1. a) Anterior a a_n : a_{n-1}

b) Posterior a a_n : a_{n+1}

c) Siguiente a a_{n-2} : a_{n-1}

d) Anterior del anterior a a_n : a_{n-2}

2. a) $a_n = 3n$ c) $a_n = 2n + 1$

b) $a_n = \frac{2}{n}$ d) $a_n = n^2$

3. a) $a_1 = \frac{1^2 + 1}{1^2 + 2} = \frac{2}{3}$

$a_2 = \frac{2^2 + 1}{2^2 + 2} = \frac{5}{6}$

$a_3 = \frac{3^2 + 1}{3^2 + 2} = \frac{10}{11}$

$a_4 = \frac{4^2 + 1}{4^2 + 2} = \frac{17}{18}$

$a_5 = \frac{5^2 + 1}{5^2 + 2} = \frac{26}{27}$

$a_6 = \frac{6^2 + 1}{6^2 + 2} = \frac{37}{38}$

$a_7 = \frac{7^2 + 1}{7^2 + 2} = \frac{50}{51}$

$a_8 = \frac{8^2 + 1}{8^2 + 2} = \frac{65}{66}$

$a_9 = \frac{9^2 + 1}{9^2 + 2} = \frac{82}{83}$

$a_{10} = \frac{10^2 + 1}{10^2 + 2} = \frac{101}{102}$

$\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, \frac{17}{18}, \frac{26}{27}, \frac{37}{38}, \frac{50}{51}, \frac{65}{66}, \frac{82}{83}, \frac{101}{102}$

b) $a_1 = \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 1}{1 + 2} = \frac{-1}{3}$

$a_2 = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 1}{2 + 2} = \frac{-1}{4}$

$a_3 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3 + 1}{3 + 2} = \frac{1}{5}$

$a_4 = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 1}{4 + 2} = \frac{5}{6}$

$a_5 = \frac{5^2 - 3 \cdot 5 + 1}{5 + 2} = \frac{11}{7}$

$a_6 = \frac{6^2 - 3 \cdot 6 + 1}{6 + 2} = \frac{19}{8}$

$a_7 = \frac{7^2 - 3 \cdot 7 + 1}{7 + 2} = \frac{29}{9}$

$a_8 = \frac{8^2 - 3 \cdot 8 + 1}{8 + 2} = \frac{41}{10}$

$a_9 = \frac{9^2 - 3 \cdot 9 + 1}{9 + 2} = \frac{55}{11} = 5$

$a_{10} = \frac{10^2 - 3 \cdot 10 + 1}{10 + 2} = \frac{71}{12}$

$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{11}{7}, \frac{19}{8}, \frac{29}{9}, \frac{41}{10}, 5, \frac{71}{12}$

4. Para calcular los seis primeros términos de una sucesión recurrente, cuyo primer término ya conocemos, debemos seguir este orden: a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6.

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$, $a_5 = 15$ y $a_6 = 21$

b) $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 6$, $a_5 = 7$ y $a_6 = 8$

c) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 3$, $a_5 = -5$ y $a_6 = 11$

5. a) No es progresión aritmética.

b) $22 - 26 = 18 - 22 = 14 - 18 = 10 - 14 = -4$

Es una progresión aritmética de diferencia –4.

c) $-7 - (-10) = -4 - (-7) = -1 - (-2) =$
$= 2 - (-1) = 3$

Es una progresión aritmética de diferencia 3.

d) $-4 - (-2) = -6 - (-4) = -8 - (-6) =$
$= -10 - (-8) = -2$

Es una progresión aritmética de diferencia –2.

6. a) $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$

La diferencia es 2.

b) $-7 - (-5) = -7 - (-7) = -11 - (-9) = -2$

La diferencia es –2.

c) $-9 - (-11) = -7 - (-9) = -5 - (-7) = 2$

La diferencia es 2.

d) $9 - 11 = 7 - 9 = 5 - 7 = -2$

La diferencia es –2.

7. a) $33 - 26 = 12 - 5 = 7 \rightarrow d = 7$

5, 12, 19, 26, 33...

b) $6 - 3 = 3 - 0 = 0 - (-3) = 3 \rightarrow d = 3$

–6, –3, 0, 3, 6...

c) $1 - 2 = 2 - 3 = -1 \rightarrow d = -1$

5, 4, 3, 2, 1...

d) $5 - 3 = 3 - 1 = 2 \rightarrow d = 2$

1, 3, 5, 7, 9...

8. a) $a_8 = a_1 + (7 - 1)\,d = a_1 + 6d$

b) $a_n = a_{n-3} + 3d \rightarrow a_n - 3 = a_n - 3d$

9. $6 - 2 = 10 - 6 = 14 - 10 = 18 - 14 = 4$

En efecto, es una progresión aritmética de diferencia 4.

© grupo edebé

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = 2 + (n - 1) - 4$

$a_n = 4n - 2$

Así pues, la expresión del término general es:

$a_n = 4n - 2$

$a_{80} = 4 \cdot 80 - 2 = 318$

El término a_{80} es 318.

10. Expresamos cada uno de los términos conocidos en función del primer término y de la diferencia.

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = a_1 + 2d \\ a_3 = 8 \end{array}\right\} 8 = a_1 + 2d$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = a_1 + 10d \\ a_{11} = 32 \end{array}\right\} 32 = a_1 + 10d$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} 8 = a_1 + 2d \\ 32 = a_1 + 10d \end{array}\right\}$$

$a_1 = 8 - 2d$

$32 = 8 - 2d + 10d \rightarrow 24 = 8d \rightarrow d = \frac{24}{8} = 3$

$a_1 = 8 - 2 \cdot 3 = 2$

$a_{21} = a_1 + 20d \rightarrow a_{21} = 2 + 20 \cdot 3 = 62$

El término a_{21} es 62.

11.
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 + 2 = 5 \\ a_2 = 3 + 2 \cdot 2 = 7 \\ a_3 = 3 + 3 \cdot 2 = 9 \\ a_4 = 3 + 4 \cdot 2 = 11 \end{array}\right\} \rightarrow d = 2$$

$a_{11} = a_1 + 10d = 5 + 20 = 25$

El alquiler costará 25 €.

12. $d = 19 - 15 = ... = 7 - 3 = 4$

$a_9 = a_1 + 8d = 3 + 32 = 35$

Aplicamos la expresión de S_n para una progresión aritmética:

$$s_9 = \frac{(a_1 + a_9) \cdot 9}{2} = \frac{(3 + 35) \cdot 9}{2} = 171$$

La suma de los nueve primeros términos es 171.

13. En primer lugar calculamos a_1 y a_{16}:

$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 6 = a_1 + 3 \cdot (-3) \rightarrow 6 = a_1 - 9 \rightarrow a_1 = 15$

$a_{16} = a_1 + 15d \rightarrow a_{16} = 15 + 15 \cdot (-3) = -30$

Aplicamos la expresión de S_n para una progresión aritmética:

$$s_{16} = \frac{(a_1 + a_{16}) \cdot 16}{2} = \frac{[15 + (-30)] \cdot 16}{2} = -120$$

La suma de los 16 primeros términos es −120.

14. La sucesión del dinero que ahorra cada semana es una progresión aritmética con $a_1 = 2$ y $d = 0$.

$a_{15} = a_1 + 14d = 2 + 14 \cdot 0 = 2$

$$s = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot n}{2} = \frac{(2 + 2) \cdot 15}{2} = 30$$

El ahorro en 15 semanas es de 33 €.

15. a) No es progresión geométrica.

b) $\frac{24}{48} = \frac{12}{24} = \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$.

c) $\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{2}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{9}{8}} = \frac{\frac{9}{32}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{2}$

Es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = \frac{16}{-8} = \frac{-32}{16} = -2$

Es una progresión geométrica de razón −2.

16. — Para determinar si se trata de una progresión geométrica, debemos ver si el cociente entre cada uno de los términos y su anterior es una cantidad constante.

$\frac{6}{2} = 3 \quad \frac{18}{6} = 3 \quad \frac{54}{18} = 3 \quad \frac{162}{54} = 3 \quad ...$

Por lo tanto, sí es una progresión geométrica, de razón 3.

— Para hallar la expresión del término general, sustituimos $a_1 = 2$ y $r = 3$ en la expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ y obtenemos: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

— Para calcular el término a_9 sustituimos n por 9 en la expresión que hemos obtenido del término general.

$a_9 = 2 \cdot 3^{9-1} = 2 \cdot 3^8 = 13122$

17. $\frac{12}{4} = \frac{36}{12} = \frac{108}{36} = \frac{324}{108} = 3$

En efecto, es una progresión geométrica de razón 3.

— $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

La expresión del término general es: $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

— $a_{20} = 4 \cdot 3^{20-1} = 4 \cdot 3^{19} = 4\,649\,045\,868$

El término a_{20} es 4 649 045 868.

18. Expresamos cada uno de los términos conocidos en función del primero y de la razón.

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot r \\ a_2 = 24 \end{array}\right\} 24 = a_1 \cdot r$$

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = a_1 \cdot r^3 \\ a_4 = 216 \end{array}\right\} 216 = a_1 \cdot r^3$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

© grupo edebé

$$\left.\begin{array}{l} 24 = a_1 \cdot r \\ 216 = a_1 \cdot r^3 \end{array}\right\}$$

$$a_1 = \frac{24}{r}$$

$$216 = \frac{24}{r} \cdot r^3 \rightarrow 216 = 24r^2$$

$$r^2 = \frac{216}{24} = 9 \rightarrow r = \pm 3$$

Si $r = 3 \rightarrow a_1 = \frac{24}{3} = 8 \rightarrow a_8 = 8 \cdot 3^7 = 17\,496$

Si $r = -3 \rightarrow a_1 = \frac{24}{-3} = -8 \rightarrow a_8 = (-8) \cdot (-3^7) =$
$= 17\,496$

En ambos casos, el término a_8 es 17 496.

19. Expresamos cada uno de los términos conocidos en función del primero y de la razón.

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = a_1 \cdot r^2 \\ a_3 = 18 \end{array}\right\} 18 = a_1 \cdot r^2$$

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = a_1 \cdot r^4 \\ a_5 = \frac{9}{2} \end{array}\right\} \frac{9}{2} = a_1 \cdot r^4$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 18 = a_1 \cdot r^2 \\ \frac{9}{2} = a_1 \cdot r^4 \end{array}\right\}$$

Para resolver el sistema, primero despejamos a_1 de la primera ecuación:

$$a_1 = \frac{18}{r^2}$$

A continuación, sustituimos en la segunda ecuación a_1 por la expresión obtenida.

$$\frac{9}{2} = \frac{18}{r^2} \cdot r^4 \; ; \; \frac{1}{4} = r^2 \; ; \; r = \frac{1}{2}$$

$$\text{o } r = -\frac{1}{2}$$

El enunciado indica que debemos tomar el valor positivo. Por lo tanto:

$$a_1 = \frac{18}{r^2} = \frac{18}{\frac{1}{4}} = 72$$

Luego la expresión del término general es:

$$a_n = 72 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Para calcular a_8 sustituimos n por 8 en la expresión del término general.

$$a_8 = 72 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{72}{2^7} = \frac{9}{16}$$

20. Según los datos de la actividad:

$$\left.\begin{array}{l} r = 3 \\ a_5 = 405 \end{array}\right\} \rightarrow 405 = a_1 \cdot 3^4 \rightarrow a_1 = 5$$

21. Calculamos a_{15}:

$a_{15} = a_1 \cdot r^{14} \rightarrow a_{15} = 2 \cdot 3^{14} = 9\,565\,938$

Aplicamos la expresión de S_n para una progresión geométrica:

$$s_{15} = \frac{a_{15} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{9\,565\,938 \cdot 3 - 2}{3 - 1} =$$
$$= 14\,348\,906$$

La suma de los 15 primeros términos es 14348906.

22. La sucesión del dinero que ahorra cada semana es una progresión geométrica de $a_1 = 1$ y $r = 2$.

$a_{15} = a_1 \cdot r^{14} = 1 \cdot 2^{14} = 16\,384$

Aplicamos la expresión de S_n para una progresión geométrica:

$$s_{15} = \frac{a_{15} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{16\,384 \cdot 2 - 2}{2 - 1} = 32\,767$$

$3 + 32\,767 = 32\,770$

El ahorro en 15 semanas es de 32 770 €.

23. Actividad TIC.

24. Aplicando las expresiones del término general de las progresiones aritméticas:

6a) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ d = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = 5 + 49 \cdot 2 = 103$

$$S_{50} = \frac{(5 + 103) \cdot 50}{2} = 2\,700$$

6b) $\left.\begin{array}{l} a_1 = (-5) \\ d = (-2) \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = (-5) + 49 \cdot (-2) = (-103)$

$$S_{50} = \frac{(-5 - 103) \cdot 50}{2} = (-2\,700)$$

6c) $\left.\begin{array}{l} a_1 = (-11) \\ d = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = (-11) + 49 \cdot 2 = 87$

$$S_{50} = \frac{(-11 + 87) \cdot 50}{2} = 1900$$

6d) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 11 \\ d = (-2) \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = 11 + 49 \cdot (-2) = (-87)$

$$S_{50} = \frac{(11 - 87) \cdot 50}{2} = (-1900)$$

7a) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ d = 7 \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = 5 + 49 \cdot 7 = 348$

$$S_{50} = \frac{(5 + 348) \cdot 50}{2} = 8\,825$$

© grupo edebé

7b) $\left.\begin{aligned} a_1 &= (-6) \\ d &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow a_{50} = (-6) + 49 \cdot 3 = 141$

$$S_{50} = \frac{(-6 + 141) \cdot 50}{2} = 3\,375$$

7c) $\left.\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ d &= -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow a_{50} = 5 + 49 \cdot (-1) = (-44)$

$$S_{50} = \frac{(5 - 44) \cdot 50}{2} = (-975)$$

7d) $\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ d &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow a_{50} = 1 + 49 \cdot 2 = 99$

$$S_{50} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

25. Calcularemos la suma de los 200 primeros pares y le restaremos la suma de los 100 primeros.

$0, 2, 4, 6... \rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ d &= 2 \end{aligned}\right\}$

$a_{100} = 0 + 99 \cdot 2 = 198$

$a_{200} = 0 + 199 \cdot 2 = 198$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} S_{200} &= \frac{(0 + 398) \cdot 200}{2} = 39800 \\ S_{100} &= \frac{(0 + 198) \cdot 100}{2} = 9900 \end{aligned}\right\}$$

$S_{200} - S_{100} = 29900$

26. Actividad TIC.

27. Según los datos de la actividad:

$\left.\begin{aligned} r &= 3 \\ a_1 &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow a_{20} = 5 \cdot 3^{19} \rightarrow a_{20} = 5\,811\,307\,335$

$$S_{20} = \frac{5\,811\,307\,335 \cdot 3 - 5}{2} = 871\,696\,100$$

28. A partir del término general de la sucesión:
2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024

29. a) $a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_{10} = 100 + 1 = 101$

$a_{100} = 10\,000 + 1 = 10\,001$

$\vdots$

$a_\infty \rightarrow +\infty$

b) $b_1 = -1^3 = (-1)$

$b_{10} = -10^3 = (-1000)$

$b_{100} = -100^3 = (-1\,000\,000)$

$\vdots$

$b_\infty \rightarrow -\infty$

c) $c_1 = (-1) - 5 = (-6)$

$c_{10} = (-10) - 5 = (-15)$

$c_{100} = (-100) - 5 = (-105)$

$\vdots$

$c_\infty \rightarrow -\infty$

d) $d_1 = 3 - 5 = (-2)$

$d_{10} = 300 - 50 = 250$

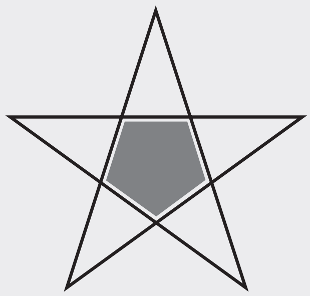
$d_{100} = 30\,000 - 500 = 29\,500$

$\vdots$

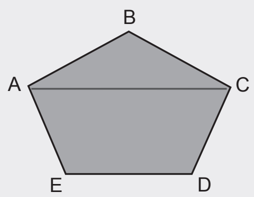
$d_\infty \rightarrow +\infty$

30. a) Una estrella de cinco puntas o pitagórica, tiene la proporción áurea en varios puntos:

El pentágono de su centro es áureo:

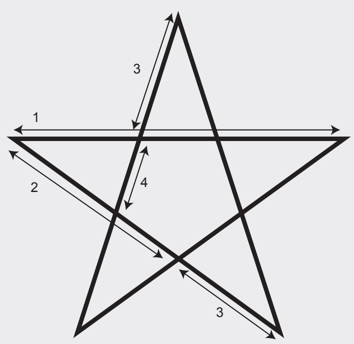


La longitud de las diagonales dividida entre la de los lados es el número de oro:



$$\frac{\text{Diagonal AC}}{\text{Lado AB}} = \varphi$$

Y estableciendo las siguientes proporciones:



$$\frac{\text{Segmento 1}}{\text{Segmento 2}} = \frac{\text{Segmento 2}}{\text{Segmento 3}} = \frac{\text{Segmento 3}}{\text{Segmento 4}}$$

b) Las dimensiones del lienzo son las de un rectángulo áureo.

© grupo edebé

c) La base de la torre forma un cuadrado de 100 metros de lado, que sería el lado pequeño de un rectángulo áureo. La altura de la torre es de dos rectángulos áureos.

31. Las dimensiones exactas del DNI son 85,60 mm de ancho × 53,98 mm de alto, por lo que la proporción entre los lados es 1,59, muy cercano al valor del número de oro.

La mayoría de pantallas de ordenadores o los televisores guardan una proporción muy cercana al número de oro entre su ancho y su alto. Por ejemplo, el monitor con el que se trabaja para editar este libro, tiene unas medidas de 33,2 cm de ancho × 20,8 cm de alto, por lo que la proporción entre sus lados es 1,60.

32. En muchísimos logos aparece, de una u otra manera, la proporción áurea:

http://www.brandemia.org/la-proporcion-aurea-en-el-diseno-de-logotipos

33.
$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 24 \\ a_4 - a_3 = 144 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot r = 24 \\ a_1 \cdot r^3 - a_1 \cdot r^2 = 144 \end{array}\right\}$$

$$a_1 = \frac{14}{r}$$

$$\frac{14}{r} \cdot r^3 - \frac{14}{r} \cdot r^2 = 144$$

$24r^2 - 24r = 144$

$r^2 - r - 6 = 0$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \rightarrow r = 3 \text{ o } r = -2$$

$r = 3 \rightarrow a_1 = 8$

En este caso, la progresión geométrica es:

8, 24, 72, 216, 648...

$r = -2 \rightarrow a_1 = -12$

En este caso, la progresión geométrica es:

–12, 24, –48, 96, –192...

Actividades finales

34. Sí, puesto que una lista de números es un conjunto ordenado de números que se corresponden con los números naturales.

35. a) Cada término se obtiene multiplicando por tres el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión: $a_n = 3n$.

b) Cada término se obtiene sumando a 68 el producto de –4 por el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión:

$a_n = 68 - 4n$.

c) Cada término se obtiene elevando al cuadrado el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión: $a_n = n^2$.

d) Cada término se obtiene sumando a –1 el producto de dos por el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión:

$a_n = -1 + 2n$.

e) Cada término, excepto los dos primeros, se obtiene sumando los dos términos inmediatamente anteriores: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, si $n \geq 3$.

f) Cada término se obtiene multiplicando el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión por este mismo número disminuido en una unidad: $a_n = n \cdot (n - 1)$.

36. a) $a_n = n^2 + 2$

b) $a_{100} = 100^2 + 2 = 10\,002$

37. a) El término inicial es: $a_1 = 2$; y, luego, en cada término sumamos cinco al anterior $a_n = a_{n-1} + 5$.

b) Hoy, el término inicial es: $a_1 = 1$ (en millones); cada año su valor aumentará un 10 % (un 110 % = 1,1 en tanto por uno) $a_n = 1{,}1 \cdot a_{n-1}$.

c) Cuando compró su coche, costaba $a_1 = 6$ (en miles de euros); cada año que pasa, el coche cuesta la mitad que el año anterior $a_n = 0{,}5 \cdot a_{n-1}$.

38. a) $a_1 = 4 - 3 \cdot 1 = 1$

$a_2 = 4 - 3 \cdot 2 = -2$

$a_3 = 4 - 3 \cdot 3 = -5$

$a_4 = 4 - 3 \cdot 4 = -8$

$a_5 = 4 - 3 \cdot 5 = -11$

b) $$a_1 = \frac{5 \cdot 1 - 3}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{5 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2} = \frac{7}{4}$$

$$a_3 = \frac{5 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

$$a_4 = \frac{5 \cdot 4 - 3}{2 \cdot 4} = \frac{17}{8}$$

© grupo edebé

$a_5 = \dfrac{5 \cdot 5 - 3}{2 \cdot 5} = \dfrac{22}{10} = \dfrac{11}{5}$

c) $a_1 = \dfrac{3 \cdot 1 - 2}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$a_2 = \dfrac{3 \cdot 2 - 2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$a_3 = \dfrac{3 \cdot 3 - 2}{3} = \dfrac{7}{3}$

$a_4 = \dfrac{3 \cdot 4 - 2}{4} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

$a_5 = \dfrac{3 \cdot 5 - 2}{5} = \dfrac{13}{5}$

d) $a_1 = \dfrac{1^2 - 2}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1}{2}$

$a_2 = \dfrac{2^2 - 2}{2 \cdot 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$a_3 = \dfrac{3^2 - 2}{2 \cdot 3} = \dfrac{7}{6}$

$a_4 = \dfrac{4^2 - 2}{2 \cdot 4} = \dfrac{14}{8} = \dfrac{7}{4}$

$a_5 = \dfrac{5^2 - 2}{2 \cdot 5} = \dfrac{23}{10}$

39. Restando cada término del anterior comprobamos que se trata de una progresión aritmética de diferencia $\dfrac{1}{6}$.

Por lo tanto, su término general será:

$a_n = \dfrac{1}{2} + (n - 1) \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{n}{6} = \dfrac{2 + n}{6}$

40. Para que una sucesión sea una progresión aritmética, la diferencia entre un término cualquiera y su anterior debe ser una cantidad constante.

41. a) 5, 8, 11, 14, 17... $d = 3$

7, 10, 13, 16, 19... $d' = 3$

$d' = d \rightarrow$ Falsa.

b) 5, 8, 11, 14, 17... $d = 3$

10, 16, 22, 28, 34... $d' = 6$

$d' = 2d' \rightarrow$ Cierta.

42. a) $8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 17 - 14 = 3$

Se trata de una progresión aritmética de diferencia 3.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = 5 + (n - 1) \cdot 3 =$
$= 3n + 2$

Por lo tanto, la expresión del término general es:

$a_n = 3n + 2$

Si $n = 20$, tenemos que: $a_{20} = 3 \cdot 20 + 2 = 62$.

Así pues, el término a_{20} es 62.

b) $3 - 1 = 2$; $6 - 3 = 3$

No es progresión aritmética.

c) $6 - 3 = 3$

$10 - 6 = 4$

No es progresión aritmética.

d) $27 - 3 = 51 - 27 = 75 - 51 = 99 - 75 = 24$

Se trata de una progresión aritmética de diferencia 24.

$a_n = a_1 + (n - 1) - d - a_n = 3 + (n - 1) - 24 =$
$= 24n - 21$

Por lo tanto, la expresión del término general es:

$a_n = 24n - 21$

Si $n = 20$ tenemos que: $a_{20} = 24 - 20 - 21 = 459$.

Así pues, el término a_{20} es 459.

43. — 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

No es una progresión aritmética.

a) 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

Obtenemos una progresión aritmética de diferencia 2 y cuyo primer término es 3.

b) 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

Se obtiene un valor constante, 2.

44. $a_{10} = a_1 + 9d - a_{10} = -3 + 9 \cdot (-4) = -39$

$s_{10} = \dfrac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2}$

$s_{10} = (-3 - 39) \cdot 5 = -210$

La suma es -210.

45. $\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 + d \\ a_2 = 10 \end{array}\right\} 10 = a_1 + d$

$\left.\begin{array}{l} a_5 = a_1 + 4d \\ a_5 = 57 \end{array}\right\} 57 = a_1 + 4d$

$\left.\begin{array}{l} 10 = a_1 + d \\ 57 = a_1 + 4d \end{array}\right\}$

$a_1 = 10 - d$

$57 = 10 - d + 4d \rightarrow 47 = 3d \rightarrow d = \dfrac{47}{3}$

$a_1 = 10 - \dfrac{47}{3} = -\dfrac{17}{3}$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_n = -\dfrac{17}{3} + (n - 1) \cdot \dfrac{47}{3} = \dfrac{47}{3}n - \dfrac{64}{3}$

Por lo tanto, la expresión del término general es:

$a_n = \dfrac{47}{3}n - \dfrac{64}{3}$

Si $n = 30$, tenemos:

$a_{30} = \dfrac{47}{3} \cdot 30 - \dfrac{64}{3} = \dfrac{1346}{3}$

Así pues, el término a_{30} es $\dfrac{1346}{3}$.

© grupo edebé

46. a) $a_5 + a_9 = a_1 + 4d + a_1 + 8d = 2a_1 + 12d$

$2a_1 + 12d = 48$

El séptimo término es 24.

b) $a_4 + a_{10} = a_1 + 3d + a_1 + 9d = 2a_1 + 12d = 48$

La suma del cuarto y décimo término es 48.

47. $a_8 = a_1 + 7d = 34$

$$s_{20} = \frac{(a_1 + a_1 + 19d) \cdot 20}{2} = 1830$$

$183 = 2a_1 + 19d$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 34 &= a_1 + 7d \\ 183 &= 2a_1 + 19d \end{aligned}\right\}$$

$a_1 = 34 - 7d$

$183 = 2 \cdot (34 - 7d) + 19d$

$183 = 68 - 14d + 19d$

$$185 = 5d \to d = \frac{115}{5} = 23$$

$a_1 = 34 - 7 \cdot 23 = 34 - 161 = -127$

$a_n = a_1 + (n - 1)d = -127 + 23n - 23 = 23n -$

El término general es $a_n = 23n - 150$.

48. $$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2}; 10100 = \frac{(a_1 + 200) \cdot 100}{2};$$

$$a_1 = \frac{10100 \cdot 2}{100} - 200 = 2$$

$$a_{100} = a_1 + 99 \cdot d; \quad d = \frac{a_{100} - a_1}{99} = \frac{200 - 2}{99} = 2$$

El primer término es $a_1 = 2$ y la diferencia es $d = 2$

49. Si hay partes iguales, tenemos once puntos sobre el segmento, por lo tanto, escribimos la progresión aritmética en función de los datos:

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot d$

$a_{11} = 3 + (11 - 1) \cdot d = 17$

Donde:

$3 + (11 - 1) \cdot d = 17$

$10d = 14$

$$d = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

Así pues:

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot \frac{7}{5}$$

$a_1 = 3$

$$a_2 = 3 + \frac{7}{5} = \frac{22}{5}$$

$$a_3 = 3 + 2 \cdot \frac{7}{5} = \frac{29}{5}$$

$$a_4 = 3 + 3 \cdot \frac{7}{5} = \frac{36}{5}$$

$$a_5 = 3 + 4 \cdot \frac{7}{5} = \frac{43}{5}$$

$$a_6 = 3 + 5 \cdot \frac{7}{5} = \frac{50}{5}$$

$$a_7 = 3 + 6 \cdot \frac{7}{5} = \frac{57}{5}$$

Y así con los puntos restantes $\frac{64}{5}, \frac{71}{5}, \frac{78}{5}$ y 17 .

50. Tenemos, por un lado, la expresión que se corresponde con la suma de los 10 primeros términos.

$$s_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 210$$

$10 \cdot (a_1 + a_{10}) = 420$

$(a_1 + a_{10}) = 42$

$(a_1 + a_1 + d \cdot 9) = 42$

$2a_1 + 9d = 42$

Y por otro lado

$a_{10} = a_1 \cdot 13$

$a_1 + 9d = a_1 \cdot 13$

$12a_1 - 9d = 0$

Es decir que tenemos que resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2a_1 + 9d &= 42 \\ 12a_1 - 9d &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Por reducción:

$$14a_1 = 42 \to a_1 = \frac{42}{14} = 3$$

Y, por lo tanto: $9d = 12a_1 \to 9d = 12 \cdot 3 \to d = 4$

Y el término general sería:

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$

51. $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}; 400 = \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = n^2$$

$$n = \sqrt{400} = 20$$

$a_{20} = 2n - 1 = 39$

El último término de la progresión es el número 39, que se corresponde con el término número 20.

52. La progresión es:

$a_1, a_2 = a_1 + 30, a_3 = a_2 + 30, a_4 = a_3 + 30$

es decir:

$a_1 + a_2 + 30 + a_1 + 60 + a_1 + 90 = 360$

$4a_1 + 180 = 360$

$$a_1 = \frac{180}{4} = 45^\circ$$

Los ángulos del cuadrilátero serán:

$a_1 = 45^\circ, a_2 = 75^\circ, a_3 = 105^\circ$ y $a_4 = 135^\circ$

© grupo edebé

53. La progresión es:

$a_1, a_2 = a_1 + 4, a_3 = a_1 + 8$

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$(a_1 + 8)^2 = (a_1 + 4)^2 + a_1^2$

$a_1^2 = (a_1 + 8)^2 - (a_1 + 4)^2$

Donde:

$a_1^2 - 8a_1 - 48 = 0$

$$a_1 = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{8 \pm 16}{2}$$

Cuya solución positiva es $a_1 = 12$

Los lados del triángulo rectángulo son:

$a_1 = 12, a_2 = 16, a_3 = 20$

54. Para que una sucesión sea una progresión geométrica, el cociente entre un término cualquiera y su anterior debe ser una cantidad constante.

55. a) $\frac{4}{1} \neq \frac{9}{4} \neq \frac{16}{9} \neq \frac{25}{16}$

No es progresión geométrica.

b) $\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{40}{20} = \frac{80}{40} = 2$

Es una progresión geométrica de razón 2.

c) $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{64}{32} \neq \frac{32}{8}$

No es una progresión geométrica.

d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} \neq \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \neq \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}} \neq \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$

No es una progresión geométrica.

56. a) $r = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

La expresión del término general es $a_n = 2^n$

$a_{10} = 2^{10} = 1024$

El término a_{10} es 1024.

b) $$r = \frac{\frac{8}{81}}{\frac{4}{27}} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{2}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

La expresión del término general es:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{2^8}{3^9} = \frac{256}{6\,561}$$

El término a_{10} es: $\frac{256}{6\,561}$

c) $r = \frac{-4}{4} = \frac{4}{-4} = \frac{-4}{4} = \frac{4}{-4} = -1$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}$

La expresión del término general es:

$a_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}$

$a_{10} = 4 \cdot (-1)^{10-1} = 4 \cdot (-1)^9 = 4 \cdot (-1) = -4$

El término a_{10} es -4.

d) $$r = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{1}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

La expresión del término general es:

$$a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$a_{10} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$$

El término a_{10} es $\frac{1}{256}$

57. $\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot r \\ a_2 = 24 \end{array}\right\} 24 = a_1 \cdot r$

$\left.\begin{array}{l} a_5 = a_1 \cdot r^4 \\ a_5 = 1536 \end{array}\right\} 1536 = a_1 \cdot r^4$

$\left.\begin{array}{l} 24 = a_1 \cdot r \\ 1536 = a_1 \cdot r^4 \end{array}\right\} 1536 = a_1 \cdot r^4$

$$a_1 = \frac{24}{r}$$

$$1536 = \frac{24}{r} \cdot r^4 \rightarrow 1536 = 24 \cdot r^3 \rightarrow 64 = r^3 \rightarrow r = 4$$

$$a_1 = \frac{24}{4} = 6$$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 6 \cdot 4^{n-1} = 3 \cdot 2 \cdot (2^2)^{n-1} =$
$= 3 \cdot 2 \cdot 2^{2n-2} = 3 \cdot 2^{2n-1}$

La expresión del término general es $a_n = 3 \cdot 2^{2n-1}$

$a_{10} = 3 \cdot (2^2)^{10-1} = 3 \cdot 2^{19} = 1\,572\,864$

El término a_{10} es 1 572 864.

58. $a_8 = a_1 \cdot r^7 \cdot a_8 = 3 \cdot 2^7 = 384$

$$S_8 = \frac{a_8 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765$$

La suma de los ocho primeros términos es 765.

59. $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$; $768 = 3 \cdot 2^{n-1} = \frac{3}{2} \cdot 2^n$

$$2^n = \frac{768 \cdot 2}{3} = 512;$$

$512 = 2^9 = 2^n$; $n = 9$.

Ocupa el noveno lugar.

© grupo edebé

60. Para que sean términos consecutivos de una progresión geométrica se tiene que cumplir que:

$$\frac{x+10}{x} = \frac{x+40}{x+10}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos que $x = 5$.

Por lo tanto, los tres términos de la progresión geométrica son 5, 15 y 45.

61. Se debe verificar que:

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= a_1 \cdot r^2 \\ a_6 &= a_1 \cdot r^5 \end{aligned}\right\} \text{Dividiendo ambas ecuaciones } \frac{a_6}{a_3} = r^3$$

Por lo tanto:

$$r = \sqrt[3]{\frac{a_6}{a_3}} = 3$$

Para obtener a_1, sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores:

$$45 = a_1 \cdot 3^2 \rightarrow a_1 = 5$$

La suma de los ocho primeros términos es:

$$a_8 = 5 \cdot 3^7 = 10935$$

$$S_8 = \frac{10\,935 \cdot 3 - 5}{2} = 16\,400$$

62. a) $a_6 = a_1 \cdot r^{6-1} \rightarrow 486 = 2 \cdot r^5$

$$r^5 = 243 \rightarrow r = \sqrt[5]{3^5} = 3$$

Así, tenemos $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

b) Tenemos:

$$a_6 = a_3 \cdot r^3 \rightarrow \frac{32}{81} = \frac{4}{3} \cdot r^3$$

$$r^3 = \frac{32}{81} \cdot \frac{3}{4} \rightarrow r^3 = \frac{8}{27} \rightarrow r = \frac{2}{3}$$

Determinemos el primer término:

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow \frac{4}{3} = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{4}{3} = a_1 \cdot \frac{4}{9} \rightarrow a_1 = \frac{4}{3} : \frac{4}{9}$$

$$a_1 = \frac{4 \cdot 9}{3 \cdot 4} = 3$$

Así, tenemos:

$$a_n = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

c) $a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \rightarrow 128 = \frac{1}{2} \cdot r^4$

$$r^4 = 128 : \frac{1}{2} \rightarrow r^4 = 128 \cdot 2$$

$$r^4 = 256 \xrightarrow[r>0]{} r = \sqrt[4]{4^4} = 4$$

Por lo tanto, $a_n = \frac{1}{2} \cdot 4^{n-1}$

63. a) Tenemos $r = \dfrac{a_2}{a_1} \rightarrow r = \dfrac{\frac{15}{2}}{5} = \dfrac{3}{2}$

$$S_7 = \frac{5 \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^7 - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1} \rightarrow S_7 = \frac{5 \cdot \left(\frac{2187}{128} - 1\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$S_7 = \frac{5 \cdot \frac{2\,059}{128}}{\frac{1}{2}} \rightarrow S_7 = \frac{10\,295}{64}$$

b) Tenemos $r = \dfrac{a_4}{a_3} \rightarrow r = \dfrac{\frac{20}{3}}{\frac{10}{3}} = 2$

Determinemos el primer término:

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow \frac{10}{3} = a_1 \cdot 2^2$$

$$a_1 = \frac{10}{3} : 4 \rightarrow a_1 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$S_7 = \frac{\frac{5}{6} \cdot \left(2^7 - 1\right)}{2 - 1} \rightarrow S_7 = \frac{\frac{5}{6} \cdot 127}{1} = \frac{635}{6}$$

c) Tenemos $a_2 = a_1 \cdot r$

$-9 = a_1 \cdot (-3)$

$a_1 = 3$

$$S_7 = \frac{3 \cdot \left[(-3)^7 - 1\right]}{(-3) - 1} \rightarrow S_7 = \frac{3 \cdot (-2\,187 - 1)}{-4}$$

$$S_7 = \frac{-6\,564}{-4} = 1641$$

64. Consideremos el orden de los términos consecutivos n y $n + 1$

Así, tenemos:

$$a_{n+1} = a_n \cdot r^{(n+1)-n} \rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot r$$

$$5 = 2 \cdot r \rightarrow r = \frac{5}{2}$$

Por lo anto,

$$a_{n+1} = a_1 \cdot r^{(n+1)-1} \rightarrow a_{n+1} = a_1 \cdot r^n$$

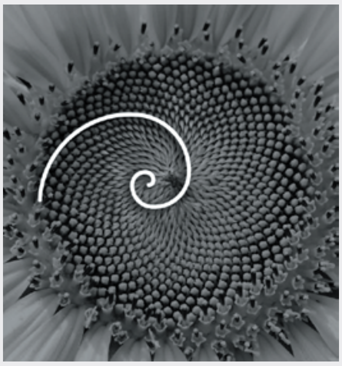
$$5 = \frac{32}{625} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^n \rightarrow 5 : \frac{32}{625} = \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

$$\frac{3125}{32} = \left(\frac{5}{2}\right)^n \rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^5 = \left(\frac{5}{2}\right)^n \rightarrow n = 5$$

Así, el orden es 5 y 6.

© grupo edebé

65. Por ejemplo, las semillas de girasol se disponen en espirales logarítmicas cuya razón es el número de oro:



Esta espiral es también la que usan las aves rapaces para acercarse a sus presas.

66. Si a_1, a_2 y a_3 son las edades de los tres hermanos y consideramos que a_1 es la edad del hermano menor:

$a_1 = 18$

$a_2 = a_1 + d = 18 + d$

$a_3 = a_1 + 2d = 18 + 2d$

$18 + (18 + d) + (18 + 2d) = 63$

$54 + 3d = 63$

$3d = 63 - 54$

$3d = 9 \rightarrow d = \frac{9}{3} = 3$

$a_2 = 18 + d = 18 + 3 = 21$

$a_3 = 18 + 2d = 18 + 2 \cdot 3 = 24$

La edad de los otros hermanos es 21 y 24 años.

67. $a_5 = 4a_1$

$$50 = \frac{(a_1 + 4a_1) \cdot 5}{2}$$

$20 = 5\,a_1 \rightarrow a_1 = \frac{20}{5} = 4$

$a_5 = a_1 + 4d$

$4a_1 = a_1 + 4d;\ 3a_1 = 4d \rightarrow d = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3$

Las edades son 4, 7, 10, 13 y 16 años.

68. $d = \frac{b - a}{k + 1} \rightarrow d = \frac{29{,}300 - 20{,}100}{10 + 1} =$

$= \frac{9{,}2}{11} = 0{,}8\widehat{36}$

Los postes de socorro deben situarse en los siguientes puntos kilométricos: 20,936; 21,773; 22,609; 23,445; 24,282; 25,118; 25,955; 26,791; 27,627; 28,464.

69. a) $a_1 = \frac{2}{3}$

$r = \frac{2}{3}$

$a_3 = a_1 \cdot r^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$

Después de tres rebotes alcanzará una altura de $\frac{8}{27}$ m.

b) $a_5 = a_1 \cdot r^4 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{32}{243}$

Subidas:

$$s_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{32}{243} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{422}{243}$$

Bajadas: $1 + \frac{422}{243} = \frac{665}{243}$

Distancia: $\frac{422}{243} + \frac{665}{243} = \frac{1087}{243}$

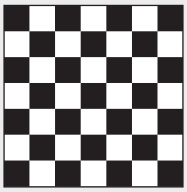
Entre subidas y bajadas recorre $\frac{1087}{243}$ m.

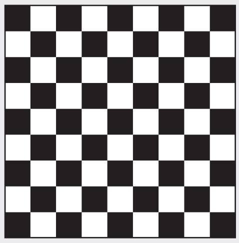
c) $s = \frac{a_1}{1 - r} \rightarrow s = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$

$1 + 2 \cdot 2 = 5$

En total recorrería 5 m.

70. a)





b)

Figura	1	2	3	4	5
Cuadrados blancos	0	4	12	24	40
Cuadrados negros	1	5	13	25	41
Número total de cuadrados	1	9	25	49	81

c) Observamos que el número total de cuadrados es la sucesión de los cuadrados de los números impares. Por lo tanto, no habrá ninguna figura del tipo de las anteriores que tenga 10^2 cuadrados.

d) $121 = 11^2$. El número de cuadrados blancos será 60 y el de cuadrados negros, 61.

© grupo edebé

71. $a_1 = 1$; $a_n = 12$; $d = 1$; $n = 12$

$$s = \frac{(1 + 12) \cdot 12}{2} = 78$$

Total del día: $78 \cdot 2 = 156$

Dará 156 campanadas al día.

72. $a_2 = a_1 + 15$

$a_3 = a_2 + 30 = a_1 + 15 + 30 = a_1 + 15 \cdot (1 + 2)$

$a_4 = a_3 + 45 = a_1 + 15 + 30 + 45 = a_1 + 15 \cdot (1 + 2 + + 3)$

$a_5 = a_4 + 60 = a_1 + 15 + 30 + 45 + 60 = a_1 + 15 \cdot \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$

$a_6 = a_5 + 75 = a_1 + 15 + 30 + 45 + 60 + 75 = a_1 + + 15(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

…

$a_{12} = a_{11} + 15 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 11)$

$a_{12} = a_1 + 990 : 1350 = a_1 + 990$; $a_1 = 360$

El primer mes ingresó 360 €, por lo que el último mes ahorró 165 €.

73. Los datos conocidos son:

$a_1 = 20$; $a_6 = 35$; $n = 6$

$35 = 20 + 5d$

$15 = 5d \to d = 3$

Las etapas serán de: 20, 23, 26, 32 y 35 km.

$$s = \frac{(20 + 35) \cdot 6}{2} = 165$$

Habrán recorrido165 km.

74. $a_1 = 1$; $a_n = 30$

$$s = \frac{(1 + 30) \cdot 30}{2} = 465$$

La longitud total es de 465 cm.

75. $a_1 = 48$

$$a_2 = 48 - \frac{3}{100} \cdot 48 = 46{,}56$$

$$a_3 = 46{,}56 - \frac{3}{100} \cdot 46{,}56 = 45{,}1632$$

$$\frac{45{,}1632}{46{,}56} = \frac{46{,}56}{48} = 0{,}97$$

$a_8 = a_1 \cdot r^7$; $a_8 = 48 \cdot 0{,}97^8 = 38{,}78$

Después de ocho semanas de rebajas, el artículo costará 38,78 €.

$-48 \cdot 0{,}76 = 36{,}48$

Descontando directamente el 24 % del precio; el artículo costaría 36,48 €.

76. $a_{25} = 1922$; $d = 4$

$a_{25} = a_1 + 24d$; $a_{25} = a_1 + 96$

$1922 = a_1 + 96$; $a_1 = 1896$

$1922 - 48 = 1908$

$a_5 = a_1 + 4d = 1896 + 16 = 1\,912$

Las V Olimpíadas de Estocolmo se celebraron en 1912.

77. $a_1 = 9$

$a_{10} = a_1 \cdot r^{n-1} = 9 \cdot 3^9 = 177\,147$

$$s = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{177\,147 \cdot 3 - 9}{3 - 1} = 265\,716$$

A esta cifra hay que añadir a Elena y los tres amigos iniciales. En total, sabrán el chiste 265 720 personas.

78. $$r = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[8+1]{\frac{1}{400}} = 0{,}514$$

Las balizas se situarán en los siguientes puntos:

400; 205,6; 105,6; 54,3; 27,9; 14,3; 7,4; 3,8; 1,9; 1.

79. $a_1 = 18\,000$ $\quad r = 0{,}85$

Al cabo de cinco años será el término a_6.

$a_6 = a_1 \cdot r^5 = 18\,000 \cdot 0{,}85^5 = 7\,986{,}70$

Al cabo de cinco años costará 7 986,70 €.

80. $I = c \cdot i \cdot n$

Para que el interés se duplique: I = c

Entonces:

$c = c \cdot i \cdot n$

$$\frac{c}{c} = i \cdot n$$

$$1 = 0{,}06n \to n = \frac{1}{0{,}06} = 16{,}\widehat{6} \text{ años.}$$

Deberán transcurrir 16 años y 8 meses, aproximadamente.

81. Para encontrar los términos de los cinco primeros años podemos confeccionar la siguiente tabla:

Árboles viejos	0	1	1	3	5
Árboles nuevos	1	0	2	2	6
Semillas	0	2	2	6	10
Año	*a*1	*a*2	*a*3	*a*4	*a*5
Árboles	1	1	3	511	

Empezamos con un árbol «joven» recién plantado, que al cabo de un año será ya «viejo» y podrá dar semillas. A partir de aquí, cada árbol viejo da dos semillas el mismo año, y cada semilla dará un árbol «joven» al año siguiente.

El cómputo total de árboles es la suma de los árboles «jóvenes» y los árboles «viejos».

Por lo tanto, obtenemos:

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, y $a_5 = 11$

Para encontrar el término general observamos que corresponde a la suma de árboles del término anterior, a_{n-1}, más las semillas del término anterior, que, a su vez, son dos por cada árbol que hubiera hace dos términos, $2 \cdot a_{n-2}$. Por lo tanto: $a_n = a_{n-1} + + 2 \cdot a_{n-2}$.

© grupo edebé

82. La progresión del salario será:

$$a_n = 22\,500 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{n-1}$$

De aquí a cinco años cobrará;

$$a_5 = 24\,354{,}72 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{5-1} = 24\,354{,}72 \text{ €}.$$

En veinte años, 32778,25 €.

83. Bisabuelo (a_4), abuelo (a_3), padre (a_2), Juan (a_1).

Las dos condiciones del enunciado son:

$a_4 + 5 = 2 \cdot (a_2 + 5)$

$a_4 - 5 = 6 \cdot (a_1 - 5)$

Si expresamos las dos ecuaciones en función del primer término y de la diferencia, tenemos:

Primera ecuación:

$a_1 + 3d + 5 = 2 \cdot (a_1 + d + 5)$

$a_1 - 2a_1 = 2d + 10 - 3d - 5$

$a_1 = d - 5$

Segunda ecuación:

$a_1 + 3d - 5 = 6 \cdot (a_1 - 5)$

$a_1 - 6a_1 = -30 - 3d + 5$

$5a_1 = 3d + 25$

Si sustituimos el valor de a_1 de la primera ecuación en la segunda, tenemos:

$5 \cdot (d - 5) = 3d + 25$

$5d - 25 = 3d + 25$

$5d - 3d = 25 + 25$

$2d = 50 \rightarrow d = 25$

$a_1 = d - 5 = 25 - 5 = 20$

Por lo tanto: $a_4 = 20 + 3 \cdot 25 = 95$

El bisabuelo tiene 95 años.

84. La progresión es:

$$a_n = 123 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{n-1}$$

a) En cuatro subidas:

$$a_5 = 123 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{5-1} = 150$$

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 = \frac{150}{123}$$

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 = 1{,}22$$

$$1 + \frac{x}{100} = \sqrt[4]{1{,}22}$$

$$1 + \frac{x}{100} = 1{,}05$$

$x = 0{,}05 \cdot 100 = 5\ \%$

b) Respondemos a la segunda pregunta:

$$a_3 = 123 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{3-1} = 100$$

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = \frac{100}{123}$$

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 0{,}81$$

$$1 - \frac{x}{100} = \sqrt{0{,}81}$$

$$1 - \frac{x}{100} = 10{,}90$$

$x = 0{,}098 \cdot 100 = 9{,}8\ \%$

85. Escribimos la progresión geométrica:

$$a_n = 999 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{n-1}$$

a) En las terceras rebajas, el precio es 901,60 €.

b) El precio final será 0,00 € porque siempre rebajamos el valor del objeto.

c) La mitad de precio la obtendrá haciendo descuentos progresivos entre las 14 y las 15 rebajas.

86. El precio inicial será el 200 % de 96, es decir, 192 €.

Si cada vez aplicamos un mismo descuento y, el precio que pagamos será $x = 1 - y$, tenemos que:

$$(192 \cdot x) \cdot x = 96 \rightarrow 192x^2 = 96 + x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = 0{,}707$$

Donde sabemos que el precio pagado será un 70,71 % del precio marcado y, por lo tanto, el descuento $y = 29{,}29\ \%$.

87. El sexto término es ocho veces el tercer término:

$a_6 = 8 \cdot a_3$

Como es una progresión geométrica, tenemos:

$a_6 = a_3 \cdot r^3$

Así, $8 \cdot a_3 = a_3 \cdot r^3$

$r^3 = 8$

$r = 2$

88. La suma de sus términos es:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow 605 = \frac{5 + 105}{2} \cdot n$$

$$605 = 55 \cdot n \rightarrow n = \frac{605}{55} = 11$$

89. Tenemos un sistema con dos variables:

$$\left.\begin{aligned} 4m - 3 &= m + 4 + r \\ 5m - 4 &= 4m - 3 + r \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 4m - 3 - m - 4 &= r \\ 5m - 4 - 4m + 3 &= r \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 3m - 7 &= r \\ m - 1 &= r \end{aligned}\right\} \rightarrow 3m - 7 = m - 1 \rightarrow 2m = 6$$

$m = 3$

© grupo edebé

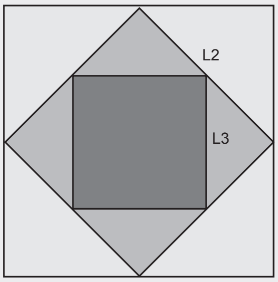
Sustituyendo el valor de m, tenemos que los términos son 7, 9 y 11.

90. a) Nos piden la sucesión que forma los perímetros de los cuadrados así construidos. Llamaremos l al lado de los cuadrados.

$$l_1 = 1\text{ m} \rightarrow P_1 = 4\text{ m}$$

Para calcular l_2 y l_3, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$l_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ m} \rightarrow P_2 = 2 \cdot \sqrt{2}\text{ m}$$



$$l_3 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\text{ m} \rightarrow P_3 = 2\text{ m}$$

Comprobamos si se trata de una progresión geométrica y calculamos la razón de la progresión:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{P_2}{P_1} = r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto, la sucesión de los perímetros es una progresión geométrica con el siguiente término general:

$$P_n = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

b) Procediendo de la misma forma. Teniendo en cuenta que $A = l^2$:

$$l_1 = 1\text{ m} \rightarrow A_1 = 1\text{ m}^2$$

$$l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ m} \rightarrow A_2 = \frac{1}{2}\text{ m}^2$$

$$l_3 = \frac{1}{2}\text{ m} \rightarrow A_3 = \frac{1}{4}\text{ m}^4$$

De nuevo se trata de una progresión geométrica de razón:

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{A_2}{A_1} = r = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la sucesión de las áreas es una progresión geométrica con el siguiente término general:

$$A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

c) Calculamos las sumas de las áreas.

$$A_7 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \rightarrow S_7 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{127}{64}\text{ m}^2$$

$$A_{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \rightarrow S_{20} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\text{ m}^2$$

$$A_{1000} = \left(\frac{1}{2}\right)^{999} \rightarrow S_{1000} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1000} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\text{ m}^2$$

Las sumas convergen a 2 m^2, ya que la progresión es decreciente. En el término general de la suma, el primer término del numerador tiende a cero y, por lo tanto, la suma total, cuando n crece, se puede calcular como sigue:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = 2\text{ m}^2$$

91. Tenemos $a_1 = -7$

Así, $a_2 = a_1 + (2 - 1) \cdot d - 5 = -7 + d$

$d = 2$

El término general es $a_n = -7 + (n - 1) \cdot 2$

El término de orden 100 es $a_{100} = -7 + (100 - 1) \cdot 2 =$
$= -7 + 99 \cdot 2 = 191$

92. La suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(r^n - 1\right)}{r - 1}$$

En este caso tenemos:

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot \left(r^{10} - 1\right)}{r - 1} \rightarrow 7161 = \frac{a_1 \cdot \left(2^{10} - 1\right)}{2 - 1}$$

$$7161 = \frac{a_1 \cdot (1024 - 1)}{1} \rightarrow 7161 = 1023 \cdot a_1$$

$$a_1 = 7$$

Calculemos el tercer término:

$a_3 = a_1 \cdot r^2$

$a_3 = 7 \cdot 2^2 = 28$

93. La suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética es:

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 \rightarrow 120 = \frac{-6 + a_{10}}{2} \cdot 10$$

$$120 = \left(-6 + a_{10}\right) \cdot 5 \rightarrow 24 = -6 + a_{10}$$

$$a_{10} = 30$$

© grupo edebé

94. Calculemos la razón de la progresión aritmética:

$a_{30} = a_1 + (30 - 1) \cdot d$

$144 = -1 + 29 \cdot d$

$29 \cdot d = 145$

$d = 5$

Calculemos el término de orden 40:

$a_{40} = a_{30} + (40 - 30) \cdot d$

$a_{40} = 144 + 10 \cdot 5 = 144 + 50 = 194$

La suma de sus 40 primeros términos es:

$$S_{40} = \frac{a_1 + a_{40}}{2} \cdot 40 \rightarrow S_{40} = (-1 + 194) \cdot 20 =$$
$$= 3\,860$$

95. Calculemos la razón:

$A_9 = a_3 + (9 - 3) \cdot r$

$18 = 6 + 6 \cdot r$

$6 \cdot r = 12$

$r = 2$

Tenemos que calcular $a_{100} + a_{101} + a_{102} + \ldots + a_{109} = S_{109} - S_{99.}$

Para esto, necesitamos calcular a_{99} y a_{109}.

$a_{99} = 2 + 98 \cdot 2 = 198$

$a_{109} = 2 + 108 \cdot 2 = 218$

Así,

$$S_{109} = \frac{2 + a_{109}}{2} \cdot 109 \rightarrow S_{109} = \frac{2 + 218}{2} \cdot 109$$
$$S_{109} = 110 \cdot 109 = 11990$$
$$S_{99} = \frac{2 + a_{99}}{2} \cdot 99 \rightarrow S_{99} = \frac{2 + 198}{2} \cdot 99$$
$$S_{109} = 100 \cdot 99 = 9\,900$$

Por lo tanto, $S_{109} - S_{99} = a_{100} + a_{101} + a_{102} + \ldots + a_{109} =$
$= 11\,990 - 9\,900 = 2\,090$

96. Tenemos una progresión geométrica con razón 1,02.

El término general es: $a_n = 10\,000 \cdot 1{,}02^{n-1}$

De aquí a diez años el cliente tendrá:

$a_{11} = 10\,000 \cdot 1{,}02^{10}$

$a_{11} \approx 10\,000 \cdot 1{,}21899$

$a_{11} \approx 12190$

Por lo tanto, el cliente ganará $12\,190 - 10\,000 =$
$= 2\,190$ €

97. Tenemos una progresión geométrica en que el primer término es 700 y la razón es 0,9.

Cada término de la progresión corresponde a tres meses. Por lo tanto, un año y seis meses después corresponde al término de orden 7.

Así, tenemos: $a_7 = a_1 \cdot r^6$

$a_7 = 700 \cdot 0{,}9^6$

$a_7 = 700 \cdot 0{,}531441$

$a_7 = 372$

El ordenador costará 372 € un año y seis meses después de su lanzamiento.

98. Llamemos x, y, z a estos números y apliquemos las condiciones del enunciado:

$$z - y = y - x$$
$$x + y + z = 21$$
$$\frac{z + 15}{y + 2} = \frac{y + 2}{x + 1}$$

Resolviendo el sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, obtenemos que: $x = 2$, $y = 7$, $z = 12$. Se puede comprobar que estos números cumplen las condiciones del problema.

99. Se trata de una progresión geométrica de 64 términos, primer término 1 y razón 2.

$n = 64$ $\quad a_1 = 1$ $\quad r = 2$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 1 \cdot 2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$

$$s = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{9\,223\,372\,036\,854\,775\,808 \cdot 2 - 1}{1} =$$
$$= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Expresamos el número de granos en toneladas:

$$\frac{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \cdot 0{,}0496}{1\,000\,000} \approx 914{,}958$$

Se necesitarán 914,958 toneladas de trigo.

Pon a prueba tus competencias

1. a) $a_1 = 3$, por lo tanto, fueron tres ordenadores.

b) Tenemos que calcular el término de orden 4:
$a_4 = 3 \cdot 2^{4-1} = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$

c) Determinemos n, de tal manera que:

$$48 = 3 \cdot 2^{n-1} \rightarrow \frac{48}{3} = 2^{n-1}$$
$$16 = 2^{n-1} \rightarrow 2^4 = 2^{n-1}$$
$$n - 1 = 4 \rightarrow n = 5$$

Así, cinco horas después del inicio de la infección había 48 ordenadores infectados.

d) $(1 - 0{,}75) \cdot 48 = 0{,}25 \cdot 48 = 12$. Así, continuaron contaminados 12 ordenadores.

2. a) $a_n = 200 \cdot 0{,}97^{n-1}$

b) $a_2 = 200 \cdot 0{,}97^{2-1} \rightarrow a_2 = 200 \cdot 0{,}97 =$
$= 194\,g$

c) $a_{11} = 200 \cdot 0{,}97^{11-1} \rightarrow a_2 = 200 \cdot 0{,}97^{10} =$
$= 200 \cdot 0{,}74 = 148\,g$

d) Tenemos que calcular $\frac{148}{200}$.

© grupo edebé

Así, $\frac{148}{200} = 0{,}74 = 74\,\%$.

El porcentaje de masa perdida por la sustancia radioactiva en diez años fue de 100 – 74 = 26 %.

3. a) $a_n = 10\,000 + (n-1) \cdot 2\,000$

b) $a_5 = 10\,000 + (5-1) \cdot 2\,000$

$a_5 = 10\,000 + 4 \cdot 2\,000 = 18\,000$

c) Tenemos que calcular la suma de los doce primeros términos de la progresión aritmética:

$a_{12} = 10\,000 + (12-1) \cdot 2\,000$

$a_5 = 10\,000 + 11 \cdot 2\,000 = 32\,000$

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 \rightarrow S_{12} = (10\,000 + 32\,000) \cdot 6$$

$S_{12} = 42\,000 \cdot 6 = 252\,000$

d) El beneficio por cada bolígrafo es 0,2 – 0,05 = = 0,15 €.

Así, la empresa obtuvo, ese año, de beneficio 252 000 · 0,15 = 37 800 €

4. a) $a_n = 204\,582 - (n-1) \cdot 723$

b) $a_4 = 204\,582 - (4-1) \cdot 723$

$a_4 = 204\,582 - 3 \cdot 723$

$a_4 = 204\,582 - 2169 = 202\,413$

c) 2 169 habitantes.

d) $\frac{202\,413}{204\,582} = 0{,}99 = 99\,\%$

Así, la ciudad ha perdido 1 % de su población entre 2004 y 2007.

© grupo edebé