A + 2$
 $5 + V = 8 + 2 \rightarrow V = 8 + 2 - 5 = 5$
 El poliedro tiene 5 vértices.
8. Calcularemos la diferencia de hora solar:
 Ciudad A. Longitud = $0^\circ 00'$
 Ciudad B. Longitud = $30^\circ 00' E$
 Diferencia entre longitudes:
 $30^\circ 00' - 0^\circ 00' = 30^\circ$
 Diferencia de hora solar:
 $30^\circ \cdot \frac{1h}{15^\circ} = 2h$
 La ciudad B está avanzada dos horas respecto a la ciudad A.
9. Es verdadera. Si seccionamos las pirámides por planos paralelos a sus bases, las secciones obtenidas tienen la misma área. Por tanto, según el principio de Cavalieri, los dos cuerpos tienen el mismo volumen.

10. Si llamamos A_{base} al área de la base y h a la altura:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h; \quad V_{prisma} = A_{base} \cdot h$$

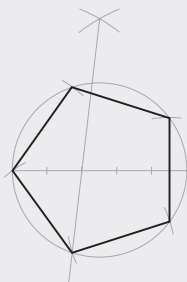
De donde deducimos: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} V_{prisma}$

De la misma manera:

$$V_{cono} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h; \quad V_{cilindro} = A_{base} \cdot h$$

De donde deducimos: $V_{cono} = \frac{1}{3} V_{cilindro}$

11.



12. Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo determinado por la escalera, la pared y el suelo:

$$h = \sqrt{0,8^2 + 1,8^2} = 1,97$$

La longitud de la escalera es de 1,97 m.

13. Hallamos la distancia recorrida en 3 min 52 s:

$$t = 3 \text{ min } 52 \text{ s} = 3 \cdot 60 + 52 = 232 \text{ s}$$

$$s = v \cdot t = 13 \cdot 232 = 3016 \text{ m}$$

La longitud de la pista circular es:

$$L = \pi d = \pi \cdot 120 = 377 \text{ m}$$

Para hallar el número de vueltas, dividimos la distancia recorrida entre la longitud de la pista:

$$\frac{3016}{377} = 8$$

El galgo da 8 vueltas en 3 min 52 s.

14.

La superficie necesaria será igual al área de un hexágono regular de 50 cm de lado.

Primero calculamos la apotema. Para ello, aplicamos el teorema de Pitágoras:

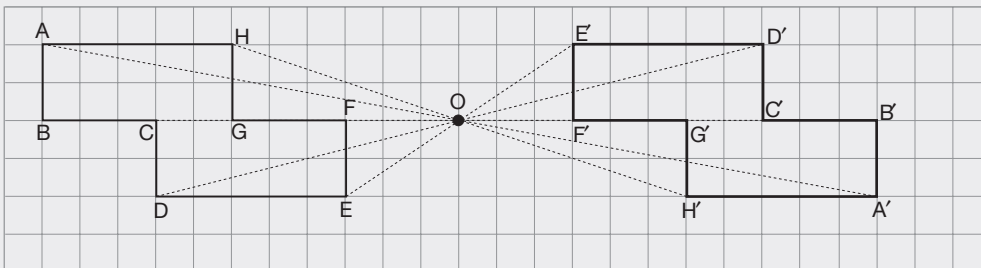
$$ap^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$ap = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 50 = 43,3 \text{ cm}$$

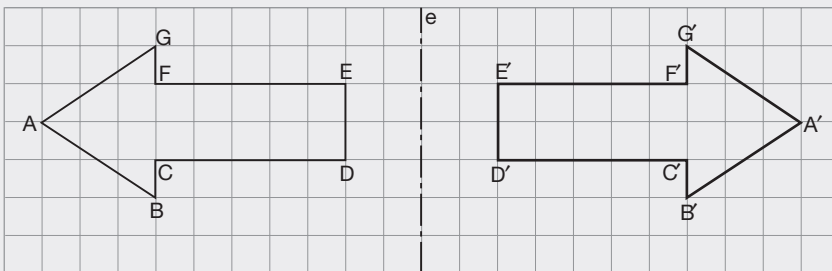
Ahora aplicamos la fórmula que nos da el área de un polígono regular:

$$A = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{6 \cdot 50 \cdot 43,3}{2} = 6495 \text{ cm}^2$$

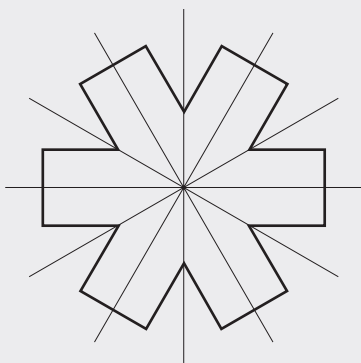
15.



16.



17.



18.

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

19.

$$a = 2,4 \text{ cm} \quad b = 3,2 \text{ cm} \quad c = 9,6 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la diagonal de la base del prisma:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2,4^2 + 3,2^2} = 4 \text{ cm}$$

Aplicamos de nuevo el teorema de Pitágoras para hallar la diagonal del prisma:

$$D = \sqrt{d^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 9,6^2} = 10,4 \text{ cm}$$

20. a) $A_{\text{base}} = a^2 = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{lateral}} = 4 a b = 4 \cdot 4 \cdot 12 = 192 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{total}} = 192 + 2 \cdot 16 = 224 \text{ cm}^2$
 b) $A_{\text{base}} = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot 4,8 \cdot 3,3}{2} = 39,6 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{lateral}} = 5 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = 5 \cdot \frac{4,8 \cdot 14}{2} = 168 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{total}} = 168 + 39,6 = 207,6 \text{ cm}^2$
 c) Base mayor:
 • Altura: $h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 4,3 \text{ cm}$
 • Área: $A_{b_1} = \frac{b_1 \cdot h_1}{2} = \frac{5 \cdot 4,3}{2} = 10,8 \text{ cm}^2$
 Base menor:
 • Altura: $h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 1,7 \text{ cm}$
 • Área: $A_{b_2} = \frac{b_2 \cdot h_2}{2} = \frac{2 \cdot 1,7}{2} = 1,7 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{lateral}} = 3 \cdot \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2} =$
 $= 3 \cdot \frac{(5 + 2) \cdot 7}{2} = 73,5 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{total}} = 73,5 + 10,8 + 1,7 = 86,0 \text{ cm}^2$

21. a) $A_{\text{base}} = 16 \text{ cm}^2$; $h = 12 \text{ cm}$
 $V = A_{\text{base}} \cdot h = 16 \cdot 12 = 192 \text{ cm}^3$
 b) $A_{\text{base}} = 39,6 \text{ cm}^2$
 $h = \sqrt{14^2 - 3,3^2} = 13,6 \text{ cm}$
 $V = A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 39,6 \cdot 13,6 = 179,5 \text{ cm}^3$

22. a) $A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78,5 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{lateral}} = 2 \pi r g = 2 \pi \cdot 5 \cdot 8 = 251,3 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{total}} = 251,3 + 2 \cdot 78,5 = 408,3 \text{ cm}^2$
 b) $A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,3 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{lateral}} = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 9 = 113,1 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{total}} = 113,1 + 50,3 = 163,4 \text{ cm}^2$
 c) $A_{b_1} = \pi r_1^2 = \pi \cdot 3^2 = 28,3 \text{ cm}^2$
 $A_{b_2} = \pi r_2^2 = \pi \cdot 6^2 = 113,1 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{lateral}} = \pi g (r_1 + r_2) = \pi \cdot 7 \cdot (3 + 6) = 197,9 \text{ cm}^2$
 $A_{\text{total}} = 197,9 + 28,3 + 113,1 = 339,3 \text{ cm}^2$

23. a) $A_{\text{base}} = 78,5 \text{ cm}^2$; $h = 8 \text{ cm}$.
 $V = A_{\text{base}} \cdot h = 78,5 \cdot 8 = 628,0 \text{ cm}^3$
 b) $A_{\text{base}} = 50,3 \text{ cm}^2$
 $h = \sqrt{9^2 - 4^2} = 8,1 \text{ cm}$

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 50,3 \cdot 8,1 = 135,8 \text{ cm}^3$$

24. Respuesta gráfica.

25. a) El área coloreada es igual a la suma de las áreas de dos trapezios menos el área de un triángulo.

Áreas de los trapezios:

$$A_1 = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(14 + 10) \cdot 6}{2} = 72$$

$$A_2 = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(14 + 10) \cdot 9}{2} = 108$$

Área del triángulo:

$$A_3 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27$$

Área coloreada:

$$A_1 + A_2 - A_3 = 153 \text{ cm}^2$$

b) El área coloreada es igual a la suma de las áreas de un segmento circular y de un trapezio.

Segmento circular:

$$r = \sqrt{0,75^2 + 4,25^2} = 4,3$$

$$A_1 = \frac{\pi r^2}{360} \cdot n - \frac{b \cdot h}{2} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 4,3^2}{360} \cdot 160 - \frac{8,5 \cdot 0,75}{2} = 22,6$$

Trapezio:

$$A_2 = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(10 + 8,5) \cdot 0,75}{2} = 6,9$$

Área coloreada:

$$A_1 + A_2 = 22,6 + 6,9 = 29,5 \text{ cm}^2$$

26. Hallamos la longitud de la circunferencia de una rueda:

$$L = \pi d$$

$$L = \pi \cdot 0,6 = 0,6 \pi \text{ m}$$

La distancia recorrida por una rueda es:

$$530 \cdot 0,6 \pi = 999 \text{ m}$$

Se encuentran a una distancia del pueblo de 999 m.

27. Cada porción de pizza será un sector circular que abarca un ángulo de 72° . Así:

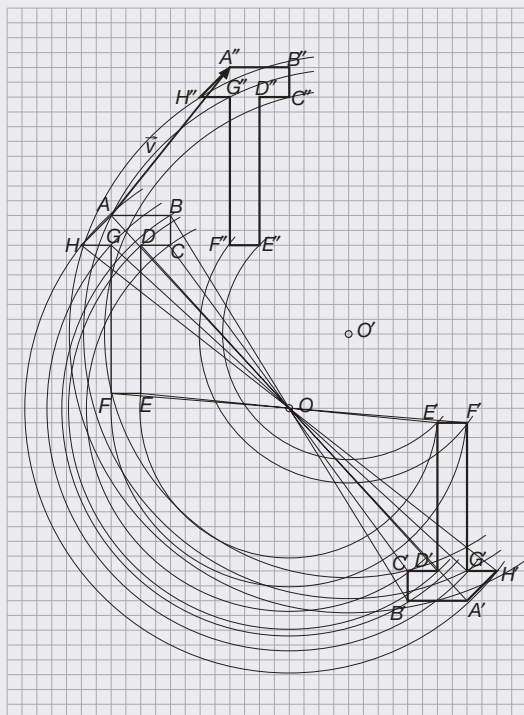
$$A = \frac{\pi r^2}{360} \cdot n = \frac{\pi \cdot 20^2}{360} \cdot 72 = 251,3 \text{ cm}^2$$

— Cada porción de rosco será un trapezio circular que abarca un ángulo de 72° . Así:

$$A = \frac{\pi \cdot n}{360} \cdot (R^2 - r^2) =$$

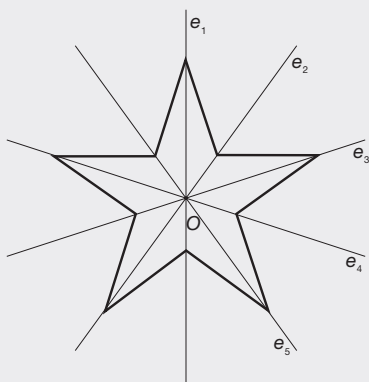
$$= \frac{\pi \cdot 72}{360} \cdot (20^2 - 8^2) = 211,1 \text{ cm}^2$$

28.



— Se obtiene el mismo resultado aplicando a la figura original una traslación de vector $v = \overrightarrow{AA''}$.

29.

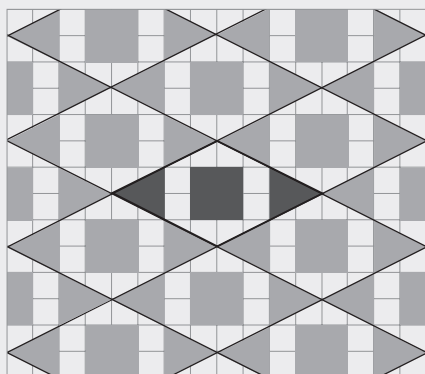


- Simetrías axiales de ejes e_1 , e_2 , e_3 , e_4 y e_5 .
- Giros de centro el punto O y ángulos 72° , 144° , 216° y 288° .

30.

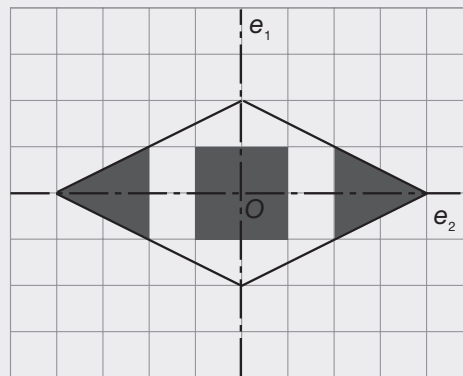
El lugar geométrico es la mediatriz del segmento AB.

31.



El módulo básico es el paralelogramo resaltado en la figura. Se trata de un rombo que tiene dibujado un cuadrado cuyo centro coincide con el del rombo y dos triángulos isósceles con los vértices situados en los extremos de la diagonal mayor del rombo.

— Movimientos que dejan el módulo básico invariante:



- Simetría central de centro O.
- Simetrías axiales de ejes e_1 y e_2 .
- Giro de centro O y ángulo 180° (este movimiento se identifica con una simetría central de centro O).

32.

- a) El área de la figura se obtiene a partir del área del cubo mayor, restando 3 caras del cubo menor y sumando asimismo 3 caras del cubo menor.

El área de la figura coincide, pues, con el área del cubo mayor:

$$A = 6 \cdot 82 = 384 \text{ cm}^2$$

El volumen de la figura es el volumen del cubo mayor menos el volumen del cubo menor:

$$V = 83 - 23 = 504 \text{ cm}^3$$

- b) El área de la figura es igual a la mitad del área de un cilindro más el área de las dos bases de un ortoedro y más el área de sus tres caras laterales:

$$A = \frac{1}{2} A_{\text{cilindro}} + 2 A_{\text{base ortoedro}} + A_{\text{3 caras laterales}}$$

$$A = \frac{1}{2} 2\pi r(g + r) + 2 A_{\text{base ortoedro}} + A_{\text{3 caras laterales}}$$

$$A = \frac{1}{2} 2\pi \cdot 2 \cdot (10 + 2) + 2 \cdot 6 \cdot 4 +$$

$$+ 2 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 10 = 283,4 \text{ cm}^2$$

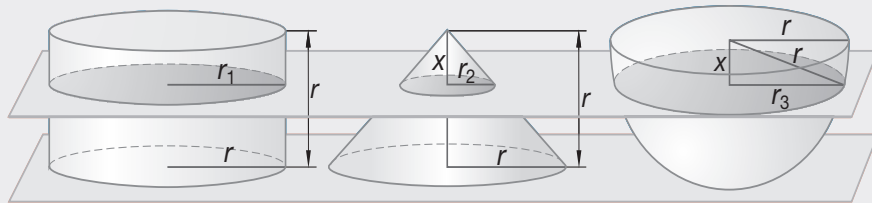
El volumen de la figura es igual a la mitad del volumen de un cilindro más el volumen de un ortoedro:

$$V = \frac{1}{2} V_{\text{cilindro}} + V_{\text{ortoedro}}$$

$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 h + a \cdot b \cdot c$$

$$V = \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 \cdot 10 + 6 \cdot 4 \cdot 10 = 302,8 \text{ cm}^3$$

33. — En primer lugar, expresaremos el área de las secciones circulares en función del radio del cuerpo (r) y de la distancia de la sección al extremo superior del cuerpo (x).



Cilindro

Las secciones del cilindro son iguales a la base.

Por lo tanto: $A_1 = \pi r^2$

Cono

Los dos triángulos dibujados en el interior del cono son semejantes y cumplen:

$$\frac{r_2}{r} = \frac{x}{r} \rightarrow r_2 = x$$

Por tanto: $A_2 = \pi x^2$

Semiesfera

Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo dibujado en el interior de la semiesfera: $r_3^2 = r^2 - x^2$.

Por lo tanto: $A_3 = \pi (r^2 - x^2)$

De las relaciones obtenidas para A_1 , A_2 y A_3 deducimos:

$$A_3 = \pi (r^2 - x^2) = \pi r^2 - \pi x^2 = A_1 - A_2$$

- Las secciones del casquete esférico por un plano paralelo a la base son iguales a las del cilindro menos las del tronco de cono.

Así, si aplicamos el principio de Cavalieri al casquete esférico y al cuerpo que resulta de extraer el tronco de cono del cilindro, obtenemos:

$$V_{c,e} = V_{\text{cilindro} - \text{tronco de cono}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{tronco de cono}}$$

$$V_{c,e} = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi r^2 h.$$