Funciones y gráficas

1. Son funciones las dependencias dadas por los apartados *a, b, c, e, f* y *h*.

2. a) Variable independiente: número de billetes.
Variable dependiente: importe.

b) Variable independiente: metros cúbicos consumidos. Variable dependiente: importe.

3. a) $f(5) = 16$

b) $g\left(\sqrt{3}\right) = 3$

4. $D(f) = \{1, 2, 3, ... , 323, 324, 325\}$

$R(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

5. a)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	40	74	108	142	176	210	244

b) $y = 34x + 6$

6. y: precio reducido

x: precio original

$$y = \left(1 - \frac{15}{100}\right)x = 0{,}85x$$

7. $y = x^3 + 1$

El cubo de un número más una unidad.

8. $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ o bien $y = \frac{x}{2} + 1$

$$f(12) = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7$$

La imagen de 12 es 7.

$$5 = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = 5 - 1 = 4 \Rightarrow x = 8$$

La antiimagen de 5 es 8.

9. $f(x) = 4x^2 - 1$ o bien $y = 4x^2 - 1$

— $f(-4) = 4 \cdot (-4)^2 - 1 = 64 - 1 = 63$

La imagen de –4 es 63.

$f(5) = 4 \cdot 5^2 - 1 = 100 - 1 = 99$

La imagen de 5 es 99.

$-1 = 4x^2 - 1 \rightarrow 4x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

La antiimagen de –1 es 0.

$3 = 4x^2 - 1 \rightarrow 4x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{4}{4} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

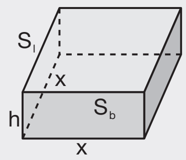
Las antiimágenes de 3 son –1 y 1.

10. $2b + 2a = 18 \rightarrow b + a = 9$

a) $A = b \cdot a = b\,(9 - b)$

b) $A = b \cdot a = (9 - a)\,a$

11.



Superficie de la base: $S_b = x^2$

Superficie de la cara lateral:

$S_l = x \cdot h$

Volumen: $V = S_b \cdot h = 5\,000\ \text{cm}^3$

De aquí se deduce:

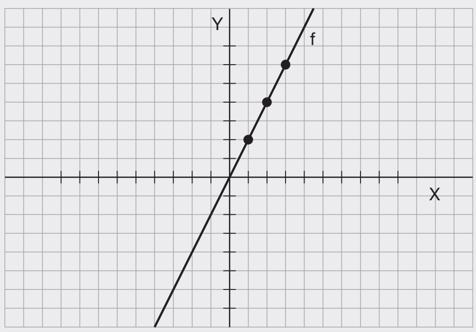
$$V = x^2 \cdot h = 5\,000 \rightarrow h = \frac{5000}{x^2}$$

$$S_T = S_b + 4S_l = x^2 + 4x + \frac{5000}{x^2}$$

$$S_T = x^2 + \frac{20000}{x}$$

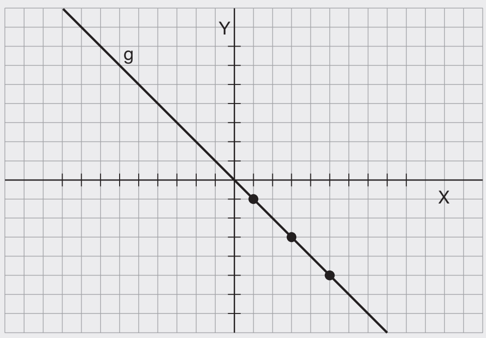
12. a)

x	1	2	3
y	2	4	6



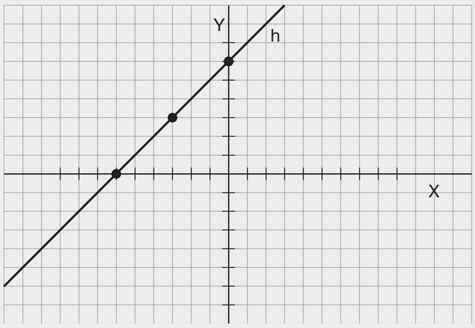
b)

x	1	3	5
y	–1	–3	–5



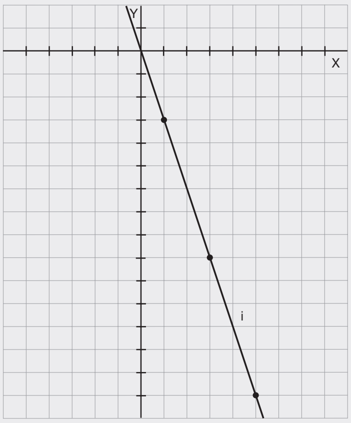
c)

x	–6	–3	0
y	0	3	6



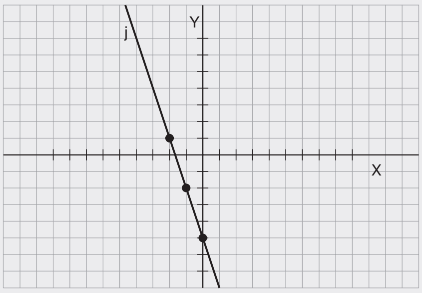
d)

x	1	3	5
y	–3	–9	–15



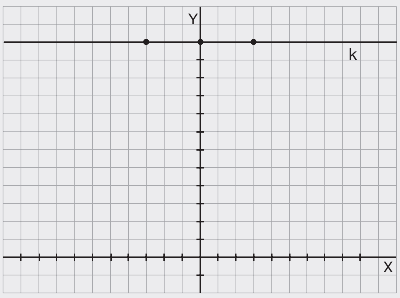
e)

x	–2	–1	0
y	1	–2	–5



f)

x	–3	0	3
y	12	12	12

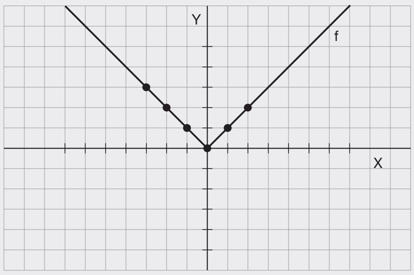


13. Si $x < 0$

x	–1	–2	–3
y	1	2	3

Si $x \geq 0$

x	0	1	2
y	0	1	2



14. a) $f(3) = 1\,000$

$f(11) = 600$

El precio del ordenador al cabo de 3 meses es de 1 000 € y al cabo de 11 meses, de 600 €.

b) $f(x)\begin{cases} 1\,000 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 800 & \text{si } 4 < x \leq 6 \\ 600 & \text{si } 6 < x \leq 12 \end{cases}$

15. a) En el kilómetro 79. En este punto se encuentran a 2 000 m de altura.

b)

	Distancia recorrida (km)	Altura (m)
Col du Glandon	36	1 924
Col de la Madeleine	79	2 000
Col de Tamié	134	907
Col de la Fordaz	157	1 157
Col de la Croix Fry	191	1 477

c) Sí que puede ser, puesto que a ambas (salida y meta) les corresponde la misma altura.

16. D(f) = (–∞, 2] U (3, 4)

R(f) = [–3, 2]

D(g) = (–3, +∞)

R(g) = (–4, +∞)

D (h) = $\mathbb{R}$

R (h) = $\mathbb{R}$

17. a) 1 °C

b) La función es estrictamente decreciente en los intervalos (0, 6) y (15, 24). Por lo tanto, la temperatura disminuyó entre las 0 h y las 6 h, y entre las 15 h y las 24 h.

c) La función alcanza el mínimo absoluto en el valor $x = 6$ y su valor es $y = -5$. Así, a las 6 h se alcanzó la temperatura mínima y su valor fue de –5 ºC.

18. a) Corta los ejes de coordenadas en los puntos (2,0), (–1 , 0) y (0, 4) ; b) Presenta un máximo relativo en el punto (0, 4); c) Presenta un mínimo relativo en el punto (2, 0).

19. En $x = -2$, en $x = 1$ y en $x = 4$.

20. a) Continua. Presenta una gráfica formada por un solo trazo.

b) Discontinua. Su gráfica presenta interrupciones, los días sin clase.

21. a) $y = 3{,}5x + 5$. Continua.

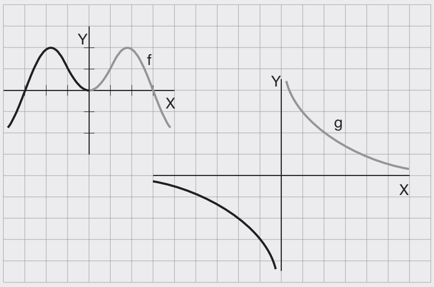
b) $f(x) = 2x$ si $x < 10$

$f(x) = x$ si $10 \leq x \leq 100$

$f(x) = 0{,}6x$ si $x > 100$

Discontinua.

22.



23. El período es de 5 horas.

24. La gráfica de la función correspondiente al apartado *b*.

25. a) La torre tiene una altura de 15 m.

b) Transcurren 5 segundos.

c) A los 6 s y a los 13 s de haber lanzado el globo sonda.

d) Desde los 6 s hasta los 13 s de haber lanzado el globo sonda.

Actividades finales

26. No, puesto que una función se caracteriza porque a cada valor de la variable independiente (dominio) le corresponde un único valor de la variable dependiente (recorrido).

27. Son funciones las dependencias de los apartados *a* y *c*.

28. a) Variable independiente: número de obreros.

Variable dependiente: tiempo.

b) Variable independiente: número de fotocopias.

Variable dependiente: importe.

— Las variables independientes *número de obreros* y *número de fotocopias* no pueden tomar valores intermedios entre dos valores dados, por lo que son variables discretas.

29. a) Función. A cada valor de la variable x le corresponde un único valor de la variable y.

b) No representa una función. Al valor de la función x le corresponden cuatro valores de la variable y.

30. a) Dominio = {enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre}

Recorrido = {28, 30, 31}

b) Dominio = $\mathbb{R}$

Recorrido = {0}

31. a) y: espacio recorrido (km)

x : tiempo transcurrido (h)

$y = 20\,x$

b) y: importe (€)

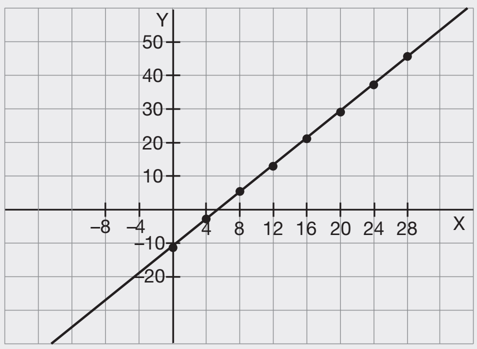
x : peso (kg)

$y = 2x$

32. Las gráficas de los apartados *a* y *d* corresponden a funciones porque a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente.

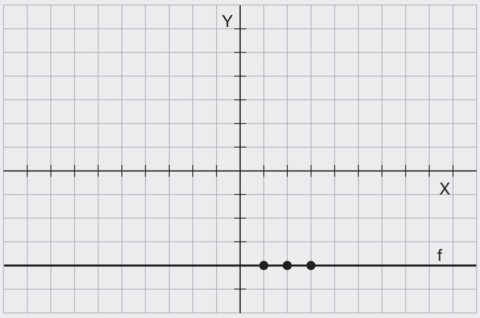
Las gráficas de los apartados *b* y *c* no corresponden a funciones porque hay valores de la variable independiente a los que les corresponden distintos valores de la variable dependiente.

33.



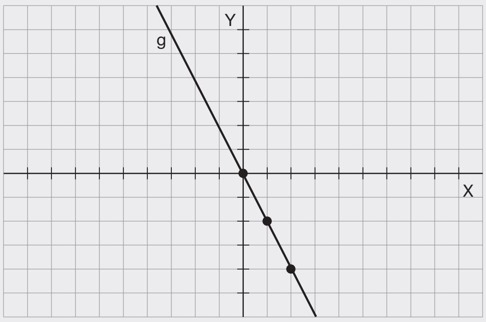
34. a)

x	1	2	3
y	–4	–4	–4



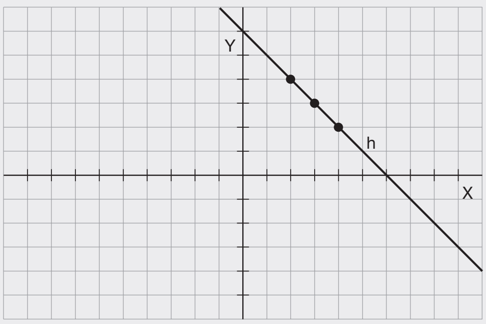
b)

x	0	1	2
y	0	–2	–4



c)

x	2	3	4
y	4	3	2



35. a: Marta; b: Isabel; c: Juan; d: Arturo.

36. a) El consumo del coche a 30 km/h es de 8 L/100 km, a 60 km/h es de 5,2 L/100 km, a 120 km/h es de 8 L/100 km y a 130 km/h es de 10 L/100 km.

b) A 80 km/h.

37. a)

x	–3	–2	–1	0	1	3
y	–5	–3	–1	1	3	5

b)

x	–1	0	1	2
y	–5	–2	1	4

c)

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	6	5	4	3	2	1	0

d)

x	–2	–1	–0,5	0,5	1	2
y	–0,5	–1	–2	2	1	0,5

38. a)

x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

b)

x	–2	–1	0	1	2
y	–2	1	0	1	–2

c)

x	–2	–1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

d)

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	2	0	–2	–4	–6	–8

39. Punto de corte con el eje *Y:*

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = x^2 + 3x - 28 \end{array}\right\} y = 0 + 0 - 28 = -28$$

El punto de corte es (0, –28).

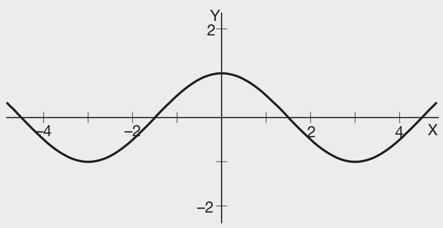
Puntos de corte con el eje *X:*

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x^2 + 3x - 28 \end{array}\right\} 0 = x^2 + 3x - 28$$

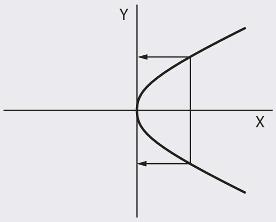
Las soluciones de la ecuación de segundo grado son –7 y 4. Por lo tanto, los puntos de corte son (–7, 0) y (4, 0).

40. No. Dentro del intervalo (3, 5) pueden alternarse intervalos donde la función sea creciente con otros donde sea decreciente.

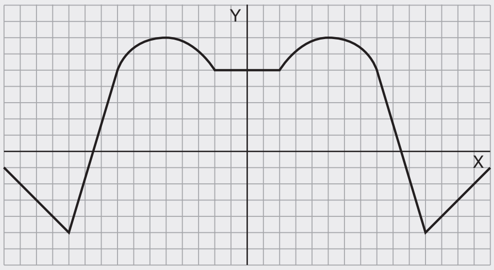
41. Sí. Respuesta sugerida:



42. No, puesto que sería una relación de dependencia entre dos variables: a cada valor de la variable independiente le correspondería más de un valor de la variable dependiente.



43.



44. a) $f(x) > 1$ para $x > 0$.

$g(x) > 1$ en los intervalos $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$

$f(x) = g(x)$ para los valores $x = -2$; $x = 0$ y $x = 2$.

b) La función g alcanza un máximo en $x = -1$.

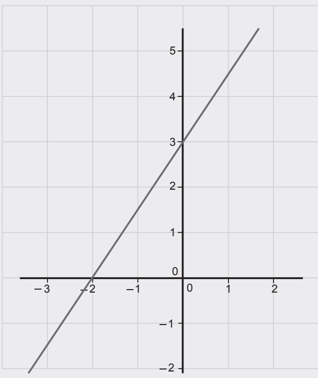
La función g alcanza un mínimo en $x = 1$.

c) La función f es creciente en toda la recta real. Por tanto, no existe ningún intervalo de su dominio en el que la función sea decreciente.

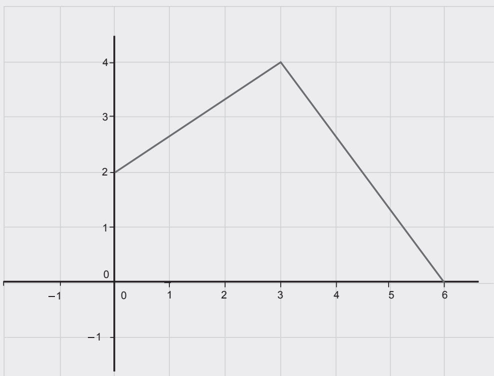
La función g es decreciente en $(-1, 1)$.

d) $g(x) > f(x)$ en los intervalos $(-2, 0)$ y $(2, +\infty)$.

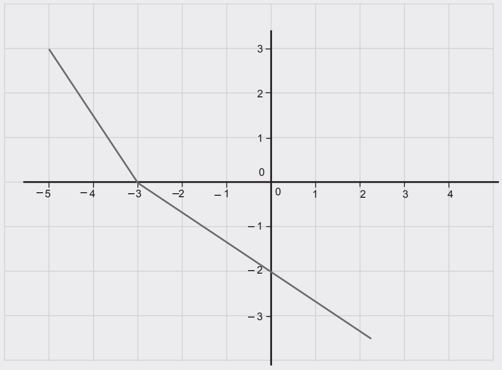
45. a)



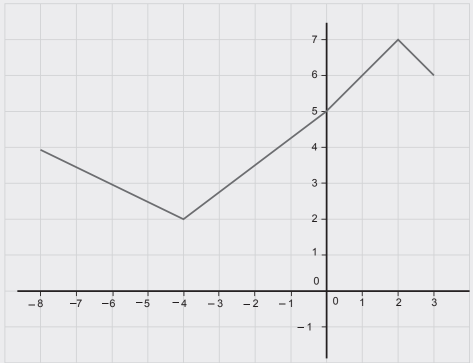
b)



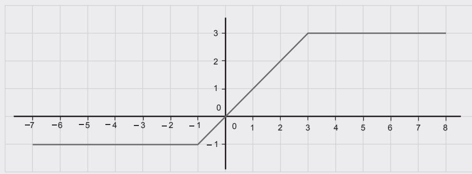
c)



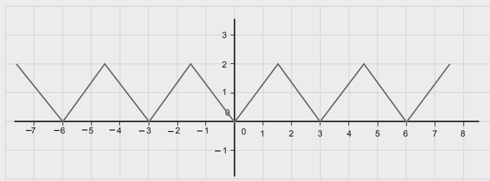
d)



e)



f)



46. a) Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $[-1,1]$

Simetría: par $f(-x) = -f(x)$

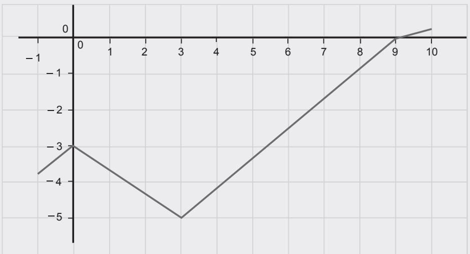
b) Dominio: $\mathbb{R} - \{3, 0, -3\}$

Recorrido: $\mathbb{R} - \{0\}$

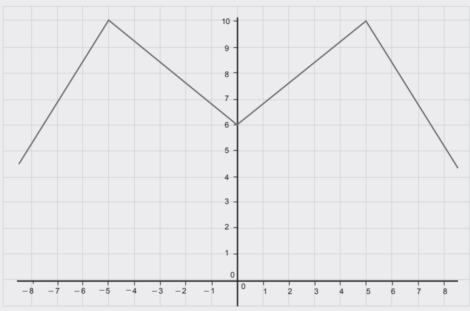
Simetría: impar $f(-x) = -f(x)$

47. a)

b)



c)

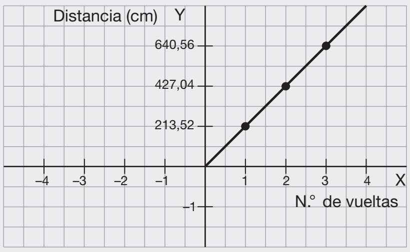


48. a) $L = 2\pi r = 2\pi\ 34$ cm = 213,52 cm

b) $y = 213{,}52\ x$

c)

x	1	2	3
y	213,52	427,04	640,56



49. a) La altura de la planta en el mes de junio es de 11,25 cm.

b) La planta mantiene una altura constante de 30 cm desde julio hasta diciembre.

c) D(f) = {enero, febrero,…, diciembre}

R(f) = [0, 30]

d) Sí, ya que no tiene la misma expresión algebraica para todos los valores del dominio.

50. a) Estuvo lloviendo entre las 2 y las 4 horas, y entre las 12 y las 20 horas.

b) Entre las 2 y las 4 horas llovió con mayor intensidad.

c) 10 – 0 = 10

Se recogieron 10 litros por metro cuadrado.

51. a) Intervalos de crecimiento:

(5, 15), (20, 25), (35, 45), (50, 55)

Intervalos de decrecimiento:

(0, 5), (15, 20), (25, 35), (45, 50), (55, 65)

b) Máximos relativos en x = 15, x = 25, x = 45 y x = 55.

Mínimos relativos en x = 5, x = 20, x = = 35 y x = 50.

c) Es una función periódica. Su período es 30 h.

52. a) Ruth: 46 kg; Fatija: 40 kg.

b) Entre los 10 años y los 14 años.

c) Para saber cuál de las dos creció con mayor rapidez, calcularemos la tasa de variación media en este intervalo.

— Ruth:

Incremento de peso: 60 – 34 = 26 kg

$$\text{TVM} = \frac{60-34}{15-10} = 5{,}2 \text{ kg/año}$$

— Fatija:

Incremento de peso: 61 – 34 = 27 kg

$$\text{TVM} = \frac{61-34}{15-10} = 5{,}4 \text{ kg/año}$$

Por lo tanto, Fatija creció con mayor rapidez entre los 10 y los 15 años.

53. a) Ruth: 46 – 26 = 20 kg

Fatija: 40 – 28 = 12 kg

b) 24 · 2 = 48 kg

A los 12,5 años, Ruth pesaba 48 kg.

54. Área: $A = \dfrac{1 \cdot x}{2} = \dfrac{x}{2}$

La hipotenusa será $h = \sqrt{1^2 + x^2} = \sqrt{1 + x^2}$.

De aquí deducimos el perímetro.

Perímetro: $P = 1 + x + h = 1 + x + \sqrt{1 + x^2}$

55. Respuesta abierta.

56. a) La gráfica es del empleo, por lo tanto, cuando la gráfica sube, el paro disminuye. El empleo ha aumentado de manera continuada entre 1997 y 2000, en que hubo un descenso abrupto, y volvió a subir hasta el 2001. Entonces, el paro disminuyó entre 1997 y 2000, en que aumentó hasta 2001. El paro aumentó entre 2001 y 2003 (período de caída del empleo), luego remontó y, desde 2006, va en aumento. Las dos gráficas son muy parecidas, la diferencia es que las variaciones de la gráfica UE15 no son tan grandes como las de la española.

En la gráfica, el empleo acaba decreciendo, por lo tanto en ninguna de las dos el paro ha remitido.

b) El nivel máximo del paro corresponde al mínimo de empleo, y eso ocurre en los extremos de la gráfica para 1993 y 2009. Respecto de los máximos de empleo que corresponden a los años 2000 y 2006 para la UE15 y 2000 y 2005 para España.

c) El recorrido es para la UE15 (–2,2) y para España (–7,6).

d) $\text{TVM}_{\text{UE15}} = \dfrac{-2 - 2}{2009 - 2007} = \text{-}2{,}0\ \%$

$\text{TVM}_{\text{Espaaa}} = \dfrac{(-8) - 3{,}9}{2009 - 2007} = -5{,}95\ \%$

La española es muy superior a la europea.

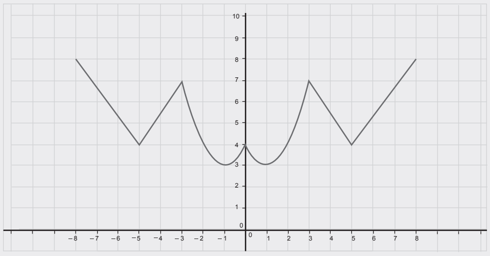
57. a) Para enero de 2006, podemos aproximar el valor de la gráfica por 1120 €/m². El mes de enero de 2008, por 1 180 €/m².

b) Sí, la gráfica es aproximadamente simétrica respecto al eje que pasa por abril de 2007. No es una simetría exacta, y, además, la gráfica continúa en el tiempo más allá de los datos recogidos, y desconocemos su comportamiento.

c) La gráfica que describe es aproximadamente la gráfica de una parábola. El máximo lo adquiere en abril de 2007, sobre los 1240 €/m².

58. $D(f) = [-4,1] + [3,7]$ y $R(f) = [-4,7]$.

59.



$D(f) = [-8,8]$ y $R(f) = [3,8]$.

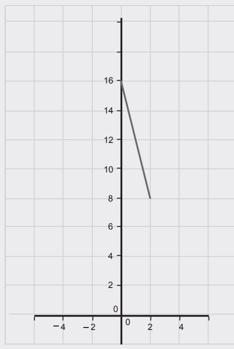
60. a) La expresión algebraica del área del trapecio es:

$$A(x) = \frac{4 + (4 - 2x)}{2} \cdot 4$$

$$A(x) = (8 - 2x) \cdot 2 = 16 - 4x$$

$D(A) = [0,2]$ y $R(A) = [8,16]$.

b)



61. — Corta los ejes de coordenadas en un único punto: (0, 0).

— Es simétrica respecto al origen de coordenadas.

— Es creciente en todo su recorrido.

62. $D(f) = \mathbb{R} - [-1,0)$.

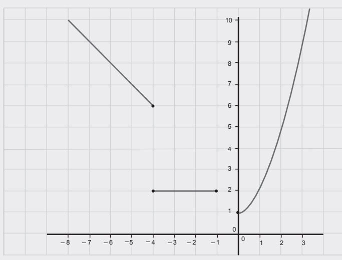
$R(f) = [1,+\infty)$.

Es discontinua en $x = -3$ y en $[-1,0]$.

Decreciente en $(-\infty,-3]$, constante en $(-3,-1)$ y creciente en $[0,+\infty)$.

No tiene máximos pero tiene un mínimo en $(0,1)$.

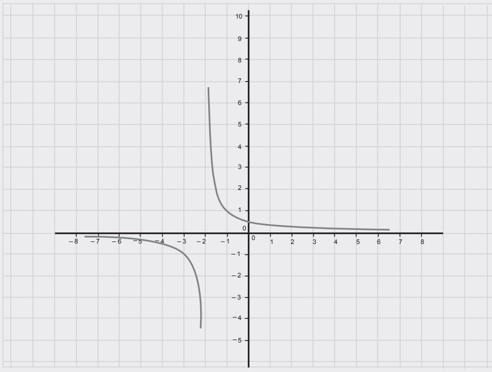
No presenta simetrías.



63. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, porque el denominador no puede ser cero.

$R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, porque la función nunca es igual a cero.



64. a) 12 500 – 5 000 = 7 500 €. En abril.

b) 1 250 €.

c) Se aplicó un interés del 10 %.

Pon a prueba tus competencias

1. a) 25 m

b) 100 m

c) El nadador A.

d) $\dfrac{100}{80} = 1{,}25$ m/s.

e) El nadador A.

2. a) 2 horas

b) 12,5 µg/mL

c) 12 horas

d) $\dfrac{5}{25} = 0{,}2 = 20$ %.

3. a) La 4.ª planta.

b) 12 s

c) 18 – 12 = 6 s

d) Creciente en [0, 12), constante en [12, 18), [21, 24) y [30, 36) y decreciente en [18, 21), [24, 30) y [36, 39).

4. a) 32 GB = $32 \cdot 10^9$ bytes = $3{,}2 \cdot 10^{10}$ bytes

b) A las 8:30.

c) $\dfrac{8}{32} = 0{,}25 = 25$ %

d) Una hora

e) Cuatro horas y media.