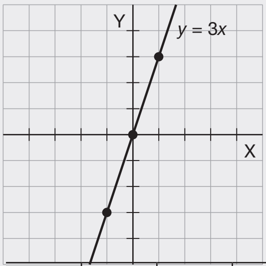
Funciones lineales y no lineales

1. a)

x	–1	0	1
y	–3	0	3

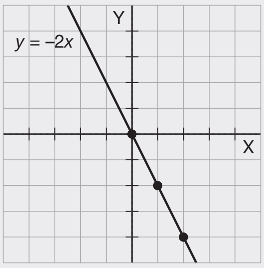
La pendiente de la recta es 3.



b)

x	0	1	2
y	0	–2	–4

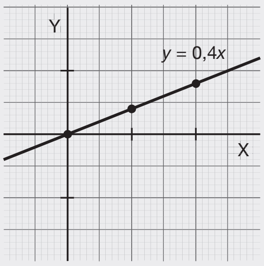
La pendiente de la recta es –2.



c)

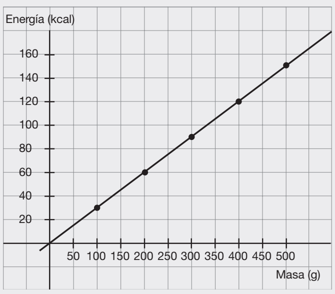
x	0	1	2
y	0	0,4	0,8

La pendiente de la recta es 0,4.



2.

Masa en g (x)	100	200	300	400	500
Energía en kcal (y)	30	60	90	120	150

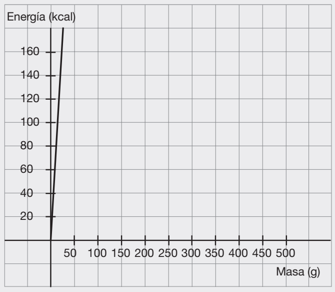


$$m = \frac{y}{x} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

La pendiente es $\frac{3}{10}$.

3.

Masa en g (x)	100	200	300	400	500
Energía en kcal (y)	675	1 350	2 025	2 700	3 375



La recta tiene una pendiente mucho mayor

$$m = \frac{y}{x} = \frac{675}{100} = \frac{27}{4}$$

4. a) $\frac{1,5}{2} = \frac{2,25}{3} = \frac{3,75}{5} = \frac{6}{8} = 0,75$

La expresión algebraica de la función es $y = 0,75x$.

b) $\frac{-1,5}{1} = \frac{-3}{2} = \frac{-4,5}{3} = \frac{-6}{4} = -1,5$

La expresión algebraica es $y = -1,5\,x$.

5.

— Gráfica azul:

Pasa por (0, 0).

Consideramos el punto (3, 2).

La expresión algebraica es $y = \frac{2}{3}\,x$

— Gráfica roja:

Pasa por (0, 0).

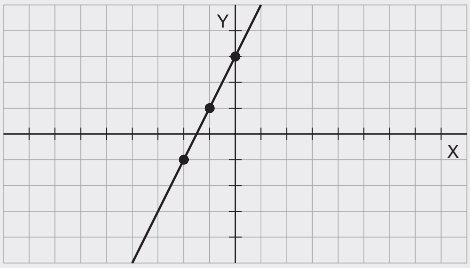
Consideramos el punto (1, –3).

$m = -3$

La expresión algebraica es $y = -3\,x$

6. a)

x	–2	–1	0
y	–1	1	3

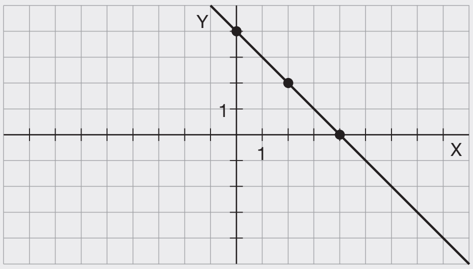


Pendiente: 2

Ordenada en el origen: 3

b)

x	0	2	4
y	4	2	0

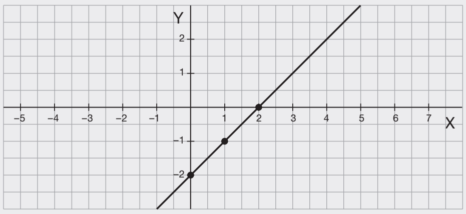


Pendiente: –1

Ordenada en el origen: 4

c)

x	0	1	2
y	–2	–1	0



Pendiente: 1

Ordenada en el origen: –2

7. Pendiente: $m = \dfrac{1-3}{2-1} = -2$

$y = -2x + b$

Consideramos el punto (1, 3).

$3 = -2 \cdot 1 + b \rightarrow 3 = -2 + b \rightarrow b = 5$

La expresión algebraica de la función es $y = -2x + 5$.

8. Ordenada en el origen:

$(0, -1) \rightarrow b = -1$

$y = mx - 1$

Para calcular la pendiente consideramos el punto (–3,0):

$0 = -3\,m - 1 \rightarrow 3m = -1 \rightarrow m = -\dfrac{1}{3}$

La expresión algebraica de la función es:

$y = -\dfrac{1}{3}x - 1$

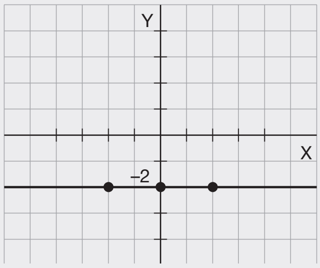
9.

Ocupantes	1	2	3	4	5
Importe (€)	5	5	5	5	5

$y = 5$

10. a)

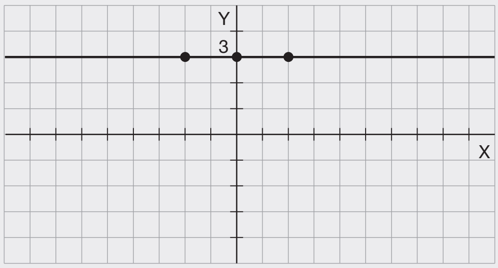
x	–2	0	2
y	–2	–2	–2



Ordenada en el origen: –2

b)

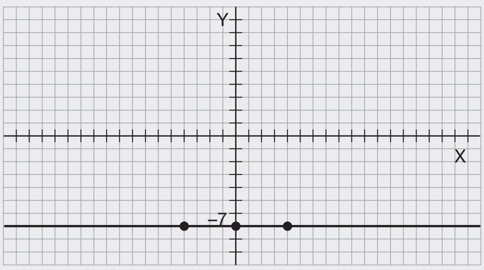
x	–2	0	2
y	3	3	3



Ordenada en el origen: 3

c)

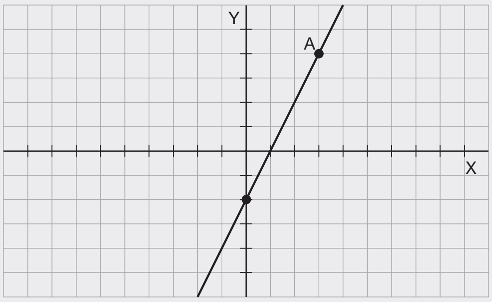
x	–4	0	4
y	–7	–7	–7



Ordenada en el origen: –7

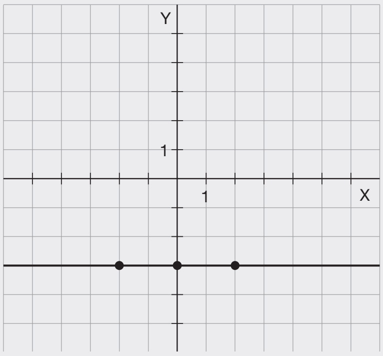
11. $y = -1$, $y = 2$.

12.



13. a)

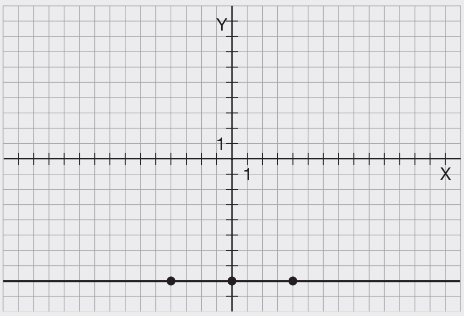
x	–2	0	2
y	–3	–3	–3



Es paralela al eje de abscisas.

b)

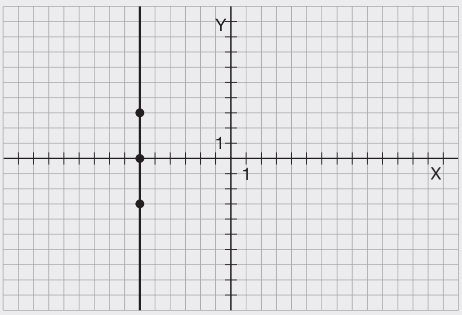
x	–4	0	4
y	–8	–8	–8



Es paralela al eje de abscisas.

c)

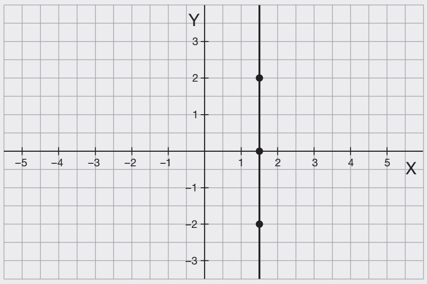
x	–6	–6	–6
y	–3	0	3



Es paralela al eje de ordenadas.

d)

x	1,5	1,5	1,5
y	2	0	–2



Es paralela al eje de ordenadas.

14. a) Resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -1 &= 2m + b \\ 3 &= 4m + b \end{aligned}\right\}$$

Lo resolvemos y obtenemos $m = 2$ y $b = -5$.

La ecuación de la recta es $y = 2x - 5$.

b) Resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= -3m + b \\ -4 &= m + b \end{aligned}\right\}$$

Al resolver obtenemos $m = -\dfrac{3}{2}$ y $b = -\dfrac{5}{2}$.

La ecuación de la recta es $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$.

15. $m = -6$

$y = -6x + b$

$-6 = -6 \cdot 1 + b$; $-6 = -6 + b$; $b = 0$

La ecuación de la recta es $y = -6x$.

16. $m = 1$

$y = x + b$; $-3 = 2 + b$; $b = -3 - 2 = -5$

La ecuación de la recta es $y = x - 5$.

17. $y = mx + 3$

$-1 = m \cdot 1 + 3$; $m = -1 - 3 = -4$

La ecuación de la recta es $y = -4x + 3$.

18. Recta *r*:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3 - 3}{-4 - 4} = -\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

La recta pasa por (0, 0) $\rightarrow b = 0$.

La ecuación de la recta es $y = \dfrac{3}{4}x$.

Recta *s*:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 2}{-2 - 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

La recta pasa por (–2, 0): $0 = -1 + b \rightarrow b = 1$.

La ecuación de la recta es $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Recta *t*:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-1}{0+3} = \frac{-2}{3}$$

La recta pasa por (0, –1) → $b = -1$.

La ecuación de la recta es $y = -\frac{2}{3}x - 1$

19. a) Puntos: A (–3, 0) y B (0,4)

Recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-(-3)}{0-(-3)}$$

Ecuación punto – pendiente: $y = \frac{4}{3}(x+3)$

Ecuación explícita: $y = \frac{4}{3}x + 4$

Ecuación general: $-\frac{4}{3}x + y - 4 = 0$

b) Puntos: A (0, 4) y B (3, 0)

Recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{y-4}{0-4} = \frac{x-0}{3-0}$$

Ecuación punto – pendiente: $y - 4 = -\frac{4}{3}x$

Ecuación explícita: $y = -\frac{4}{3}x + 4$

Ecuación general: $\frac{4}{3}x + y - 4 = 0$

20. a) $y = -x + 5$

b) $y - 0 = 2(x - 7)$

c) $\frac{y-0}{-3-0} = \frac{x-0}{-2-0}$

21. La gráfica de la función cuadrática o de segundo grado siempre presenta un punto de corte con el eje *OY*, ya que siempre se obtiene un valor de *y* para $x = 0$. En cambio, el número de puntos de corte con el eje *OX* depende del valor de los coeficientes *a, b* y *c* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

— Si $b^2 - 4ac < 0$, no hay puntos de corte.

— Si $b^2 - 4ac = 0$, hay un punto de corte.

— Si $b^2 - 4ac > 0$, hay dos puntos de corte.

22. Tiene las ramas orientadas hacia abajo. Corta el eje *OX* en los puntos (–1, 0) y (3, 0) y el eje *OY* en el punto (0,3). Las coordenadas del vértice son (1, 4).

23. a) Tiene las ramas orientadas hacia arriba. b) No corta al eje *OX* y corta al eje *OY* en el punto (0,1). c) Las coordenadas del vértice son (0,5; 0,5). d) Presenta un mínimo absoluto en el punto (0,5; 0,5).

24. a) $y = x^2 - x$

Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$,

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Eje de simetría: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$

Punto de corte con el eje *OY*:

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Puntos de corte con el eje *OX*:

$x^2 - x = 0 \rightarrow x_1 = 0\ x_2 = 1 \rightarrow (0, 0)\ (1, 0)$

b) $y = x^2 + 3$

Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = 0$, $y = 3 \rightarrow (0, 3)$

Eje de simetría: $x = \frac{-b}{2a} = 0$

Punto de corte con el eje *OY*:

$x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$

Puntos de corte con el eje *OX*:

$x^2 + 3 = 0 \rightarrow$ No tiene puntos de corte.

c) $y = -2x^2 + 2x$

Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

Eje de simetría: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

Punto de corte con el eje *OY*:

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Puntos de corte con el eje *OX*:

$-2x^2 + 2x = 0 \rightarrow -2x(x-1) = 0 \rightarrow x_1 = 0\ x_2 =$
$= 1 \rightarrow (0, 0)\ (1, 0)$

d) $y = -x^2 - 2x + 6$

Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1$,

$y = -1 + 2 + 6 = 7 \rightarrow (-1, 7)$

Eje de simetría: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1$

Punto de corte con el eje *OY*:

$x = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6)$

Puntos de corte con el eje *OX:*

$-x^2 - 2x + 6 = 0 \rightarrow x_1 = -3{,}65$;

$x_2 = 1{,}65 \rightarrow (-3{,}65, 0)\ (1{,}65, 0)$

e) $y = -3x^2 + 6x$

Vértice: (1, 3)

Eje de simetría: recta $x = 1$

Puntos de corte el eje *OX*: (0, 0) y (2, 0)

Punto de corte con el eje *OY*: (0, 0).

25. a) Corta el eje *OX* en los puntos (–2, 0) y (–1, 0) y el eje *OY* en el punto (0, 2).

Por lo tanto, $c = 2$.

$ax^2 + bx + 2 = 0 \rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}(-2)^2 a - 2b + 2 = 0\\(-1)^2 a - 1b + 2 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}2a - b + 1 = 0\\a - b + 2 = 0\end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow a = 1, b = 3$

b) $y = x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$ y $(-1)^2 + 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.

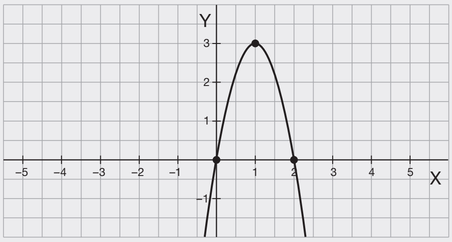
26. a) $y = -3x^2 + 6x$

Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{-6} = 1 \rightarrow y = 3 \rightarrow (1, 3)$

Corte con el eje *OY*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Cortes con el eje *OX*:

$-3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2 \rightarrow (0, 0)\ (2, 0)$



Las soluciones de las ecuaciones de segundo grado son (0, 0) y (2, 0).

b) $y = 3x^2$

Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Corte con el eje *OY*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

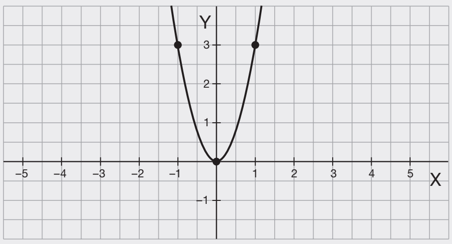
Cortes con el eje *OX*:

$3x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Podemos determinar dos puntos más:

$x = 1 \rightarrow y = 3 \rightarrow (1, 3)$

$x = -1 \rightarrow y = 3 \rightarrow (-1, 3)$



La solución de la ecuación de segundo grado es (0, 0).

c) $y = x^2 + 3x + 6$

Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5 \rightarrow y = 3{,}75 \rightarrow$ (–1,5, 3,75)

Corte con el eje *OY*: $x = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6)$

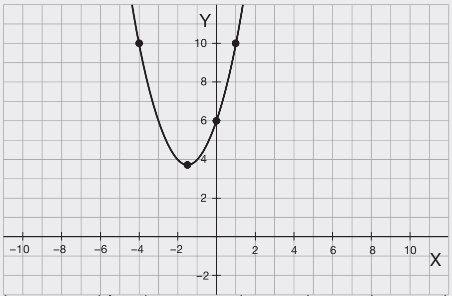
Cortes con el eje *OX*:

$x^2 + 3x + 6 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Podemos determinar dos puntos más:

$x = 1 \rightarrow y = 10 \rightarrow (1, 10)$

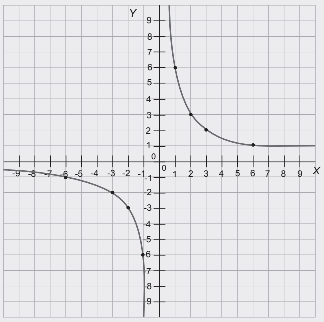
$x = -4 \rightarrow y = 10 \rightarrow (-4, 10)$



La ecuación de segundo grado no tiene solución.

27.

x	–6	–3	–2	–1	1	2	3	6
y	–1	–2	–3	–6	6	3	2	1

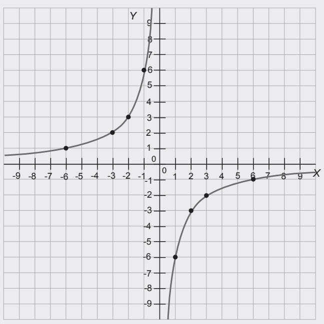


a) El valor $x = 0$, pues una fracción no puede tener denominador 0.

b) Es simétrica respecto al punto (0,0).

28.

x	–6	–3	–2	–1	1	2	3	6
y	1	2	3	6	–6	–3	–2	–1



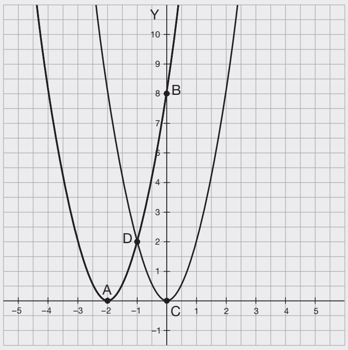
— La gráfica de la actividad 27 es decreciente y la gráfica de la actividad 28 es creciente.

29. a) En primer lugar representamos gráficamente la función $y = 2x^2 + 8x + 8$, parábola *a*.

Con la opción *Intersección de dos objetos,* seleccionando la función y el eje *OX*, se obtiene el punto *A* (–2, 0), vértice y corte con el eje *OX*. Si se seleccionan la función y el eje *OY* se obtiene el punto *B* (0, 8).

b) Al desplazar la función hasta el punto *C* (0, 0), se obtiene la nueva parábola, cuya expresión algebraica es $y = 2\,x^2$, parábola *b*.

c) Con la opción *Intersección de dos objetos,* seleccionando las dos funciones se obtiene el punto en que se cortan las parábolas *a* y *b*, *D* (–1, 2).



30. $s_1 \rightarrow$ espacio recorrido por el primer coche en función del tiempo transcurrido.

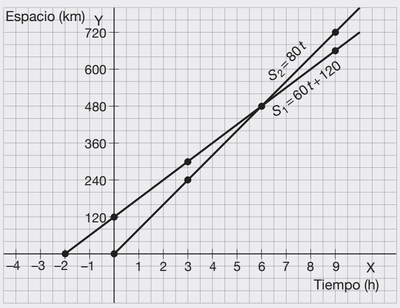
$s_2 \rightarrow$ espacio recorrido por el segundo coche en función del tiempo transcurrido.

Tomamos la salida del segundo coche en el instante $t = 0 \rightarrow s_2 = 80t$.

Tiempo en horas (*t*)	0	3	6	9
Espacio en km (s_2)	0	240	480	720

Cuando el segundo coche sale, el primer coche lleva recorridos 120 km $\rightarrow s_1 = 60t + 120$.

Tiempo en horas (*t*)	–2	0	3	6	9
Espacio en km (s_1)	0	120	300	480	660



a) El coche que parte de la ciudad *A* con una velocidad constante de 60 km/h.

b) Las dos rectas se cortan en el punto *P* (6, 480).

El segundo coche se encuentra con el primer coche cuando lleva 6 h circulando.

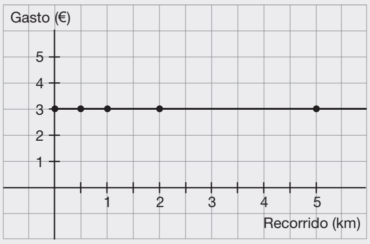
c) Cuando se encuentran han recorrido 480 km.

Actividades finales

31. Solo se necesita un punto. Por ejemplo, si conocemos el punto *P (t, s),* la expresión algebraica de la función es $y = s$.

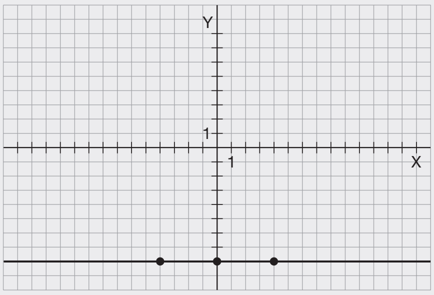
32.

Gasto (€)	3	3	3	3	3
Recorrido (km)	0	0,5	1	2	5



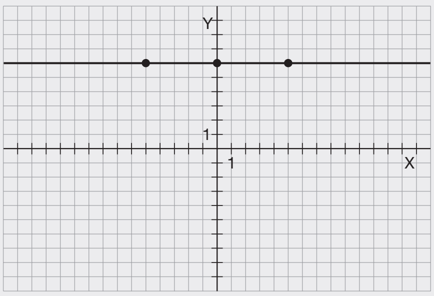
33. a)

x	–4	0	4
y	–8	–8	–8



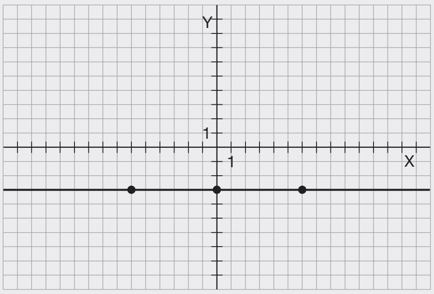
b)

x	–5	0	5
y	6	6	6



c)

x	–6	0	6
y	–3	–3	–3



34. Para deducir la expresión algebraica de una función lineal, es necesario conocer dos puntos: el (0, 0) y otro.

Para deducir la expresión algebraica de una función afín no lineal, es necesario conocer dos puntos.

35. Lineal: *d;* Afín no lineal: *a;* constante: *b;* no es función: *c.*

36. La gráfica de la función lineal pasa por el punto (2, 6) y, por lo tanto, cumple:

$y = mx$; $6 = 2m \rightarrow m = 3$

La función lineal es $y = 3x$.

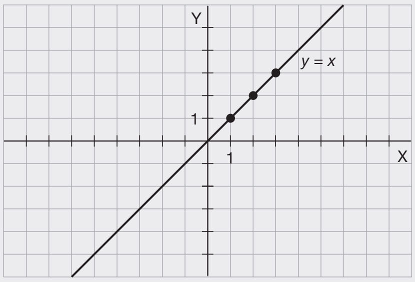
a) $6 \neq 3 \cdot 4$. No pertenece.

b) $3 = 3 \cdot 1$. Sí pertenece.

c) $4 \neq 3 \cdot 2$. No pertenece.

37. a)

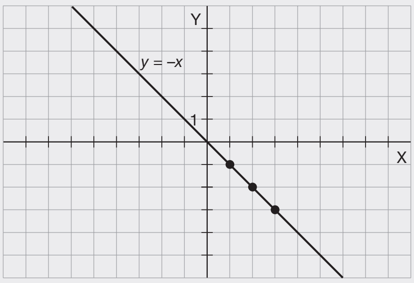
x	1	2	3
y	1	2	3



Pendiente: 1

b)

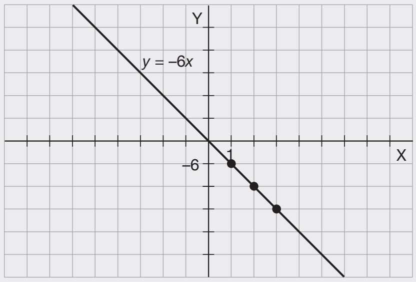
x	1	2	3
y	–1	–2	–3



Pendiente: –1

c)

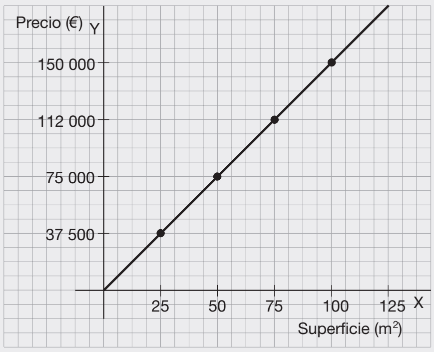
x	1	2	3
y	–6	–12	–18



Pendiente: –6

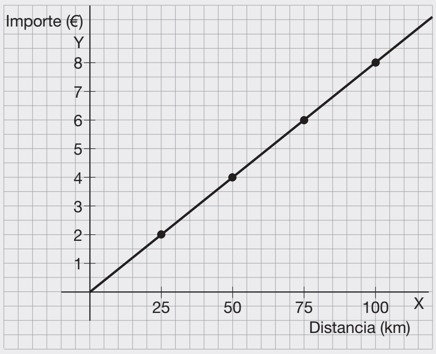
38. a)

Superficie en m² (*x*)	25	50	75	100
Precio en euros (*y*)	37500	75000	112500	150000



b)

Distancia en km (*x*)	25	50	75	100
Importe en euros (*y*)	2	4	6	8

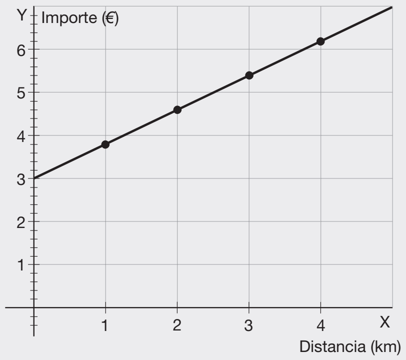


39. Compañía A: $y = 15$, función constante.

Compañía B: $y = 0{,}10x$, función lineal.

Compañía C: $y = 0{,}05x + 5$, función afín.

40.



— Una función afín no lineal.

— Pendiente: $m = \dfrac{4,6 - 3,8}{2 - 1} = 0,8$

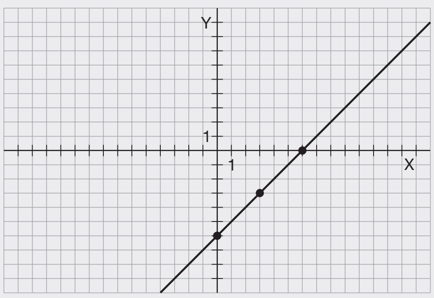
Ordenada en el origen: y = 0,8x + b;

3,8 = 0,8 · 1 + b; b = 3

La pendiente es 0,8 y la ordenada en el origen es 3.

41. a)

x	0	3	6
y	–6	–3	0

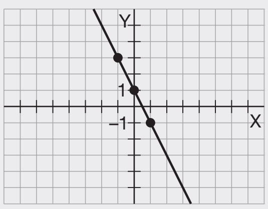


Pendiente: 1

Ordenada en el origen: –6

b)

x	–1	0	1
y	3	1	–1

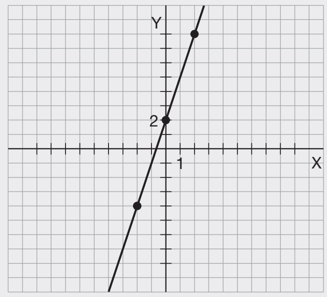


Pendiente: –2

Ordenada en el origen: 1

c)

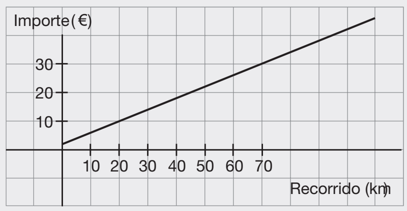
x	–2	0	2
y	–4	2	8



Pendiente: 3

Ordenada en el origen: 2

42. $y = 0,4x + 2$



43. a) $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{7 - (-5)}{2 - (-1)} = \dfrac{12}{3} = 4$

$y = 4x + b$

$-5 = 4\,(-1) + b$; $-5 = -4 + b$; $b = -1$

La expresión algebraica de la función es:
$y = 4x - 1$.

b) $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2 - (-4)}{5 - (-5)} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

$y = \dfrac{1}{5}x + b$

$-4 = \dfrac{1}{5}(-5) + b \rightarrow -4 = -1 + b \rightarrow = -3$

La expresión algebraica de la función es:

$y = \dfrac{1}{5}x - 3$

44. a) Como son funciones a trozos, interpolamos cada recta por separado.

Trozo A: pasa por (–1,–2) y (1,4)

$\left.\begin{array}{l} -2 = -a + b \\ 4 = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow a = 3;\ b = 1$

Trozo B: es constante $y = 4$

Trozo C: pasa por (5,4) y (8,1)

$\left.\begin{array}{l} 4 = 5a + b \\ 1 = 8a + b \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1;\ b = 9$

Por lo tanto, la función es:

$$\begin{cases} 3x+1 & x<1 \\ 4 & 1 \le x \le 5 \\ -x+9 & x>5 \end{cases}$$

b) Trozo A: pasa por (–4, 7) y (1,2)

$$\left.\begin{aligned} 7 &= -4a+b \\ 2 &= a+b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=-1;\ b=3$$

Trozo B: pasa por (1,2) y (5,6)

$$\left.\begin{aligned} 2 &= a+b \\ 6 &= 5a+b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=1;\ b=1$$

Trozo C: pasa por (5,6) y (8,3)

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 5a+b \\ 3 &= 8a+b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a=-1;\ b=11$$

Por lo tanto, la función es:

$$\begin{cases} -x+3 & x<1 \\ x+1 & 1 \le x \le 5 \\ -x+11 & x>5 \end{cases}$$

45. a) Tomamos el instante $t = 0$ cuando sale Marta. Entonces:

$s_1 = 15t$ y $s_2 = 10(t + 1) = 10t + 10$

b) Se encontrarán cuando hayan recorrido la misma distancia, es decir, cuando $s_1 = s_2$:

$15t = 10t + 10 \rightarrow t = 2$ h

$s_1 = 15 \cdot 2 = 30$ km y $s_2 = 10 \cdot 3 = 30$ km

c) Respuesta gráfica.

46. Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

47. Una, ya que a partir de las coordenadas de dos puntos de la recta obtenemos su ecuación.

Infinitas, ya que no está determinada la pendiente de la recta.

Una, ya que a partir de las coordenadas de un punto de la recta y el valor de la pendiente obtenemos su ecuación.

48. — $y = 3$

— $x = -1$

— $b = -2$

$0 = m - 2 \rightarrow m = 2$

$y = 2x - 2$

49. a) Resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 10 &= -m+b \\ -17 &= 2m+b \end{aligned}\right\}$$

Lo resolvemos y obtenemos $b = 1$ y $m = -9$.

La ecuación de la recta es $y = -9x + 1$.

b) $m = 7$

$y = 7x + b$

$-1 = 7 \cdot 5 + b \rightarrow -1 = 35 + b \rightarrow b = -36$

La ecuación de la recta es $y = 7x - 36$.

c) $b = -5$

$y = mx - 5$

$-1 = 3m - 5 \rightarrow 4 = 3m \rightarrow m = \frac{4}{3}$

La ecuación de la recta es $y = \frac{4}{3}x - 5$.

d) $m = 2$

$y = 2x + b$

$5 = 2 \cdot 8 + b \rightarrow 5 = 16 + b \rightarrow -11 = b$

La ecuación de la recta es $y = 2x - 11$.

50. a) Resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -3 &= -m+b \\ 9 &= m+b \end{aligned}\right\}$$

Lo resolvemos y obtenemos $b = 3$ y $m = 6$.

La expresión algebraica de la función es:

$y = 6x + 3$.

b) Resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3 &= -2m+b \\ -6 &= 4m+b \end{aligned}\right\}$$

Lo resolvemos y obtenemos $b = 0$ y $m = -\frac{3}{2}$.

La expresión algebraica de la función es:

$$y = -\frac{3}{2}x$$

c) Resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -1 &= -4m+b \\ 5 &= 7m+b \end{aligned}\right\}$$

Lo resolvemos y obtenemos $b = \frac{168}{11}$ y $m = \frac{6}{11}$.

La expresión algebraica de la función es:

$$y = \frac{6}{11}x + \frac{168}{11}$$

d) Resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{1}{2}m+b \\ 0 &= -m+b \end{aligned}\right\}$$

Lo resolvemos y obtenemos $b = 1$ y $m = 1$.

La expresión algebraica de la función es:

$y = x + 1$

51. Substituimos los valores en la expresión $y = ax + b$

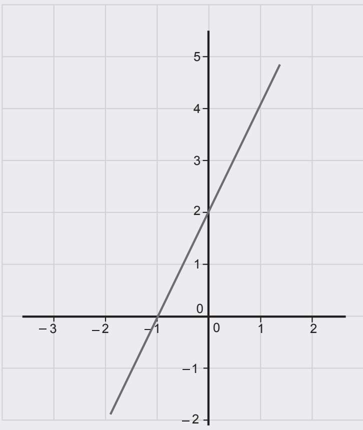
$$\left.\begin{array}{l} 5 = a + b \\ 3 = 2a + b \end{array}\right\}$$

Donde obtenemos, por reducción, $a = -2$ y $b = 7$

Se obtiene la expresión $y = -2x + 7$

52. Puntos de corte con el eje OX: $-2x + 0 = 2 \rightarrow x = -1$

Puntos de corte con el eje = OY: $-2 \cdot 0 + y = 2 \rightarrow y = 2$



Pendiente: $m = \dfrac{2 - 0}{0 - (-1)} = 2$.

También podemos determinar su pendiente así: $-2x + y = 2 \rightarrow y = 2x + 2$

La pendiente es $m = 2$.

53. Respuesta abierta.

54. Si el coeficiente a de una función de segundo grado es 0, la función pasa a ser una función afín.

55. $y = x^2 - 8x + 1$

Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{8}{2} = 4$, $y = 16 - 32 + 1 =$

$= -15 \rightarrow (4, -15)$

Punto de corte con el eje OY:

$x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

Puntos de corte con el eje OX:

$x^2 - 8x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = 7{,}88; x_2 = 0{,}13 \rightarrow (7{,}88, 0)$ $(0{,}13, 0)$

56. a) $y = 3x^2 - 5x + 1$

Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{5}{6} = 0{,}84,$

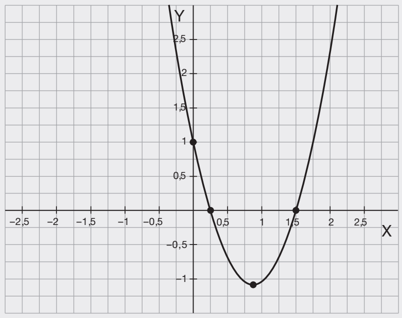
$y = -1{,}08 \rightarrow (0{,}84, -1{,}08)$

Punto de corte con el eje OY:

$x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

Puntos de corte con el eje OX:

$3x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = 0{,}23$ $x_2 = 1{,}43 \rightarrow$ $(0{,}23, 0)$ $(1{,}43, 0)$



b) $y = -x^2 + 3x - 4$

Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-3}{-2} = 1{,}5$

$y = -1{,}75 \rightarrow (1{,}5, -1{,}75)$

Punto de corte con el eje OY:

$x = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow (0, -4)$

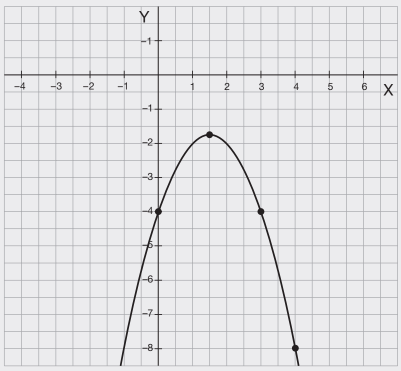
Puntos de corte con el eje OX:

$-x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow$ No tiene solución

Podemos determinar dos puntos más:

$x = 3 \rightarrow y = -4 \rightarrow (3, -4)$

$x = 4 \rightarrow y = -8 \rightarrow (4, -8)$



57. $y = -x^2 + 8x - 8$

Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-8}{-2} = 4$, $y = -16 + 32 - 8 =$

$= 8 \rightarrow (4, 8)$

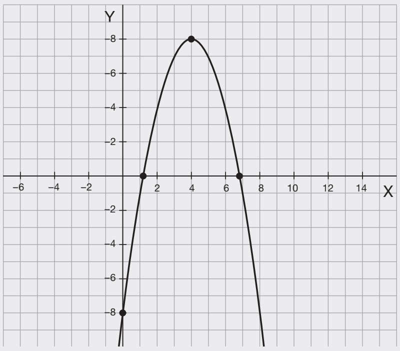
Eje de simetría: $x = \dfrac{-b}{2a} = 4$

Punto de corte con el eje OY:

$x = 0 \rightarrow y = -8 \rightarrow (0, -8)$

Puntos de corte con el eje OX:

$-x^2 + 8x - 8 = 0 \rightarrow x_1 = 6{,}83;\ x_2 = 1{,}17 \rightarrow (6{,}83,\ 0)$
$(1{,}17,\ 0)$



58. a) Vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{-8} = \frac{-1}{4}$

$$y = -4\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)^2 - 2\cdot\frac{-1}{4} = -4\cdot\frac{1}{16} + \frac{2}{4} =$$

$$= \frac{-1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Puntos de corte con el eje *OX*

$$-4x^2 - 2x = 0 \rightarrow -2x(2x+1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{-1}{2}$$

Puntos de corte con el eje *OY*: (0,0).

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$.

$\mathrm{Im} f = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$.

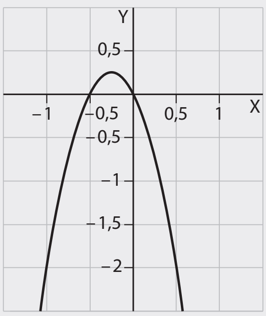
Es continua en su dominio.

Es creciente en $\left(-\infty, \frac{-1}{4}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{-1}{4}, +\infty\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Presenta una simetría en relación a la recta

$x = \frac{-1}{4}$.



b) Vértice: $x = \frac{-8}{8} = -1$,

$$y = 4\cdot(-1)^2 + 8\cdot(-1) - 1 = -5 \Rightarrow (-1, -5).$$

Puntos de corte con el eje *OX*:

$$4x^2 + 8x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64+16}}{8} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-8 \pm 4\sqrt{5}}{8} \rightarrow x_1 = \frac{-2-\sqrt{5}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}.$$

Puntos de corte con el eje *OY*: (0, –1).

Dom f = $\mathbb{R}$.

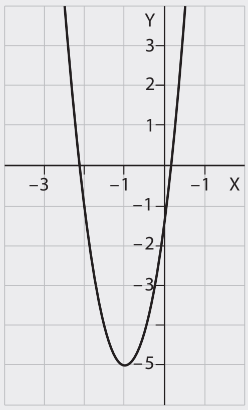
Im f = $[-5, +\infty)$.

Es continua en su dominio.

Es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$.

Tiene un mínimo en (–1,–5).

Presenta una simetría en relación a la recta $x = -1$.



c) Vértice: $x = -\frac{6}{6} = -1$

$$y = 3\cdot(-1)^2 + 6\cdot(-1) + 4 =$$

$$= 1 \Rightarrow (-1, 1).$$

Puntos de corte con el eje *OX*:

$$3x^2 + 6x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-48}}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{-12}}{6}$$

Por lo tanto, no corta el eje *OX*.

Puntos de corte con el eje *OY*: (0,4).

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$.

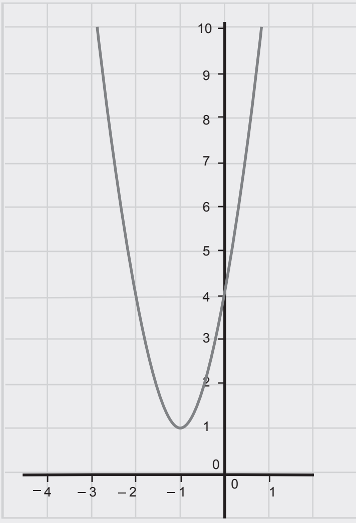
$\mathrm{Im} f = [1, +\infty)$.

Es continua en su dominio.

Es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$.

Tiene un mínimo en (–1,1).

Presenta una simetría en relación a la recta $x = -1$.



d) Vértice: $x = \frac{-(-2)}{2} = 1$,

$y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9$.

Puntos próximos al vértice:

x	–2	–1	0	2	3	4
y	0	–5	–8	–8	–5	0

Puntos de corte con el eje *OX*:

$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 4, x_2 = -2$

Puntos de corte con el eje *OY*: (0, –8).

$Dom\, f = \mathbb{R}$

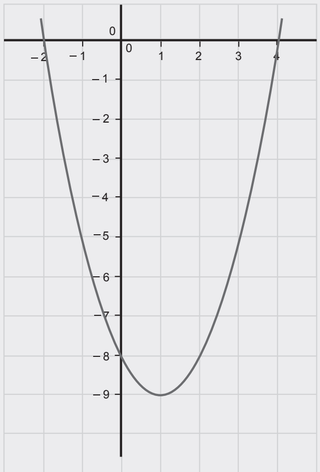
$Im\, f = [-9, +\infty)$

Es continua en todo su dominio.

Es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.

Tiene un mínimo en (1, –9)

Presenta una simetría en la relación a la recta $x = 1$.



e) Vértice: $x = \frac{-4}{4} = -1$,

$y = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 6 = -8$.

Puntos próximos al vértice:

x	–3	–2	0	1
y	0	–6	–6	0

Puntos de corte con el eje *OX*:

$2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} \rightarrow x$

$\rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -3$

Puntos de corte con el eje *OY*: (0 –6).

$Dom\, f = \mathbb{R}$

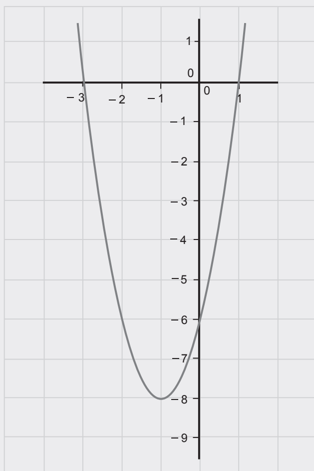
$Im\, f = [-8, +\infty)$

Es continua en todo su dominio.

Es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$.

Tiene un mínimo en (–1, –8)

Presenta una simetría en la relación a la recta $x = -1$.



f) Vértice: $x = \frac{-8}{-4} = 2$,

$$y = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 10 = -2.$$

Puntos próximos al vértice:

x	0	1	3	4
y	–10	–4	–4	–10

Puntos de corte con el eje *OX*:

$$-2x^2 + 8x - 10 = 0 \rightarrow x =$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 80}}{-4} \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{-16}}{-4}$$

Por lo tanto, no corta el eje *OX*.

Puntos de corte con el eje *OY*: (0 –10).

$Dom f = \mathbb{R}$

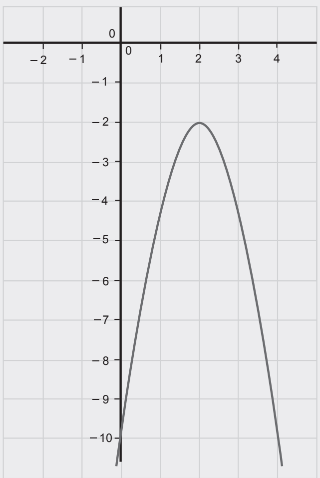
$Im f = (-\infty, -2]$

Es continua en todo su dominio.

Es creciente en $(-\infty, 2)$ y creciente en $(2, +\infty)$.

Tiene un máximo en (2, –2)

Presenta una simetría en la relación a la recta $x = 2$.



59.

x	–1	6
y	–6	1

x	–6	6
y	1	–1

Una representación es la opuesta de la otra.

60. a) $x \cdot y = 18$

x	1	2	3
y	18	9	6

b) $f(x) = \frac{18}{x}$

c) Respuesta gráfica.

61. a)

x	1	2	3
y	12	6	4

$x \cdot y = 12 \rightarrow f(x) = \frac{12}{x}$;

b) Respuesta gráfica.

62. a)

Número de días	Importe Hotel La Laguna (€)	Importe Hotel El Mar (€)
1	(0)	(60)
2	(70)	(120)
3	(140)	180
4	(210)	240
5	(280)	300
6	350	360
7	420	420
8	490	480
9	560	540
10	630	600

Los valores entre paréntesis indican la estancia mínima en cada uno de los hoteles.

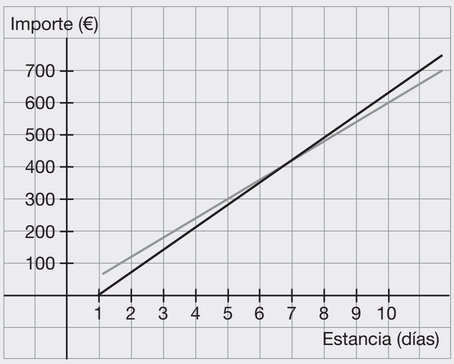
b) $x \rightarrow$ número de días de estancia en el hotel

$y \rightarrow$ importe en euros

Hotel La Laguna: $y = 70x - 70$.

Hotel El Mar: $y = 60x$.

c)



d) Importe en euros del Hotel La Laguna al cabo de 5 días:

$5 \cdot 70 - 70 = 280$ €

Importe en euros del Hotel El Mar al cabo de

5 días:

$5 \cdot 60 = 300$ €

e) El Hotel El Mar resulta más económico al cabo de los 8 días de estancia.

f) Ha estado en el Hotel El Mar 8 días.

63. a) $t = 5$ min = 300 s

$e = v \cdot t = 1{,}5 \cdot 300 = 450$

$e_s = 450 + 100 = 550$

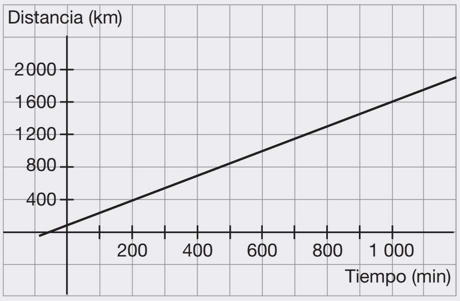
Recorrerá 450 m y se encontrará a 550 m de la señal.

b) $300 = 1{,}5 \cdot t \rightarrow t = \dfrac{300}{1{,}5} = 200$

Al cabo de 3 min 20 s.

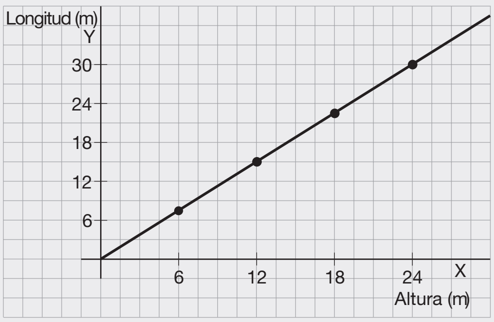
c) $e = 1{,}5 \cdot t + 100$

d)



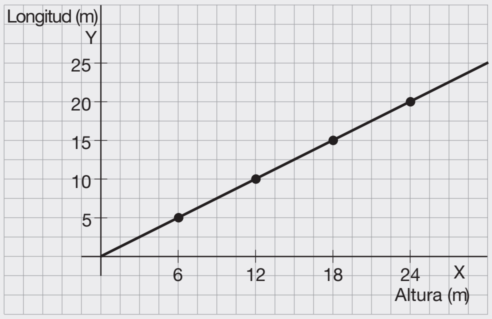
64.

Altura del edificio en metros (x)	6	12	18	24
Longitud de la sombra a las 8 de la mañana en metros (y)	7,5	15	22,5	30



Pendiente: $\dfrac{30}{24} = \dfrac{5}{4}$

Altura del edificio en metros (x)	6	12	18	24
Longitud de la sombra a las 10 de la mañana en metros (y)	5	10	15	20



Pendiente: $\dfrac{20}{24} = \dfrac{5}{6}$

A las 11 de la mañana, el sol está más alto, por lo que la pendiente de la función es menor y, por lo tanto, las sombras serán menores.

65. a) $A(x) = \dfrac{x}{2}$

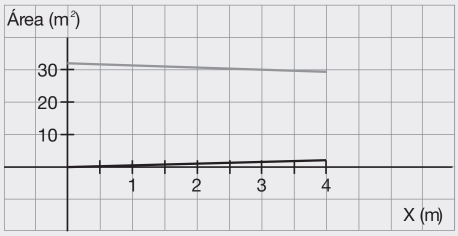
b) $0 < x \leq 4$

c) $A(2) = 1$, $A(4) = 2$

d) $B(x) = 32 = \dfrac{x}{2}$

e)

x	1	2	3	4
$A(x)$	0,5	1	1,5	2
$B(x)$	31,5	31	30,5	30



f) No puede estar en el segundo cuadrante porque el valor de x no puede ser negativo y está comprendido entre los valores 0 y 4 ($0 < x \leq 4$).

66. a) $d_1 = 40t$

b) $d_2 = 100 - 60t$

c) $d = 100 - 40t - 60t$

67. Tenemos que calcular $f(t) = 0$

$420 - 6t = 0$

$6t = 420$

$t = \dfrac{420}{6} = 70\,\text{s}$

Por lo tanto, el tiempo que tarda el terremoto en ser registrado en la estación es de 1 minuto y 10 segundos.

68. La función es el área del triángulo rectángulo. Así,

$$f(x) = \frac{x(2x+4)}{2} = \frac{2x^2+4x}{2} = x^2+2x$$

Dom f = (0, +∞), debido a que el lado del triángulo debe ser un número positivo.

Im f = (0, +∞).

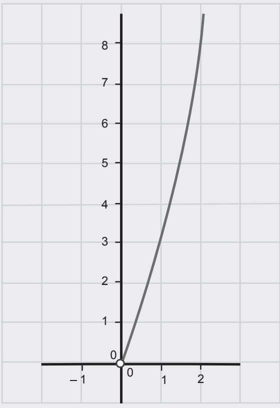
Puntos de corte con el eje *OX*:
$x^2 + 2x = 0 \to x(x+2) = 0 \to x_1 = 0;\ x_2 = -2$

Puntos de corte con el eje *OY*: $y = 0$

No representamos los puntos de corte con el eje *OX* ni el punto de corte con el eje *OY* porque no pertenecen al dominio de la función.

$f(0) = 0$, $f(1) = 3$ y $f(2) = 8$,

La gráfica de la función es:



69. La función es el perímetro del hexágono regular:
$f(x) = 6(x+1) = 6x + 6$

Dom f = (–1, +∞), debido a que el lado del

hexágono debe ser un número positivo.

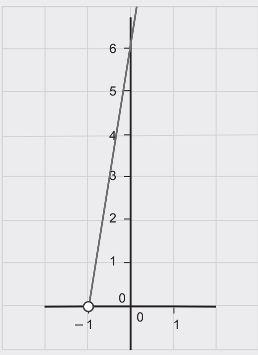
Im f = (0, +∞).

Puntos de corte con el eje *OX*: $6x + 6 = 0 \to x = -1$

Puntos de corte con el eje *OY*: $f(0) = 6$.

No representamos el punto de corte con el eje *OX* porque no pertenece al dominio de la función.

La gráfica de la función es:



70. La función es el volumen de la pirámide cuadrangular es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot(x+2)^2\cdot 6 = 2\cdot(x+2)^2 =$$

$$= 2\cdot\left(x^2+4x+4\right) = 2x^2+8x+8$$

Dom f $= (-2,+\infty)$, debido a que el lado de la base debe ser un número positivo.

Im f $= (0,+\infty)$.

Puntos de corte con el eje *OX*:

$$2x^2+8x+8 = 0 \to x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{4} \to$$

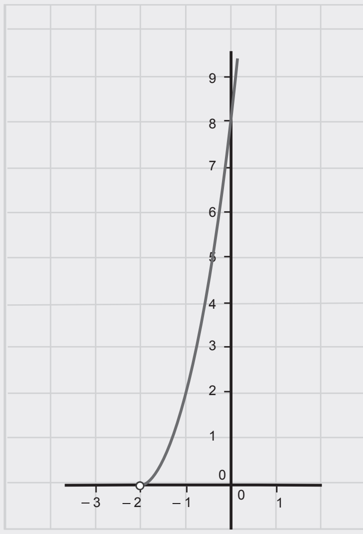
$$\to x = \frac{-8}{4} = -2$$

Puntos de corte con el eje *OY*: $f(0) = 8$

$f(-1) = 2$.

No representamos el punto de corte con el eje *OX* porque no pertenece al dominio de la función.

La gráfica de la función es:



71. La función tiene una expresión algebraica definida a tres trozos:

$0 \le x < 2$:

La pendiente es: $m = \frac{200-0}{2-0} = \frac{200}{2} = 100$.

La expresión algebraica de la función es $y = 100x + n$. Como la recta pasa por el punto (0,0); $0 = 100 \cdot 0 + n \to n = 0$.

Así, $y = 100x$;

$2 \leq x < 6$:

La pendiente es: $m = \frac{400 - 200}{6 - 2} = \frac{200}{4} = 50$.

La expresión algebraica de la función es $y = 50x + n$. Como la recta pasa por el punto (2,200), $200 = 50 \cdot 2 + n \rightarrow n = 100$.

Así, $y = 50x + 100$

$6 \leq x \leq 10$:

La pendiente es: $m = \frac{500 - 400}{10 - 6} = \frac{100}{4} = 25$.

La expresión algebraica de la función es $y = 25x + n$. Como la recta pasa por el punto (6,400), $400 = 25 \cdot 6 + n \rightarrow n = 250$.

Así, $y = 25x + 250$

Por lo tanto, la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 100x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 50x + 100 & \text{si } 2 \leq x < 6 \\ 25x + 250 & \text{si } 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

72. El punto A pertenece a la parábola. Así, las coordenadas del punto A son (x, x^2).

El perímetro del rectángulo es $P = x^2 + x^2 + x + x = 2x^2 + 2x$

Como el perímetro del rectángulo es 12 cm, tenemos que:

$2x^2 + 2x = 12$

$2x^2 + 2x - 12 = x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$$

Como la longitud del rectángulo tiene que ser positiva, descartamos la solución $x_2 = -3$. Así, las dimensiones del rectángulo son 2 cm y 4 cm.

Por lo tanto, el área del rectángulo es $A = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$.

73. Primero tenemos que determinar el punto de corte con el eje OX:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0 \rightarrow x\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6$$

Así, la base mayor mide 6 cm y la base menor mide la mitad, esto es, 3 cm.

El área del trapecio isósceles es:

$$A = \frac{6 + 3}{2} \cdot 4 = 9 \cdot 2 = 18 \text{ cm}^2$$

Pon a prueba tus competencias

1. a) 50 m

b) 50 + 10 = 60 m

c) 20 + 110 + 10 = 140 m

d) $50 \cdot 0{,}2 = 10$ m

2. a) 10 m^3

b) En la gráfica: $10 - 4x = 0 \rightarrow 4x = 10 \rightarrow x = 2{,}5$ m

c) Como el tanque vacío tiene 10 m^3 de capacidad, cuando llenamos con 6 m^3 de agua, quedan 4 m^3.

En la gráfica: $10 - 4x = 4 \rightarrow 4x = 6 \rightarrow x = 1{,}5$ m

d) Como el tanque lleno tiene 2,5 m de altura de agua, cuando tiene 2 m de agua, quedan 0,5 m de capacidad.

En la gráfica: $10 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 10 - 2 = 8 \text{ m}^3$

3. a) 2 €/kg

b) 6 €

c) 1 €/kg

d) 11€

e) $0 \leq x \leq 5$

La pendiente es: $m = \frac{10 - 0}{5 - 0} = 2$. La expresión algebraica de la función es $y = 2x + n$.

La recta pasa por (0,0). Por lo tanto, $y = 2x$.

$x > 5$:

La pendiente es: $m = \frac{11 - 10}{6 - 5} = 1$. La expresión algebraica de la función es $y = x + n$.

La recta pasa por (6,11), así: $11 = 6 + n \rightarrow n = 5$.

Por lo tanto, $y = x + 5$.

La expresión algebraica definida a trozos es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \leq x \leq 5 \\ x + 5 & si \quad x > 5 \end{cases}$$

4. a) 2 m

b) 6 m

c) 8 m

d) 3 m

e) El perímetro del aro es $P = \frac{0{,}9\pi}{2} = 0{,}45\pi$. Así, el diámetro del aro es 0,45 m.

Evaluación de competencias

1. a) $20\,000 \cdot 0{,}95 = 19\,000$ €.

b) $20\,000 - 190\,000 = 1\,000$ €.

c) Aplicamos la fórmula del interés simple:

$$1\,000 = 19\,000 \cdot \frac{2{,}5}{100} \cdot t$$

$$t = \frac{1\,000}{475} \approx 2{,}1$$

Fueron necesarios 3 años.

d) Los intereses ascendieron a:

$$19\,000 \cdot \frac{2{,}5}{100} \cdot 3 = 475 \cdot 3 = 1425 \text{ €}$$

e) $20\,000 \cdot 0{,}97 = 19\,400$ €.

2. a) Sea x la cantidad total de café en gramos.

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{3}{7}x + 300$$

$21x = 7x + 9x + 6\,300$

$5x = 6\,300$; $x = 1\,260$ g = 1,26 kg.

David compró 1,26 kg de café en grano.

b) $\frac{1\,260}{3} = 420$ g

David guardó 420 g de café.

c) $1\,260 \cdot \frac{3}{7} = 180 \cdot 3 = 540$ g

David dio 540 g a su hermana.

d) $\frac{540}{65} \approx 8{,}3$

Lo utilizó 9 veces.

e) $540 - 8 \cdot 65 = 20$g. Después de utilizar el molinillo 8 veces, sobraron 20 g. Así que la última vez que utilizó el molinillo, molió 20 g.

3. a) Representamos por x la cantidad de almendras y por y la cantidad de avellanas, ambas expresadas en kilogramos.

Sandra compró 500 g de una mezcla de almendras y avellanas: $x + y = 0{,}5$

Las almendras cuestan 27 €/kg, las avellanas 35 €/kg y pagó 15,30 € por la mezcla:

$27x + 35y = 15{,}3$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0{,}5 \\ 27x + 35y &= 15{,}3 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 0{,}275;\ y = 0{,}225$$

La mezcla contenía 275 g de almendras y 225 g de avellanas.

b) $\frac{2}{5} \cdot 275 = 2 \cdot 55 = 110$

$\frac{1}{3} \cdot 225 = 75$

Sandra tostó 110 g de almendras y 75 g de avellanas.

4. a) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{65 - 0}{t - 0} = \frac{65}{t}$.

Además, $v + 16 = \frac{65}{t - 4}$.

Sustituyendo el valor de v en la segunda ecuación, tenemos:

$$\frac{65}{t} + 16 = \frac{65}{t - 4}.$$

Si desarrollamos la expresión obtenemos una ecuación de segundo grado que podremos resolver:

$16t^2 - 64t - 260 = 0$

$$t = \frac{64 \pm \sqrt{64^2 + 4 \cdot 16 \cdot 260}}{2 \cdot 16} = \frac{64 \pm 144}{32}$$

$$t_1 = \frac{208}{32} = 6{,}5; \quad t_2 = -\frac{80}{32} = -2{,}5$$

Como los tiempos no pueden ser negativos, el dron tardó 6,5 s.

b) $v = \frac{65}{6{,}5} = 10 \text{ m/s}$.

c) El dron recorre 600 m cada minuto, así en 25 min.:

$25 \cdot 600 = 15\,000$ m.

$15\,000 : (2 \cdot 800) = 9{,}375$

El dron puede ir y volver 9 veces.

5. a) Es una progresión geométrica cuyo término general es $a_n = 16\,000 \cdot 1{,}05^{n-1}$.

b) $a_3 = 16\,000 \cdot 1{,}05^{3-1} = 17\,640$.

El salario del tercer año fue de 17 640 €

c) $a_{10} = 16\,000 \cdot 1{,}05^{10-1} = 24\,800$.

El salario del último año fue de 24 800 €.

d) $\frac{24\,800}{16\,000} = 1{,}55$.

Su salario aumentó un 55 %.

e) $$S_{10} = \frac{16\,000 \cdot \left(1{,}05^{10} - 1\right)}{1{,}05 - 1} =$$

$$= \frac{16\,000 \cdot \left(1{,}63 - 1\right)}{0{,}05} = 201\,600$$

Durante estos diez años recibió 201 600 €.

6. a) Tenemos que multiplicar la abscisa y la ordenada de uno de los puntos del gráfico. Por ejemplo, las del punto *A:* $10 \cdot 22 = 220$.

La diferencia de potencial es 220 V.

b) $I = \frac{220}{R}$.

c) $D(f) = \left(0, +\infty\right)$ y $R(f) = \left(0, +\infty\right)$.

d) $I = \frac{220}{20} = 11\,A$.

e) $2{,}93 = \frac{220}{R} \rightarrow R = \frac{220}{2{,}93} \approx 75\,\Omega$.

1. $45 \cdot 56 = 2\,520$

$120 \cdot 21 = 2\,520$

Son equivalentes.

2. Variable independiente: número de paradas realizadas. Variable dependiente: número de pasajeros que viaja en el tren.

3. Un número racional se corresponderá con un decimal limitado o con un decimal ilimitado periódico. Un número irracional se corresponderá con un decimal ilimitado no periódico.

— La expresión decimal de un número irracional será siempre ilimitada y no periódica. La de un número racional puede ser limitada o ilimitada periódica.

4. Dos rectas paralelas tienen igual pendiente y diferente ordenada en el origen.

5. Son falsas las afirmaciones b), c) y d).

b) Hay números racionales que no son naturales, por ejemplo, -4 o $\frac{9}{4}$.

c) Todos los números irracionales son reales.

d) $(x^5 + x^4 + x) + (-x^5 - x^4 + x) = 2x$

En el ejemplo anterior, el grado de la suma es 1 y el del sumando de mayor grado es 5.

6. Para que la ecuación tenga una única solución, el discriminante debe ser cero.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0; \quad b^2 = 16; \quad b = \pm 4$$

Así, tanto la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$ como la ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$ tendrán una única solución.

7. Si la expresión del término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, al multiplicar todos sus términos por 3 obtenemos:

$$a_n = 3a_1 + (n - 1) \cdot 3d$$

Este es el término general de una progresión aritmética cuyo primer término es $3a_1$ y cuya diferencia es $3d$.

Si la expresión del término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 \cdot r\,(n - 1)$, al multiplicar todos sus términos por 3 obtenemos:

$$a_n = 3a_1 \cdot r\,(n - 1)$$

Este es el término general de una progresión geométrica cuyo primer término es $3a_1$ y cuya razón es r.

8. Calculamos las fracciones irreducibles de cada una de las fracciones.

$$\frac{7}{5} = \frac{7}{5} \qquad \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \qquad \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \qquad \frac{336}{784} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{14}{10} = \frac{7}{5} \qquad \frac{72}{32} = \frac{9}{4} \qquad \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \qquad \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{45}{20} = \frac{9}{4} \qquad \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \qquad \frac{165}{110} = \frac{3}{2} \qquad \frac{84}{60} = \frac{7}{5}$$

Son equivalentes las fracciones que tienen la misma fracción irreducible.

$$\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = \frac{15}{21} = \frac{84}{60}$$

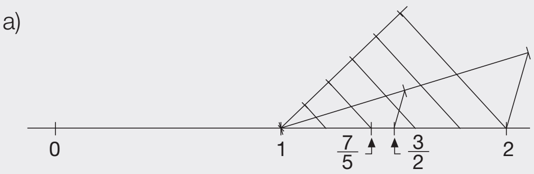
$$\frac{9}{4} = \frac{72}{32} = \frac{45}{20}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{336}{784}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{24}{16} = \frac{165}{110}$$

— Por lo tanto, tenemos representados un total de 4 números racionales.

9. a)



$$\frac{3}{2} > \frac{7}{5}$$

b) Podemos pasar los números racionales a su forma decimal y compararlos.

Podemos obtener un representante de cada uno de los números racionales que tengan el mismo denominador positivo. El número racional mayor será el que tenga el representante con mayor numerador.

10.

$$\begin{array}{r} 1\,000\,000\,x = 571\,428{,}571428... \\ x = 0{,}571428... \\ \hline 1\,000\,000\,x - x = 571428 \\ 999\,999\,x = 571\,428 \end{array}$$

$$x = \frac{571\,428}{999\,999} = \frac{4}{7}$$

11. a) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{6}{4} - \frac{5}{3} = \frac{9}{4} + \frac{6}{4} - \frac{5}{3} = $

$$= \frac{27 + 18 - 20}{12} = \frac{25}{12}$$

b) $-2 \cdot \frac{4}{5} - \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = -\frac{8}{5} - \frac{4}{3} = \frac{-24 - 20}{15} =$

$$= \frac{-44}{15}$$

c) $\frac{1}{6} + \left(\frac{7}{3} - \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{14 - 15}{6} \cdot \frac{1}{5} =$

$= \frac{1}{6} + \frac{-1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{5 - 1}{30} = \frac{4}{30} =$

$= \frac{2}{15}$

d) $\left[\frac{11}{2} : \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)\right] \cdot \frac{1}{11} = \left(\frac{11}{2} : \frac{3 - 8}{12}\right) \cdot \frac{1}{11} =$

$= \left(\frac{11}{2} : \frac{-5}{12}\right) \cdot \frac{1}{11} = -\frac{66}{5} \cdot \frac{1}{11} = -\frac{66}{55} = -\frac{6}{5}$

12. a) $\frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{13}{24}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2197}{9261}} = \frac{13}{21}$

13. x = tiempo (min)

y = cantidad de aceitunas recolectadas (kg)

$y = 3{,}5 \cdot x$

— Se trata de una función lineal.

14. Resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 9 = -2m + b \\ 1 = 6m + b \end{array}\right\}$$

Resolvemos y obtenemos $m = -1$ y $b = 7$.

La ecuación de la recta es $y = -x + 7$.

15. El número estará comprendido entre 2,225 y 2,235.

16. a) $\frac{1}{3}(a - 2b)$

b) $3x^3 + 5x^2 - \frac{1}{2}x$

17. a) $P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 3 = 27 + 18 - 15 + 3 = 33$

$P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 3 = 13$

b) $Q(3) = -2 \cdot 3^3 + 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = -54 + 9 + 6 - 5 =$
$= -44$

$Q(-2) = -2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 5 = 11$

18. a) $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $P(x) - 2Q(x) = x + \sqrt{3} - 2\left(x - 2\sqrt{3}\right) =$

$= x + \sqrt{3} - 2x + 4\sqrt{3} = x - 2x + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$

$= -x + 5\sqrt{3}$

c) $P(x) \cdot Q(x) = \left(x + \sqrt{3}\right) \cdot \left(x - 2\sqrt{3}\right) =$

$x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}x - 6 = x^2 - \sqrt{3}x - 6$

19. a) $x = \frac{4 + 2x}{3} + \frac{3}{2}$

$6x = 2\,(4 + 2x) + 9 \rightarrow 6x = 8 + 4x + 9$

$6x - 4x = 8 + 9 \rightarrow 2x = 17 \rightarrow x = \frac{17}{2}$

b) $\frac{5}{6}x - \left(\frac{3x}{2} - 3\right) = \frac{5x - 1}{4} + x + 3$

$\frac{5x}{6} - \frac{3x - 6}{2} = \frac{5x - 1}{4} + x + 3$

$12\left(\frac{5x}{6} - \frac{3x - 6}{2}\right) = 12\left(\frac{5x - 1}{4} + x + 3\right)$

$10x - 6\,(3x - 6) = 3\,(5x - 1) + 12\,(x + 3)$

$10x - 18x + 36 = 15x - 3 + 12x + 36$

$10x - 18x - 15x - 12x = -3 + 36 - 36$

$-35x = -3 \rightarrow x = \frac{3}{35}$

c) $\frac{3(2x - 1)}{10} + \frac{x}{5} = \frac{7(3x - 3)}{2} - \frac{1 - 3x}{4}$

$20\left(\frac{3(2x - 1)}{10} + \frac{x}{5}\right) = 20\left(\frac{7(3x - 3)}{2} - \frac{1 - 3x}{4}\right)$

$6\,(2x - 1) + 4x = 70\,(3x - 3) - 5\,(1 - 3x)$

$12x - 6 + 4x = 210x - 210 - 5 + 15x$

$12x + 4x - 210x - 15x = -210 - 5 + 6$

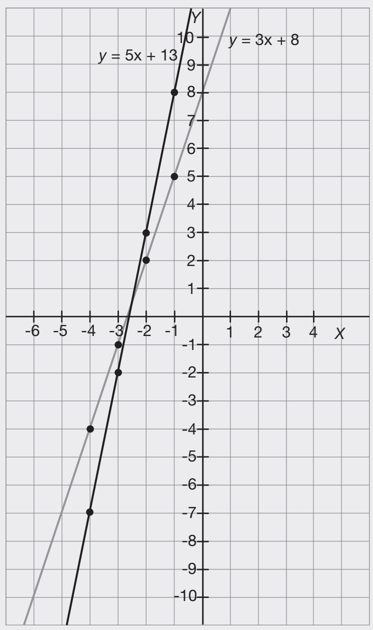
$209x = -209$

$x = 1$

20. Construimos una tabla de soluciones de las dos ecuaciones.

$y = 3x + 8$		$-5x + y = 13$; $y = 5x + 13$	
x	y	x	y
–4	–4	–4	–7
–3	–1	–3	–2
–2	2	–2	3
–1	5	–1	8

Representamos gráficamente las soluciones de ambas ecuaciones.



El punto de corte es (–2,5, 0,5). Por lo tanto, la solución del sistema es $x = -2{,}5$, $y = 0{,}5$.

— Respuesta sugerida. Resolución por el método de reducción.

$$y = 3x + 8 \xrightarrow{\cdot 5} 5y = 15x + 40$$

$$y = 5x + 13 \xrightarrow{\cdot (-3)} -3y = -15x - 39$$

$$2y = 0 + 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = 3x + 8 \rightarrow 3x = \frac{1}{2} - \frac{16}{2} \rightarrow 3x = -\frac{15}{2}$$

$$x = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$$

21. a) $(x - 3)(x - 5) + 4x - 6 = 2x + 1$

$x^2 - 8x + 15 + 4x - 6 = 2x + 1$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

Sustituimos en la fórmula general:

$$x = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$x_1 = 4$; $x_2 = 2$

b) $(x - 3)(x - 5)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$

Tiene 3 soluciones:

$x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3$

$x - 5 = 0 \rightarrow x_2 = 5$

$$x + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow x_3 = -\frac{1}{3}$$

c) $x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0$

Tiene 2 soluciones:

$x_1 = 0$

$x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 4$

22. $n^2 - 5n + 7 = 3$

$n^2 - 5n + 7 - 3 = 0$

$n^2 - 5n + 4 = 0$

Sustituimos en la fórmula general:

$$n = \frac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$n_1 = 4$; $n_2 = 2$

Existen dos términos cuyo valor es 3, el primero y el cuarto.

23. a) Sí, la función es simétrica respecto al eje de ordenadas. Se trata de una función par.

b) Sí, es una función periódica. El período es 8.

24. Círculo: $A = \pi x^2$

El área viene dada por πx^2.

Triángulo: $A = \frac{3x \cdot x}{2} = \frac{3}{2}x^2$

El área viene dada por $\frac{3}{2}x^2$.

Cuadrado: $A = x^2$

El área viene dada por x^2.

Rectángulo: $A = 2x \cdot x = 2x^2$

El área viene dada por $2x^2$.

25. Si llamamos x e y a la longitud de los lados, se cumple:

$P = 2(x + y) = 50 \rightarrow y = 25 - x$

$A = x \cdot y = x \cdot (25 - x) = 25x - x^2$

Por lo tanto, la expresión buscada es $A = 25x - x^2$.

26. Llamamos x al dinero que Santiago tiene ahorrado.

Regalo para su padre: $\frac{x}{3}$ Le queda: $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$

CD: $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{4x}{15}$ Le quedan 36 €

La suma de todo lo que se gasta más lo que le queda es igual a la cantidad que tenía ahorrada.

$$\frac{x}{3} + \frac{4x}{15} + 36 = x$$

$$15 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{4x}{15} + 36\right) = 15x$$

$5x + 4x + 540 = 15x$

$5x + 4x - 15x = -540$

$-6x = -540$

$$x = \frac{540}{6} = 90$$

Santiago había ahorrado 90 €.

27. $100 - 16 - 20 - 28 = 36$

Después de descontar los CD de Beethoven, Mozart y Verdi, quedan un 36 % de otros compositores.

Si llamamos x al número de CD que tiene Yasmina en su colección:

$$\frac{36}{100}x = 9$$

$x = 25$

Yasmina tiene 25 CD en su colección.

28. Llamamos x al tiempo que se tarda en llenar el depósito el segundo grifo. Entonces, la parte del depósito que se llena con cada grifo en una hora será:

Primer grifo : $\frac{1}{4}$ Segundo grifo: $\frac{1}{x}$

Con los dos grifos a la vez se llenará una parte igual a $\frac{1}{2{,}4} = \frac{10}{24}$ en una hora. Así:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{x} = \frac{10}{24}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{10}{24} - \frac{1}{4} = \frac{10}{24} - \frac{6}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

Con el segundo grifo tardará 6 horas en llenar el depósito.

29.

	Hace 2 años	Ahora	Dentro de 14 años
Edad del padre	$x - 2$	x	$x + 14$
Edad del hijo	$y - 2$	y	$y + 14$

$$\left.\begin{aligned} x - 2 &= 4(y - 2) \\ x + 14 &= 2(y + 14) \end{aligned}\right\}$$

$x - 2 = 4y - 8 \rightarrow \quad x - 4y = -6$

$x + 14 = 2y + 28 \rightarrow \quad x - 2y = 14$

$-2y = -20 \rightarrow y = 10$

$x - 40 = -6 \rightarrow x = 34$

El padre tiene 34 años y el hijo, 10 años.

30. $m = -5 \qquad b = -3$

$y = mx + b$

$y = -5x - 3$

31. x = Precio del libro

y = Precio de la entrada al museo

$x + y + 9{,}70 = 30$

$2x = 5y$

$x + y = 20{,}30 \rightarrow 2x + 2y = 40{,}60$

$2x - 5y = 0 \rightarrow -2x + 5y = 0$

$7y = 40{,}60$

$$y = \frac{40{,}60}{7} = 5{,}80$$

$x = 30 - 5{,}80 - 9{,}70 = 14{,}50$

El libro costaba 14,50 € y la entrada al museo, 5,80 €.

32. $y = 40 + 20t$, donde y se expresa en € y t en horas.

33. Dimensiones originales: ancho = x; largo = x.

Dimensiones finales: ancho = $x + 12$; largo = $x + 20$.

$(x + 12) \cdot (x + 20) = 1\,140$

$x^2 + 20x + 12x + 240 = 1\,140$

$x^2 + 32x - 900 = 0$

Esta ecuación de segundo grado tiene como soluciones $x_1 = 18$ y $x_2 = -50$.

La segunda solución no tiene sentido, pues la distancia debe ser un número positivo. Por lo tanto, el lado del terreno original medía 18 m.

34. Si llamamos x e y a la longitud de los lados de la parcela rectangular, se cumple:

$$\left.\begin{aligned} P &= 2(x + y) = 56 \rightarrow y = 28 - x \\ d &= \sqrt{x^2 + y^2} = 20 \end{aligned}\right\}$$

De aquí deducimos el valor de x e y.

$x^2 + (28 - x)^2 = 202$

$x^2 + 784 - 56x + x^2 - 400 = 0$

$2x^2 - 56x + 384 = 0$

$x^2 - 28x + 192 = 0$

Esta ecuación de segundo grado tiene como soluciones $x_1 = 12$ y $x_2 = 16$.

$x = 12 \rightarrow y = 28 - 12 = 16$

$x = 16 \rightarrow y = 28 - 16 = 12$

Las dos soluciones son equivalentes y los lados del rectángulo miden 12 m y 16 m.

Por lo tanto, el área de la parcela es:

$A = x \cdot y = 12 \cdot 16 = 192 \text{ m}^2$

35. Llamamos x e y a la longitud de los lados del rectángulo.

$$\left.\begin{aligned} A &= x \cdot y = 16 \rightarrow y = \frac{16}{x} \\ P &= 2(x + y) = 16 \rightarrow y = 8 - x \end{aligned}\right\}$$

$\frac{16}{x} = 8 - x \qquad 16 = 8x - x^2 \qquad x^2 - 8x + 16 = 0$

Esta ecuación de segundo grado tiene una solución doble, x = 4.

$x = 4 \rightarrow y = \frac{16}{4} = 4$

Se trata de un cuadrado de lado 4 cm.

36. x = distancia recorrida en el primer tramo

y = distancia recorrida en el segundo tramo

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 7 \\ x^2 + y^2 &= 5^2 \end{aligned}\right\}$$

$y = 7 - x$

$x^2 + (7 - x)^2 = 52$

$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$

$2x^2 - 14x + 24 = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

Esta ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, $x = 3$ y $x = 4$. Puesto que el enunciado dice que el primer tramo es más corto que el segundo, la solución correcta es $x = 3$.

$x = 3 \rightarrow y = 7 - 3 = 4$

Las distancias recorridas en el primer y segundo tramos son, respectivamente, 3 km y 4 km.

37. $a_1 = 4 \qquad a_2 = 7 \qquad a_3 = 10$

Observamos que el término general de la serie se puede expresar como $a_n = 3n + 1$ (para formar el primer cuadrado, se necesitan 4 palillos, y para formar cada uno de los siguientes, 3 palillos).

El décimo término de la serie es:

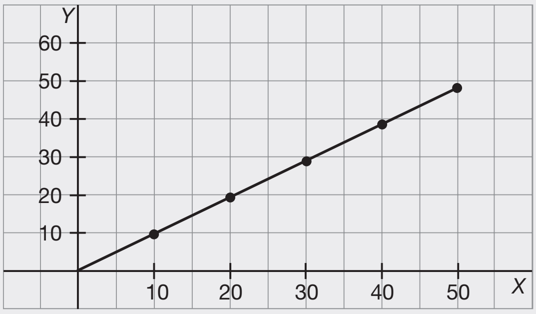
$a_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 31$

Por lo tanto, son necesarios 31 palillos.

38. x = cantidad de carburante repostado (L)

y = precio del carburante repostado (€)

x (L)	0	10	20	30	40	50
y (€)	0	9,7	19,4	29,1	38,8	48,5



Para hallar la pendiente consideramos un punto cualquiera de la gráfica, por ejemplo, el punto de coordenadas (10, 9,7). La pendiente es el cociente entre la ordenada del punto y su abscisa. Así:

$$y = \frac{9{,}7}{10} = 0{,}97$$

La pendiente de la recta es 0,97 €/L.

39. $a_1 = 10$

$a_2 = 10 + 20$

$a_3 = 10 + 20 + 20$

$a_n = 10 + (n - 1) \cdot 20$

Se trata de una progresión aritmética de primer término 10 y diferencia 20.

Veamos cuál debe ser el valor de n para que la suma de los n primeros términos sea igual a 9 000.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = 9000$$

$$S_n = \frac{[10 + 10 + (n - 1)\ 20] \cdot n}{2} = 9000$$

$[5 + 5 + (n - 1) \cdot 10] \cdot n = 9000$

$(10 + 10n - 10) \cdot n = 9000$

$10n^2 = 9000$

$n^2 = 900 \quad \rightarrow \quad n = 30$

Sandra lleva ahorrando 30 meses (2 años y 6 meses).

40. a) D(f) = R; R(f) = [–10, 40]

b) La función es creciente en los intervalos: (–∞, –35), (–25, –15) y (0, +∞), y decreciente en los intervalos: (–35, –25) y (–15, 0).

c) La función tiene dos máximos relativos en (–35, 25) y (–15, 40), y dos mínimos relativos en (–25, 10) y (0, –10).

d) Sí, la función es continua.